ФИЗИКА ПЛАЗМЫ

Том 15 1989 Вып. 7

УДК 533.951.2

ЛАНСКИЙ И. М., СТУПАКОВ Г. В.

НЕЛИНЕЙНАЯ СТАДИЯ ЖЕЛОБКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ ПРИ УЧЕТЕ СИЛЬНОГО ЭФФЕКТА КЛР

1. Одним из механизмов, стабилизирующих желобковую неустойчивость плазмы в открытых ловушках, является эффект конечного ларморовского радиуса (КЛР) ионов [1]. В случае сильного эффекта КЛР, когда

$$(\rho_{Bi}/a)^2 \gg \varkappa a, \tag{1}$$

где ρ_{Bi} — ларморовский радиус ионов, $\varkappa$ — характерная кривизна силовых линий, a — радиус плазмы, стабилизируются все желобковые возмущения за исключением основной моды с $m=1$. Принято считать, что развитие этой моды неустойчивости приводит к выдрейфовыванию шнура как целого на стенку ловушки, хотя сам процесс ухода шнура из положения равновесия ранее исследовался только в рамках линейной теории, когда смещение шнура считалось малым по сравнению с его радиусом. Настоящая работа посвящена описанию нелинейной стадии развития неустойчивости, применимому и тогда, когда шнур смещается из равновесного положения на расстояние, сравнимое или превышающее его радиус. Отметим, что движения плазмы, которые убедительно интерпретируются как нелинейная стадия моды $m=1$, наблюдались в эксперименте на установке TARA [2].

Основным малым параметром ε задачи является величина $\varepsilon=\gamma_f/\omega_*$, где $\gamma_f=\sqrt{g/a}$ — характерный инкремент желобковой неустойчивости ($g\sim v_{Ti}^2\varkappa$ — эффективная сила тяжести, действующая на ионы вследствие кривизны силовых линий), $\omega_*\sim cT/a^2eB$ — диамагнитная частота (T — температура плазмы, B — индукция магнитного поля). Легко видеть, что $\varepsilon\ll1$ в силу неравенства (1). Как следует из анализа линейной задачи [3], основная мода $m=1$ неустойчива с инкрементом $\sim\gamma_f$, тогда как остальные моды колебаний имеют характерные частоты порядка $\varepsilon\gamma_f$ или $\varepsilon^{-1}\gamma_f$. Существенное отличие в порядке величин этих частот позволяет утверждать, что если в начальный момент отсутствовали возбуждения с $m\neq1$ (а также более высокие уровни возмущений с $m=1$), то они и не появятся в результате развития неустойчивости $m=1$ и, следовательно, шнур будет все время двигаться как целое без искажения своей формы. Основными результатами настоящей работы являются аккуратное доказательство последнего утверждения и вывод уравнения движения шнура.

2. Будем рассматривать плазму малого давления ($\beta\ll1$), находящуюся в однородном магнитном поле, направленном вдоль оси z. Пренебрежем влиянием боковых стенок, ограничивающих плазму, предполагая, что они находятся достаточно далеко от плазмы. Предположим, что течение плазмы происходит в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, так что все величины, входящие в задачу, зависят только от координат x и y. Уравнения, описывающие медленное дрейфовое движение плазмы при учете эффектов КЛР, были сформулированы Ньюкомбом в [4, 5]. Приведем их здесь без вывода:

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}(\rho(d\mathbf{v}/dt)+{}^1/_2(\nabla M\cdot[\mathbf{e}_z,\nabla])\mathbf{v}-\rho\mathbf{g})=0,\\ d\rho/dt=0,\quad dM/dt=0,\quad \mathbf{v}=-(c/B)[\nabla\varphi,\mathbf{e}_z].\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь ρ — массовая плотность плазмы; φ — потенциал; $\mathbf{g}$ — ускорение силы тяжести, моделирующей эффекты кривизны силовых линий, а M имеет смысл момента импульса, приходящегося на единицу объема плазмы и связанного с вращением частиц (ионов) по ларморовской орбите:

$$M=-cm_i p_{\perp i}/e_i B,$$

m_i, e_i — масса и заряд ионов, $p_{\perp i}$ — их поперечная составляющая давления.

Ограничимся рассмотрением течений, в которых линии постоянного значения ρ и M совпадают, иначе говоря ρ и M функционально зависимы. В [4] показано, что если в начальный момент времени это условие справедливо, то в силу уравнений движения оно будет выполняться и в дальнейшем. Именно такова ситуация в исследуемой задаче, где начальным состоянием является осесимметричный плазменный шнур, в котором линии постоянства всех величин являются концентрическими окружностями.

3. В пределе $\varepsilon\to 0$ представим искомые величины M, ρ, $\mathbf{v}$ в виде асимптотических рядов по параметру ε:

$$M=M_0/\varepsilon+M_1+\ldots,\quad \rho=\rho_0+\varepsilon\rho_1+\ldots,\quad \mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\varepsilon\mathbf{v}_1+\ldots. \tag{3}$$

Отсутствие в разложении скорости $\mathbf{v}$ члена ε^{-1} означает, что нас интересуют медленные движения плазмы с характерной скоростью $\sim a\gamma_f$.

Подставляя (3) в (2), в первых двух порядках по ε получим

$$\operatorname{rot}((\nabla M_0\cdot[\mathbf{e}_z,\nabla])\mathbf{v}_0)=0, \tag{4}$$

$$\operatorname{rot}(\rho_0(\partial\mathbf{v}/\partial t)+\rho_0(\mathbf{v}_0\nabla)v_0+{}^1/_2(\nabla M_0\cdot[\mathbf{e}_z,\nabla])\mathbf{v}_1+ \\ +{}^1/_2(\nabla M_1\cdot[\mathbf{e}_z,\nabla])\mathbf{v}_0-\rho_0\mathbf{g})=0. \tag{5}$$

Обратимся к анализу уравнения (4). Пусть в рассматриваемый момент времени в главном порядке шнур обладает аксиальной симметрией, т. е. $M_0=M_0(R)$, $\rho_0=\rho_0(R)$, где R — расстояние от центра шнура. Перепишем уравнение (4) в цилиндрической системе координат R, θ, выразив скорость $\mathbf{v}_0$ через потенциал φ_0 согласно последней формуле в (2) и разложив φ_0 в ряд Фурье по переменной θ. В результате получим

$$l\left(\frac{M_0''}{R^2}(\varphi_0-\varphi_0'R)+(l^2-1)M_0'\varphi_0/R^3-M_0'\varphi_0''/R\right)=0, \tag{6}$$

где l — азимутальное число ($\varphi_0\sim\exp(il\theta)$), а штрих обозначает дифференцирование по R. Умножим это уравнение на φ_0^* и проинтегрируем его по всей плоскости, предполагая, что M_0 достаточно быстро стремится к нулю при $R\to\infty$. После простых преобразований найдем:

$$l\int dR(M_0'/R)((l^2-1)|\varphi_0|^2/R^2+|\varphi_0/R-\varphi_0'|^2)=0. \tag{7}$$

Ограничимся рассмотрением практически наиболее интересного случая, когда M_0 монотонно уменьшается с R, $M_0'\leqslant 0$. Тогда из (7) следует, что интегрируемые решения (6) есть только при $l=0$ и $l=1$, причем в последнем случае $\varphi_0\sim R$. Следовательно, общее решение уравнения (4) (в терминах потенциала φ_0) является суперпозицией первой и нулевой моды и в терминах скорости $\mathbf{v}_0$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{r},t)=\mathbf{u}(t)+[\nabla\eta(R,t),\mathbf{e}_z]. \tag{8}$$

Поскольку время t не входит явно в уравнение (4), то функции $\mathbf{u}$ и η зависят от времени. Надо еще подчеркнуть, что расстояние R отсчитывается от центра шнура, положение $\mathbf{r}_0$ которого на плоскости также меняется со временем, поэтому $R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)|$.

Формула (8) имеет простой смысл. Движение шнура в нулевом приближении складывается из перемещения его как целого со скоростью $\mathbf{u}$ и дифференциального вращения вокруг мгновенной оси со скоростью, которая определяется вторым слагаемым в (8). Поскольку ни то, ни другое движение не нарушают осевой симметрии шнура (а приводят только к смещению оси в плоскости x, y), то исходно осесимметричный шнур остается таковым и при дальнейшем движении. Формально это следует из уравнений (2), если подставить туда скорость (8). При этом получим уравнение $\dot{\mathbf{r}}_0=\mathbf{u}$, означающее, что центр шнура движется со скоростью $\mathbf{u}$.

Воспользуемся теперь одним из законов сохранения, который вытекает из системы (4), (8)–(10). Как показано в [4, 5], интеграл

$$\Gamma=\oint\left(\rho\mathbf{v}+{}^1/_4[\nabla M,\mathbf{e}_z]\right)d\mathbf{r}, \tag{9}$$

взятый вдоль жидкого контура, на котором M=const и ρ=const, не меняется со временем. Подставляя в (9) осесимметричные распределения $M_0(R)$ и $\rho_0(R)$ и скорость $\mathbf{v}_0$ (8), легко установить, что из сохранения Γ следует, что на самом деле функция η не зависит от t. Другими словами, в ходе движения шнура радиальное распределение угловой скорости вращения не меняется.

Для того чтобы получить уравнение, которому подчиняется скорость $\mathbf{u}$, подставим (8) в (5), умножим получившееся уравнение на $\mathbf{r}$ и проинтегрируем по координатам x, y. При этом слагаемые, содержащие M_1 и $\mathbf{v}_1$, обратятся в нуль, и в результате получим

$$(d\mathbf{u}/dt)\int d^2R\rho_0(R)=\int d^2R\rho_0(R)\mathbf{g}(\mathbf{r}_0+\mathbf{R}). \tag{10}$$

Смысл уравнения (10) очевиден: в левой его части стоит масса единицы длины шнура, умноженная на ускорение, а в правой – сила тяжести, действующая на единицу длины.

Если принять, что $\mathbf{g}(\mathbf{r})=g_0\mathbf{r}$ (эта модель соответствует ситуации, когда плазма находится в параксиальном магнитном поле [3]), то (10) сводится к

$$d^2\mathbf{r}_0/dt^2=g_0\mathbf{r}_0.$$

В этом случае и на нелинейной стадии движение шнура описывается линейным уравнением, а его смещение $\mathbf{r}_0$ будет экспоненциально расти со временем.

Использование непараксиальных элементов для стабилизации длинных открытых ловушек [6] может приводить к ситуации, когда функция $\mathbf{g}$ нелинейным образом зависит от радиуса $\mathbf{r}$ и, более того, меняет знак с ростом r. В этом случае уравнение (10) может служить для описания нелинейных колебаний плазменного шнура в такой системе. Разумеется, оно справедливо только до тех пор, пока плазменный шнур не приблизится достаточно близко к стенке камеры. Влияние боковой стенки на движение шнура будет рассмотрено нами в отдельной работе.

Список литературы

1. *Rosenbluth M. N., Krall N. M., Rostoker N.* // Nucl. Fus. 1962. Suppl. Pt. 1. P. 143.
2. *Irby J. H., Lane B. G., Casey J. A. et al.* // Phys. Fluids. 1988. V. 31. P. 902.
3. *Михайловский А. Б.* Теория плазменных неустойчивостей. Т. 2. М.: Атомиздат, 1977. § 9.2.
4. *Newcomb W. A.* // Ann Phys. 1972. V. 71. P. 29.
5. *Newcomb W. A.* // Ann. Phys. 1973. V. 81. P. 231.
6. *Рютов Д. Д., Ступаков Г. В.* // Физика плазмы. 1986. Т. 12. С. 1411.

Институт ядерной физики
СО АН СССР

Поступила в редакцию
24.X.1988