

ВЛИЯНИЕ КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ ВЕДУЩЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ЭФФЕКТЫ ВСТРЕЧИ НА НАКОПИТЕЛЕ ВЭПП-4

А.Б. Темных
Институт ядерной физики СО АН СССР
Новосибирск, 630090

Нелинейные компоненты ведущего магнитного поля накопителя оказывают наиболее сильное влияние на движение частиц с большими амплитудами бетатронных колебаний, т. е. на частицы, движение которых определяет время жизни. Поэтому естественно ожидать, что нелинейность ведущего магнитного поля может существенно изменить картину эффектов встречи с точки зрения ухудшения времени жизни. В данной работе рассматривается влияние октупольной нелинейности магнитного поля накопителя на движение частиц в нелинейных резонансах, вызванных электромагнитным полем встречного пучка, а также представле-

x и z соответственно; $V_{2m,2n}$ — гармоника резонанса $2mv_x + 2nv_z = k$; члены $V_0(J_x, J_z)$, $W_0(J_x, J_z)$ описывают зависимость частоты от амплитуд, которую вносят поле встречного пучка и октупольная линза. Выражение для W_0 :

$$W_0(J_x, J_z) = R_x J_x^2 + R_z J_z^2 - 4 \frac{R_x R_z}{|R_x R_z|^{1/2}} J_x J_z. \quad (2)$$

Здесь $R_{x,z} = \beta_{x,z} \frac{\partial v_{x,z}}{\partial a_{x,z}^2}$ — «машинная» нелинейность.

Это выражение легко получить из выражения для магнитного потенциала октупольной линзы. На рис. 1

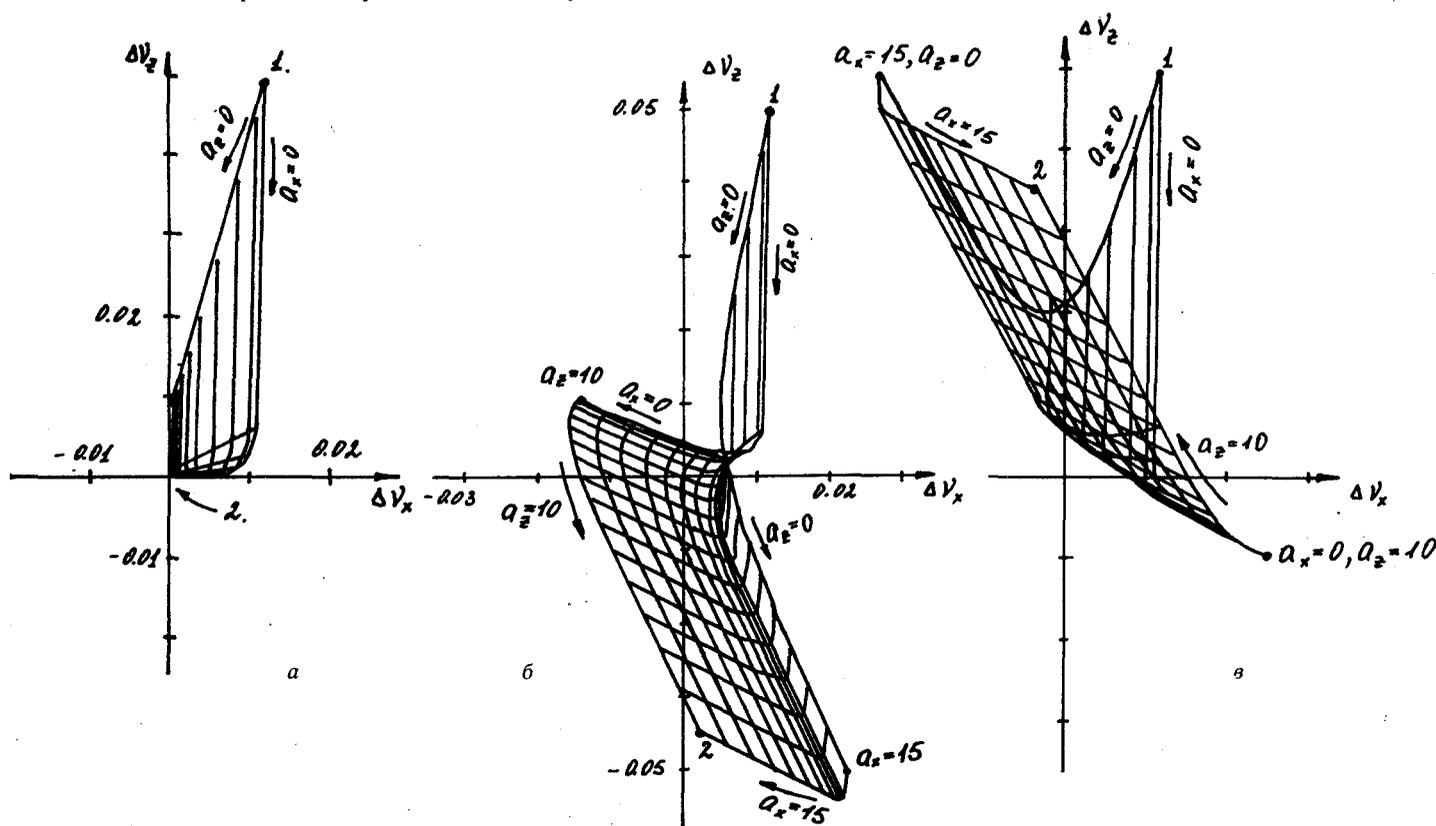


Рис. 1. Зависимость сдвига бетатронных частот от амплитуд бетатронных колебаний. $\xi_x = 0.0125$, $\xi_z = 0.05$, $\sigma_x/\sigma_z = 100$. Точка 1: $a_x = 0$, $a_z = 0$; точка 2: $a_x = 15$ мм, $a_z = 10$ мм ($\beta_{x,z} = 1200$ см); а) $R_{x,z} = 0$, б) $R_{x,z} = 12$ см⁻¹, в) $R_{x,z} = -12$ см⁻¹.

ны экспериментальные данные о влиянии октупольной нелинейности на эффекты встречи на накопителе ВЭПП-4.

Гамильтониан, который описывает движение частиц в изолированном нелинейном резонансе, вызванном полем встречного пучка, с учетом влияния магнитного поля тонкой октупольной линзы, можно записать в виде¹:

$$H = J_x \nu_x + J_z \nu_z + V_0(J_x, J_z) + W_0(J_x, J_z) + V_{2m,2n}(J_x, J_z) \cos(2m\varphi_x + 2n\varphi_z + k\theta). \quad (1)$$

Здесь J_x , φ_x и J_z , φ_z — переменные «действие-фаза» по

представлены графики зависимости $\Delta\nu_x$ и $\Delta\nu_z$ от амплитуд бетатронных колебаний при различной величине $R = R_{x,z}$. Эти зависимости были рассчитаны по формуле:

$$\Delta\nu_{x,z} = \frac{\partial V_0}{\partial J_{x,z}} + 2R_{x,z} J_{x,z} - 4R_{x,z} J_{x,z}.$$

При $R = 0$ (рис. 1а) зависимость частот от амплитуды определяется только полем встречного пучка 2. На рис. 1б и 1в, где $R > 0$ и $R < 0$, соответственно, при больших амплитудах бетатронных колебаний (точка 2) смещение частот определяет нелинейность поля накопителя. При малых амплитудах, т. е. для частиц,

находящихся в центре пучка (точка 1), смещение частот равно: $\Delta v_x \approx \xi_x$, $\Delta v_z = \xi_z$.

После перехода к новым каноническим переменным

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{J_x}{m} + \frac{J_z}{n} \right), \quad \Phi = \frac{1}{2} (2m\varphi_x + 2n\varphi_z + k\theta),$$

$$C = \frac{1}{2} \left(\frac{J_x}{m} - \frac{J_z}{n} \right), \quad \tilde{\Phi} = \frac{1}{2} (2m\varphi_x - 2n\varphi_z)$$

гамильтониан (1) переписывается в виде

$$H = \frac{1}{2} \alpha \delta + V_0(\alpha, C) + W_0(\alpha, C) + V_{2m,2n}(\alpha, C) \cdot \cos(2\Phi).$$

Этот гамильтониан не зависит от $\tilde{\Phi}$, поэтому переменная C является инвариантом и полученный гамильтониан описывает одномерное движение в изолированном нелинейном резонансе. В первом приближении зависимость частоты от амплитуды будет

$$v(\alpha) = \frac{1}{2} \delta + \frac{\partial V_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial W_0}{\partial \alpha}.$$

Положение центра области автофазировки (ОБА) можно найти из уравнения

$$v(\alpha_0) = 0.$$

а ширину — из выражения

$$\alpha_{\max} = 2 \left| \frac{V_{2m,2n}}{\partial v / \partial \alpha} \right|^{1/2}.$$

В работе ³ было показано, что в одномерном случае при положительной кубической нелинейности ведущего магнитного поля существует точка, в которой частота бетатронных колебаний не зависит от амплитуды, и если центр ОБА лежит в этой точке или вблизи нее, то ширина ОБА сильно увеличивается. В двухмерном случае условие существования точки с нулевой нелинейностью будет:

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{или} \quad \left(m^2 \frac{\partial^2}{\partial J_x^2} + 2mn \frac{\partial^2}{\partial J_x \partial J_z} + n^2 \frac{\partial^2}{\partial J_z^2} \right) (V_0 + W_0) = 0.$$

Это же выражение можно получить из условия параллельности в плоскости J_x, J_z резонансной линии и направления биения амплитуд, которое определяется инвариантом C . Детальное описание характера резонансного движения вблизи точки с нулевой нелинейностью сделано в работе ³, поэтому здесь приводиться не будет. Отметим только, что если центр ОБА совпадает или лежит вблизи такой точки, то величина биений амплитуд бетатронных колебаний сильно увеличивается, а выражение для ширины ОБА становится неправильным. С учетом (2) условие существования точки с нулевой нелинейностью переписывается:

$$\begin{aligned} m^2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial J_x^2} + 2mn \frac{\partial^2 V_0}{\partial J_x \partial J_z} + n^2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial J_z^2} = \\ = -2 \left[m^2 R_x + n^2 R_z - 4mn \frac{R_x R_z}{|R_x R_z|^{1/2}} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Известно, что $\frac{\partial^2 V_0}{\partial J_x^2}, \frac{\partial^2 V_0}{\partial J_z^2}, \frac{\partial^2 V_0}{\partial J_x \partial J_z} < 0$ при любых J_x, J_z . Поэтому в случае $m \cdot n > 0$ можно выписать необходимые условия появления точек с нулевой нелинейностью:

$$\begin{aligned} m^2 + n^2 - 4m \cdot n > 0 \quad \text{при} \quad R_{x,z} = R > 0, \\ m^2 + n^2 - 4m \cdot n < 0 \quad \text{при} \quad R_{x,z} = R < 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В случае круглого пучка при $\beta_x = \beta_z$ в месте встречи левая часть равенства (3) всегда меньше нуля, поэтому условие (4) справедливо для всех резонансов неза-

висимо от знака $m \cdot n$. Условие (4) в графическом виде отражено на рис. 2. Здесь в плоскости m, n пред-

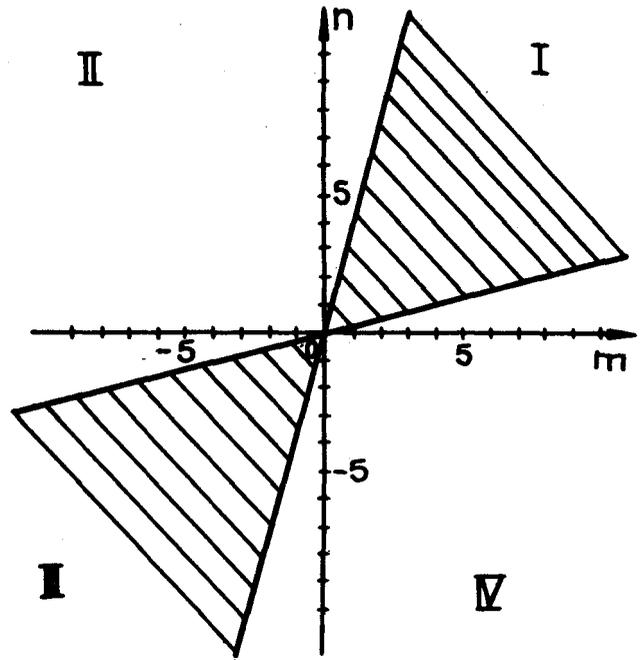


Рис. 2. Необходимые условия появления областей с нулевой нелинейностью. Заштрихована область, где выполняется условие $m^2 + n^2 - 4mn < 0$.

ставлены области, для которых условие нулевой нелинейности выполняется при $R > 0$ и при $R < 0$ соот-

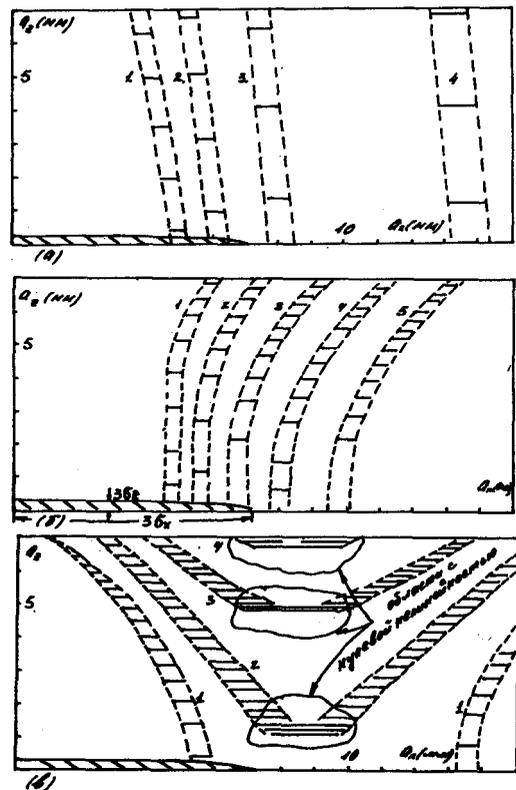


Рис. 3. Резонансные линии и векторы биений амплитуд бетатронных колебаний на резонансе $14\nu_x = 120$. $\xi_x = 0.009$, $\xi_z = 0.035$. $\nu_x = 8.568$ (1); $\nu_x = 8.569$ (2); $\nu_x = 8.570$ (3); $\nu_x = 8.571$ (4); $\nu_x = 8.572$ (5); а) $R_{x,z} = 0$; б) $R_{x,z} = -3.6 \text{ см}^{-1}$; в) $R_{x,z} = 3.6 \text{ см}^{-1}$.

ответственно. Для иллюстрации эффекта появления областей с нулевой нелинейностью на рис. 3 представле-

ны векторы биений амплитуд бетатронных колебаний для резонанса $14\nu_x=120$ при различной кубической нелинейности ведущего магнитного поля. Параметры, при которых были сделаны вычисления (эллиптичность пучков, величина $\beta_{x,z}$ в месте встречи), соответствовали режиму накопителя ВЭПП-4 на энергии 5 ГэВ. Видно, что случаи нулевой и отрицательной «машинной» нелинейности (рис. 3а и 3б) принципиально не отличаются. При положительной нелинейности (рис. 3в) видны области, где направление векторов биений бетатронных амплитуд совпадает с направлением резонансной линии, т. е. выполняется условие нулевой нелинейности (3). В этих областях (они отмечены на рис. 3в) величина вектора биений увеличивается в 5–6 раз.

Этот пример показывает, что знак «машинной» кубической нелинейности может существенно влиять на характер движения в эллиптическом нелинейном резонансе.

Рассмотрим влияние «машинной» нелинейности с точки зрения перекрытия ОБА нелинейных резонансов, обусловленных эффектами встречи. Условие перекрытия ОБА двух одномерных нелинейных резонансов на больших амплитудах, где зависимость частоты от амплитуды определяется «машинной» нелинейностью, будет

$$\frac{|V_1|^{1/2} + |V_2|^{1/2}}{|v_1 - v_2|} \cdot |2R|^{1/2} \gg 1,$$

где $v_{1,2}$ и $V_{1,2}$ — резонансные частоты и гармоники. Из этого выражения следует, что при увеличении абсолютной величины «машинной» нелинейности облегчается условие перекрытия ОБА нелинейных резонансов и возникновения стохастической неустойчивости.

Методика экспериментов

Эксперименты, которые описаны ниже, были сделаны на накопителе ВЭПП-4 в апреле–мае 1985 г.

Для улучшения фоновых условий на накопителе ВЭПП-4 использовалось искусственное уменьшение апертуры с помощью вертикального пробника, стоящего достаточно далеко от регистрирующей аппаратуры детектора МД-1. Вблизи от этого пробника в направлении движения позитронов был установлен детектор типа «сэндвич», который регистрировал ливни от частиц, вышедших за апертуру и попавших в пробник. Взаимное расположение пробника и детектора схематично показано на рис. 4. Фактически этот детектор

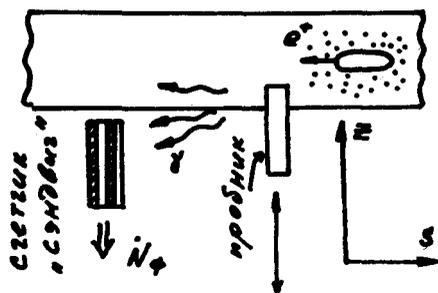


Рис. 4. Взаимное расположение детектора и вертикального пробника.

позволял измерять скорость потерь частиц из позитронного пучка.

Для управления «машинной» нелинейностью накопителя ВЭПП-4 использовались две окупольные лин-

зы, расположенные симметрично относительно места встречи в местах с большими β -функциями ($\beta_x=44$ м, $\beta_z=110$ м). Эти же линзы использовались для коррекции связи бетатронных колебаний.

В экспериментах, которые описаны ниже, на энергии 5 ГэВ измерялись скорость потерь частиц из позитронного пучка и удельная светимость в зависимости от положения рабочей точки накопителя. Во всех случаях расстояние от центра пучка до пробника составляло $\sim 30 \div 35\sigma_z$. Данные, полученные в случае, когда рабочая точка «заметала» область в плоскости ν_x, ν_z (рис. 5), позволяли выявить и надежно идентифицировать одномерные и двухмерные нелинейные резонансы. При изучении отдельных резонансов рабочая точка проходила по отрезкам, пересекающим резонансы в местах, где их взаимное влияние минимально (см. рис. 5). Не вдаваясь в подробное описание дан-

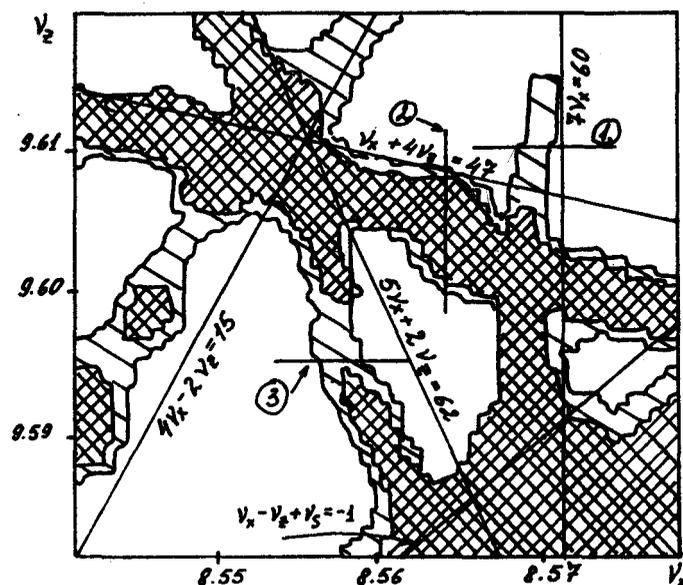


Рис. 5. Зависимость потерь частиц из позитронного пучка от положения рабочей точки накопителя ВЭПП-4. $\xi_x=0.008$; $\xi_z=0.03$: 1 — сечение резонанса $7\nu_x=60$; 2 — сечение резонанса $\nu_x+4\nu_z=47$; 3 — сечение резонанса $5\nu_x+2\nu_z=62$.

ных, представленных на этом рисунке, отметим только, что без встречного пучка потери частиц на резонансах, которые видны здесь, намного меньше.

Изучение отдельных резонансов

Резонанс $7\nu_x=60$. На рис. 6 представлены графики удельно светимости и скорости потерь частиц из позитронного пучка при пересечении рабочей точки резонанса $7\nu_x=60$ ($\nu_z=9.61$) при различной величине «машинной» кубической нелинейности. Видно, что «машинная» нелинейность сильно влияет на скорость потерь частиц (ср. рис. 6а и 6в) и не влияет на удельную светимость. Эти факты хорошо согласуются с представлением о том, что «машинная» нелинейность влияет на движение частиц с большими амплитудами, которые определяют в ее жизни, и практически не влияет на движение частиц с малыми амплитудами, которыми определяются средние квадратичные размеры пучков и удельная светимость. На рис. 7а приведена зависимость максимальной скорости потерь позитронов на резонансе $7\nu_x=60$ от «машинной» нелинейности. Здесь наблюдаются сильное увеличение потерь при положительной нелинейности, которое можно

объяснить появлением областей с нулевой нелинейностью, и небольшое увеличение потерь при отрицательной «машинной» нелинейности, которое может быть связано с перекрытием ОБА нелинейных резонансов. Большую ясность в эти вопросы может внести численное моделирование.

Резонанс $\nu_x + 4\nu_z = 47$. Для этого резонанса условие нулевой нелинейности, также как и для резонанса $7\nu_x = 60$, может выполняться только при положительной «машинной» нелинейности. Зависимость потерь

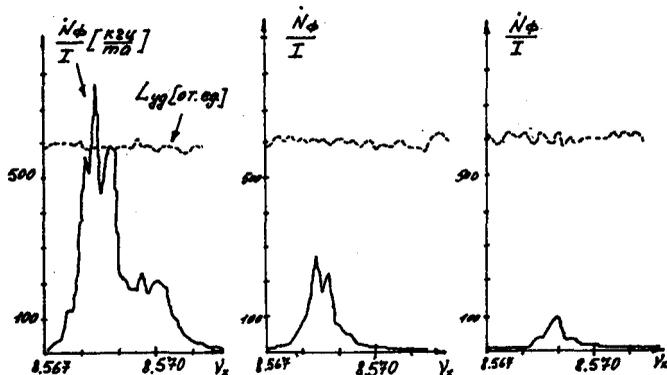


Рис. 6. Потери частиц из позитронного пучка и удельная светимость при пересечении рабочей точки резонанса $7\nu_x = 60$. $\xi_x \approx 0.009$; $\xi_z \approx 0.035$: а) $R_x = 6.9 \text{ см}^{-1}$; б) $R_x = 2.3 \text{ см}^{-1}$; в) $R_x = -2.3 \text{ см}^{-1}$.

частиц на этом резонансе от «машинной» нелинейности приведена на рис. 7б. Здесь также видно сильное увеличение потерь при положительной нелинейности. Уменьшение потерь при дальнейшем увеличении нелинейности, возможно, происходит из-за перемещения областей с нулевой нелинейностью в сторону меньших амплитуд бетатронных колебаний.

Резонанс $5\nu_x + 2\nu_z = 62$. В отличие от двух предыдущих случаев для этого резонанса условие нулевой нелинейности может выполняться только при отрицательной величине кубической нелинейности ведущего магнитного поля. Это в какой-то мере подтверждают данные, приведенные на рис. 7в. Здесь видно более сильное увеличение потерь на резонансе при изменении кубической нелинейности в сторону отрицательных значений, что можно объяснить появлением областей с нулевой нелинейностью, и менее сильное — при изменении кубической нелинейности в сторону положительных значений.

Заключение

Аналитическое рассмотрение влияния «машинной» нелинейности было сделано на модели с одной тонкой октупольной линзой на кольце. Такое приближение сильно упрощает выкладки, однако не совсем правильно отражает действительность. Во-первых, источниками нелинейности могут быть секступольные поля, которые используются для коррекции хроматизма. Во-вторых, источники октупольных компонент ведущего магнитного поля накопителя могут быть произвольным образом распределены по кольцу. Учет этих факторов может изменить выражение (3) для условия су-

ществования областей с нулевой нелинейностью. В нашем случае контролируемые источниками нелинейности были две тонкие октупольные линзы, которые хорошо вписываются в модель. Их вклад в нелинейность бетатронных колебаний был определяющим. Поэтому условия существования областей с нулевой нелинейностью (3) в большинстве случаев оставались справедливыми.

Результаты экспериментов, описанные в данной работе, показывают, насколько важно уметь контролировать «машинную» нелинейность в случаях, когда мак-

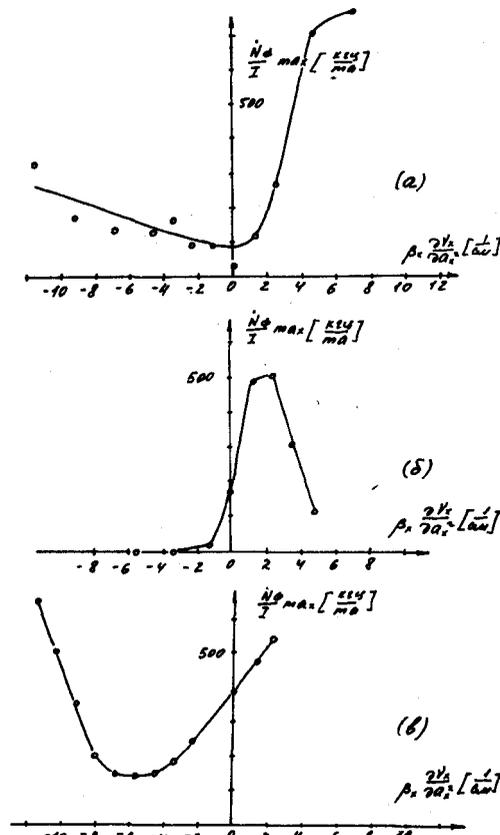


Рис. 7. Зависимость потерь частиц из позитронного пучка от «машинной» кубической нелинейности на резонансах: а) $7\nu_x = 60$; б) $\nu_x + 4\nu_z = 47$; в) $5\nu_x + 2\nu_z = 62$.

симальная светимость ограничена ухудшением времени жизни встречных пучков из-за эффектов встречи.

В заключение автор выражает благодарность группе механиков и группе магнитных измерений комплекса ВЭПП-4 за активную помощь в подготовке и установке октупольных линз, а также С.И. Мишневу и Г.М. Тумайкину за обсуждение затронутых в работе вопросов.

Литература

1. Темных А.Б. Препринт ИЯФ СО АН СССР 86-97. Новосибирск, 1986.
2. Tennyson J. Proc. of the Beam-Beam Interaction Seminar. SLAC-PUB-2624, 1980, p.3.
3. Темных А.Б. Препринт ИЯФ СО АН СССР 84-143. Новосибирск, 1984.