БЫСТРЫЕ ОДНООБОРОТНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ РЕЛЯТИВИСТСКОГО СГУСТКА

А.В. Буров, Н.С. Диканский, Д.В. Пестриков
Институт ядерной физики СО АН СССР
Новосибирск, 630090

1. Введение

Было установлено[1], что развитие быстрых однооборотных неустойчивостей в сгруппированных пучках может обладать рядом важных особенностей, обусловленных тем, что за малое время развития когерентного процесса

$$\tau_k\omega_c \ll 1$$

(ω_c—частота синхротронных колебаний) частицы не успевают обменяться азимутальным положением и тем замкнуть обратную связь, вследствие чего когерентные колебания не имеют спектра собственных мод. Отсутствие когерентных мод является основным отличием быстрых от нормальных (синхротронных и синхробетатронных[2,3]) неустойчивостей. В работах[1,4] рассмотрено развитие в пучке соответственно поперечных и продольных быстрых колебаний. Здесь приводится сводка основных результатов работы[4].

В литературе по быстрым колебаниям сгустков[5,6] обычно предлагается искать решение уравнения Власова

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \hat{V} f = 0, \tag{1}$$

гармонически зависящее от времени, т. е. найти спектр оператора $\hat{V}$. Существование и полнота системы собственных функций при этом молчаливо подразумеваются. Из теории линейных интегральных уравнений известно, однако, что далеко не всякий оператор обладает такими свойствами. Вольтерровский, например, не имеет спектра вовсе.

Допустим, что когерентное движение является быстрым по сравнению с одночастичными синхротронными колебаниями. В этом случае действием на частицы полей стационарного состояния можно пренебречь. Положим также, что структура вакуумной камеры является низкодобротной, т. е. поля, наводимые в ней сгустком, за период оборота успевают затухнуть. Уравнение Власова может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} + \dot{v}\frac{\partial f_0}{\partial v} = 0, \tag{2}$$

где

$$\dot{v} = -\int_{-\infty}^{x} g(x-x')\,\varrho(x')\,dx', \tag{3}$$

$$\varrho(x) = \int dv\, f,$$

$f(x, v, t)$, $f_0(v, x)$—соответственно возмущенная и невозмущенная функции распределения, x, v—продольные координата и скорость:

$$x = R_0(\theta - \omega_s t), \quad v = \dot{x} = R_0\frac{d\omega_0}{dp}\cdot\Delta p,$$

θ—азимут, t—время, ω_0, R_0—азимутальная частота и среднеорбитальный радиус кривизны частицы со средним импульсом.

Уравнение Власова (2) в пренебрежении тепловым разбросом частот эквивалентно паре гидродинамических уравнений для плотности и скорости:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho_0 v) = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \int_{-\infty}^{x} dx'\, g(x-x')\,\varrho(x') = 0, \tag{4}$$

$\varrho_0(x)$—невозмущенная плотность.

Везде, за исключением последнего раздела, рассматривается задача об отклике на точечное возмущение

$$\varrho(x,0) = \delta(x), \quad v(x,0) = 0. \tag{5}$$

Простые по форме записи решения $\varrho(x, t)$ могут быть получены для квазипостоянной функции $\varrho_0(x)$, т. е. такой, изменением которой на интервале от точки возбуждения до точки наблюдения можно пренебречь. В разделах 2, 3 рассмотрена эта относительно простая ситуация. Обобщение результатов на произвольную $\varrho_0(x)$—в разделе 4. В разделе 5 приведены результаты рассмотрения задачи с шумовыми начальными условиями.

2. Сгусток с квазипостоянной плотностью. Метод исследования

Эффективно задача является пространственно однородной, что позволяет представить решение в виде интеграла Фурье:

$$\varrho(x,t) = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\kappa}{2\pi}e^{ikx - i\omega(k)t}, \tag{6}$$

где $\omega(k)$—решение дисперсионного уравнения

$$1 = ig(k)\int dv\,\frac{\partial f_0/\partial v}{\omega - kv}; \quad g(k) = \int_0^{\infty} dx\, g(x)\,e^{-ikx}. \tag{7}$$

Частота $\omega(k)$ имеет следующие предельные свойства:

$$\omega(k) = \begin{cases} i\Lambda_k, & |\Lambda_k| \gg |k| v_T, \\ -i\xi|k|v_T, & |\Lambda_k| \ll |k| v_T, \end{cases} \tag{8}$$

Λ_k—комплексный инкремент гидродинамической задачи (4), v_T—тепловой разброс скоростей, ξ—комплексный формфактор, определяемый функцией распределения по скоростям:

$$|\xi| \simeq 1, \quad \mathrm{Re}\,\xi > 0, \quad \Lambda_k^2 = \Gamma^2\frac{ikg(k)}{g(0)}; \tag{9}$$

$$g(0) = g(x=0), \quad \Gamma^2 = \varrho_0 g(0), \quad \Gamma = \lim_{k\to\infty}\Lambda_k. \tag{10}$$

Параметр Γ будем называть локальным инкрементом. Влияние теплового движения можно приблизительно учесть, полагая

$$\omega(k)=i\Lambda_k-i\xi|k|v_T\,, \qquad (11)$$

откуда

$$\varrho(x,t)=\operatorname{Re}\int\limits_0^\infty \frac{dk}{2\pi}\,e^{i\psi(k)}, \qquad (12)$$

$$\psi(k)=ikx+\Lambda_k t-\xi k v_T t\,. \qquad (13)$$

Интеграл в (12) может быть приближенно вычислен методом перевала:

$$\varrho(x,t)=\operatorname{Re}\left(\frac{e^{\psi_0}}{r_0}\right). \qquad (14)$$

$$\psi_0=\psi(k_0), \quad r_0=\sqrt{2\pi\,\varphi''(k_0)}\,; \qquad (15)$$

k_0—точка перевала, находится из уравнения:

$$\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}=\frac{x}{t}\,. \qquad (16)$$

Штрихи означают дифференцирование по k. Соотношения (14)—(16) имеют довольно прозрачный физический смысл. Исходное возбуждение в точке $x=0$, $t=0$ можно понимать как рождение совокупности квазичастиц-банчионов, скорость и размер каждой из которых равны соответственно:

$$U(k)=\frac{\partial\omega}{\partial k}, \quad r(k)=\sqrt{2\pi t\;\partial^2\omega/\partial k^2}\,. \qquad (17)$$

Соотношение (16) позволяет найти «импульс» банчиона k_0, находящегося в точке возбуждения.

Метод перевала применим, как только

$$|k_0 r_0|\gg 1, \quad \text{при этом } x\gg r_0, \qquad (18)$$

т. е. точка наблюдения находится в «волновой зоне» квазичастицы. Учет теплового движения, как видно из (13), сводится к замене

$$x\to x+i\xi v_T t\,, \qquad (19)$$

в формулах, не учитывающих разброса частот обращения.

В качестве примера приведем ответы для

$$g(x)=g_0\exp(-\nu x)\cos\varkappa x\,. \qquad (20)$$

Ограничимся случаем $\nu\sim\varkappa$, моделирующим учет большого количества разнообразных полостей, маленьких по сравнению с длиной сгустка. Введем параметр

$$s=\Gamma/\varkappa\,. \qquad (21)$$

$$x\ll st: \quad \psi_0=\Gamma t+2i(\Gamma t\nu x)^{1/2}, \qquad (22)$$

$$x\gg st: \quad \psi_0=i\varkappa x-\nu x+\frac{3}{2}\left[\Gamma^2t^2\varkappa x\left(1+\frac{i\nu}{\varkappa}\right)\right]^{1/3}\frac{\sqrt{3}+i}{2}. \qquad (23)$$

Видно, что возмущение экспоненциально растет перед волновым фронтом, $x<st$, здесь $\varrho\sim e^{\Gamma t}$. За фронтом, при $x>st$ возмущение мало, нарастает более медленно: $\varrho\sim\exp[-\nu x+\Gamma t(x/st)^{1/3}]$.

3. Учет теплового движения

Определим пороговый тепловой разброс скоростей v_{th} как граничное значение между множеством разбросов, отвечающих нарастанию, и множеством разбросов, отвечающих затуханию возмущения при $t\to\infty$:

$$v_{th}=\min[\{v_T\},\ \lim_{t\to\infty}\varrho(x,t,v_T)=0]. \qquad (24)$$

Иными словами,

$$v_{th}=\min[\{v_T\}:\ \lim_{t\to\infty}\operatorname{Re}\psi_0(x,t,v_T)\leqslant 0]. \qquad (24\text{a})$$

Заметим, однако, что в течение времени $\tau_T=x/v_T$ возмущение может нарасти до такой степени, что линейное приближение перестанет выполняться и утверждение о последующем затухании окажется неверным. Введем поэтому наряду с пороговым v_{th} критический разброс v_c, такой, что требование

$$v_T\gtrsim v_c \qquad (25)$$

является условием применимости линейного приближения для любого момента времени. Очевидно, $v_c\geqslant v_{th}$. Каждому значению v_T отвечает длина сгустка

$$\Delta_T=\frac{v_T}{\omega_c}, \quad \Delta_{th}=\frac{v_{th}}{\omega_c}, \quad \Delta_c=\frac{v_c}{\omega_c}. \qquad (26)$$

Длину (26) будем называть тепловой в отличие от потенциальной длины, вычисленной в пренебрежении тепловым разбросом. Интересно, что пороговый разброс удовлетворяет универсальной оценке

$$v_{th}\simeq s, \to \Delta_{th}\sim N^{1/3}, \qquad (27)$$

N—полное число частиц в сгустке, s—скорость волнового фронта типа (21). Критические величины зависят от специфики $g(x)$. Например, для $g(x)=-A/x^\alpha$ при $x=0$ особенность такая, что

$$\int\limits_0^\infty dx\,g(x)=0. \qquad (28)$$

Пороговая длина равна нулю при $\alpha<2$, а критическая

$$\Delta_c\sim N^{1/(1+\alpha)}. \qquad (29)$$

Последнее соотношение совпадает с соответствующим выводом работы[7].

Для взаимодействия $g(x)\sim e^{-\varkappa x}$ при $\varkappa\Delta\gg 1$ (Δ—длина сгустка) потенциальная длина велика по сравнению с тепловой. Отсюда следует, что в этом случае существует устойчивое замороженное состояние[8].

4. Неоднородный сгусток

Изложенный метод сравнительно просто переносится на случай неоднородного сгустка в коротковолновом ($|k\Delta|\gg 1$) приближении (ВКБ). В этом случае импульс банчиона k из-за пространственной неоднородности среды уже не является интегралом движения, сохраняющейся же величиной остается энергия ω. Поскольку она как функция координаты и импульса является гамильтонианом пакета, уравнения движения банчиона могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial\omega}{\partial k}; \quad \frac{dk}{dt}=-\frac{\partial\omega}{\partial x}. \qquad (30)$$

Уравнение на точку перевала—аналог (16), очевидно, выглядит так:

$$t=\int\limits_{x_i}^{x}\frac{dx'}{u(x',\omega_0)}=\frac{\partial}{\partial\omega_0}\int\limits_{x_i}^{x}dx'\,k(x',\omega_0)\,, \qquad (31)$$

x_i—точка возбуждения, $u=\partial\omega/\partial k$—скорость квазичастицы, ω_0—частота, отвечающая точке перевала. Общее решение уравнений движения сгустка может быть представлено в следующем виде:

$$\varrho(x,t)=\operatorname{Re}\int\frac{dk_i}{2\pi}e^{i\psi}, \qquad (32)$$

$$\psi = \int_{x_i}^{x} dx'\ k(x',\omega) - \omega t, \qquad k_i = k(x_i,\omega).$$

Соотношения (31), (32) сводят решение исходного линейного интегродифференциального уравнения в частных производных с переменными коэффициентами (2) к взятию интеграла и решению алгебраического уравнения. В общем виде окончательный ответ может быть записан так же, как и для однородного сгустка:

$$\varrho(x,t) = \mathrm{Re}\,[e^{\psi_0}/r_0].$$

Критический и пороговый разбросы зависят от координат в силу того, что зависят от плотности:

$$v_c = v_c[\varrho_0(x)]; \quad v_{th} = v_{th}[\varrho_0(x)]. \qquad (33)$$

5. Начальные условия: дробовой шум.

Для произвольных начальных условий $\varrho(x,\ t=0) = \mathring{\varrho}(x)$ отклик будет выглядеть следующим образом:

$$\varrho(x,t) = \int_{-\infty}^{x} dx'\,L(x,x',t)\,\mathring{\varrho}(x), \qquad (34)$$

где $L(x,\ x',\ t)$ — так называемое фундаментальное решение, т. е. обсуждавшееся выше решение задачи с точечным возбуждением.

Для дробового шума

$$\langle \mathring{\varrho}(x')\,\mathring{\varrho}(x)\rangle = \varrho_0(x)\,\delta(x-x'),$$

$$\langle \varrho^2(x,t)\rangle = \int_{-\infty}^{x} dx'\,L^2(x,x',t)\,\varrho_0(x'). \qquad (35)$$

Рассмотрим в качестве примера взаимодействие типа

$$g = g_0 e^{-\nu x}\cos\varkappa x, \quad \nu = \varkappa.$$

Функцию отклика приближенно представим в виде

$$L \sim \frac{1}{r}\begin{cases} \exp\,(\Gamma_{max}(x,\ x')t), & t > \varkappa \int_{x'}^{x} dx''\ \Gamma^2/\Gamma^3_{max}, \\ 0, & t < \varkappa \int_{x'}^{x} dx''\ \Gamma^2/\Gamma^3_{max}. \end{cases} \qquad (36)$$

Здесь

$$\Gamma_{max}(x,x') = \max\ \Gamma(x''), \quad x' < x'' < x, \qquad (37)$$

при $\Delta \gg st$

$$\langle \varrho^2(x,t)\rangle \simeq \frac{N_{st}}{\Delta r^2}\,e^{2\Gamma(x)t}. \qquad (38)$$

В обратной ситуации, при $\Delta \ll st$

$$\langle \varrho^2(x,t)\rangle \simeq \frac{N}{r^2}\exp\,(2\bar{\Gamma}_{max}(x)t), \quad \bar{\Gamma}_{max} = \Gamma_{max}(-\infty,x). \qquad (39)$$

Из формул типа (33), (38) видно, что воздействие быстрых когерентных колебаний на локальные макроскопические параметры сгустка (плотность, тепловой разброс) особенно велико в центре, а к краям спадает. Например, следует ожидать, что энергетическое уширение сгустка в результате действия неустойчивости в центре должно быть больше, чем на краях. Именно такие результаты были получены на установке DORIS[9], где проводились соответствующие измерения.

Литература

1. Пестриков Д.В. Препринт ИЯФ 85-105.- Новосибирск, 1985; Материалы настоящей конференции.

2. Дербенев Я.С., Диканский Н.С. Препринт ИЯФ № 315.–Новосибирск, 1969.

3. Диканский Н.С. Кандидатская диссертация.–Новосибирск, 1969.

4. Буров А.В., Диканский Н.С., Пестриков Д.В. Препринт ИЯФ 86-41.–Новосибирск, 1986.

5. Wang J., Pellegrini C. Proc. of the XI Intern. Conf. on High Energy Acc. (1980), p.554.

6. Laclare J. Proc. of the XI Intern. Conf. on High Energy Acc. (1980), p.526.

7. Chao A., Gareyte J. SLAC Rep. SPEAR-197/PEP-224 (1976).

8. Буров А.В. Препринт ИЯФ 84-159.–Новосибирск, 1984.

9. Kohaupt R. Труды X Междунар. конф. по ускорителям заряженных частиц высоких энергий.–Серпухов, 1977, т.2 с.43.