ЖЭТФ, 1995, том 107, вып. 5, стр. 1393–1402

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ГРИНА И ДЕЛЬБРЮКОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ В ЭКРАНИРОВАННОМ КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

Р. Н. Ли, А. И. Мильштейн

Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера
Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 13 декабря 1994 г.

Получено простое интегральное представление для квазиклассической функции Грина уравнения Дирака в произвольном центрально-симметричном убывающем поле. Рассмотрение основано на использовании квазиклассических радиальных волновых функций и учете вклада больших орбитальных моментов. Полученная функция Грина использована для вычисления амплитуды дельбрюковского рассеяния в экранированном кулоновском потенциале.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для учета влияния внешнего электромагнитного поля на процессы квантовой электродинамики удобно использовать представление Фарри. Для этого необходимо знать функцию Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|\varepsilon)$ уравнения Дирака в этом поле. К сожалению, явное выражение для функции Грина известно только для очень небольшого числа потенциалов. Поэтому для нахождения функции Грина приходится использовать численные методы. В связи с этим получение новых аналитических представлений для функций Грина представляет несомненный интерес. Во многих процессах при высоких энергиях орбитальные моменты, дающие основной вклад в сечения, велики. Поэтому можно использовать квазиклассическое приближение. В настоящей работе мы находим явное выражение для квазиклассической функции Грина уравнения Дирака в произвольном центрально-симметричном убывающем потенциале. Ранее квазиклассическая функция Грина была найдена для случая кулоновского поля в [1, 2] с помощью суммирования по орбитальным моментам интегрального представления для точной функции Грина уравнения Дирака [3]. Как будет показано, для нахождения квазиклассической функции Грина не требуется знание точной функции Грина. Достаточно использовать квазиклассические волновые функции радиального уравнения при больших орбитальных моментах. Ранее квазиклассический метод был использован в [4] для получения волновых функций в приближении Зоммерфельда — Мауэ [5] при рассмотрении процесса тормозного излучения и рождения пар в экранированном кулоновском потенциале при высоких энергиях.

Полученное нами интегральное представление для функции Грина удобно для проведения аналитических вычислений амплитуд различных процессов квантовой электродинамики в произвольном центрально-симметричном поле при высоких энергиях. Мы продемонстрируем это на примере вычисления амплитуды дельбрюковского рассеяния [6] (когерентного рассеяния фотона через виртуальные электрон-позитронные пары) в экранированном кулоновском потенциале. Дельбрюковское рассеяние является одним их немногих нелинейных процессов квантовой электродинамики, которые наблюдались в эксперименте (см. недавний обзор [7]). В настоящее время амплитуды дельбрюковского рассеяния детально изучены в кулоновском поле точно по параметру $Z\alpha$ при больших энергиях фотона $\omega \gg m$; m — масса электрона, $Z|e|$ — заряд ядра, $\alpha = e^2 = 1/137$ — постоянная тонкой структуры, e — заряд электрона, $\hbar = c = 1$. При этом использованные подходы существенно зависели от передачи импульса $\Delta = |\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1|$ ($\mathbf{k}_1$ — импульс начального фотона, $\mathbf{k}_2$ — импульс конечного фотона). При $\Delta \ll \omega$ амплитуды были найдены в [8–10] посредством суммирования в определенном приближении диаграмм теории возмущений по взаимодействию с кулоновским полем и в [1, 2] с помощью квазиклассической функции Грина. При $m \ll \Delta \sim \omega$ амплитуды были найдены в [11–13] при помощи точной функции Грина электрона в кулоновском поле [3] в пределе $m = 0$. Также были проведены расчеты при любых энергиях фотона ω, но в низшем порядке теории возмущений по параметру $Z\alpha$ (обзор многочисленных работ, выполненных в этом приближении, можно найти в [14]). Оказалось, однако, что при $\omega \gg m$ точный по $Z\alpha$ результат существенно отличается от полученного в низшем порядке теории возмущений.

Влияние экранировки на амплитуды дельбрюковского рассеяния существенно при малых передачах импульса $\Delta \sim 1/r_c \ll m$, r_c — радиус экранировки. Именно эту область передач импульса мы будем рассматривать в нашей работе.

2. ФУНКЦИЯ ГРИНА

Рассмотрим функцию Грина уравнения Дирака во внешнем центрально-симметричном потенциале $V(r)$:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|\varepsilon) = \frac{1}{\gamma^0 [\varepsilon - V(r)] - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} - m + i0}\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{1}$$

где γ^μ — матрицы Дирака, $\mathbf{p} = -i\nabla$. Нас будет интересовать функция Грина при $|\varepsilon| \gg m$. Представим функцию G в виде

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|\varepsilon) = \left\{\gamma^0 [\varepsilon - V(r)] - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + m\right\} D(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|\varepsilon), \tag{2}$$

где

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|\varepsilon) = \frac{1}{[\varepsilon - V(r)]^2 - \mathbf{p}^2 - [\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}, V(r)] - m^2 + i0}\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}$. Как известно (см. [5]), при высоких энергиях $\varepsilon \gg m$ в формуле (3) можно пренебречь членом $V^2(r)$ и учесть только первый член разложения функции D по коммутатору $[\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}, V(r)]$. Проведя указанное разложение и используя представление для коммутатора

$$[\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}, V(r)] = \frac{1}{2\varepsilon}\, [\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}, H], \qquad H = \mathbf{p}^2 + 2\varepsilon V(r), \tag{4}$$

приходим к следующему представлению для функции D:

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|\varepsilon) = \left[1 - \frac{i}{2\varepsilon}\left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\nabla} + \boldsymbol{\nabla}'\right)\right] D^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|\varepsilon), \tag{5}$$

где

$$D^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|\varepsilon) = \frac{1}{\kappa^2 - H + i0}\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{6}$$

$\kappa^2 = \varepsilon^2 - m^2$. Таким образом, задача сводится к вычислению квазиклассической функции Грина $D^{(0)}$ уравнения Шредингера с гамильтонианом H.

Введем прицельный параметр $\rho = |[\mathbf{r}\mathbf{r}']|/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. При рассмотрении процессов при высоких энергиях существенными являются расстояния порядка $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sim \kappa/m^2 \gg \gg 1/m$ и $\rho \geq 1/m$. Отсюда следует, что характерная величина углового момента $l \sim \kappa\rho \gg 1$ и можно использовать квазиклассическое приближение. Кроме того, нас будет интересовать случай $\rho \ll |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. В этом случае мал угол или между $\mathbf{r}$ и $-\mathbf{r}'$, или между $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$.

Рассмотрим систему собственных функций гамильтониана H и воспользуемся в (6) соотношением полноты этих функций, заменив δ-функцию на сумму произведений собственных функций. Естественно, основной вклад в $D^{(0)}$ будут давать функции непрерывного спектра с большими значениями углового момента. Мы воспользуемся системой функций непрерывного спектра, имеющих в асимптотике плоскую волну и расходящуюся сферическую волну. Система функций, содержащих в асимптотике сходящиеся сферические волны, приводит к такому же результату для функции Грина. Собственная функция гамильтониана H с собственным значением q^2, имеющая в асимптотике плоскую волну с импульсом $\mathbf{q}$ и расходящуюся сферическую волну, есть

$$\psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{qr} \sum_{l=0}^{\infty} i^l e^{i\delta_l}(2l+1) u_l(r) P_l(\cos\vartheta). \tag{7}$$

Здесь $P_l(x)$ — полином Лежандра, ϑ — угол между векторами $\mathbf{q}$ и $\mathbf{r}$. В квазиклассическом приближении функции $u_l(r)$ и $\delta_l = \delta(l/q)$ равны (см. [4])

$$\begin{gathered} u_l(r) = \sin\left[qr - \frac{l\pi}{2} + \frac{l^2}{2qr} + \lambda\delta\left(\frac{l}{q}\right) + \lambda\Phi(r)\right], \\ \Phi(r) = \int\limits_r^{\infty} V(\zeta)\,d\zeta, \quad \delta(\rho) = -\int\limits_0^{\infty} V\left(\sqrt{\zeta^2 + \rho^2}\right)\,d\zeta, \quad \lambda = \varepsilon/q. \end{gathered} \tag{8}$$

С учетом соотношения полноты получаем для функции $D^{(0)}$:

$$D^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|\varepsilon) = \int \frac{\psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{r})\psi^*_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}')}{\kappa^2 - q^2 + i0}\,\frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3}. \tag{9}$$

Подставляя (7) в (9) и вычисляя интеграл по углам вектора $\mathbf{q}$ с помощью известного соотношения для полинома Лежандра:

$$\int P_l(\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2) P_{l'}(\mathbf{n}_1\mathbf{n}_3)\,d\Omega_1 = \frac{4\pi}{2l+1} P_l(\mathbf{n}_2\mathbf{n}_3)\,\delta_{ll'},$$

где $\mathbf{n}_i$ — единичные векторы, находим

$$D^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|\varepsilon) = \frac{1}{2\pi^2 rr'} \int\limits_0^{\infty} \frac{dq}{\kappa^2 - q^2 + i0} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) u_l(r) u_l(r') P_l(\mathbf{n}\mathbf{n}'), \tag{10}$$

$\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, $\mathbf{n}' = \mathbf{r}'/r'$. Используя (8), представим произведение $u_l(r)u_l(r')$ в виде

$$u_l(r)u_l(r') = \frac{1}{2}\cos\left\{q(r-r') + \frac{l^2(r'-r)}{2qrr'} + \lambda\left[\Phi(r) - \Phi(r')\right]\right\} - \\ - \frac{1}{2}(-1)^l \cos\left\{q(r+r') + \frac{l^2(r'+r)}{2qrr'} + 2\lambda\delta\left(\frac{l}{q}\right) + \lambda\left[\Phi(r) + \Phi(r')\right]\right\}. \quad (11)$$

Если мал угол θ между векторами $\mathbf{n}$ и $-\mathbf{n}'$, то можно заменить $P_l(\mathbf{nn}')$ на $(-1)^l J_0(l\theta)$, где $J_\nu(x)$ — функция Бесселя. При этом в сумме по l основной вклад дает второй член в (11). Для этого члена суммирование по l можно заменить на интегрирование. Проведем в формуле (10) экспоненциальную параметризацию энергетического знаменателя:

$$\frac{1}{\kappa^2 - q^2 + i0} = -i\int\limits_0^\infty \exp\left[is(\kappa^2 - q^2)\right] ds.$$

Интеграл по q, а затем по s берется методом стационарной фазы, который применим при сделанных нами предположениях. После простых вычислений для рассматриваемого случая $\theta \ll 1$ находим

$$D^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|\varepsilon) = \frac{i\exp\left[i\kappa(r+r')\right]}{4\pi\kappa rr'}\int\limits_0^\infty dl\, l\, J_0(l\theta) \times \\ \times \exp\left\{i\left[\frac{l^2(r+r')}{2\kappa rr'} + 2\lambda\delta\left(\frac{l}{\kappa}\right) + \lambda\left(\Phi(r) + \Phi(r')\right)\right]\right\}. \quad (12)$$

В этой формуле $\lambda = \varepsilon/\kappa$. В рассматриваемом нами релятивистском случае $\lambda = +1$ при $\varepsilon > 0$ и $\lambda = -1$ при $\varepsilon < 0$.

Если мал угол $\theta_1 = \pi - \theta$ между векторами $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$, то можно заменить $P_l(\mathbf{nn}')$ на $J_0(l\theta_1)$. В этом случае при суммировании по l основной вклад дает первый член в (11). Так как он не содержит $\delta(l)$, то после преобразований, аналогичных сделанным при выводе формулы (12), можно взять интеграл по l. При $\pi - \theta \ll 1$ получаем

$$D^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|\varepsilon) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\exp\left\{i\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| + i\lambda \operatorname{sign}(r-r')\left[\Phi(r) - \Phi(r')\right]\right\}. \quad (13)$$

Подставляя (12) и (13) в (5), находим для функции D при $\theta \ll 1$:

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|\varepsilon) = \frac{i\exp\left[i\kappa(r+r')\right]}{4\pi\kappa rr'}\int\limits_0^\infty dl\, l\left[J_0(l\theta) - i\frac{(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{n}+\mathbf{n}')}{\kappa\theta}\delta'\left(\frac{l}{\kappa}\right)J_1(l\theta)\right] \times \\ \times \exp\left\{i\left[\frac{l^2(r+r')}{2\kappa rr'} + 2\lambda\delta\left(\frac{l}{\kappa}\right) + \lambda\left(\Phi(r) + \Phi(r')\right)\right]\right\}. \quad (14)$$

Здесь $\delta'(\rho) = \partial\delta(\rho)/\partial\rho$.

При $\pi - \theta \ll 1$ функция D равна

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|\varepsilon) = -\left\{1 - \operatorname{sign}(r-r')\frac{1}{4\kappa}\left[V(r) - V(r')\right](\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{n}+\mathbf{n}')\right\} \times \\ \times \frac{\exp\left\{i\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| + i\lambda \operatorname{sign}(r-r')\left[\Phi(r) - \Phi(r')\right]\right\}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (15)$$

Подставляя формулы (14) и (15) в (2), получаем окончательное выражение для квазиклассической функции Грина в центрально-симметричном поле при $\theta \ll 1$:

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}'|\varepsilon) = \frac{i\exp\left[i\kappa(r+r')\right]}{4\pi\kappa r r'}\int\limits_0^\infty dl\, l \exp\left\{i\left[\frac{l^2(r+r')}{2\kappa r r'} + 2\lambda\delta\left(\frac{l}{\kappa}\right) + \lambda\left(\Phi(r)+\Phi(r')\right)\right]\right\}\times$$
$$\times\left\{\left[\gamma^0\varepsilon + m - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{n}-\mathbf{n}')\left(\kappa + \frac{l^2}{2\kappa r r'}\right)\right]J_0(l\theta) + i\left[\frac{l^2(r-r')}{2rr'}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{n}+\mathbf{n}') + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \, l\delta'\left(\frac{l}{\kappa}\right)\gamma^0\left(1 - (\boldsymbol{\gamma},\mathbf{n})(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{n}') - \frac{(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{n}+\mathbf{n}')m}{\kappa}\right)\right]\frac{J_1(l\theta)}{l\theta}\right\}, \qquad (16)$$

и при $\pi - \theta \ll 1$:

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}'|\varepsilon) = -\frac{1}{4\pi R}\left[\gamma^0\varepsilon + m - \frac{1}{R}\left(\kappa + \frac{i}{R}\right)(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{R})\right]\times$$
$$\times\exp\left\{i\kappa R + i\lambda\,\mathrm{sign}(r-r')\left[\Phi(r)-\Phi(r')\right]\right\}, \qquad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'. \qquad (17)$$

В кулоновском поле $V(r) = -Z\alpha/r$ имеем

$$2\delta(\rho) + \Phi(r) + \Phi(r') = Z\alpha\ln\left(\frac{4rr'}{\rho^2}\right), \quad \delta'(\rho) = -Z\alpha/\rho. \qquad (18)$$

Подставляя (18) в (16), находим квазиклассическую функцию Грина в кулоновском поле, которая согласуется с выражением, полученным в [1, 2].

3. ДЕЛЬБРЮКОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ

Применим полученные выражения для функции Грина к вычислению амплитуды дельбрюковского рассеяния в экранированном кулоновском поле. В модели Томаса — Ферми радиус экранировки $r_c \sim (m\alpha)^{-1}Z^{-1/3}$. Характерный прицельный параметр $\rho \sim 1/\Delta$. Если $R \ll 1/\Delta \ll r_c$ (R — радиус ядра), то экранировка несущественна и амплитуда совпадает с амплитудой в кулоновском поле. Если $1/\Delta \sim r_c \gg 1/m$, то необходимо учитывать экранировку. При таких передачах вклад в амплитуду дают прицельные параметры ρ от $1/m$ до r_c. Соответствующие орбитальные моменты $l \sim \omega\rho \gg 1$ и справедливо квазиклассическое приближение.

Пусть фотон с импульсом $\mathbf{k}_1$ рождает в точке $\mathbf{r}_1$ пару виртуальных частиц, которая в точке $\mathbf{r}_2$ превращается в фотон с импульсом $\mathbf{k}_2$. Из соотношения неопределенности следует, что время жизни виртуальной электрон-позитронной пары есть $\tau \sim |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \sim \omega/(m^2+\Delta^2)$. Поэтому при $\omega/m^2 \gg r_c$ углы между векторами $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{r}_2$ и $-\mathbf{r}_1$ малы. Именно такие энергии фотонов мы и будем рассматривать. Согласно правилам Фейнмана, в представлении Фарри амплитуда дельбрюковского рассеяния есть

$$M = 2i\alpha\int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2\exp\left[i(\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1 - \mathbf{k}_2\mathbf{r}_2)\right]\int d\varepsilon\,\mathrm{Sp}\,\hat{e}_2^* G(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1|\omega-\varepsilon)\hat{e}_1 G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2|-\varepsilon), \qquad (19)$$

где e_1^μ и e_2^μ — векторы поляризации начального и конечного фотонов, $\hat{e} = e^\mu\gamma_\mu$. В формуле (19) необходимо вычесть из подынтегрального выражения его значение при нулевом поле. Мы будем предполагать такое вычитание сделанным, в явном виде мы проведем его в окончательном ответе. Основной вклад в амплитуду M возникает от интегрирования по ε от m до $\omega-m$. Таким образом, $\lambda = +1$ в первой функции Грина в (19) и $\lambda = -1$ во второй. Используя представление (2), удобно переписать формулу (19) в виде

$$M = i\alpha \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \exp\left[i\left(\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1 - \mathbf{k}_2\mathbf{r}_2\right)\right] \int d\varepsilon \,\mathrm{Sp}\left[(2\mathbf{e}_2^*\mathbf{p}_2 - \hat{e}_2^*\hat{k}_2)D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1|\omega-\varepsilon)\right] \times$$
$$\times \left[(2\mathbf{e}_1\mathbf{p}_1 + \hat{e}_1\hat{k}_1)D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2|-\varepsilon)\right] + 2i\alpha\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_1 \int d\mathbf{r} \exp\left[i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\mathbf{r}\right] \int d\varepsilon \,\mathrm{Sp}\, D(\mathbf{r}, \mathbf{r}|\varepsilon). \qquad (20)$$

Здесь $\mathbf{p}_{1,2} = -i\nabla_{1,2}$. Последний член в формуле (20) после перенормировки не дает вклада в амплитуду при высоких энергиях, так как этот член не зависит от ω, а зависит только от передачи импульса Δ. Амплитуда же при $\omega \gg \Delta$ пропорциональна ω (см., например, [7]). Дальнейшие вычисления состоят в следующем. Подставляем (14) в (20), проводим дифференцирование и берем след по γ-матрицам. Ось сферической системы координат удобно направить по $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$. С учетом малости углов имеем $d\Omega_{1,2} \approx \theta_{1,2} d\theta_{1,2} d\phi_{1,2} = d\boldsymbol{\theta}_{1,2}$, причем $(\boldsymbol{\theta}_{1,2}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = 0$. Функции Бесселя зависят от векторов $\boldsymbol{\theta}_{1,2}$ только в комбинации $\theta = |\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2|$. Перейдем к переменным $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2$ и $\boldsymbol{\xi} = r_1\boldsymbol{\theta}_1 - r_2\boldsymbol{\theta}_2$. После этого интеграл по $d\xi$ легко берется. Далее для простоты изложения мы рассмотрим вычисления при нулевой передачи импульса ($\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}$), а затем приведем результат аналогичных вычислений для случая $\Delta \sim 1/r_c$.

3.1. Нулевые передачи импульса

Полагаем $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$, $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$ и берем интеграл по $d\boldsymbol{\theta}$ с помощью соотношения ([15, стр. 732])

$$\int_0^\infty dx\, x e^{icx^2} J_\nu(ax) J_\nu(bx) = \frac{ie^{i\pi\nu/2}}{2c} J_\nu\left(\frac{ab}{2c}\right) \exp\left[\frac{-i(a^2+b^2)}{4c}\right]$$

и получающихся из него дифференцированием по параметру. Сделаем замену переменных в интегральном представлении для функций Грина:

$$l_1 = \kappa_1\rho_1, \qquad l_2 = \kappa_2\rho_2,$$

где

$$\kappa_1 = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}, \qquad \kappa_2 = \sqrt{(\omega-\varepsilon)^2 - m^2}.$$

После этого перейдем от переменных r_1 и r_2 к переменным s и x:

$$r_1 = \frac{\kappa_1\kappa_2}{m^2\omega s x}, \qquad r_2 = \frac{\kappa_1\kappa_2}{m^2\omega s(1-x)}.$$

В результате интеграл по ε становится элементарным, и мы приходим к следующему выражению:

$$M = \frac{2i\alpha\omega m^2}{3} \int_0^1 \frac{dx}{x(1-x)} \left[1 + \frac{1}{x(1-x)}\right] \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \rho_1\rho_2 d\rho_1 d\rho_2 \int_0^\infty \frac{ds}{s} \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{i}{2}\left[m^2(\rho_1^2 + \rho_2^2)s - \frac{1}{sx(1-x)}\right]\right\} \sin^2\left[\delta(\rho_2) - \delta(\rho_1)\right] J_0(m^2 s\rho_1\rho_2). \qquad (21)$$

Здесь мы вычли из подынтегрального выражения его значение при поле, равном нулю. Сделаем замену переменных:

$$\rho_1 = \rho e^{-\tau/2}, \qquad \rho_2 = \rho e^{\tau/2}.$$

Повернем контур интегрирования по переменной s так, чтобы он проходил от нуля до $i\infty$, и возьмем интеграл по s с помощью соотношения ([15, стр. 739])

$$\int_0^\infty \exp\left[-\frac{x(a^2+b^2)}{2} - \frac{1}{2x}\right] I_\nu(abx)\frac{dx}{x} = 2I_\nu(a)K_\nu(b), \quad a < b,$$

где $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ — модифицированные функции Бесселя соответственно первого и третьего рода. В результате получаем

$$M = \frac{8i\alpha\omega m^2}{3}\int_0^1 \frac{dx}{x(1-x)}\left[1+\frac{1}{x(1-x)}\right]\int_0^\infty \rho^3 d\rho \times$$
$$\times \int_0^\infty d\tau \sin^2\left[\delta(\rho e^{\tau/2}) - \delta(\rho e^{-\tau/2})\right] I_0(y_1)K_0(y_2), \tag{22}$$

где $y_{1,2} = m\rho\exp[\mp\tau/2]/\sqrt{x(1-x)}$.

Разобьем область интегрирования по τ на две части: от 0 до τ_0 и от τ_0 до ∞, где $1 \gg \tau_0 \gg 1/mr_c$. Начнем вычисления со второй области. В ней основной вклад дают прицельные параметры $\rho < r_c$ и поле можно считать кулоновским. Вычисляя интегралы по x и ρ, а затем по τ, имеем

$$M_2 = i\,\frac{28\alpha\omega}{9m^2}\int_{\tau_0}^\infty d\tau\,\frac{\operatorname{ch}\tau\sin^2(Z\alpha\tau)}{\operatorname{sh}^3\tau} =$$
$$= -i\,\frac{28\alpha\omega(Z\alpha)^2}{9m^2}\left[\operatorname{Re}\psi(1-iZ\alpha) + C + \ln 2\tau_0 - \frac{3}{2}\right]. \tag{23}$$

Здесь $\psi(x) = d\ln\Gamma(x)/dx$, $C = 0.577\ldots$ — постоянная Эйлера.

В первой области мала разность $\delta(\rho e^{\tau/2}) - \delta(\rho e^{-\tau/2})$, и по ней можно провести разложение. Следовательно, эта область дает вклад только в низшем борновском приближении по взаимодействию с внешним полем. Разобьем область интегрирования по переменной ρ на две части: от нуля до ρ_0 и от ρ_0 до ∞, где $r_c \gg \rho_0 \gg 1/m\tau_0$. В интеграле от нуля до ρ_0 поле можно считать кулоновским и интегралы легко вычисляются. Соответствующий вклад равен

$$M_{11} = i\,\frac{28\alpha\omega(Z\alpha)^2}{9m^2}\left[\ln(m\tau_0\rho_0) + C - \frac{11}{21}\right]. \tag{24}$$

В интеграле от ρ_0 до ∞ можно воспользоваться асимптотиками функций Бесселя $I_0(x)$ и $K_0(x)$ при больших значениях аргумента, а интегрирование по τ распространить до бесконечности. В результате находим

$$M_{12} = i\,\frac{28\alpha\omega}{9m^2}\int_{\rho_0}^\infty \rho\left(\frac{\partial\delta}{\partial\rho}\right)^2 d\rho. \tag{25}$$

Складывая (23), (24) и (25), получаем

$$M = i\,\frac{28\alpha\omega(Z\alpha)^2}{9m^2}\left[\ln\left(\frac{m\rho_0}{2}\right) + \frac{1}{(Z\alpha)^2}\int\limits_{\rho_0}^{\infty}\rho\left(\frac{\partial\delta}{\partial\rho}\right)^2 d\rho - \operatorname{Re}\psi(1-iZ\alpha) + \frac{41}{42}\right]. \tag{26}$$

В этом выражении при $\rho \ll r_c$ интеграл равен $\ln(r_c/\rho_0)+A$, где A — некоторая константа порядка единицы. Поэтому M в (26) от ρ_0 не зависит, и в качестве ρ_0 можно выбрать, например, $\rho_0 = 2/m$. Таким образом, мы получили выражение для амплитуды дельбрюковского рассеяния вперед для произвольного экранированного потенциала. Конкретное значение константы зависит от вида потенциала. Мы рассмотрим случай потенциала Мольер [16], который аппроксимирует потенциал в модели Томаса — Ферми:

$$V(r) = -\frac{Z\alpha}{r}\sum_{i=1}^{3}\alpha_i e^{-\beta_i r}, \tag{27}$$

где $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.55$, $\alpha_3 = 0.35$, $\beta_i = mZ^{1/3}b_i/121$, $b_1 = 6$, $b_2 = 1.2$, $b_3 = 0.3$. Для этого потенциала фаза рассеяния равна

$$\delta(\rho) = Z\alpha\sum_{i=1}^{3}\alpha_i K_0(\beta_i\rho). \tag{28}$$

Подставляя это выражение в (26), находим окончательный результат для амплитуды дельбрюковского рассеяния вперед в потенциале Мольер:

$$M = i\,\frac{28\alpha\omega(Z\alpha)^2}{9m^2}\left[\ln(183Z^{-1/3}) - C - \operatorname{Re}\psi(1-iZ\alpha) - \frac{1}{42}\right]. \tag{29}$$

Как известно, мнимая часть амплитуды рассеяния фотона вперед связана с полным сечением σ рождения электрон-позитронной пары фотоном в поле соотношением $\sigma = \operatorname{Im} M/\omega$. Поэтому формула (29) согласуется с результатом работы [17] для полного сечения рождения пары в экранирующем потенциале. Обратим внимание на то, что реальная часть амплитуды дельбрюковского рассеяния вперед в экранированном потенциале равна нулю в отличие от случая неэкранированного кулоновского потенциала [9, 2].

3.2. Ненулевые передачи импульса

При ненулевых передачах импульса рассмотрение удобно проводить в терминах спиральных амплитуд. Выберем векторы поляризаций в виде

$$\mathbf{e}^{\pm}_{1,2} = \left([\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\nu}_{1,2}] \pm i\boldsymbol{\lambda}\right)/\sqrt{2}, \quad \boldsymbol{\lambda} = [\boldsymbol{\nu}_1\boldsymbol{\nu}_2]/\left|[\boldsymbol{\nu}_1\boldsymbol{\nu}_2]\right|, \tag{30}$$

где $\boldsymbol{\nu}_{1,2} = \mathbf{k}_{1,2}/\omega$. Существуют две независимые амплитуды: $M^{++} = M^{--}$ и $M^{+-} = M^{-+}$. В терминах линейных поляризаций в силу сохранения четности амплитуда отлична от нуля только тогда, когда векторы поляризаций начального и конечного фотонов лежат оба в плоскости рассеяния ($M^{\parallel}$) или перпендикулярны ей ($M^{\perp}$). При этом

$$M^{\parallel} = M^{++} + M^{+-}, \qquad M^{\perp} = M^{++} - M^{+-}.$$

При нулевой передаче импульса амплитуда M^{+-} равна нулю в силу сохранения проекции момента импульса на направление движения начального фотона, а амплитуда M^{++} совпадает с (29). Так же, как в случае с нулевой передачей импульса, разобьем область интегрирования по параметру τ на две: от 0 до τ_0 и от τ_0 до ∞, где $1 \gg \tau_0 \gg 1/mr_c$. Угол θ_0 между векторами $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ равен $\theta_0 = \Delta/\omega \ll m/\omega$. В области интегрирования от τ_0 до ∞ поле можно считать кулоновским, а углом θ_0 пренебречь. В результате вклад этой области в амплитуду M^{++} совпадает с M_2 (29), а вклад в амплитуду M^{+-} равен нулю. В области интегрирования по τ от 0 до τ_0 снова разобьем область интегрирования по переменной ρ на две: от нуля до ρ_0 и от ρ_0 до ∞, где $r_c \gg \rho_0 \gg 1/m\tau_0$. В интеграле от нуля до ρ_0 поле также можно считать кулоновским и пренебречь θ_0. Вклад этой области в M^{++} совпадает с M_{11} (24), а вклад в M^{+-} равен нулю. Экранировка влияет на величину интеграла только в последней области от ρ_0 до ∞. В этой области при интегрировании по углам основной вклад дают $\theta \sim \rho/r \sim \rho m^2/\omega \gg m/\omega \gg \theta_0$. Аргумент функций Бесселя в функциях Грина равен $l\theta \sim \omega\rho\theta \sim (m\rho)^2 \gg 1$, и можно воспользоваться асимптотиками функций Бесселя при больших значениях аргумента. Необходимо удержать два первых члена в их асимптотическом разложении, так как первый член компенсируется в предэкспоненте. После этого интегралы по θ и остальным переменным легко берутся, и для вклада этой области в амплитуду M^{++} получаем

$$M_{12}^{++} = i\,\frac{28\alpha\omega}{9m^2}\int\limits_{\rho_0}^{\infty}\rho\left(\frac{\partial\delta}{\partial\rho}\right)^2 J_0(\rho\Delta)d\rho. \tag{31}$$

Складывая (31), (23) и (24), имеем

$$M^{++} = i\,\frac{28\alpha\omega(Z\alpha)^2}{9m^2}\left[(Z\alpha)^{-2}\int\limits_{2/m}^{\infty}\rho\left(\frac{\partial\delta}{\partial\rho}\right)^2 J_0(\rho\Delta)\,d\rho - \operatorname{Re}\psi(1-iZ\alpha) + \frac{41}{42}\right]. \tag{32}$$

Подставляем (28) в (32) и берем интеграл по ρ с помощью формулы (6.578 (10)) [15]. В результате находим для потенциала Мольер окончательное выражение для амплитуды M^{++}:

$$M^{++} = i\,\frac{28\alpha\omega(Z\alpha)^2}{9m^2}\left\{-\operatorname{Re}\psi(1-iZ\alpha) - C + \frac{41}{42} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\sum_{i,j}\alpha_i\alpha_j\left[\ln\left(\frac{\beta_i\beta_j}{m^2}\right) + \frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\ln\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)\right]\right\}, \tag{33}$$

где $u = (\Delta^2 + \beta_i^2 + \beta_j^2)/2\beta_i\beta_j$. При $\Delta \ll 1/r_c$ формула (33) переходит в (29). При $m \gg \Delta \gg 1/r_c$ формула (33) переходит в

$$M^{++} = i\,\frac{28\alpha\omega(Z\alpha)^2}{9m^2}\left\{\ln\frac{m}{\Delta} - \operatorname{Re}\psi(1-iZ\alpha) - C + \frac{41}{42}\right\}, \tag{34}$$

которая совпадает с результатом работ [8, 9, 2]. Аналогично (31), для амплитуды M^{+-} имеем

$$M^{+-} = i\,\frac{4\alpha\omega}{9m^2}\int\limits_0^{\infty}\rho\left(\frac{\partial\delta}{\partial\rho}\right)^2 J_2(\rho\Delta)\,d\rho. \tag{35}$$

В этой формуле интегрирование по ρ от ρ_0 до ∞ было заменено на интегрирование от нуля до ∞, так как область от нуля до ρ_0 не дает вклада. Для потенциала Мольер получаем

$$M^{+-} = i\,\frac{2\alpha\omega(Z\alpha)^2}{9m^2}\left\{1 + \frac{1}{\Delta^2}\sum_{i,j}\alpha_i\alpha_j\left[(\beta_i^2-\beta_j^2)\ln\frac{\beta_i}{\beta_j} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{u(\beta_i^2+\beta_j^2)-2\beta_i\beta_j}{\sqrt{u^2-1}}\ln\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)\right]\right\}. \qquad (36)$$

При $\Delta \to 0$ амплитуда M^{+-} (36) стремится к нулю. При $m \gg \Delta \gg 1/r_c$ формула (36) переходит в

$$M^{+-} = i\,\frac{2\alpha\omega(Z\alpha)^2}{9m^2}, \qquad (37)$$

которая совпадает с результатом работ [8, 9, 2].

Таким образом, на примере вычисления амплитуд дельбрюковского рассеяния в экранированном кулоновском потенциале мы показали, что квазиклассическая функция Грина, полученная в нашей работе для случая произвольного убывающего центрально-симметричного потенциала, может быть эффективно использована при рассмотрении процессов квантовой электродинамики при высоких энергиях.

Мы выражаем благодарность В. М. Каткову и В. М. Страховенко за полезные обсуждения нашей работы.

Литература

1. A. I. Milstein and V. M. Strahovenko, Phys. Lett. A **95**, 135 (1983).
2. А. И. Мильштейн, В. М. Страховенко, ЖЭТФ **85**, 14 (1983).
3. A. I. Milstein and V. M. Strahovenko, Phys. Lett. A **90**, 447 (1982).
4. H. Olsen, L. C. Maximon, and H. Wergeland, Phys. Rev. **106**, 27 (1957).
5. A. Sommerfeld and A. W. Maue, Ann. der Phys. **22**, 629 (1935); W. H. Furry, Phys. Rev. **46**, 391 (1934).
6. L. Meitner, H. Kösters (and M. Delbrück), Z. Phys. **84**, 137 (1933).
7. A. I. Milstein and M. Schumacher, Phys. Rep. **243**, 183 (1994).
8. M. Cheng and T. T. Wu, Phys. Rev. **182**, 1873 (1969).
9. M. Cheng and T. T. Wu, Phys. Rev. D **2**, 2444 (1970).
10. M. Cheng and T. T. Wu, Phys. Rev. D **5**, 3077 (1972).
11. A. I. Milstein and R. Zh. Shaisultanov, J. Phys. A **21**, 2941 (1988).
12. A. I. Milstein, P. Rullhusen, and M. Schumacher, Phys. Lett. B **247**, 481 (1990).
13. A. Baumann et al., Nucl. Phys. A **536**, 87 (1992).
14. P. Papatzacos and K. Mork, Phys. Rep. **21**, 81 (1975).
15. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, Москва (1963).
16. G. Z. Moliere, Naturforsch **2a**, 133 (1947).
17. H. Davies, H. A. Bethe, and L. C. Maximon, Phys. Rev. **93**, 788 (1954).