таторы столкнулись в начале 30-х годов при исследовании β-излучения с помощью магнитных спектрометров. В спектрах электронов проявились монохроматические линии, соответствующие электронам с K- и L-оболочек радиоактивных атомов.

В 1934 году А.А.Алиханов и М.С.Козодаев впервые обнаружили образование электронно-позитронных пар внутренней гамма-конверсии. А аналогичное явление передачи большей части энергии позитронного уровня орбитальному электрону так и осталось не обнаруженным, по-видимому, из-за сложности идентификации редкого процесса ($\simeq 10^{-5}$) с непрерывным спектром энергий.

В случае передачи энергии орбитальному электрону мюония требуется экспериментально обнаружить, что редкие случаи вылета быстрого электрона сопровождаются вылетом соответствующего позитрона.

Литература

[1] *Гордеев В.А., Киселев А.Ю., Абазов В.М. и др.* //Письма в ЖЭТФ. 1994. 59. 565.

[2] *Гордеев В.А., Савченко О.В., Абазов В.М. и др.* //Письма в ЖЭТФ. 1993. 57. 262.

ИНДУЦИРОВАННЫЕ ПАРОЙ ИНСТАНТОН–АНТИИНСТАНТОН ЭФФЕКТЫ В КХД

П.Г.Сильвестров, С.В.Фалеев

Физический институт, Новосибирск, Россия

Аннотация

Найдена индуцированная инстантонами асимптотика ряда теории возмущений для сечения аннигиляции электрон–позитронной пары в адроны и адронной ширины τ-лептона. В случае, когда число безмассовых фермионов совпадает с числом цветов ($N_f = N_c$), вклад инстантона конечен и вычисляется безмодельно вне рамок теории возмущений. Индуцированный инстантонами ряд теории возмущений оказывается усилен как $(n+10)!$ и в области промежуточной асимптотики $n < 15$ вполне может конкурировать с вкладом ренормалонов. К сожалению, анализ поправок $\sim 1/n$ показывает, что найденное с помощью инстантонов асимптотическое выражение при $n \sim 10$ может быть использовано в лучшем случае как оценка по порядку величины. Несмотря на то, что использованный метод буквально работает только при $N_f \leq N_c$, полученные асимптотические формулы могут быть использованы вплоть до энергий $E \sim 15$ ГэВ. Вклад инстантонов в $R_{\tau\to hadrons}$ оказывается несоразмерно большим, что,с одной стороны,указывает на невозможность $ab-initio$ вычисления инстантонного вклада при столь низких энергиях, но,с другой стороны, позволяет усомниться в возможности надежного извлечения α_s из $R_{\tau\to hadrons}$.

EFFECTS IN QCD INDUCED BY BYSTANTON-ANTIINSTANTON PAIR

P.G.Silvestrov, S.V.Faleev

Budker Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk, Russia

A b s t r a c t

The asymptotics of the perturbation theory series induced by instantons was found for the annihilation cross section of the electron – positron pair into hadrons and for hadron width of τ-lepton. When the number of massless fermions coincides with the number of colors ($N_f = N_c$) the contribution of instantons is found to be finite and calculated in the model independent way beyond the perturbation theory. The instanton induced perturbation series appeared to be enhanced as $(n+10)!$ and becomes compatible with the contribution of renormalons in the region of the intermediate asymptotics $n < 10$. Although this method is strictly proved only for $N_f \le N_c$ the asymptotic formulae can be applied up to energies $E \sim 15$ Gev. The instanton contribution in $R_{\tau\to hadrons}$ appeared to be extremely large. This points out the impossibility to calculate ab initio the instanton contribution at small energied and on the other hand it makes ambiguously the extraction α_s from $R_{\tau\to hadrons}$.

1 Введение. Инстантон – ренормалон

Квазиклассический метод вычисления асимптотики рядов теории возмущений был предложен Л.Н.Липатовым [1] уже почти 20 лет назад. По-видимому, наиболее красивой частью этого метода является то, что для вычисления асимптотики вообще не приходится рисовать ни одной диаграммы теории возмущений. Вычисляется вклад в функциональный интеграл от одной "наиболее важной" классической конфигурации (инстантон), его удается связать сразу с суммой огромного количества диаграмм Фейнмана.

Вскоре после работы Липатова, однако, был найден другой механизм, приводящий к факториальному росту членов ряда теории возмущений [2, 3]. Оказывается, что в теориях с бегущей константой связи можно указать одну очень простую цепочку диаграмм, вклад которой в высокие порядки теории возмущений оказывается намного больше всех остальных вкладов. По аналогии с инстантоном такая цепь диаграмм была названа ренормалоном.

В данной работе мы собираемся вычислить индуцированный инстантоном вклад в асимптотику ряда теории возмущений для сечения аннигиляции электрон–позитронной пары в адроны и адронной ширины τ–лептона. Как мы увидим, вклад инстантонов для членов ряда с номерами $n < 15$ вполне может конкурировать со вкладом ренормалонов.

В последние годы вновь возродился интерес к изучению асимптотического поведения рядов теории возмущений в КХД и КЭД (см., например, [4]-[9]). Однако, основные усилия были направлены на изучение эффектов, связанных с ренормалонами.

Различают два вида ренормалонов – ультрафиолетовый и инфракрасный [2]. Типичный вклад ультрафиолетового ренормалона в теорию возмущений (скажем, для $R_{e^+e^-\to hadrons}$) выглядит следующим образом:

$$R_{e^+e^-\to hadrons} = \sum R_n \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^n \ , \ \ R_n \sim (-b)^n n! \ , \qquad (1)$$

где $b = \frac{11}{3}N_c - \frac{2}{3}N_f \approx 10$. В КХД ряд (1) – знакопеременный, и, по крайней мере, его борелевская сумма хорошо определена.

Проблемы с доопределением суммы ряда (1) возникают в КЭД, где коэффициент b отрицателен.

Вклад в асимптотику ряда теории возмущений, связанный с инфракрасным ренормалоном, вообще говоря, зависит от конкретного процесса. Для интересующих нас в этой работе $R_{e^+e^-\to hadrons}$ и $R_{\tau\to hadrons}$ вклад первого инфракрасного ренормалона в далекие члены ряда имеет вид:

$$R_n \sim \left(\frac{b}{2}\right)^n n! \ . \qquad (2)$$

Все проблемы, связанные с асимптотическими рядами, наиболее четко проявляются, если записывать физические величины в виде борелевских интегралов:

$$R_{e^+e^-} = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{4\pi}{\alpha}t\right) F(t)dt \ . \qquad (3)$$

При этом, особенности функции F на плоскости комплексной переменной t оказываются естественными источниками асимптотических рядов теории возмущений. Ультрафиолетовому ренормалону в КХД (1) соответствует сингулярность при отрицательном значении $t = -1/b$. Особенность, соответствующая инфракрасному ренормалону (2), находится вдвое дальше от начала координат, но зато при положительном значении $t = 2/b$. Поэтому члены ряда (2) растут с номером гораздо медленнее, чем члены ряда (1), но зато для инфракрасного ренормалона появляется проблема с выбором правильного способа обхода сингулярности на положительной полуоси в интеграле в (3). Различные способы такого обхода будут приводить к различным степенным поправкам $\delta R \sim 1/q^4$.

Задача об инфракрасном ренормалоне непосредственно связана с широко известной проблемой полюса Ландау в асимптотически свободных теориях. Более того, особенность борелевского образа $F(t)$ (3), связанная с инфракрасным ренормалоном, буквально совпадает с полюсом Ландау, возникающим при учете обмена мягким глюоном в фермионной петле (см. примеры соответствующих ренормалону диаграмм Фейнмана в любой из работ

[2]-[14]). В этом смысле можно сказать, что основные нерешенные проблемы КХД (конфайнмент) также спрятаны в проблеме инфракрасного ренормалона[1].

Как мы уже сказали, другой подход для асимптотической оценки рядов теории возмущений, основанный на рассмотрении выделенных ("классических") больших флуктуаций в функциональном пространстве, которые и дают главный вклад в далекие члены ряда, был развит Л.Н.Липатовым [1]. Естественным примером такой большой флуктуации в КХД является пара инстантон–антиинстантон. Общая форма инстантонной асимптотики имеет вид:

$$R_{nIA} \sim (n + 4N_c)! \qquad (5)$$

(здесь мы также не указываем ни общую константу, которая может быть довольно большой, ни множитель n^γ с $\gamma \sim 1$). На языке борелевского образа паре инстантон–антиинстантон соответствует полюс в очень далекой точке $t = 1$, но зато вычет в этом полюсе оказывается аномально большим $\sim (4\pi/\alpha_s)^{4N_c}$.

Мы видим, что, хотя ренормалоны (1), (2) доминируют при очень больших n ($n > 15$), инстантонный вклад вполне может оказаться главным в промежуточной области $n = 5 \div 15$. Если это действительно произойдет, никто никогда не увидит чисто ренормалонную асимптотику (1) в точно вычисленных членах ряда теории возмущений.

Конечно, известные $3\div4$ члена ряда (для β-функции $R_{e^+e^-\to hadrons}$

[1]На самом деле ситуация с ультрафиолетовым ренормалоном также совсем не безоблачна. Выписанный более аккуратно, чем (1), вклад ультрафиолетового ренормалона имеет вид:

$$R_n = An^\gamma(-b)^n n! \ , \qquad (4)$$

где константа $\gamma \sim 1$. Традиционно считалось, что главный вклад в ультрафиолетовый ренормалон дает диаграмма с обменом одной одетой глюонной линией, та же, что и для инфракрасного ренормалона. Однако, в недавней работе [10] Вайнштейн и Захаров показали, что как раз вклад такой диаграммы в ультрафиолетовый ренормалон оказывается мал, а основными являются вклады диаграмм с двумя, тремя и т. д. одетыми линиями. В результате в настоящее время можно считать надежно вычисленным только величину показателя степени γ в (4) и совершенно не ясно, как искать общий множитель A.

или $R_{\tau\to hadrons}$) оказываются много меньше, чем оценка (5), и вопрос, при каких значениях n ряд выходит на асимптотику, остается открытым. Единственный способ, позволяющий разобраться с этим вопросом, состоит в рассмотрении поправок $\sim 1/n$ к основной асимптотике. Нам в данной работе удалось явно найти (и просуммировать) две серии поправок к индуцированному инстантонами вкладу в асимптотику R_{nIA}. Первые усилены как $(N_c^2 \ln(n)/n)^k$, вторые – как $(N_c^2 \ln(N_c)/n)^k$. Окончательные выражения для R_n приведены ниже (45), (52). Действительно, учет $\sim 1/n$ поправок уменьшает асимптотическое предсказание, причем, возможно, довольно сильно, а значит, "улучшает" согласие с "экспериментом". Однако, главным является не это. К сожалению, мы видим, что поправки к асимптотике ведут себя как $\sim N_c^2/n$. Это означает, что даже при $n \sim 10$ асимптотическое выражение для члена ряда может быть использовано в лучшем случае как оценка по порядку величины.

До сих пор только в одной работе [11] была рассмотрена инстантонная асимптотика для $R_{e^+e^-\to hadrons}$. Многие из технических приемов, использованных Я. И. Балицким [11], оказываются очень полезными в нашей работе, однако, ему так и не удалось правильно вычислить ни асимптотику ряда теории возмущений, ни непертурбативный вклад пары в наиболее интересном случае $N_f = N_c$. Вклад инстантонов в асимптотику ряда теории для простого коррелятора двух глюонных токов $j \sim \alpha_s [G^a_{\mu\nu}]^2$ был также рассмотрен одним из авторов данной работы в недавней работе [16].

Так же, как в случае с инфракрасными ренормалонами (2), все члены ряда (5) имеют одинаковый знак. Однако, проблема суммирования последнего кажется не такой безнадежной. Вслед за Г.т'Хофтом [2] автор работы [11] предложил записать вклад пары инстантон–антиинстантон в виде борелевского интеграла, рассматривая действие пары как коллективную переменную. При этом почти не взаимодействующие, далеко разнесенные инстантон и антиинстантон отвечают за сингулярную часть борелевской функции, в то время как плохо определенные конфигурации, состоящие из сильно перекрывающихся, сравнимых по размеру псевдочастиц, дают вклад только в гладкую ее часть. С другой стороны, гладкую часть борелевской функции можно получить, вычислив точно несколько первых членов ряда теории возмущений. В простом квантово-механическом примере (ангармонический осциллятор) аккуратное вычитание из сингулярной части борелевского интеграла вклада "разреженного инстантонного газа" позволило вычислить конечный непертурбативный вклад пары инстантон–антиинстантон [15]. В КХД при $N_f = N_c$ борелевский интеграл расходится лишь логарифмически, и непертурбативный вклад может быть найден, если интегрирование по размерам инстантона обрезать на естественном пределе $\rho \sim 1/\Lambda_{KHD}$.

Конечно, утверждение о том, что вклад инстантонов в физические величины при $N_f = N_c$ конечен и может быть вычислен безмодельно сам по себе, есть заметный результат. Однако, с точки зрения сравнения с экспериментом, результаты нашей работы не вызывают большого оптимизма. Как мы уже сказали, вплоть до $n > 10$ асимптотическая оценка для вклада инстантонов работает в лучшем случае по порядку величины. С другой стороны, при не слишком больших n инстантоны могут успешно заэкранировать, в принципе, вычислимый вклад ренормалонов. Небольшим утешением служит рассмотренная в главе 4 возможность экстраполировать наши, найденные в случае $N_f = N_c$, асимптотические формулы вплоть до энергий $\sim 10 - 15G \uparrow v$, где, по крайней мере, высокие порядки теории возмущений не тонут на фоне "стандартных" степенных поправок. Более актуальным является вопрос о вкладе инстантонов в $R_{\tau\to hadrons}$ (глава 5) в связи с непрекращающимися попытками извлечь из этой величины значение $\alpha_s(m_\tau)$. К сожалению, и здесь мы можем сделать только отрицательное предсказание. Даже забывая про асимптотику ряда теории возмущений (на которую все-таки надо еще выйти), мы видим, что чисто непертурбативный вклад инстантонов в $R_{\tau\to hadrons}$ оказывается на один–два порядка больше, чем нужно. Даже если учесть, что при энергии $m_\tau c^2 \sim 2G \uparrow v$ наш результат опять оказывается всего лишь оценкой по порядку величины, возможность извлечения величины константы связи сильного взаимодействия α_s из ширины τ-лептона кажется нам очень сомнительной.

2 Что такое пара инстантон–антиинстантон?

Интересующие нас физические величины, такие как $R_{e^+e^-\to hadrons}$, с помощью аналитического продолжения естественно выражаются через корреляционные функции соответствующих токов в евклидовом пространстве:

$$R_{e^+e^-\to hadrons}(q^2) = 12\pi Im\ \Pi(-q^2 - i\varepsilon) \quad , \tag{6}$$

$$\Pi_{\mu\nu}(q^2) = \Pi(q^2)(q_\mu q_\nu - q^2\delta_{\mu\nu}) = \int d^4x e^{iqx} \langle j_\mu(x) j_\nu(0)\rangle \quad ,$$

где $j_\mu = \sum_{flawors} e_f \Psi_f^+ \gamma_\mu \Psi_f$. Поэтому наша задача состоит в том, чтобы научиться вычислять вклад пары инстантон–антиинстантон в различные корреляторы. Как было отмечено выше, сильновзаимодействующие (сильно перекрывающиеся) пары дают вклад только в гладкую часть борелевского образа F (3) и поэтому не влияют на асимптотику ряда теории возмущений. Сингулярность борелевской функции возникает при учете вклада почти не взаимодействующих псевдочастиц. Именно поэтому и оказывается возможным получить надежные предсказания для асимптотики, исходя из такого плохо определенного объекта, как пара инстантон–антиинстантон. Конкретно в нашей задаче наиболее важными оказываются такие конфигурации, в которых маленький инстантон расположен глубоко внутри очень большого антиинстантона (и наоборот)[11]. При этом размер маленького инстантона определяется внешним импульсом коррелятора (6) $q\rho \sim 1$. Размер же антиинстантона (так же, как и расстояние между псевдочастицами $R \sim \rho_A$) определяется тем, насколько тесно мы хотим приблизиться к сингулярности на плоскости борелевского параметра.

Так как мы интересуемся только первым членом в потенциале взаимодействия между далеко разнесенными инстантоном и антиинстантоном, в качестве классического поля можно использовать простую сумму полей инстантона и антиинстантона:

$$A_\mu = U_A A_\mu^A U_A^+ + U_I A_\mu^I U_I^+ \quad , \tag{7}$$

где U_A, U_I — постоянные матрицы поворота в пространстве цветов $SU(N_c)$. С помощью тривиального калибровочного преобразования можно также сделать $U_I = 1$. Для "маленького" инстантона естественно выбрать сингулярную калибровку:

$$A_\mu^I = \frac{\overline{\eta}_{\mu\nu}(x - x_I)_\nu \rho_I^2}{(x - x_I)^2((x - x_I)^2 + \rho_I^2)} \quad , \tag{8}$$

где $\overline{\eta}_{\mu\nu} \equiv \tau^a \overline{\eta}^a_{\mu\nu}$, а матрицы τ^a — это обычные матрицы Паули, расположенные в левом верхнем (остальные элементы зануляются) 2×2 углу $N \times N$ матрицы, описывающей глюонные поля.

До того, как мы добавили вторую псевдочастицу к (8), сингулярность в точке $x = x_I$ была чисто калибровочной. Для того, чтобы не заработать нефизических сингулярностей в сумме (7), необходимо выбрать для антиинстантона такую калибровку, в которой A_μ^A зануляется в точке $x = x_I$. Например, можно немножко повернуть обычный БПСТ антиинстантон:

$$A_\mu^A = S\left[\frac{\overline{\eta}_{\mu\nu}(x - x_A)_\nu}{(x - x_A)^2 + \rho_A^2}\right] S^+ + iS\partial_\mu S^+ \quad . \tag{9}$$

Вблизи центра инстантона матрица поворота S, удовлетворяющая поставленному условию, имеет вид:

$$S = e^{i\Theta} \quad , \quad \Theta = B_\mu(x - x_I)_\mu + C_{\mu\nu}(x - x_I)_\mu(x - x_I)_\nu \quad , \tag{10}$$

где $B_\mu = -\frac{\overline{\eta}_{\mu\nu}R_\nu}{R^2+\rho_A^2} = -A_\mu^A(x = x_I)$, $R_\mu = (x_A - x_I)_\mu$ и $C_{\mu\nu} = C_{\nu\mu}$ – произвольный симметричный тензор.

Непосредственное вычисление классического действия для инстантон-антиинстантонной конфигурации (7-9) приводит к известному диполь-дипольному взаимодействию псевдочастиц:

$$S_{IA} = \frac{4\pi}{\alpha_s}\{1 - \xi h\} \quad , \ \xi = \frac{\rho_I^2\rho_A^2}{(R^2 + \rho_A^2)^2} \ , \ h = 2|TrO|^2 - TrOO^+ \ , \tag{11}$$

где O — это 2×2 матрица, стоящая в верхнем левом углу матрицы поворота $U = U_I^+ U_A$ (7).

Наиболее ярко наличие инстантонов сказывается на поведении легких фермионов. В поле пары инстантон–антиинстантон у оператора Дирака $\hat{D}$ для каждого безмассового аромата естественно появляется по две собственные функции $\Psi_\pm$ с аномально маленькими собственными значениями $\lambda_\pm$. Для интересующего нас случая слабо взаимодействующих инстантона и антиинстантона естественно искать эти собственные функции в виде линейных комбинаций невозмущенных фермионных нулевых мод для отдельных псевдочастиц. Явные выражения для нулевых мод в поле сингулярного инстантона и регулярного антиинстантона хорошо известны:

$$\Psi_I = \frac{1}{\pi}\frac{\rho_I}{[x^2+\rho_I^2]^{3/2}}\frac{x_\mu \tau_\mu^-}{|x|}\begin{pmatrix}\phi\\ \phi\end{pmatrix}\ ,\ \Psi_A = \frac{1}{\pi}\frac{\rho_A}{[x^2+\rho_A^2]^{3/2}}U\begin{pmatrix}\phi\\ -\phi\end{pmatrix}\ , \tag{12}$$

где $\phi^{\alpha m} = \varepsilon_{\alpha m}/\sqrt{2}$ при $\alpha = 1,2$ и $\phi^{\alpha m} = 0$ при $\alpha > 2$, α – цветовой индекс, $m = 1,2$ – спинорный, $\varepsilon_{\alpha m}$ – антисимметричный тензор, а также $\tau^\pm = (\mp i, \vec{\tau})$. Все корреляционные функции, которые мы собираемся вычислять, набираются на расстояниях $|x - x_I| \sim \rho_I$. В этой области антиинстантонная нулевая мода сильно меняется под действием поля инстантона. Несложно убедиться, что спинорная функция,

$$\Psi_A = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{(x-x_I)^2}{(x-x_I)^2+\rho_I^2}}\frac{\rho_A}{[R^2+\rho_A^2]^{3/2}}U\begin{pmatrix}\phi\\ -\phi\end{pmatrix}\ , \tag{13}$$

действительно является решением уравнения Дирака $\hat{D}_I\Psi_A = 0$ при $x - x_I \sim \rho_I$ и переходит в (12) при $|x - x_I| \gg \rho_I$.

Теперь, диагонализуя оператор Дирака $\hat{D}_{I+A}$ в подпространстве нулевых мод (может оказаться также полезным тождество $\lambda_+ \equiv -\lambda_-$), легко находим

$$\lambda_\pm = \pm\frac{2\rho_I\rho_A}{(\rho_A^2+R^2)^{3/2}}|TrO|\ , \Psi_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_I \pm \frac{TrO^+}{|TrO|}\Psi_A\right)\ . \tag{14}$$

Так как инстантоны взаимодействуют слабо, не связанная с нулевыми модами часть фермионного детерминанта факторизуется. Функция Грина в этом случае также имеет очень простой вид:

$$S(x,y) = S_\lambda + G_I + G_A - G_0 + O(\xi)\ . \tag{15}$$

Здесь $G_0(x-y)$ — "голая" функция Грина, G_I, G_A — функции Грина в поле отдельно инстантона и антиинстантона, а S_λ —

вклад нулевых мод. Из (12-14) находим

$$GFS_\lambda(x,y) = \frac{\Psi_+(x)\Psi_+^+(y)}{\lambda_+} + \frac{\Psi_-(x)\Psi_-^+(y)}{\lambda_-} = $$
$$= \frac{1}{|\lambda|}\left\{\frac{TrO^+}{|TrO|}\Psi_A\Psi_I^+ + \Psi_I\Psi_A^+\frac{TrO}{|TrO|}\right\}\ . \tag{16}$$

Функция Грина в поле пары инстантон–антиинстантон может содержать только слагаемые, переводящие левые фермионы в правые и наоборот, Поэтому из S_λ выпало самое опасное (большое) слагаемое $\Psi_I\Psi_I^+$. В результате оказывается, что вклад нулевых мод во все корреляционные функции имеет тот же порядок величины, что и вклад "квантовой" функции Грина в поле инстантона G_I. Последние два слагаемых в (15) в интересующей нас области $|x - x_I| \sim \rho_I \ll \rho_A$ сокращают друг друга $G_A - G_0 \sim \xi$. Одноинстантонная функция Грина (для простоты положим $x_I = 0$) получена в работе [14]:

$$2\pi^2 G_I(x,y) = \frac{i\gamma_\mu}{\sqrt{T_xT_y}}\frac{(x\tau^-)}{|x|}\left[z_\mu\frac{\rho^2+(\tau^+x)(\tau^-y)}{z^4} + \tau_\mu^+\frac{(z\tau^-)\rho^2}{2z^2T_x}\right]\times$$
$$\times\ \frac{(\tau^+y)}{|y|}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) + (\uparrow.s., x \leftrightarrow y)\ , \tag{17}$$

где $T_x = \rho^2 + x^2$ и $z = x - y$. Мы считаем, что в евклидовом пространстве эрмитовские матрицы γ_μ удовлетворяют соотношению $\{\gamma_\mu\gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$ и, например, свободная функция Грина есть решение уравнения $-i\gamma_\mu\partial_\mu G_0 = \delta(x-y)$.

3 Вычисление корреляционной функции двух токов

Теперь, наконец, мы можем выписать выражение для корреляционной функции двух электромагнитных токов (6):

$$\Pi_{\mu\nu} = 2\int e^{iqx}\exp\left\{\frac{4\pi}{\alpha_s}\xi h\right\}\left\{-\sum_f e_f^2 T_{\mu\nu}(x,0) + \left(\sum_f e_f\right)^2 B_\mu(x)B_\nu(0)\right\}\times$$
$$\times\ [4\xi^{3/2}|TrO|^2]^{N_f}\frac{d(\rho_I)}{\rho_I^5}\frac{d(\rho_A)}{\rho_A^5}dx\,dx_I\,dx_A\,d\rho_I\,d\rho_A\,dU\ , \tag{18}$$

где

$$T_{\mu\nu}(x,y) = Tr\{\gamma_\mu S(x,y)\gamma_\nu S(y,x)\} - Tr\{\gamma_\mu G_0(x,y)\gamma_\nu G_0(y,x)\} ,$$
$$B_\mu(x) = Tr\{\gamma_\mu S(x,x)\} . \qquad (19)$$

Множитель 2 перед интегралом в (18) поставлен для того, чтобы учесть такой же вклад от конфигурации, состоящей из большого инстантона и маленького антиинстантона. Множитель в квадратных скобках $\sim \xi^{3N_f/2}|TrO|^{2N_f}$ учитывает вклад почти нулевых мод (14) в фермионный детерминант. Плотность инстантонов имеет вид [16]-[20]:

$$d(\rho) = \frac{c_1 e^{-N_c c_2 + N_f c_3}}{(N_c-1)!(N_c-2)!}\left(\frac{2\pi}{\alpha_s(\rho)}\right)^{2N_c} \exp\left(\frac{2\pi}{\alpha_s(\rho)}\right) . \qquad (20)$$

В $\overline{MS}$ схеме $c_1 = 2e^{5/6}/\pi^2$,$c_2 = 1.511$,$c_3 = 0.292$,$c_2 - c_3 = 2\ln 2 - 1/6$. До последнего времени во многих работах используются неправильные значения c_2, c_3 (такие, что $c_2 - c_3 = 2\ln 2$), хотя ошибка в [18], допущенная при переходе от регуляризации Паули-Вилларса к $\overline{MS}$ схеме, была замечена еще в работе [20],и 'т Хоофт в следующих работах пользуется уже правильным выражением для $d(\rho)$.

Также мы будем использовать хорошо известную двухпетлевую формулу:

$$\frac{4\pi}{\alpha_s(p)} = b\ln\left(\frac{p^2}{\Lambda^2}\right) + \frac{b'}{b}\ln\left(\ln\left(\frac{p^2}{\Lambda^2}\right)\right) + \dots , \qquad (21)$$

где $b = \frac{11}{3}N_c - \frac{2}{3}N_f$ и $b' = \frac{34}{3}N_c^2 - \frac{13}{3}N_f N_c + N_f/N_c$, что в наиболее интересном случае $N_f = N_c = 3$ дает $b = 9$ и $b' = 64$.

Для того, чтобы свести интеграл (18) к борелевскому виду, нам предстоит проинтегрировать по всем коллективным переменным $x_I, x_A, \rho_I, \rho_A, U$, а также по x при фиксированном значении стоящей в показателе экспоненты комбинации ξh. Эта задача условно может быть разделена на две части. Чисто алгебраически наиболее сложным является вычисление интеграла по x и x_I — из-за сложного вида корреляционной функции фермионных токов в поле инстантона (18,19,17). Однако, с точки зрения физики

наибольшие проблемы возникают при вычислении интегралов по размеру ρ_A и положению центра $R = x_A - x_I$ большого антиинстантона. В формуле (18) учтены два конкурирующих эффекта. Во-первых, плотность антиинстантонов $d(\rho_A) \sim \rho_A^b$ очень быстро растет с их размером, что должно приводить к расходимости интеграла на верхнем пределе. С другой стороны, почти нулевые моды в фермионном детерминанте $\lambda^{2N_f} \sim \rho_I^{2N_f}/\rho_A^{4N_f}$ (14) стремятся подавить вклад очень больших антиинстантонов. В результате величина интеграла (18) (а вместе с ним и предсказательная сила всего нашего метода) очень сильно зависит от количества ароматов легких фермионов N_f. Простой подсчет размерностей (заметим, что интегралы по $d\rho_A$ и d^4x_A не являются независимыми и $\rho_A \sim x_A - x_I$ из-за того, что мы потребовали $\xi h = const$ (11)) показывает, что критическим является значение $N_f = N_c$. Если легких фермионов мало $N_f < N_c$, первый эффект доминирует и интеграл (18) расходится при больших ρ_A. Тем не менее, именно в этом случае из интеграла (18) можно получить хорошо определенную асимптотику ряда теории возмущений. Для вычисления же $\Pi_{\mu\nu}$ при $N_f < N_c$ вне рамок теории возмущений необходимо расширить рассматриваемую физическую модель (например, перейти к рассмотрению инстантонной жидкости). Наиболее благоприятная ситуация складывается при $N_f = N_c$. В этом случае интеграл по ρ_A в (18) расходится только логарифмически. В результате оказывается возможным не только получить предсказание для асимптотики ряда теории возмущений, но и вычислить до конца (по крайней мере с логарифмической точностью) вклад пары инстантон–антиинстантон в $R_{e^+e^-\to hadrons}$ и $R_{\tau\to hadrons}$.

Если же $N_f > N_c$, притяжение псевдочастиц, вызванное фермионными нулевыми модами, доминирует. В результате интеграл набирается при ($\rho_A \sim R \sim \rho_I$) и само понятие инстантон теряет смысл. Возможно, задача вычисления индуцированной инстантонами асимптотики и в этом случае не является совсем безнадежной, но, по крайней мере, для этого придется заметно модифицировать используемый нами метод.

Пользуясь формулами (20,21), выделим зависящую от ρ_A часть из (18) :

$$d(\rho_A) = \phi(\rho_I^2/\rho_A^2)\left(\frac{\rho_I}{\rho_A}\right)^b d(\rho)\ \ ,\ \ \phi(x) = \left[1 + b\frac{\alpha_s}{4\pi}\ln(x)\right]^{2N_c - \frac{b'}{2b}}\ . \qquad (22)$$

Здесь и везде ниже $\alpha_s = \alpha_s(q) \simeq \alpha_s(\rho)$. Для того, чтобы получить ведущий член пертурбативной асимптотики, можно положить $\phi(x) \equiv 1$ (как это сделано в [11]), но если мы хотим вычислить непертурбативную часть коррелятора (18), нужно использовать правильную формулу для функции $\phi(x)$ (22). Более того, разложив функцию $\phi(x)$ в ряд по степеням $(\alpha_s \ln(x))^k$, можно получить важную серию поправок $\sim (\ln(n)/n)^k$ к лидирующей асимптотике. Интеграл по ρ_A и $R = x_A - x_I$ при фиксированной величине ξ дает:

$$\int \phi(\rho^2/\rho_A^2)\rho_A^{b-5}\delta\left(\frac{\rho^2\rho_A^2}{(R^2+\rho_A^2)^2} - \xi\right) d\rho_A d^4R = \frac{\pi^2}{2(b-2)(b-1)}\frac{\rho^b}{\xi^{b/2+1}}\phi(\xi)\ . \qquad (23)$$

Теперь попытаемся записать в более компактном виде появившиеся в (18) величины $T_{\mu\nu}$ и B_μ . При этом благодаря поперечности поляризационного оператора $\Pi_{\mu\nu}$ (6) нас реально интересуют только свертки $T_{\mu\mu}$ и $B_\mu(x)B_\mu(y)$. Проще всего обстоит дело с вектором B_μ. Формально входящая в него функция Грина в совпадающих точках бесконечна. Тем не менее, вклад в B_μ от функции Грина одного инстантона (17) имеет вид:

$$Tr\{\gamma_\mu G_I(x,x)\} = (x - x_I)_\mu f(x - x_I) \qquad (24)$$

просто потому, что $(x - x_I)_\mu$ — это единственный возможный вектор. Вспоминая также про поперечность B_μ: $\partial_\mu B_\mu = 0$, сразу получаем $f(x) \equiv 0$. Поэтому нетривиальный вклад в B_μ дают только нулевые моды:

$$B_\mu(x)B_\mu(y) = Tr\{\gamma_\mu S_\lambda(x,x)\}Tr\{\gamma_\mu S_\lambda(y,y)\} = \frac{(x,y)}{\pi^4 T_x^2 T_y^2}(H - 2D)\ ,$$

$$H = \frac{TrO^+O}{|TrO|^2}\ ,\ D = Re\left(\frac{DetO}{[TrO]^2}\right)\ . \qquad (25)$$

Здесь $x_I = 0$.

После несколько утомительных алгебраических преобразований получим также

$$T_{\mu\mu}(x,y) = \frac{1}{\pi^4 T_x^2 T_y^2}\left\{\frac{2\rho^4}{z^2} - \frac{4\rho^2(r,z)^2}{z^4} + \rho^2 - 2(x,y)D\right\} \qquad (26)$$
$$- \frac{1}{\pi^4 z^4}\left\{\frac{(y,z)}{T_y^2} - \frac{(x,z)}{T_x^2}\right\} + \left(\begin{array}{c}\text{нечетные по } r_\mu \\ \text{слагаемые}\end{array}\right)\ ,$$

где $z_\mu = (x - y)_\mu$, $r_\mu = \frac{1}{2}(x + y)_\mu$. Здесь координаты x и y отсчитываются от центра инстантона. Поэтому, действуя в духе работ [12, 13], можно интеграл по d^4x_I заменить на интеграл по d^4r:

$$\int T_{\mu\mu}(x,y)d^4r = \frac{1}{2\pi^2 z^2} + \frac{2}{\pi^2}\int_0^1 du\frac{u\bar{u}}{T^2}\left\{u\bar{u}\rho^2 - (T + \rho^2)D\right\}\ ,$$
$$\int B_\mu(x)B_\mu(y)d^4r = \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 du\, u\bar{u}\frac{T + \rho^2}{T^2}(H - 2D)\ , \qquad (27)$$

где $T = \rho^2 + u\bar{u}z^2$ и $\bar{u} = 1 - u$. После этого легко вычисляем интегралы Фурье:

$$\int e^{iqx}T_{\mu\mu}(x,0)d^4x d^4x_I = \frac{2}{q^2} + 4\rho^2\int_0^1 du\left\{K_0\left(\frac{q\rho}{\sqrt{u\bar{u}}}\right) - \frac{1}{u\bar{u}}K_2\left(\frac{q\rho}{\sqrt{u\bar{u}}}\right)D\right\},$$

$$\int e^{iqx}B_\mu(x)B_\mu(0)d^4x d^4x_I = 2\rho^2\int_0^1 \frac{du}{u\bar{u}}K_2\left(\frac{q\rho}{\sqrt{u\bar{u}}}\right)(H - 2D)\ , \qquad (28)$$

где K_0 и K_2 – функции Макдональда.

Последний интеграл, который нам осталось вычислить, это интеграл по размерам "маленького" инстантона – ρ . Как мы видели (6,23), зависимость от ρ в поляризационном операторе (кроме той, что содержится в (28)) в главном логарифмическом приближении появляется в виде множителя $d^2(\rho)/\rho^5 \sim \rho^{2b-5}$. С точки зрения операторного разложения,большие инстантон и антиинстантон в корреляционной функции (6,18) должны приводить к появлению степенной поправки в $\Pi_{\mu\nu}$:

$$\frac{(q_\mu q_\nu - q^2\delta_{\mu\nu})}{q^4}\frac{\alpha_s}{6\pi}\sum_f e_f^2\int d^4x Tr\left(G_{\mu\nu}^{I+A}(x)G_{\mu\nu}^{I+A}(x)\right)\ . \qquad (29)$$

В наших формулах этой поправке соответствует первое слагаемое $2/q^2$ в первом из интегралов (28). Интеграл по размерам инстантона для поправок такого типа к $R_{e^+e^-\to hadrons}$ расходится как $\sim 1/q^4 \int d\rho\rho^{2b-5}$. Однако, как мы уже сказали во введении, поправки $\sim 1/q^4$ к $R_{e^+e^-\to hadrons}$, возникающие при учете очень длинноволновых вакуумных флуктуаций, естественно считать частью инфракрасного ренормалона. Поэтому в дальнейшем мы не будем учитывать такие степенные поправки. Все остальные слагаемые в (28) содержат экспоненциально убывающие функции Макдональда,и поэтому интеграл по ρ хорошо сходится:

$$\int K_0\rho^{2b-3}d\rho du = \frac{2^{2b-4}}{q^{2b-2}}\frac{[(b-1)!(b-2)!]^2}{(2b-1)!}\ , \tag{30}$$

$$\int K_2\rho^{2b-3}\frac{d\rho du}{u\bar{u}} = \frac{2^{2b-4}}{q^{2b-2}}\frac{(b-1)![(b-2)!]^2(b-3)!}{(2b-3)!}\ .$$

Во всех интересующих нас случаях $b\sim 10$ можно считать большим параметром. Поэтому оба интеграла (30) ведут себя как $\int e^{-2q\rho}\rho^{2b}d\rho$ и набираются при $\rho\approx b/q$. Итак, мы видим, что размер "маленького" инстантона оказывается в b раз больше характерной длины волны. Фактически в правой части обоих равенств (30) стоит $(b/q)^{2b}e^{-2b}$.

Наконец, собирая вместе (6), (18), (28) и (30), получаем:

$$\Pi(q^2) \;=\; -\frac{\pi^2}{3}4^{b+N_f-2}\frac{[(b-2)!(b-3)!]^2}{(2b-3)!}d^2(q)\times$$
$$\times\int dUd\xi|TrO|^{2N_f}\xi^{\frac{11}{6}(N_f-N_c)-1}\phi(\xi)\exp\left\{\frac{4\pi}{\alpha_s}\xi h\right\}A\ \ , \tag{31}$$

где (см. (25))

$$A=\left(4D-\frac{2b-4}{2b-1}\right)\sum e_f^2+(2H-4D)(\sum e_f)^2\ \ . \tag{32}$$

Это выражение с точностью до небольших опечаток согласуется с полученным в работе [11] (конечно, при $\phi(\xi)=1$).

Формулу для $\Pi(q^2)$ можно записать в виде Борелевского интеграла, если ввести переменную $t=1-h\xi$:

$$\Pi(q^2) \;=\; Const\left(\frac{4\pi}{\alpha_s(q)}\right)^{4N_c}\int dU|TrO|^{2N_f}A|h|^{\frac{11}{6}(N_c-N_f)}\times$$
$$\times\left[\theta(h)\int_0^1(1-t)^{\frac{11}{6}(N_f-N_c)-1}\exp\left\{-\frac{4\pi}{\alpha_s}t\right\}\phi\,dt+\right.$$
$$\left.+\theta(-h)\int_1^\infty(t-1)^{\frac{11}{6}(N_f-N_c)-1}\exp\left\{-\frac{4\pi}{\alpha_s}t\right\}\phi\,dt\right]. \tag{33}$$

Здесь $\phi=\phi(|1-t|)$ (22). Напомним, что формально $\phi=1+O(\alpha)$, однако вблизи сингулярности $t=1$ учет функции ϕ полностью меняет вид подынтегрального выражения. θ-функция в (33) принимает значения 1 или 0 в зависимости от знака ее аргумента.

Как мы уже говорили, наш метод перестает работать при $N_f>N_c$. Действительно, в формуле для $\Pi(q^2)$ при $N_f>N_c$ интеграл по ориентациям матрицы U расходится в окрестности точки $h=0$. Физическая природа этой расходимости вполне ясна. Мы попытались с помощью единицы Фаддеева–Попова зафиксировать величину взаимодействия инстантона с антиинстантоном $S_{int}=\frac{4\pi}{\alpha_s}(t-1)$ (напомним, что все наши формулы буквально применимы только при $|t-1|\ll 1$). Однако, оказалось, что при $N_f>N_c$ расходящийся вклад в интеграл дают конфигурации, для которых хотя диполь-дипольное взаимодействие формально и мало, но сами псевдочастицы имеют одинаковый размер и сильно перекрываются. Разумеется, нет смысла говорить о каких-то надежных вычислениях в такой ситуации. В результате наш метод оказывается буквально неприменим для решения такой интересной задачи, как вычисление асимптотики ряда теории возмущений для $\Gamma_{Z_0\to hadrons}$ ($N_c=3$, $N_f=5$).

Разумеется, наши формулы применимы при $N_f<N_c$. Однако, мы знаем, что в природе существует как раз 3 легких кварка и поэтому случай $N_f<N_c$ имеет,скорее,академический интерес. К тому же правильные результаты для $R_{e^+e^-\to hadrons}$ в этом случае были получены в работе Балицкого [11].

Подробно мы рассмотрим только самый интересный вариант $N_f=N_c$. Если к тому же $N_c=3$, вместо формулы (33) для $\Pi(q^2)$

получим:

$$\Pi(q^2) = -\frac{e^{8/3}[7!6!]^2}{3\pi^2 16!}\left(\frac{4\pi}{\alpha_s}\right)^{12} \times$$
$$\times\left(0.510\int_0^1 dt\frac{\exp(-\frac{4\pi}{\alpha_s}t)}{1-t}\phi + 0.054\int_1^\infty dt\frac{\exp(-\frac{4\pi}{\alpha_s}t)}{t-1}\phi\right). \quad (34)$$

Здесь усреднение по $SU(3)$ группе пришлось произвести численно (см. Приложение).

Полученного выражения (34) достаточно для того, чтобы получить асимптотику ряда теории возмущений (для этого полагаем $\phi = 1$):

$$\Pi(q^2) = \sum \Pi_n\left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^n, \quad (35)$$

$$\Pi_n = -\frac{e^{8/3}}{3\pi^2}\frac{[7!6!]^2}{16!}0.510(n+11)! \;=\; -0.156(n+11)!$$

Как видим, индуцированный инстантонами ряд действительно содержит ужасающий фактор $(n+11)!$.

Оба интеграла в (34) расходятся в точке $t=1$ (хотя на самом деле главная физическая трудность состоит в правильной интерпретации вклада как раз маленьких t в $\Pi(q^2)$ (34)). В функциональном пространстве расходимость при $t=1$ соответствует интегрированию по слабовзаимодействующим инстантону и антиинстантону. Так как расходимость только логарифмическая, мы можем попытаться использовать нашу физическую интуицию для того, чтобы ограничить область интегрирования в (34). Естественным верхним пределом для интеграла по ρ_A является $\rho_A \sim 1/\Lambda_{KHD}$ или в терминах t

$$|t-1|_{min} \sim \left(\frac{\rho_I}{\rho_{Amax}}\right)^2 < \frac{\Lambda^2}{q^2}. \quad (36)$$

В этом случае непертурбативная часть (34) может быть найдена аналитически. Для этого дополняем первое слагаемое в (34) до интеграла в смысле главного значения:

$$\Pi(q^2) \sim 0.510P\int_0^\infty dt\frac{\exp(-\frac{4\pi}{\alpha_s}t)}{1-t}\phi(|1-t|) + \frac{48}{85}e^{-\frac{4\pi}{\alpha_s}}\times$$
$$\times\int_{(\Lambda/q)^2}^\infty \frac{dx}{x}\phi(x)\exp(-\frac{4\pi}{\alpha_s}x). \quad (37)$$

Переходя в последнем интеграле к логарифмическим переменным $y = \frac{b}{4\pi}\ln(1/x)$,получаем (с точностью до поправок $\sim \alpha_S$)

$$\int_{(\Lambda/q)^2}^\infty \frac{dx}{x}\phi(x)\exp(-\frac{4\pi}{\alpha_s}x) \approx \frac{4\pi}{b}\int_0^{1/\alpha_s}(1-\alpha_s y)^{22/9}dy = \frac{4\pi}{31\alpha_s}. \quad (38)$$

Заметим, что если бы мы заменили в наших формулах функцию $\phi(x)$ на 1, ответ для непертурбативной поправки был бы в $\frac{31}{9}$ раз больше. Наконец, собирая вместе (37) и (38),получим

$$\Pi(q^2) = -\frac{e^{8/3}[7!6!]^2}{3\pi^2 16!}\left(\frac{4\pi}{\alpha_s}\right)^{12}\times$$
$$\times\left(0.510P\int_0^\infty dt\frac{\exp(-\frac{4\pi}{\alpha_s}t)}{1-t}\phi(|1-t|) + \frac{48}{2635}\frac{4\pi}{\alpha_s}e^{-\frac{4\pi}{\alpha_s}}\right). \quad (39)$$

Скажем еще несколько слов по поводу полученной непертурбативной поправки $\sim e^{-\frac{4\pi}{\alpha_s}}$. Эффективно интеграл по t в (33), (39) можно рассматривать как интеграл по размеру большого антиинстантона. В логарифмическом масштабе $\ln(\rho_A\Lambda) \sim \alpha_s(\rho_A)^{-1}$ можно вообще сказать, что интегрирование ведется по величине (обратной) бегущей константы связи, взятой на размере антиинстантона. Замечательно, что вклад, одинаковый по порядку величины, в непертурбативную поправку дают все $\alpha_s(\rho_A)$ в интервале $\alpha_s(\rho_I) < \alpha_s(\rho_A) < 1$.

В формуле (39) правильно учтены вклад далеких членов ряда теории возмущений и непертурбативные поправки. Однако, в ней совершенно неправильно учтен вклад первых членов ряда. Единственный способ исправить этот недостаток состоит в том, чтобы вычислить точно первые 3–5–10 членов ряда теории возмущений и одновременно вычесть из приближенной формулы (39) столько же членов e\"e разложения. Модифицируя таким образом формулу (39), получим:

$$\Pi(q^2) = \sum_0^N \Pi_{n\,exact} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^N - \frac{e^{8/3}}{3\pi^2}\frac{[7!6!]^2}{16!}\left(\frac{4\pi}{\alpha_s}\right)^{12} \times$$
$$\times \left(0.510 P\int_0^\infty dt \frac{t^{N+12}}{1-t}\exp\left(-\frac{4\pi}{\alpha_s}t\right) + 0.0182\frac{4\pi}{\alpha_s}e^{-\frac{4\pi}{\alpha_s}}\right). \qquad (40)$$

Здесь для простоты мы положили $\phi = 1$ в интеграле в смысле главного значения (39). Естественно, число N должно быть достаточно большим с тем, чтобы ряд теории возмущений при $n = N$ уже выходил на асимптотику (35). Именно в этом месте и кроется наибольшая опасность для практического применения нашего метода. Мы видим, что асимптотическое предсказание (35) на много порядков превосходит "найденные экспериментально" первые 2–3 члена ряда для таких величин, как β-функция или $R_{e^+e^-\to hadrons}$. Конечно, рано или поздно, ряд теории возмущений выйдет на асимптотику (35). Однако, если это произойдет только при $n > 10$ (что, по-видимому, и случится), то вопрос о сравнении с "экспериментом" станет чисто риторическим. К тому же при $n > 10$ очень скоро вступят в игру ренормалоны (1), (2).

По-видимому, единственный "научный" способ оценить, когда же наступит асимптотика (35), состоит в том, чтобы вычислить $1/n$ поправку к главной асимптотике. Подобная работа была нами проделана для асимптотики ряда теории возмущений в ангармоническом осцилляторе [15]. Удивительным образом оказалось, что в осцилляторе после учета $\sim 1/n$ поправки, уже начиная с 5-го члена ряда, асимптотическая формула отличается от точного значения не больше чем на 12%.

Даже для простой квантово-механической задачи вычисление поправки к индуцированной инстантонами асимптотике ряда теории возмущений потребовало значительных усилий. Сравнимые поправки $\sim 1/n$ возникают при учете поправок к взаимодействию инстантона и антиинстантона (отдельно классических $\sim e^{-2T}/g^2$ и квантовых $\sim e^{-T}$) и двухпетлевой $\sim g^2$ поправки к плотности отдельного инстантона. Точный учет всех подобных поправок в КХД представляется почти нереальным. Однако, оказывается возможным среди всех поправок выделить подклассы, имеющие дополнительное усиление. Во-первых, это поправки, ведущие себя как $ln(n)/n$. Во всех формулах для поляризационного оператора $\Pi(q^2)$ мы старательно удерживали функцию $\phi(x)$ (22), учитывающую на уровне второй петли "бег" константы связи $\alpha_s(\rho_A)$ для большого антиинстантона. Выше мы уже показали, что без учета $\phi(x)$ невозможно правильно вычислить непертурбативную $\sim e^{-\frac{4\pi}{\alpha_s}}$ поправку к $\Pi(q^2)$ (39). С другой стороны, при разложении $\phi(x)$ в ряд получаем поправки в подынтегральном выражении в формуле (39) $\sim [\alpha_s \ln(1-t)]^k/(1-t)$. Каждая следующая такая поправка содержит малый множитель α_s, но также и более сильную сингулярность из-за лишнего множителя $\ln(1-t)$. Несложно показать, что после вычисления интеграла каждый множитель $[\alpha_s \ln(\frac{1}{1-t})]^k$ заменяется на $(\ln(n)/n)^k n!$. Полностью асимптотическая формула (35) с учетом поправок $\sim \ln(n)/n$ принимает вид:

$$\Pi_n = -0.156\left(1 - \frac{3N_c\ln(n)}{n}\right)^{\frac{5}{6}N_c - \frac{1}{6N_c}} (n+11)! = \qquad (41)$$
$$= -0.156\,(n)^{-\frac{5N_c^2-1}{2n}}(n+11)!\,.$$

Мы уже говорили во введении, что члены асимптотического ряда (35) при очень больших номерах ведут себя как $n^{11}n^n$. В последней строке формулы (41) мы явно показали, что учет асимптотической свободы для большого антиинстантона ($\phi(x)$) приводит к появлению фактора $n^{\frac{1}{n}}$.

В формуле (41) мы сознательно явно выписали множитель $5N_c^2$ в показателе степени. К сожалению, мы видим, что поправки к асимптотике члена ряда ведут себя как $N_c^2/n \sim 10/n$. Можно попытаться также просуммировать поправки $\sim N_c^2/n$, усиленные дополнительным большим фактором $\ln(b) = \ln(3N_c)$. Поправки $\sim N_c^2\ln(n)/n$ (41) возникли при аккуратном учете зависимости $\alpha_s(\rho_A)$ при больших значениях ρ_A. Однако, как мы уже говорили (см. обсуждение после формулы (30)), размер "маленького" инстантона также оказывается параметрически много больше характерной длины волны $\rho_I \sim b/q$. Учет этого эффекта должен приводить к дополнительному множителю в (31):

$$\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{\rho_I \Lambda_{KHD}}\right)}{\ln\left(\frac{q}{\Lambda_{KHD}}\right)}\right)^{4N_c - b'/b} = \left(1 - \frac{\alpha_s(p)}{4\pi} 2b \ln(b)\right)^{4N_c - b'/b} . \qquad (42)$$

Окончательно переписывая Π_n в виде, аналогичном (41), получим

$$\Pi_n = -0.156\left((3N_c)^4 n\right)^{-\frac{5N_c^2-1}{2n}} (n+11)! . \qquad (43)$$

Для применения этого результата,безусловно,необходимо выполнение условия $n \gg N_c^2$, однако, в принципе, мыслима ситуация, когда $n \sim N_c^2 \ln(3N_c)$.

В принципе, можно пытаться искать и оставшиеся поправки $\sim 1/n$. Например, без особого труда, используя только принцип ренорм–инвариантности, можно найти поправку, индуцированную квантовой частью взаимодействия инстантона и антиинстантона. Действительно, в главном логарифмическом приближении такая поправка просто должна описывать переход в бегущей константе α_s, входящей в диполь-дипольное взаимодействие ($S_{int} = -\frac{4\pi}{\alpha_s}\xi h$ (11)), с расстояний $\sim q^{-1}$ на расстояния $\sim \sqrt{\rho_I \rho_A}$, на которых это взаимодействие реально набирается.

Однако, точное вычисление всех $\sim 1/n$ поправок является слишком сложной задачей, да к тому же не вполне понятно, насколько она актуальна. Главный вывод, который мы можем сделать, состоит в том, что поправки к асимптотике ведут себя как N_c^2/n, и поэтому вопрос о количественном сравнении асимптотических предсказаний с точными членами ряда теории возмущений может встать только при $n > N_c^2$.

3 $\mathbf{R_{e^+e^- \to hadrons}}$

Наконец,мы приступаем к рассмотрению, возможно, главной из доступных нам задач – вычислению сечения аннигиляции электрон-позитронной пары в адроны. Мы уже приводили (6) широко известную формулу, связывающую $R_{e^+e^- \to hadrons}$ с мнимой частью поляризационного оператора. Самая сильная часть зависимости

Π от q^2 заключена в множителе $\exp(-\frac{4\pi}{\alpha_s}) \sim q^{-2b}$. Однако, при целом b (в том числе при $N_f = N_c$) учет q^{-2b} не приводит к появлению мнимой части. Мнимая часть, тем не менее,появляется при рассмотрении более слабой зависимости $\Pi(q^2) \sim [\ln(\frac{q^2}{\Lambda^2})]^\gamma q^{-2b}$. При этом, поскольку мнимая часть большого логарифма $Im\ln(-q^2) = = \pi$ — это величина порядка единицы, величина $R_{e^+e^- \to hadrons}$ при $N_f = N_c$ оказывается формально в α_s раз меньше, чем поляризационный оператор $\Pi_{\mu\nu}$. Выполняя таким образом аналитическое продолжение для выражения (39), легко получим:

$$R_{e^+e^- \to hadrons}(q^2) = -11 e^{8/3} \frac{[7!6!]^2}{15!} \left(\frac{4\pi}{\alpha_s}\right)^{11} \times$$

$$\times \left(0.510 P \int_0^\infty dt \frac{\exp\left(-\frac{4\pi}{\alpha_s} t\right)}{1-t} \psi(|1-t|) + \frac{636}{28985} \frac{4\pi}{\alpha_s} \exp\left(-\frac{4\pi}{\alpha_s}\right)\right) , \qquad (44)$$

где

$$\psi(x) = \left(1 + \frac{9}{2} \frac{\alpha_s}{4\pi} \ln(x)\right) \left(1 + 9 \frac{\alpha_s}{4\pi} \ln(x)\right)^{\frac{13}{9}} . \qquad (45)$$

Также легко находим асимптотику ряда теории возмущений с учетом $\sim 1/n$ поправок, рассмотренных в конце предыдущей главы:

$$R_{e^+e^- \to hadrons}(q^2) = \sum R_n \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^n , \qquad (46)$$

$$R_n = -11 e^{8/3} \frac{[7!6!]^2}{15!} 0.510 \left(9^4 n\right)^{-\frac{35}{2n}} (n+10)! \approx$$

$$\approx -813 (6561 n)^{-\frac{35}{2n}} (n+10)! .$$

Мы уже несколько раз говорили, что найденные "экспериментально" первые несколько членов ряда теории возмущений R_n на много порядков не дотягиваются до "наивной" асимптотики $(n + 4N_c)!$. Так же, как Π_n (43), рассмотренные нами $\sim 1/n$ поправки R_n (46) регулярно уменьшают асимптотическое предсказание. Более того, если воспринимать буквально выражение (46) при $n \sim 1$, это уменьшение может даже с лихвой компенсировать огромный множитель 10!. Еще раз напомним, однако, что верить в предсказательную силу формулы (46) можно только при $n > 10$ (или даже при $n \gg 10$). Более того, при выводе формул

(43,46) мы предполагали иерархию $\sim 1/n$ поправок $N_c^2 \ln(n)/n \gg N_c^2 \ln(N_c)/n \gg N_c^2/n$. На самом деле, как это видно из формулы (46), даже при $N_c = 3$ поправки $\sim N_c^2 \ln(N_c)/n$ при любых мыслимых значениях n оказались намного важнее поправок $\sim N_c^2 \ln(n)/n$. В такой ситуации можно также ожидать сюрприза и от неизвестных поправок $\sim N_c^2/n$.

До сих пор мы не задумывались над вопросом, при каких же энергиях могут быть использованы наши асимптотические формулы? Во-первых, мы вычисляем функциональный интеграл методом перевала. Поэтому, по крайней мере, должна быть мала константа связи $\alpha_s(\rho)$ или, другими словами, $\rho \ll 1/\Lambda$. Кроме того, мы умеем решать задачу только при $N_f = N_c$, поэтому минимальное возможное значение определяется массой c кварка $\rho_{min} \sim \frac{1}{m_c}$. С другой стороны, как мы уже говорили, эффективный обратный размер "маленького" инстантона в нашей задаче оказывается намного меньше внешнего импульса в поляризационном операторе $q \sim b/\rho_I$. Поэтому естественно ожидать, что наши асимптотические формулы должны работать в области энергий:

$$3G\uparrow v \ll qc < 15G\uparrow v\ . \tag{47}$$

Во всех приведенных выше формулах под константой связи $\alpha_s(q)$ подразумевалась константа связи при трех ароматах безмассовых фермионов $\alpha_3(q)$. Однако при q, больших 5 ГэВ, естественно выражать полученные результаты не через $\alpha_3(q)$, а через $\alpha_5(q)$. Связь между этими константами в первом приближении имеет вид:

$$\frac{4\pi}{\alpha_3(q)} = \frac{4\pi}{\alpha_5(q)} + \frac{4}{3}\ln\left(\frac{q^2}{m_c m_b}\right) + O(1)\ , \tag{48}$$

где m_c и m_b – массы c и b кварков, соответствено. В результате вместо формулы (44) мы имеем выражение вида

$$R_{e^+e^-\to hadrons}(q^2) = Const\left(\frac{m_c m_b}{q^2}\right)^{4/3}\left(\frac{4\pi}{\alpha_5}\right)^{11} P\int_0^\infty dt\frac{\exp\left(-\frac{4\pi}{\alpha_5}t\right)}{1-t}\ . \tag{49}$$

Мы здесь не пытались учесть никакие $\sim 1/n$ поправки и также не выписывали безумно маленькие при $qc \sim 5$ ГэВ непертурбативные эффекты $\sim 1/q^{18}$.

Принято считать, что в теории возмущений вкладу пары инстантон–антиинстантон соответствует сумма огромного количества диаграмм Фейнмана. Возможно, тот факт, что при энергии аннигиляции электрона и позитрона $E \sim 10$ ГэВ вся физическая картина в нашем подходе определяется энергиями ~ 1 ГэВ, как раз и отражает высокую эффективную множественность рассматриваемого процесса.

4 Вычисление $\mathrm{R}_{\tau\to \mathbf{hadrons}}$

В последние годы очень активно обсуждается вопрос [21]-[24] о возможности достоверного извлечения величины константы связи сильного взаимодействия $\alpha_s(m_\tau)$ из адронной ширины τ-лептона. Было показано, что "стандартные", полученные в рамках правил сумм КХД непертурбативные поправки к ширине τ не превышают нескольких процентов [21]. Предположение, что первые несколько слагаемых $\sim 1/q^n$ исчерпывают список существенных непертурбативных эффектов, дает возможность фиксировать величину константы связи на масштабе m_τ с точностью 10%. Появились даже утверждения о нестыковке бегущих констант связи $\alpha_s(m_\tau)$ и $\alpha_s(m_{Z^0})$, что, в свою очередь, вызвало активность, направленную на поиск новых, выходящих за рамки стандартной КХД, взаимодействий [25]-[28].

Первая попытка найти не описываемый "стандартными" правилами сумм вклад инстантона в $R_{\tau\to hadrons}$ была предпринята в работе М. Порати и П. Насона [29]. Однако, полученный ими результат может представлять только методический интерес. Авторы работы [29] вычислили вклад инстантона в поляризационный оператор на фоне обычного вакуума теории возмущений и, естественно, получили безумно маленький результат, пропорциональный произведению масс легких кварков $m_u m_d m_s$.

Гораздо более физический подход к вычислению вклада инстантона в $R_{\tau\to hadrons}$ продемонстрирован в работе Я. И. Балицкого и др. [30]. Авторы этой работы пытаются учесть влияние на инстантон длинноволновых непертурбативных вакуумных флуктуаций. Совсем грубо можно сказать, что в работе [30] массы легких кварков заменены на эффективные массы [31] $m_q \to m_q -$

$\frac{2}{3}\pi^2\langle\bar{q}q\rangle\rho_I^2$. При этом вклад инстантона оказывается уже вполне сравнимым со вкладом "стандартных" непертурбативных эффектов, хотя авторы [30] все-таки не решаются усомниться в возможности извлечения α_s из $R_{\tau\to hadrons}$.

В этой главе мы собираемся рассмотреть вклад пары инстантон-антиинстантон в ширину τ-лептона. Рассматривая вполне конкретную топологически тривиальную конфигурацию, мы, во-первых, в отличие от авторов работ [29, 30], получаем возможность найти асимптотику ряда теории возмущений. Что же касается выхода за рамки теории возмущений, то на первый взгляд можно было бы ожидать, что наш "большой" антиинстантон просто является одним из примеров длинноволновых вакуумных флуктуаций, приведших к образованию кваркового конденсата $\langle\bar{q}q\rangle$, и, следовательно, наша непертурбативная поправка уже включена в результат работы [30]. Действительно, так бы оно и было, если бы мы жили в мире, построенном только из одного или двух легких кварков ($N_f < N_c$). В этом случае интеграл по размерам большого антиинстантона в поляризационном операторе (18,33) расходится на верхнем пределе, и для его оценки кажется вполне естественным взять из феноменологии значение кваркового конденсата $\langle\bar{q}q\rangle \sim 1/\Lambda^3_{KHD}$. Однако, как мы видели в предыдущих двух главах, в случае $N_f = N_c$ с логарифмической точностью интеграл по размерам антиинстантона набирается во всей области $1/q \ll \rho_A \ll 1/\Lambda_{KHD}$. Это, в частности, означает, что нам удалось найти самые важные среди всех длинноволновых флуктуаций, на фоне которых "живет" маленький инстантон. С другой стороны, как мы увидим чуть ниже, индуцированная парой инстантон-антиинстантон непертурбативная поправка к $R_{\tau\to hadrons}$ оказывается намного больше полуфеноменологического результата работы [30].

Конечно, не стоит обольщаться по поводу надежности нашего результата. Мы уже видели, что типичный размер "маленького" инстантона всегда оказывается в $b \sim 10$ раз больше, чем $1/q$. В применении к τ-лептону это означает $\rho_I \sim b/m_\tau \sim 1/\Lambda_{KHD}$, не говоря уже о "еще большем" антиинстантоне. В такой ситуации единственное, на что мы можем рассчитывать, это более или менее разумная оценка величины эффекта по порядку величины.

Так же, как $R_{e^+e^-\to hadrons}$, отношение адронной ширины τ лептона к его лептонной ширине $R_{\tau\to hadrons}$ можно получить с помощью аналитического продолжения коррелятора слабых токов из области евклидовых q^2 (см., например, [29, 30]):

$$R_{\tau\to hadrons} = -6i\pi \oint_{|s|=1} ds(1-s)^2[(1+2s)\Pi^T(-sm_\tau^2) + \Pi^L(-sm_\tau^2)] \,, \quad (50)$$

$$\Pi_{\mu\nu}(q^2) = \Pi^T(q^2)(q_\mu q_\nu - q^2\delta_{\mu\nu}) + \Pi^L(q^2)q_\mu q_\nu = \int dx e^{iqx}\langle j_\mu^+(x) j_\nu(0)\rangle \,,$$

где

$$j_\mu = V_{ud}u^+\gamma_\mu(1+\gamma^5)d + V_{us}u^+\gamma_\mu(1+\gamma^5)s \,. \quad (51)$$

Здесь интеграл берется от верхнего до нижнего берега разреза, проходящего по положительной полуоси на плоскости комплексного s. Большинство необходимых заготовок для вычисления коррелятора (50) уже сделаны, и мы можем пользоваться, с минимальными изменениями, формулами, полученными в предыдущих главах. Первое отличие заключается в том, что слабый ток (51) содержит произведение двух кварковых операторов различных ароматов. Поэтому в (50) не появляются несвязанные диаграммы, которые приводили к члену, пропорциональному $\left(\sum e_f\right)^2$, для коррелятора электромагнитных токов (18) (кстати, подобное слагаемое в случае $N_f = N_c$ выпало и из коррелятора электромагнитных токов просто из-за зануления суммарного заряда кварков). Фермионная функция Грина (16,17) антикоммутирует с γ^5. Из этого сразу следует равенство вектор-векторного и аксиально-аксиального вкладов в коррелятор (50). Наконец, последнее тривиальное различие (18) и (50) сводится к замене $\sum_f e_f^2 (= 2/3) \to (|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2)(\simeq 1)$. Заметим, что, так как коррелятор (18) поперечен, поперечным оказывается и коррелятор (50). Таким образом, мы получили, что $\Pi^T(q^2) = 3\Pi(q^2)$ (см. (39)) и $\Pi^L(q^2) = 0$. Теперь, проинтегрировав по s, легко получить ответ для $R_{\tau\to hadrons}$ в ведущем по α_s порядке:

$$R_{\tau\to hadrons} = \frac{33e^{8/3}}{40}\frac{[7!6!]^2}{15!}\left(\frac{4\pi}{\alpha_s}\right)^{11} \times$$

$$\times\left(0.510P\int_0^\infty dt \frac{\exp\left(-\frac{4\pi}{\alpha_s}t\right)}{1-t}\psi(|1-t|) + \frac{636}{28985}\frac{4\pi}{\alpha_s}e^{-\frac{4\pi}{\alpha_s}}\right) . \quad (52)$$

Это выражение приводит к следующей асимптотике ряда теории возмущений:

$$R_{\tau\to hadrons} = \sum R_{n\tau}\left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^n \qquad (53)$$
$$R_{n\tau} = 61(n+10)!\left(9^4 n\right)^{-\frac{35}{2n}}.$$

Точно так же, как для $R_{e^+e^-\to hadrons}$ (46), возникают серьезные проблемы с интерпретацией вклада пары инстантон–антиинстантон в асимптотику ряда теории возмущений для $R_{\tau\to hadrons}$. Буквально, асимптотика (53) применима только при $n \gg 10$, где вклад ренормалонов (1,2) намного превосходит вклад инстантонов. Можно надеяться, что при $n \sim 10$ формула (53) уже дает правильную по порядку величины оценку для вклада инстантонов и в этом случае, наоборот, инстантоны смогут заэкранировать вклад ренормалонов. Наконец, в наиболее интересном случае $n = 3 - 5$ наш результат совершенно неприменим.

Чтобы хоть как-то сравнить наши результаты с экспериментом, рассмотрим более подробно чисто непертурбативное $\sim e^{-\frac{4\pi}{\alpha}}$ слагаемое в (52) (напомним, что выраженные через Λ_{KHD} (21) эти поправки ведут себя как $(\Lambda/m_\tau)^{18}$). Величины R^{np}_τ при некоторых популярных сейчас значениях $\alpha_s(m_\tau)$ приведены в первом столбце таблицы . Указанные в таблице значения надо сравнивать с экспериментальной величиной $R_{\tau\to hadrons} = 3.56 \pm 0.03$ [23] (причем в этом числе еще есть большая тривиальная часть $R_{\tau\to hadrons} \approx N_c$, извлекать же значение α_s надо только из остатка $R_{\tau\to hadrons} - 3 = 0.56 \pm 0.03$). Мы видим, что непертурбативная поправка (главным образом из-за большого предэкспоненциального множителя $(4\pi/\alpha_s)^{12}$) оказывается безумно большой.

Существует, однако, способ (использованный, в частности, в работе [30]) существенно уменьшить расхождение с экспериментом. Единственный последовательный метод улучшения непертурбативного результата (52) состоит в вычислении поправок по константе связи α_s. При этом, поскольку, как мы увидим чуть ниже, речь идет об уменьшении результата в 30 – 50 раз, нам придется суммировать точно бесконечные подпоследовательности таких поправок. Разумеется, даже точное вычисление первой поправки порядка α_s к (52) нам не под силу. Все, что мы можем сделать, это использовать известную из реномр-инвариантности зависимость константы связи от размера инстантона $\alpha_s(\rho)$. Единственным, довольно ненадежным, обоснованием для точного суммирования именно таких поправок является тот факт, что, как мы уже видели, эти поправки усилены в $\ln(N_c)$ по сравнению со всеми остальными. Мы уже говорили, что характерный обратный радиус "маленького" инстантона оказывается намного больше внешнего импульса $\rho_I^{-1} \sim m_\tau/b$. В главном, однопетлевом приближении зависимость константы связи от размера инстантона мы уже учли, когда подставили плотность инстантонов в виде $d(\rho) \sim \rho^b$. Для того, чтобы учесть двухпетлевые эффекты, на первый взгляд, достаточно руками приписать к непертурбативной поправке (52) дополнительный множитель (см. (42)):

$$\left(\frac{4\pi}{\alpha_s}\right)^{13} e^{-\frac{4\pi}{\alpha_s}} \to \left(\frac{\ln\left(\frac{m_\tau}{b\Lambda}\right)}{\ln\left(\frac{m_\tau}{\Lambda}\right)}\right)^{\frac{53}{9}} \left(\frac{4\pi}{\alpha_s}\right)^{13} e^{-\frac{4\pi}{\alpha_s}}. \qquad (54)$$

Вообще говоря, описанная процедура — это и есть наиболее последовательный способ учета зависимости $\alpha_s(\rho)$. К сожалению, как раз для τ-лептона результат (54) оказывается очень ненадежным. При выводе (54) мы все-таки предполагали, что $\ln\left(\frac{m_\tau}{b\Lambda}\right) \gg 1$, в то время как на самом деле $m_\tau \approx b\Lambda$. Чтобы хоть как-то исправить положение, попробуем, действуя в духе работы [30], учитывать двухпетлевые поправки не в конечном ответе для непертурбативного вклада, а подставить в интеграл по размерам инстантона (30) живую функцию $[-\ln(\rho\Lambda)]^{\frac{53}{9}}$. При этом, в частности, поскольку $53/9 \approx 6$, это уже довольно большое число, мы эффективно "выдавливаем" наше подынтегральное выражение из опасной области $\rho \sim 1/\Lambda$. В результате основной вклад в $R^{np}_{\tau\to hadrons}$ дают инстантоны с размером $\rho \sim 4/m_\tau$ вместо безумного $\rho \sim b/m_\tau$. Проинтегрировав по борелевскому параметру (см. (34)-(39)) до интегрирования по размерам инстантонов (собственно, только после этого и набирается полный множитель $[\ln(\rho\Lambda)]^{\frac{53}{9}}$), получим для непертурбативной поправки к $\Pi(q^2)$ следующее выражение:

$$\Pi^{np}(-sm_\tau^2) = \frac{e^{8/3}}{\pi^2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 31 \cdot 2^{18}} \left(\frac{4\pi}{\alpha_s(m_\tau)}\right)^{13} \exp\left(-\frac{4\pi}{\alpha_s(m_\tau)}\right) \times$$

$$\int_0^1 du \int \frac{dx}{(-s)^9} x^{15} \left\{\frac{1}{2u\bar{u}} K_2\left(\frac{x}{\sqrt{u\bar{u}}}\right) - \frac{7}{5} K_0\left(\frac{x}{\sqrt{u\bar{u}}}\right)\right\} \left(1 + \frac{9\alpha_s}{4\pi} \ln\left(\frac{-s}{x^2}\right)\right)^{\frac{53}{9}} \qquad (55)$$

Здесь мы также сразу сделали аналитическое продолжение (50) $m_\tau^2 \to -sm_\tau^2$. Для того, чтобы вычислить интеграл по x, воспользуемся очевидным тождеством:

$$\ln(p)^n = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right)^n p^\varepsilon . \qquad (56)$$

Теперь с помощью (50) находим выражение для непертурбативной поправки к адронной ширине:

$$R^{*np}_{\tau \to hadrons} = \lim_{\varepsilon \to 0} -i \frac{e^{8/3}}{\pi \cdot 7 \cdot 31 \cdot 2^{17}} \left(\frac{4\pi}{\alpha_s(m_\tau)}\right)^{13} \exp\left(-\frac{4\pi}{\alpha_s(m_\tau)}\right) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{9\alpha_s}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right)^{\frac{53}{9}} \int ds \frac{1 - 3s^2 + 2s^3}{(-s)^{9-\varepsilon}} dx\, x^{15-2\varepsilon} du \left\{\frac{K_2}{2u\bar{u}} - \frac{7}{5} K_0\right\} , \qquad (57)$$

что после интегрирования по x, s и u дает:

$$R^{*np}_{\tau \to hadrons} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{9e^{8/3}}{\pi \cdot 70 \cdot 31} \left(\frac{4\pi}{\alpha_s(m_\tau)}\right)^{13} \exp\left(-\frac{4\pi}{\alpha_s(m_\tau)}\right) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{9\alpha_s}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right)^{\frac{53}{9}} \sin(\varepsilon\pi) \frac{(12 - \varepsilon)\Gamma(9 - \varepsilon)\Gamma(8 - \varepsilon)^2 \Gamma(5 - \varepsilon)}{2^{2\varepsilon}\Gamma(18 - 2\varepsilon)} , \qquad (58)$$

Это выражение, в свою очередь, можно представить в виде суммы ряда по α_s. Заметим, что первый член ряда, соответствующий $(\partial/\partial\varepsilon)^0$, оказывается равным нулю. Это приводит к потере одного из множителей $1/\alpha_s(m_\tau)$ в $R_{\tau \to hadrons}$ (так же, как и в $R_{e^+e^- \to hadrons}$) по сравнению с корреляционной функцией. Коэффициенты разложения (58) по α_s мы искали численно (с помощью программы МАПЛЕ). Найденные значения $R^{*np}_{\tau \to hadrons}$ приведены в последнем столбце таблицы . Члены ряда по α_s, генерируемого $(1 + \frac{9\alpha_s}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \varepsilon})^{\frac{53}{9}}$,

имеют максимум при $n \sim 2 \div 3$ и становятся пренебрежимо малыми при $n > 8$. Мы видим, что аккуратный учет зависимости $\alpha_s(\rho)$ приводит к уменьшению непертурбативной поправки почти на 2 порядка. Тем не менее формула (58) оказывается довольно устойчивой. Мы попробовали использовать формулу Стирлинга для приближенного вычисления Г-функций в (58). Получающиеся при этом значения $R^{*np}_{\tau \to hadrons}$ почти не отличаются от приведенных в таблице результатов точного расчета.

Таблица

Полный непертурбативный вклад инстантон-антиинстантонной пары $R^{*np}_{\tau \to hadrons}$ в адронную ширину τ и вклад, учитывающий только ведущий по α_s член в сумме (58) $R^{np}_{\tau \to hadrons}$, при различных значениях $\alpha_s(m_\tau)$

$\alpha_s(m_\tau)$	$R^{np}_{\tau \to hadrons}$	$R^{*np}_{\tau \to hadrons}$
0.28	5.65	-0.0229
0.29	17.44	0.0507
0.30	49.23	0.476
0.32	311.1	6.70
0.34	1514.1	44.79
0.36	5943.4	190.1

Из таблицы видно, что при переходе от $\alpha_s = 0.28$ к $\alpha_s = 0.29$ наша поправка даже меняет знак. Вообще, во всем интервале $0.15 < \alpha_s < 0.43$ отношение R^*/R меняет знак три раза, оставаясь все время меньше 1/30. Столь богатое поведение по сравнению с простой формулой (54) служит еще одним напоминанием о том, что эффективно мы работаем при очень низких энергиях и результат, приведенный в таблице , нужно воспринимать в лучшем случае как оценку эффекта по порядку величины.

Повторим еще раз, что наши результаты надо сравнивать с экспериментальным значением $(R_{\tau \to hadrons} - 3)_{exp} = 0.5 \pm 0.03$. Мы видим, что даже при $\alpha_s = 0.29$ вклад инстантонов в $R_{\tau \to hadrons}$, несмотря на все наши усилия, все еще оказывается слишком велик. В такой ситуации единственный мыслимый выход из положения это вообще не учитывать вклад инстантонов в $R_{\tau \to hadrons}$. Например, можно сказать, что ряд для степенных поправок $\sim 1/m_\tau^n$ тоже асимптотический и его естественно оборвать где-то при $n \sim 4-8$ (вклад инстантонов $\sim 1/m_\tau^{18}$). Тем не менее, мы не понимаем, насколько обоснована может быть такая точка зрения и рассматриваем свой результат как указание на *невозможность* надежного извлечения α_s из $R_{\tau \to hadrons}$.

Авторы благодарны А. И. Вайнштейну, А. С. Елховскому, М. Э. Поспелову и В. Л. Черняку за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 95-02-04607-а).

Приложение

Средние значения от выражений полиномиальных по элементам $SU(N)$ матрицы легко вычисляются с помощью, например, графического метода, описанного в [32]. Однако для интегрирования по группе выражений с θ-функциями типа $|TrO|^6\theta(h)$ (33), нужно явно задавать параметризацию матрицы и меру интегрирования. Мы использовали следующую параметризацию элементов $SU(3)$ группы:

$$U = \begin{pmatrix} -P_2^* P_4^* s_1 s_2 - P_1 P_3 P_5^* c_1 c_2 c_3 & P_1^* P_4^* c_1 s_2 - P_2 P_3 P_5^* s_1 c_2 c_3 & P_3 c_2 s_3 \\ P_2^* P_3^* s_1 c_2 - P_1 P_4 P_5^* c_1 s_2 c_3 & -P_1^* P_3^* c_1 c_2 - P_2 P_4 P_5^* s_1 s_2 c_3 & P_4 s_2 s_3 \\ P_1 c_1 s_3 & P_2 s_1 s_3 & P_5 c_3 \end{pmatrix}, \tag{59}$$

где введены обозначения $c_{1,2} = \cos\frac{\psi_{1,2}}{2}$, $s_{1,2} = \sin\frac{\psi_{1,2}}{2}$, $c_3 = \cos\psi_3$, $s_3 = \sin\psi_3$, $P_n = e^{i\varphi_n}$. Параметры ψ_m и φ_n пробегают значения: $0 < \psi_{1,2} < \pi$, $0 < \psi_3 < \pi/2$ и $0 < \varphi_n < 2\pi$. Можно убедиться, что матрица (59) действительно унитарна и унимодулярна. Мера интегрирования по матричной группе U задается формулами [32]:

$$dU = N \int \Pi\alpha_i |\det(M)|^{1/2}, \tag{60}$$

$$M_{ij} = Tr(U^{-1}(\partial_i U) U^{-1}(\partial_j U)).$$

В нашем случае под параметрами α_i $(i = 1, ..., 8)$ подразумеваются три угла ψ_m и пять углов φ_n. После скучного вычисления находим:

$$dU = N \Pi d\psi_m \Pi d\varphi_n \sin\psi_1 \sin\psi_2 \sin^3\psi_3 \cos\psi_3. \tag{61}$$

Усреднение с этой мерой выражений $\langle |TrO|^6 \rangle$ и $\langle |TrO|^2 Re[detO(TrO^+)^2] \rangle$ согласуется со значениями, полученными графическим методом [32]. Интегрирование с θ-функциями производилось численно. Результаты приведены ниже:

$$\begin{aligned} \langle |TrO|^6 \rangle &= \frac{7}{5} \quad ; \quad \langle |TrO|^6 \theta(h) \rangle = 1.368\,; \\ \langle |TrO|^2 Re[detO(TrO^+)^2] \rangle &= \frac{1}{2} \quad ; \quad \langle |TrO|^2 Re[detO(TrO^+)^2] \theta(h) \rangle = 0.473\,; \\ \langle A|TrO|^6 \rangle &= \frac{48}{85} \quad ; \quad \langle A|TrO|^6 \theta(h) \rangle = 0.510\,. \end{aligned} \tag{62}$$

Литература

[1] *Л.Н. Липатов.* //ЖЭТФ. 1977. **72**. 411.

[2] *G.'t Hooft.* in: The why's of subnuclear physics. (Erice, 1977), ed. A. Zichichi, (Plenum, New York, 1977).

[3] *F. David.* //Nucl.Phys., 1984. **B234**. 237; *G.Parisi.* //Nucl.Phys., 1979. **B150**. 163; *A.H. Mueller.* //Nucl.Phys., 1985. **B250**. 327.

[4] *G.B.West.* //Phys.Rev.Lett., 1991. **67**. 1388.

[5] *L.S.Brown, L.G.Yaffe.* //Phys.Rev., 1992. **D45**. R398; it L.S.Brown, L.G.Yaffe, C.Zhai. //Phys.Rev., 1992. **D46**. 4712.

[6] *V.I.Zakharov.* //Nucl.Phys., 1992. **B385**. 452.

[7] *M.Beneke, V.I.Zakharov.* //Phys.Rev.Lett., 1992. **69**. 2472.

[8] *G.Grunberg.* //Phys.Lett., 1993. **B304**. 183.

[9] *D.J.Broadhurst.* Z.Phys., 1993. **C58**. 339.

[10] *A.I.Vainshtain, V.I.Zakharov.* //Phys. Rev.Lett., 1994. 73. 1207.

[11] *I.I.Balitsky.* //Phys.Lett., 1991. **B273**. 282.

[12] *N.Andrei, D.J.Gross.* //Phys.Rev., 1978. **D18**. 468.

[13] *L.Baiuleu, J.Ellis, M.K.Gailard, W. Zakrzewski.* //Phys. Lett., 1978. **B77**. 290.

[14] *L.S.Brown, R.D.Carlitz, D.B.Creamer, C.Lee.* //Phys.Rev., 1978. **D17**. 1583.

[15] *S.V.Faleev, P.G. Silvestrov.* //Phys.Lett., 1995. **A197**. 372.

[16] *P.G.Silvestrov.* Instanton-anti-instanton pair induced asymptotics of peturbation theory in QCD, Preprint BudkerINP 94-70. 1994.

[17] *V.A.Novikov, M.A.Shifman, A.I.Vainshtein, V.I.Zakharov.* //Nucl. Phys., 1981. **B191**. 301.

[18] *G.t'Hooft.* //Phys.Rev., 1976. **D14**. 3433.

[19] *C.Bernard.* //Phys.Rev., 1979. **D19**. 308.

[20] *A.Hasenfratz, P.Hasenfratz.* //Nucl.Phys., 1981. **B 193**. 210.

[21] *E.Braaten, S.Narison, A.Pich.* //Nucl.Phys., 1992. **B373**. 581.

[22] *F.Le Diberder, A.Pich.* //Phys.Lett., 1992. **B286**. 147.

[23] *A.Pich.* FTUV-94-71 (1994) [hep-ph/9412273]; *S.Narison.* CERN-TH-7506-94 [hep-ph/9412295].

[24] ALEPH Collaboration. //Phys.Lett., 1993. **B307**. 209.

[25] *L.Clavelli.* //Phys.Rev., 1992. **D46**. 2112.

[26] *M.Jezabek, J.H.Kühn.* //Phys.Lett., 1993. **B301**. 121.

[27] *J.Ellis, D.V.Nanopoulos, D.A.Ross.* CERN preprint CERN-TH.6824/93. 1993.

[28] *M.Shifman.* Determining α_s from Measurements at Z: How Nture Prompts us about New Physics, preprint TPI-MINN-94/42-T [hep-ph/9501222].

[29] *P.Nason, M.Porrati.* Nucl.Phys., 1994. **B421**. 518.

[30] *I.I.Balitsky, M.Beneke, V.M. Braun.* //Phys.Lett., 1993. **B318**. 371.

[31] *M.A.Shifman, A.I. Vainshtain, V.I. Zakharov.* Nucl.Phys., 1980. **B163**. 46.

[32] ***М. Кройц.*** Кварки, глюоны и решетки. М., Из-во Мир. 1987.