

2/1995

*ФФЖ*

*Сибирский  
Физический  
Журнал*

Периодическое  
отделение  
ГП ИТБ

Сибирский хронограф

# ПОСТОЯННАЯ КЕРРА: ИСТОРИЯ, ПЕРЕСКАЗАННАЯ ДВАДЦАТЬ ЛЕТ СПУСТЯ

Б. А. Князев, В. С. Черкасский

Новосибирский государственный университет. Новосибирск, 630090

Данная статья адресована начинающим экспериментаторам — студентам, аспирантам, стажерам. В ней описана история выполненной некогда работы по измерению физической постоянной, начиная с описания причин, эту работу инициировавших. Показана необходимость тщательного библиографического поиска на стадии подготовки эксперимента, на конкретном примере показано, что иногда даже в известных энциклопедиях ошибочные данные могут десятилетиями переноситься из одного издания в другое. Подробно описана, обычно остающаяся «за кадром», калибровка экспериментальной аппаратуры и трудности, с которыми приходится встречаться экспериментатору. Особенное внимание уделено проблеме поиска и исключения систематических ошибок. Описана процедура статистической обработки экспериментальных данных, показано, что даже в рамках одной и той же экспериментальной методики следует тщательно выбирать методику обработки полученных данных, ибо иногда достаточно даже неверной последовательности обработки по одной и той же формуле, чтобы в полученные результаты вкрались серьезные ошибки. Обсуждаются требования к представлению окончательных результатов, показана необходимость их сравнения с результатами предшественников. Статья может быть полезна преподавателям.

## 1 Введение

### 1.1 Почему появилась и кому адресована данная статья

Одной из самых трудных проблем, с которой сталкиваются преподаватели естественно-научных дисциплин, это проблема обучения эксперименту на младших курсах. Как инициировать осмысленный, нешаблонный подход при выполнении лабораторных работ? Как дать представление о погрешностях эксперимента и их вычислении людям, не имеющим еще представления о математической статистике? Как показать, что именно корректный эксперимент способен отделить истину от фантастически расплодившихся в последние годы околонуучных, часто недобросовестных, псевдотеорий?

Отцы-основатели физического факультета НГУ дали импульс к созданию нестандартного, постоянно развивающегося и модернизирующегося практикума, где студенту не только позволяет провести окончательную сборку каждой экспериментальной установки своими руками, но даже вменяется в обязанность придумать и провести в течение семестра (в качестве курсовой) свою собственную маленькую научную работу. При таком подходе, последовательно реализуемом, начиная с первого семестра, возникает проблема раннего обучения студентов началам статистической обработки экспериментальных данных. Попытка ее решения привела к появлению в 1985 году учебного пособия [1].

Появление персональных компьютеров, существенно расширивших возможности представления материала и допускающих оперативную обработку и удобное представление экспериментальных данных, вызвало необходимость создания электронной программы и модифицированного учебника, помогающих студентам младших курсов обрабатывать результаты своих учебных измерений. Первой ступенью этой работы было издание миниучебника [2], сопровождавшегося дискетой с адаптированными для студентов программой статистической обработки и гипертекстовым справочником по статистике. В окончательном варианте мы планировали сопроводить все изложение подробными примерами обработки данных реальных экспериментов, позволяющими лучше понять, какой смысл имеют те или иные формулы статистики. В процессе работы над одним из таких примеров,

однако, содержание незаметно переросло первоначально намеченные рамки собственно статистической обработки, и логика изложения привела нас к необходимости обсудить в более общем смысле проблемы постановки, проведения и обработки эксперимента.

Если вы просмотрите существующую сегодня учебную литературу по методам обработки экспериментальных данных, то обнаружите, что имеются два подхода к изложению материала. Один — это строгое формальное изложение математической статистики, без каких-либо ссылок на реальные эксперименты. Другой — менее формальное изложение тех же понятий применительно к экспериментальной естественно-научной деятельности, с некоторыми практическими примерами, иллюстрирующими то или иное положение теории.

При первом подходе начинающему трудно связать абстрактные математические понятия с реальной жизнью. Второй подход, с одной стороны, дает несколько разрозненные представления о предмете, с другой, оставляет “за кадром” многие тонкости работы экспериментатора. В частности, остается скрытой реальная “кухня” экспериментатора с зарождением идеи эксперимента, конструированием и сборкой экспериментальной установки, возникающими заблуждениями и их преодолением, внезапными находками и озарениями... Словом, за кадром остается почти все, что составляет истинно творческое содержание экспериментальной научной деятельности, делая ее столь привлекательной для исследователя. Именно интрига разгадки тайны (пусть это тайна локального масштаба) и есть источник интеллектуального наслаждения в научной деятельности.

## 1.2 О первоисточнике

Волею случая, одному из авторов довелось в далекие (для студентов) времена участвовать в том, что иногда называют “метрологическим” экспериментом, т.е. в работе по измерению некоторой “физической постоянной”. Как и следует в подобного рода работах, авторы особое внимание уделяли именно точности и надежности результатов. По завершении работы в научном журнале была опубликована статья [3]. В современных публикациях (в отличие от пространных и подробных фолиантов прошлых столетий) все результаты излагаются, как правило, в очень сжатом, рафинированном виде, из которого тщательно вытравлены вся история и все эмоциональные моменты эксперимента. Статья [3] полностью соответствовала общепринятому стилю: имела объем всего четыре страницы (вместе с одним рисунком и списком литературы) и содержала, в весьма сжатой форме, сведения о постановке и результатах эксперимента с указанием величины ошибок. Однако, по *счастливой неслучайности* рабочий журнал автора сохранился до наших дней вместе со всеми данными, от самых предварительных до “парадных”, приведенных в статье. Этот старый журнал навел нас на мысль попытаться рассказать об обработке результатов через призму, возможно, и не идеальной, но “живой”, реально выполненной работы. В настоящей статье мы повторно возвращаемся к описанию эксперимента двадцатилетней давности<sup>1</sup>, обращая теперь основное внимание на его поучительные моменты. Мы полагаем, что журнальный вариант публикуемого фрагмента может быть полезен студентам и преподавателям ВУЗов.

## 1.3 Хроника давно прошедших времен

Начнем издалека. В романтический период начала исследований по управляемому термоядерному синтезу не менее важное значение, чем исследования самой плазмы, имела проблема концентрированного накопления большого запаса энергии и быстрой передачи ее в плазму. В частности, для этого использовались большие цилиндрические конденсаторы. Так как объемная плотность энергии электрического поля  $W = \epsilon E^2 / 8\pi$  в конденсаторе пропорциональна диэлектрической проницаемости среды, то для увеличения емкости конденсаторы заливались трансформаторным маслом с  $\epsilon = 2.24$  (которое служило одновременно и для электрической изоляции электродов). Однако накопленной энергии явно недоставало для экспериментов. Тогда академик Г.И.Будкер, создатель и первый директор Института ядерной физики, выдвинул, как это часто бывало, идею [4], казавшуюся, на первый взгляд, фантастической. Для увеличения энергозапаса в конденсаторе в 36 раз он предложил использовать в качестве изоляции... обычную воду ( $\epsilon = 81$ ). Его не смутило, что вода является слабым проводником, — на необходимые несколько миллионов долей секунды напряжение она удерживать сможет. К тому же, если создать вблизи электродов тонкие “диффузионные” слои

<sup>1</sup> Данный случай — еще одно доказательство полезности ведения и хранения рабочего журнала, — удивительно, как часто приходится заглядывать в старые записи!

водяного же “рассола”, можно снизить вероятность пробоя и даже поднять величину напряжения на водяном конденсаторе. Идея с диффузионными слоями принадлежала Д.Д.Рютову [5].

Как бы ни была красива и многообещающа новая идея, ни один экспериментатор без ее предварительной проверки не бросится создавать большое (и дорогое) техническое устройство (в данном случае водяной конденсатор). Поэтому было решено сначала провести измерения электрической прочности воды на небольшой экспериментальной модели “водяного” конденсатора с “диффузионными” электродами. Сразу возникла новая проблема — как измерить напряженность электрического поля в воде (введение в воду любых датчиков тут же инициировало бы пробой на датчик, поскольку к четырехмиллиметровому зазору прикладывалось напряжение около 50 кВ). Тогда было предложено измерять напряженность бесконтактным методом, используя хорошо известный эффект изменения характеристик светового луча, проходящего через среду, помещенную в электрическое поле. Опишем кратко сущность этого явления.

## 2 Электрооптический эффект Керра

### 2.1 Прохождение плоскополяризованного света через среду, помещенную в электрическое поле

Заполним плоский конденсатор, длина которого вдоль оси  $z$  равна  $l$ , а расстояние между электродами —  $d$ , водой. Приложим вдоль оси  $x$  электрическое поле напряженностью  $E = U/d$ . Такой конденсатор называется ячейкой Керра. Плоскополяризованный<sup>2</sup> световой луч с направлением поляризации  $\alpha = 45^\circ$  по отношению к оси  $x$  (рис. 1) входит в конденсатор и распространяется вдоль оси  $z$ .

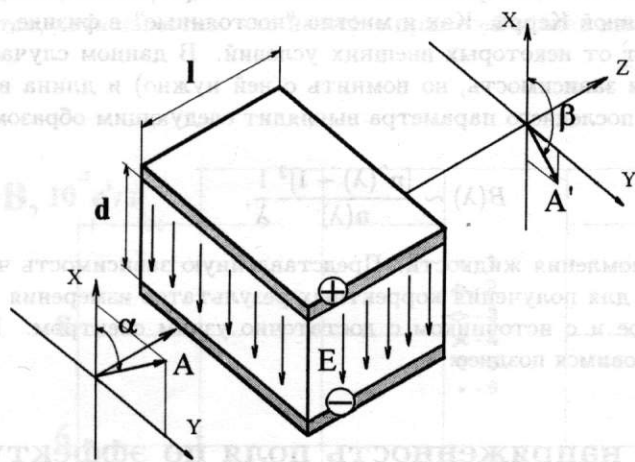


Рис. 1: Поворот плоскости поляризации в ячейке Керра.

Плоскополяризованную световую волну всегда можно разложить на две взаимно перпендикулярные синфазные составляющие. Направим плоскость поляризации одной из них вдоль поля в конденсаторе ( $A_p$ ), тогда другая ( $A_n$ ) будет ему перпендикулярна. В отсутствие поля скорость распространения обеих волн будет одинакова, и их сумма на выходе из конденсатора даст, естественно, суммарную волну с той же самой поляризацией  $A$ . Если же в конденсаторе создать электрическое поле, то скорость распространения этих двух волн в воде будет разная, что приведет к появлению на выходе из ячейки разности фаз между ними, равной

$$\varphi(l) = 2\pi B l E^2. \quad (1)$$

<sup>2</sup>Напомним, что поляризацию луча можно условно представить некоторым вектором  $A = A_0 \cos(\omega t)$ , перпендикулярным направлению распространения луча. Плоскость, проходящая через направление распространения луча и вектор  $A$ , называют плоскостью поляризации. На рис. 1 она проходит через ось  $z$  и лежит под углом  $\alpha$  по отношению к оси  $x$ .

Если теперь вновь сложить эти составляющие с учетом их новых фаз, окажется, что амплитуда вектора  $A$  сохранилась, но плоскость поляризации результирующей волны повернулась как раз на угол  $\varphi = \beta - \alpha$  (рис. 2).

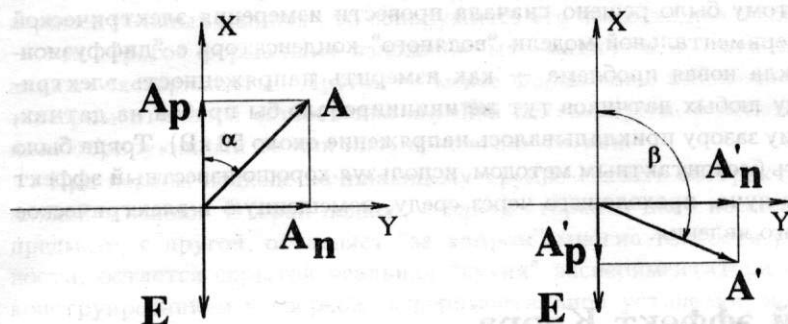


Рис. 2: Вектор электрического поля при повороте плоскости поляризации в ячейке Керра.

Это явление и называется электрооптическим эффектом Керра<sup>3</sup>.

## 2.2 Постоянная Керра

Из уравнения (1) следует, что величина угла поворота плоскости поляризации  $\varphi$  зависит от величины электрического поля  $E$ , пройденной длины  $l$  и некоторой постоянной для данной жидкости величины  $B$ . Величина  $B$  однозначно определяется свойствами среды и называется электрооптической постоянной или постоянной Керра. Как и многие “постоянные” в физике, постоянная Керра, в действительности, зависит от некоторых внешних условий. В данном случае это температура жидкости (не очень сильная зависимость, но помнить о ней нужно) и длина волны проходящего излучения. Зависимость от последнего параметра выглядит следующим образом

$$B(\lambda) \sim \frac{[n^2(\lambda) - 1]^2}{n(\lambda)} \frac{1}{\lambda}, \quad (2)$$

где  $n(\lambda)$  — показатель преломления жидкости. Представленную зависимость часто называют законом Хэйблока. Ясно, что для получения корректных результатов измерения следует проводить при постоянной температуре и с источником с достаточно узким спектром. Более подробно на зависимости  $B(\lambda)$  мы остановимся позднее.

## 3 Как измерить напряженность поля по эффекту Керра

### 3.1 Метод измерения поля

Итак, наша задача упростилась до уровня курсовой работы студента: пропускаем луч поляризованного света через воду в конденсаторе, измеряем длину пути луча в электрическом поле  $l$  и расстояние между пластинами конденсатора  $d$ , определенный экспериментально поворот плоскости поляризации на выходе  $\varphi(l)$  подставляем в уравнение

$$E = \sqrt{\frac{\varphi(l)}{2\pi B l}}, \quad (3)$$

и... величина поля определена. И лишь одно маленькое облачко на голубом небе омрачает радость завершения труда, — во втором томе Физического энциклопедического словаря 1962 года издания, откуда было первоначально взято численное значение постоянной Керра воды [6], как-то смутно упоминается, что измерения проводились в “желтом” свете. Что бы это значило?

<sup>3</sup>Поскольку свет — это электромагнитные колебания, перпендикулярные направлению распространения, луч приобретает первоначальную поляризацию после поворота вектора на угол  $\pi$  (а не на  $2\pi$ )

### 3.2 Блеск и нищета библиографических ссылок

Ну что ж, как работать с литературой нас учили... Посмотрим, что там в оригинале? А где он оригинал-то? И пошла длинная череда ссылок,— энциклопедия на учебник, учебник на другой учебник, а тот на монографию (“дедка за репку, бабка за дедку, внучка за бабу”)... Где-то около 1927 года ссылки, наконец, переместились на журнальные статьи. Статья на статью, статья на статью... И так до статьи в известном журнале 1909 года издания. Вот в сокращенном виде эта гирлянда ссылок:

*Handbook of Physics. Ed. by E.U. Condon, H. Odichaw. N.-Y., McGraw-Hill, 1967.* ⇒ *Физический энциклопедический словарь, М: т.2., 1962.* ⇒ *Борн М. Оптика. НТИ, Харьков-Киев, 1937.* ⇒ *Müller-Pouille's. Lehrbuch der Physik, Bd. II. Lehre von der strahlenden Energie (Optik). Braunschweig, 1929.* ⇒ *Jiberg W. Eine Methode zur Bestimmung der Kerr-konstante schlecht isolierender Stoffe mit Hilfe elektrischer Wechselfelder.- "Physik. Zeitschr.", 1928, Bd.29, No.18, S.670.* ⇒ *Szivessay G. Über den elektrooptischen Kerreffect bei Gasen.- "Zeitschr. Physik", 1924, Bd. 26, S 323.* ⇒ *McComb H.E. Dispersion of electric double refraction and ordinary dispersion.- "Phys. Rev.", 1909, vol. 29, N 6, p.525.*

Листаем с интересом последнюю статью и убеждаемся, что в ней про постоянную Керра воды вообще не сказано ни слова. Так и не удалось узнать, откуда появилось указанное выше значение  $B$ . Тем не менее сегодня, двадцать лет спустя после нашей публикации, во вновь вышедшем издании Физической Энциклопедии [7] автор не без злорадства обнаружил неистребимое значение  $B = 4.7 \cdot 10^{-7}$  ед. СГСЭ, не имеющее “родословной” (как тут не вспомнить известную книгу про поручика Кижэ).

Оказалось, правда, что, если тщательно порыться в литературе, можно найти выполненные в разное время экспериментальные работы, действительно посвященные постоянной Керра воды [8, 9, 10, 11, 12]. Результаты этих измерений приведены на графике (рис. 3) вместе с “энциклопедическим” значением. Видно, что разброс данных достаточно велик, да и точность большинства измерений (за исключением одной работы) недостаточна, а о качестве исследованных образцов воды почти никогда не сообщается, хотя известно, что наличие примесей может изменять постоянную Керра в несколько раз.

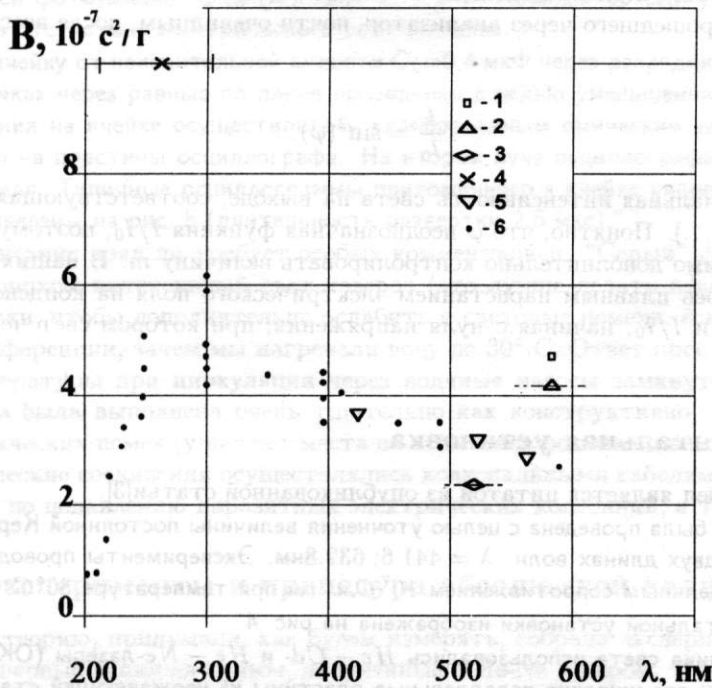


Рис. 3: Экспериментальные значения постоянной Керра по данным разных авторов. (1—[6], 2—[8], 3—[9], 4—[10], 5—[11], 6—[12])

### 3.3 Придется измерять постоянную Керра

Итак, анализ литературных данных показал, что данными справочников в нашем случае пользоваться опасно, а результаты остальных работ заметно отличаются. И последнее по счету, но не по важности, обстоятельство, — в отличие от всех предыдущих работ, в которых использовалась, в лучшем случае, “дважды дистиллированная вода, хранившаяся в полиэтиленовом сосуде”, мы использовали сверхчистую воду с предельно низким значением проводимости, для которой никто еще не измерял постоянную Керра. Вода в нашей установке постоянно циркулировала в замкнутом контуре, поступая в конденсатор после очистки ионно-обменными смолами и активированным углем. Очистка избавляла нас от множества обычных примесей и делала воду почти неэлектропроводной<sup>4</sup> (удельное сопротивление составляло  $10^7$  Ом·см, что в 10–100 раз выше значений для обычной воды). Так совокупность обстоятельств привела нас к необходимости провести собственные измерения постоянной Керра воды.

## 4 Как мы измеряли постоянную Керра

### 4.1 Метод измерения

Как же измерить постоянную Керра? Ответ на этот вопрос дает все то же выражение (1). Нужно просто приложить известное напряжение  $U$  и измерить угол поворота  $\varphi(l)$  плоскости поляризации луча относительно оси  $x$  на выходе из нашего плоского конденсатора. Тогда величину  $B$  легко определить из выражения

$$B(\lambda) = \frac{d^2}{2\pi l U^2} \varphi(l), \quad (4)$$

Угол же поворота  $\varphi(l)$  экспериментально можно определить с помощью поляризационного фильтра - анализатора, который полностью идентичен упомянутому выше поляризатору. Для этого удобно установить анализатор так, чтобы он пропускал только свет, поляризованный перпендикулярно по отношению к свету, пропускаемому поляризатором. Тогда интенсивность света  $I$ , регистрируемая фоточувствительным датчиком на выходе, будет связана с углом поворота плоскости поляризации света, прошедшего через анализатор, почти очевидным, после всего сказанного ранее, выражением

$$\frac{I}{I_0} = \sin^2(\varphi). \quad (5)$$

Здесь  $I_0$  — максимальная интенсивность света на выходе, соответствующая значениям  $\varphi$ , равным  $m\pi/2$  ( $m = 1, 3, \dots$ ). Понятно, что  $\varphi$  неоднозначная функция  $I/I_0$ , поэтому при таком способе измерения  $\varphi$  необходимо дополнительно контролировать величину  $m$ . В наших экспериментах это условие обеспечивалось плавным нарастанием электрического поля на конденсаторе и непрерывной регистрацией  $U$  и  $I/I_0$ , начиная с нуля напряжения, при котором свет через поляризатор не проходит.

### 4.2 Экспериментальная установка

Почти весь этот раздел является цитатой из опубликованной статьи [3].

“...Данная работа была проведена с целью уточнения величины постоянной Керра воды. Измерения осуществлялись при двух длинах волн:  $\lambda = 441.6; 632.8$  нм. Эксперименты проводились с водой очень высокой чистоты с удельным сопротивлением  $10^7$  Ом·см при температуре  $30^\circ\text{C}$ .

Схема экспериментальной установки изображена на рис. 4

В качестве источника света использовались He — Cd- и He — Ne-лазеры (ОКГ) Электродами (Э) ячейки Керра служили две широкие параллельные пластины из нержавеющей стали длиной  $l = 72$  см, между которыми были помещены два изолятора (И) из плексигласа толщиной  $\sim 4$  мм таким образом,

<sup>4</sup>Напомним здесь, что абсолютно неэлектропроводной воду нельзя сделать в принципе, поскольку одна из каждых пяти миллиардов молекул воды самопроизвольно расщепляется на  $H^+$  и  $OH^-$ , что делает даже абсолютно чистую воду слабым естественным электролитом с проводимостью  $4 \cdot 10^{-8}$  Ом<sup>-1</sup>·см<sup>-1</sup> при  $18$  градусах [13].

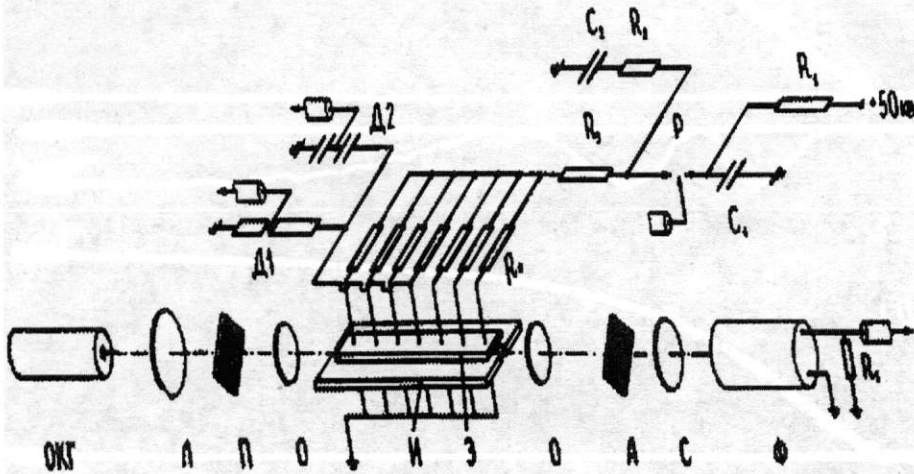


Рис. 4: Схема экспериментальной установки.

что рабочее поле ячейки представляло собой квадрат  $4 \times 4 \text{ мм}^2$ . Благодаря существенному различию диэлектрических проницаемостей плексигласа и воды в ячейке данной конфигурации создавалось однородное электрическое поле.

Излучение лазера, поляризованное под углом  $45^\circ$  к плоскости электродов, пропускалось через линзу (Л) и окно кюветы (О) вдоль оси ячейки и после прохождения через анализатор (А) и серый светофильтр (С) регистрировалось фотоумножителем (Ф) типа ФЭУ-14Б. Анализатор был установлен на минимум пропускания света в отсутствие электрического поля в ячейке.

Напряжение на ячейку от накопительной емкости  $C_1 = 0.4 \text{ мкФ}$  через разрядник (Р) подавалось одновременно в семи точках через равные по длине проводники с целью уменьшения эффектов отражения. Измерение напряжения на ячейке осуществлялось калиброванным омическим делителем ( $D_1$ ), сигнал с которого поступал на пластины осциллографа. На втором луче осциллографа регистрировался сигнал с фотоумножителя. Типичные осциллограммы приложенного к ячейке напряжения (верхний луч) и сигналов с ФЭУ приведены на рис. 5 (длительность развертки 2.5 мкс)."

Приведенное описание вряд ли требует особых комментариев. "Серый" фильтр использовался, чтобы ослабить слишком интенсивный свет лазеров (это лучше делать после, а не до прохождения светом установки, чтобы дополнительно ослабить и световые помехи, если они появятся). Нас спрашивали на конференции, зачем мы нагревали воду до  $30^\circ \text{ C}$ . Ответ прост — вода нагревалась до указанной температуры при циркуляции через водяные насосы замкнутого контура очистки. В целом, установка была выполнена очень тщательно как конструктивно, так и с точки зрения подавления электрических помех (у нас нет места на этом здесь останавливаться, но в действительности все электрические соединения осуществлялись коаксиальными кабелями с двойной оплеткой, принимались меры по подавлению паразитных электрических колебаний, и т.п.).

### 4.3 Первые эксперименты и процедура абсолютной калибровки

Итак, мы изучили теорию, придумали, как будем измерять, собрали экспериментальную установку... И вот они — первые осциллограммы, полученные с He-Ne лазером. Они выглядят примерно так, как верхняя осциллограмма на рис. 5. При первом же взгляде на осциллограмму ясно, что точность измерения амплитуды не может быть высокой, т.к. отношение толщины луча осциллографа к амплитуде сигнала даже в максимуме равно примерно одной десятой. Дело происходит в далеком прошлом, аналого-цифровые преобразователи и цифровые осциллографы, на которых можно достичь более высокой точности отсчета, еще не существуют. Значит, даже при некоторых



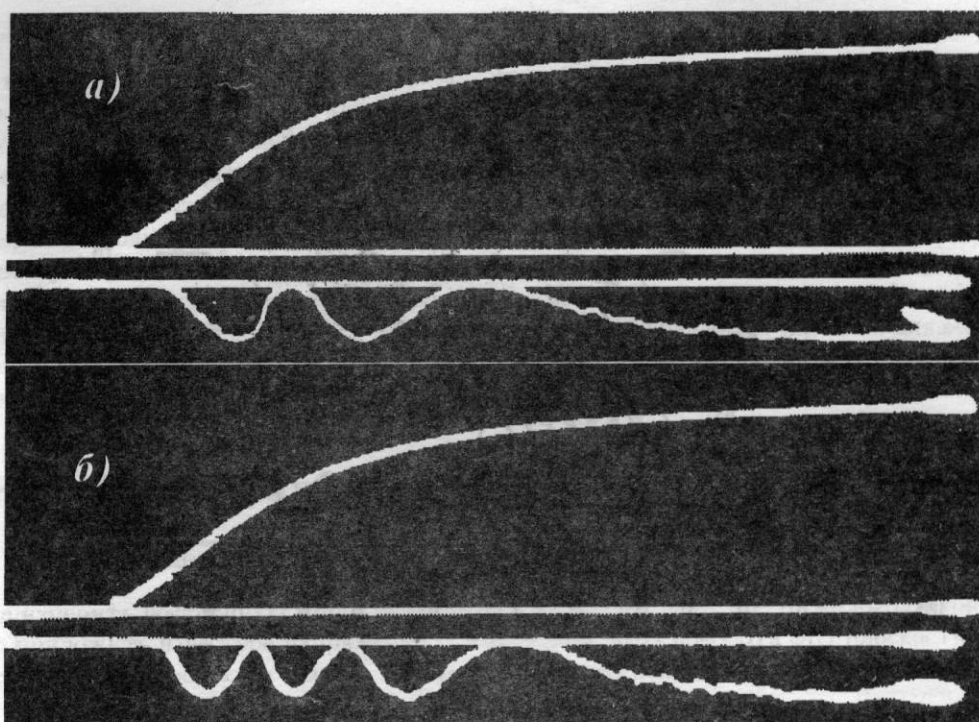


Рис. 5: Типичные осциллограммы: а — при  $\lambda = 6328\text{Å}$ , б — при  $\lambda = 4416\text{Å}$ . Верхний луч — напряжение на ячейке Керра, нижний — сигнал с фотоумножителя.

ухищениях неточность одиночного отсчета порядка трех процентов неизбежна. Поэтому лучше измерять не величину интенсивности излучения, а находить положение максимумов и минимумов (“экстремумов”) сигнала, которые могут быть определены с большей точностью, и для которых точно известно значение  $\varphi$ , равное целому числу  $\pi/2$ , и отсчитывать соответствующую им амплитуду сигнала напряжения на верхнем луче. В нашем случае осциллограммы для каждого срабатывания установки (в лабораторной практике его называют “выстрел”, — в английской литературе “shot”) фотографировались на пленку. После ее проявления осциллограммы проецировались оптической системой на миллиметровку и амплитуда отсчитывалась в миллиметрах изображения.

Положения экстремумов, полученных при обработке первой серии осциллограмм описанным способом, приведены в таблице 1.

Понятно, что для последующих расчетов нужно найти еще соответствие между измеренной величиной отклонения луча и величиной напряжения на ячейке Керра (в это соотношение должны, в частности, войти и коэффициент деления делителя напряжения, и чувствительность пластин осциллятора, и коэффициент усиления усилителя, если таковой есть, и т.п. Как правило, чтобы избежать ошибок многочисленных пересчетов, экспериментаторы поступают проще — проводят т.н. абсолютную калибровку аппаратуры, т.е. в специальных экспериментах определяют коэффициент пересчета между измеренной (в нашем случае в мм на бумаге) амплитудой сигнала и измеренным одновременно другим способом напряжением на ячейке.

Такие измерения, детали которых для краткости опускаем, позволили (с помощью уравнения (4)) получить т.н. практическую формулу

$$B = C \frac{\varphi}{U^2} \quad (6)$$

Если  $\varphi$  измерять в радианах, а  $U$  — в вольтах, то при величине коэффициента  $C$ , равном  $4.74 \cdot 10^{-4}$ , результат получается в единицах СГСЭ ( $c^2/r$ ). Такие формулы часто используют в работе, но они, как правило, не приводятся в публикациях.

Обсудим теперь, что же делать дальше с полученными результатами? Из общего соотношения для величины относительной ошибки сложной функции [2] нам заранее ясно, что относительная ошибка  $\delta B/B$  будет меньше при высоких значениях напряжения, где меньше величина  $\delta U/U$ . По-

Таблица 1: Результаты обработки керрограмм, полученных на ячейке с  $l=72\text{см}$ 

Номер эксперимента	$\varphi$			
	$\pi/2$ (1-й макс.)	$\pi$ (1-й мин.)	$3\pi/2$ (2-й макс.)	$2\pi$ (2-й мин.)
1	63	83	100.5	115
2	64	83.5	101	114.5
3	66.7	85.5	103.5	117
4	66.2	83.7	100.5	115
5	63.8	85.02	101.7	117
6	63.0	84.5	100.5	116.2
7	63.0	86.0	100.8	117
Среднее	64.24	84.46	101.21	115.96
Стандартное отклонение	1.57	1.11	1.1	1.1

этому, казалось бы, вычислять  $B$  нужно по последнему максимуму или минимуму, и не стоит тратить время на предыдущие экстремумы. Однако не стоит делать скороспелых выводов. Имеет смысл обработать все имеющиеся данные — вдруг что-нибудь обнаружится?

Давайте, например, построим график зависимости вычисленных для разных максимумов и минимумов значений величины  $B$  от  $\varphi$ . Как и ожидалось, точность измерений при малых  $\varphi$  невелика, но расположение точек сразу настораживает! (См. рис. 6). Действительно, вместо ожидаемых случайных отклонений точек от некоторой горизонтальной прямой (ведь  $B$  — константа!) мы видим странное *систематическое* отклонение от нее. Вероятность того, что точки случайно так лягут, крайне мала. Скорее всего, в наших измерениях присутствует неизвестная нам систематическая погрешность.

Снова проверяем всю последовательность измерений, проверяем длину всех кабелей, — ведь мы работаем с очень короткими сигналами, и за счет конечности скорости света осциллограмма напряжения может быть сдвинута относительно осциллограммы сигнала с фотоумножителя... Но нет, все верно. И вдруг кто-то сообразил, что не учтена задержка, связанная с временем пролета электронов в фотоумножителе! Тут же измеряем это время, и вычитаем найденные 12.5 наносекунд (всего-то  $1.25 \cdot 10^{-8}$  секунды!) из осциллограммы (сдвигаем осциллограмму на фотопленке по отношению к напряжению на 2мм!!!) и обнаруживаем, что теперь точки ложатся гораздо ближе к ожидаемой прямой линии. Теперь все выглядит правдоподобнее. Вводим необходимую дополнительную задержку в кабель, идущий от делителя напряжения.

История с задержкой вновь заставила вернуться к пересмотру всей системы измерений чтобы избавиться и от других возможных систематических ошибок. В частности, для учета нелинейности коэффициента отклонения (в единицах мм/В) луча осциллографа в разных точках экрана<sup>5</sup> с помощью источника статического напряжения были построены так называемые калибровочные кривые  $y = f(U_i, x)$ , где  $x$  и  $y$  — координаты экрана в горизонтальном и вертикальном направлениях.

На рис. 7 калибровочные кривые изображены схематически в преувеличенном виде. Понятно, что если вы имеете достаточно густую сетку таких кривых, вы сможете достаточно точно определить величину напряжения в точке  $(x_q, y_q)$  осциллограммы (пунктир).

Теперь можно переходить к набору статистики. Все *обнаруженные нами систематические ошибки* ликвидированы.

#### 4.4 Результаты экспериментов

Из описанного ранее нетрудно понять, что в реальных экспериментах основную часть времени обычно занимают калибровки и предварительные эксперименты. Вы как бы привыкаете к установке, тестируете ее возможности, ищете явные и скрытые ошибки в самой установке и системе измерений,

<sup>5</sup>Это означает, что численный коэффициент в уравнении (6) не константа, а может немного меняться в зависимости от положения луча на экране осциллографа!

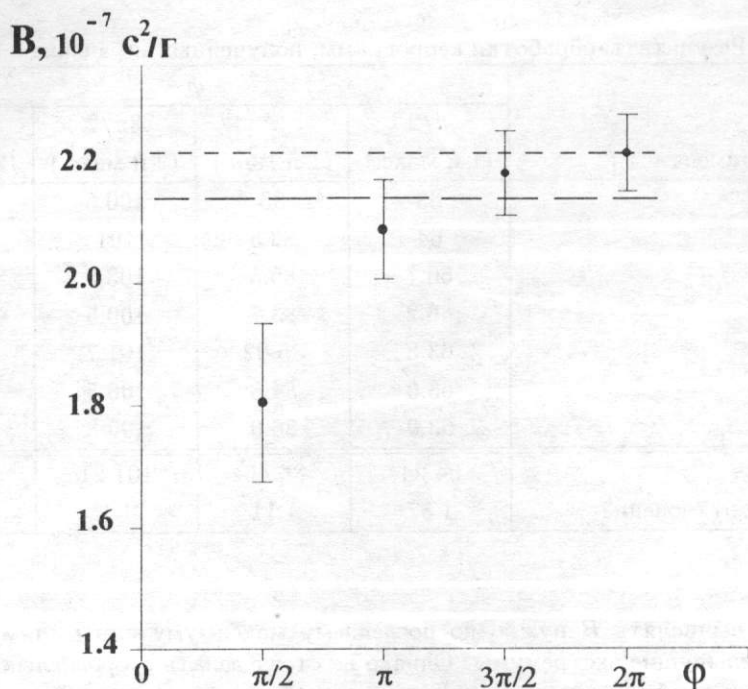


Рис. 6: “Зависимость” константы Керра от угла  $\varphi$ . Короткий пунктир — это значение  $V$ , полученное для наилучшего эксперимента, а длинный — средневзвешенное значение  $V$ .

в методах обработки результатов... И главное, к чему вы стремитесь, — это точность абсолютной калибровки и ликвидация источников других систематических ошибок (задержка сигнала ФЭУ — яркий пример такой ошибки). Как правило, получение большей части результатов, которые и составят содержание вашей будущей статьи, занимает не более 10% всего времени, затраченного вами на эксперименты.

Так происходило и в нашем случае. После долгой подготовительной работы за короткий срок было сфотографировано 15 осциллограмм при длине волны  $6328 \text{ \AA}$  и 12 осциллограмм при  $4416 \text{ \AA}$ . В таблицах 2 и 3 приведены результаты измерения напряжения  $U$  на ячейке (в вольтах), слева указан номер эксперимента, а каждая строка представляет значения  $U$ , найденные по соответствующим максимумам и минимумам одного выстрела ( $\varphi = m \cdot \pi/2$ ). На этом эксперименты были закончены, и наступил предпоследний этап работы — обработка результатов эксперимента.

#### 4.5 Обработка результатов эксперимента

Во всех известных учебниках по статистике приводятся стандартные выражения, с помощью которых можно вычислить средние значения величины  $\bar{U}$  и их среднеквадратичное отклонения  $S$ . Их значения приведены в нижних строках таблиц. Казалось бы, “взял, подставил, получил” (*Veni, vidi, vici* — “Пришел, увидел, победил”). В действительности, при обработке и интерпретации результатов часто возникают вопросы, на которые не всегда находятся однозначные ответы. Здесь не может быть точных решений, а в сложных случаях — и бесспорных рецептов.

Вот и сейчас, глядя на таблицы, зададим себе вопрос, как следует обработать результаты, чтобы получить (а) наиболее точный и при этом (б) наиболее достоверный результат? Казалось бы, ответ однозначен: поскольку наименьшее средне-квадратичное отклонение имеют в каждой таблице результаты, вычисленные по последнему экстремуму, то его и нужно принять во внимание, отбросив остальные. Здесь можно даже пожалеть, что результатов двенадцать и пятнадцать, а не, например, по сто, тогда ошибка среднего ( $\sim 1/\sqrt{n}$ ) была бы еще меньше.

Естественно, что после стольких трудов каждому экспериментатору очень хочется продемонстрировать миру только самые “лучшие” из полученных результатов, но именно этими намерениями и выстлается дорога к завышению их точности. Из дальнейшего будет видно, что по крайней

Таблица 2: Результаты обработки керрограмм для He-Cd лазера ( $\lambda = 4416\text{\AA}$ )

Номер эксп.	$\varphi$					
	$\pi/2$ (макс.)	$\pi$ (мин.)	$3\pi/2$ (макс.)	$2\pi$ (мин.)	$5\pi/2$ (макс.)	$3\pi$ (мин.)
1	51.5	69.7	86.5	98.7	110.3	123.1
2	52	69.1	84.8	98.1	111	123.4
3	49.4	68.3	84.2	98	110.5	122.2
4	50	68.3	82.5	97	110	122
5	50	69.2	83.2	98.7	111.1	123.1
6	48.6	68.3	83.8	97	111.1	122.6
7	47.8	67.7	83.5	97	110	122.7
8	51.2	70.4	84.8	98.5	111.4	122.1
9	47.8	67.8	82.7	97.5	110.7	122.1
10	50.5	69.9	85	98.8	111.5	123.1
11	45.5	69.9	86	98.2	110.8	123.8
12	50	69.8	84	98.5	110.8	123.5
$\bar{U}$	49.52	69.03	84.25	98.0	110.8	122.8
$S$	0.56	0.28	0.37	0.2	0.15	0.19
$\delta\bar{U}$	1.23	0.61	0.81	0.44	0.33	0.42

Таблица 3: Результаты обработки керрограмм для He-Ne лазера ( $\lambda = 6328\text{\AA}$ )

Номер эксп.	$\varphi$			
	$\pi/2$ (макс.)	$\pi$ (мин.)	$3\pi/2$ (макс.)	$2\pi$ (мин.)
1	60.5	82	101.8	119.2
2	55.5	81.5	101.3	119
3	63	82.5	102.5	119.5
4	59.9	80.5	101.3	118.5
5	57.2	80.5	102.5	119
6	55.5	80	100.6	119
7	58	80	99.2	119
8	56.5	82	101.6	119.5
9	56.5	80.5	101.1	119.5
10	56.5	80.5	102.5	119.5
11	56.5	80	100.7	119.5
12	59.2	82.5	104.5	121.5
13	59.2	82.5	102	120.5
14	59.7	81.2	103.8	120.5
15	60.7	81.2	103	121.5
$\bar{U}$	58.3	81.2	101.9	119.7
$S$	0.59	0.25	0.35	0.24
$\delta\bar{U}$	1.3	0.55	0.75	0.51

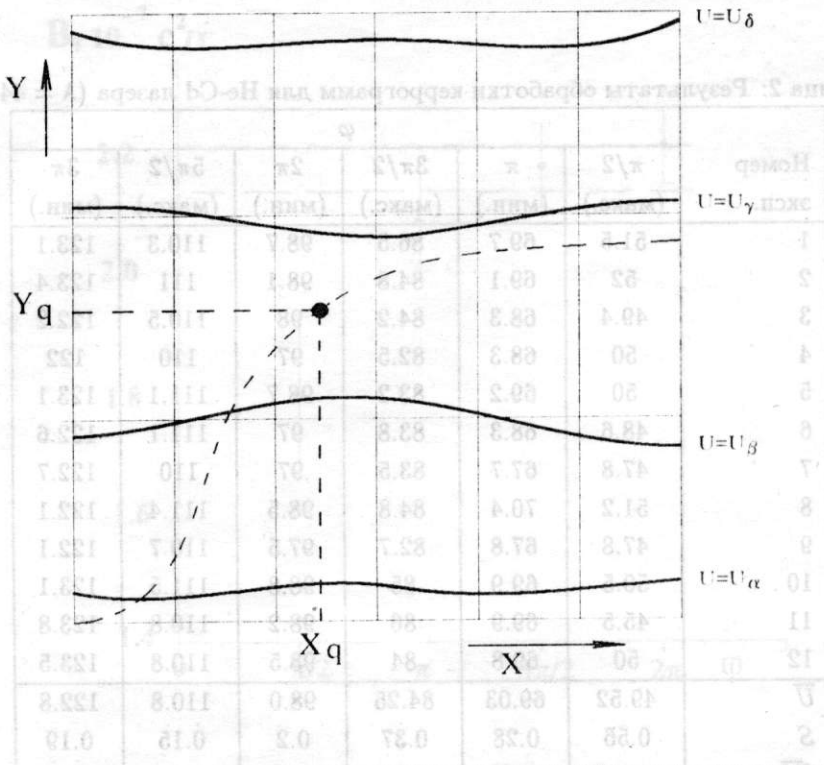


Рис. 7: Схема калибровочных кривых для величины отклонения луча на экране осциллографа. Пунктиром показана схема отсчета величины  $U$  по осциллограмме импульса напряжения на пластинах ячейки Керра.

мере в нашем случае, отбрасывать “менее точные” результаты не следует. Но даже если пренебречь этим и использовать только результаты из последней колонки, возникает вопрос — среднее какой величины следует использовать для наилучшей оценки константы  $B$ ?

Дело в том, что возможны как минимум два варианта — *вычислить* значения величины  $B$  для каждого из значений  $U$  и  $\varphi$  по формуле (6), а уже после этого *усреднить* значения  $B$ , или, наоборот, сначала *усреднить* измеренные значения  $U$ , а потом *вычислить*  $B$ , используя формулу (6). Увы, ни один из этих путей не приводит нас к желаемому результату, и несмещенного, стремящегося к значению математического ожидания, значения  $B$  мы не получим. А причина состоит в том, что часто формулируемое как абсолютное правило “...Арифметическое среднее стремится к математическому ожиданию при увеличении числа измерений” далеко не всегда оказывается верным<sup>6</sup>.

Вернемся к нашей основной формуле (6). Пусть в некоторый момент времени к ячейке Керра приложено напряжение  $U$ , которое вызывает поворот плоскости поляризации на угол  $\varphi$ . Измеренное в каждом эксперименте значение напряжения  $\tilde{U}_i$  отклоняется от  $U$  на случайную величину  $t_i$ . Предположим, что эта погрешность ( $t$ ) подчиняется гауссову распределению (обсуждение этого допущения — ниже). Тогда, в соответствии с определением математического ожидания функции от непрерывной случайной величины  $B(t)$ [14], мы можем записать искомое математическое ожидание в следующем виде

$$\langle B \rangle = C \cdot \varphi \int \frac{\exp(-\frac{t^2}{2\sigma^2})}{(U+t)^2} dt, \quad (7)$$

где  $C$  — константа из уравнения (6). Формально этот интеграл вообще не существует, — он расходится из-за наличия полюса второго порядка вида  $1/(U+t)^2$ .

Реально, распределение  $t$ , по крайней мере, “на крыльях”, не является гауссовым, а лежит в ограниченном интервале, не простираясь до значений  $\sim -U$ . Но даже это не улучшает ситуации. Действительно, предполагая ограниченность распределения  $t$ , запишем математическое ожидание

<sup>6</sup> Авторы благодарны В.И.Лотову, замечания которого существенным образом повлияли на содержание данного параграфа.

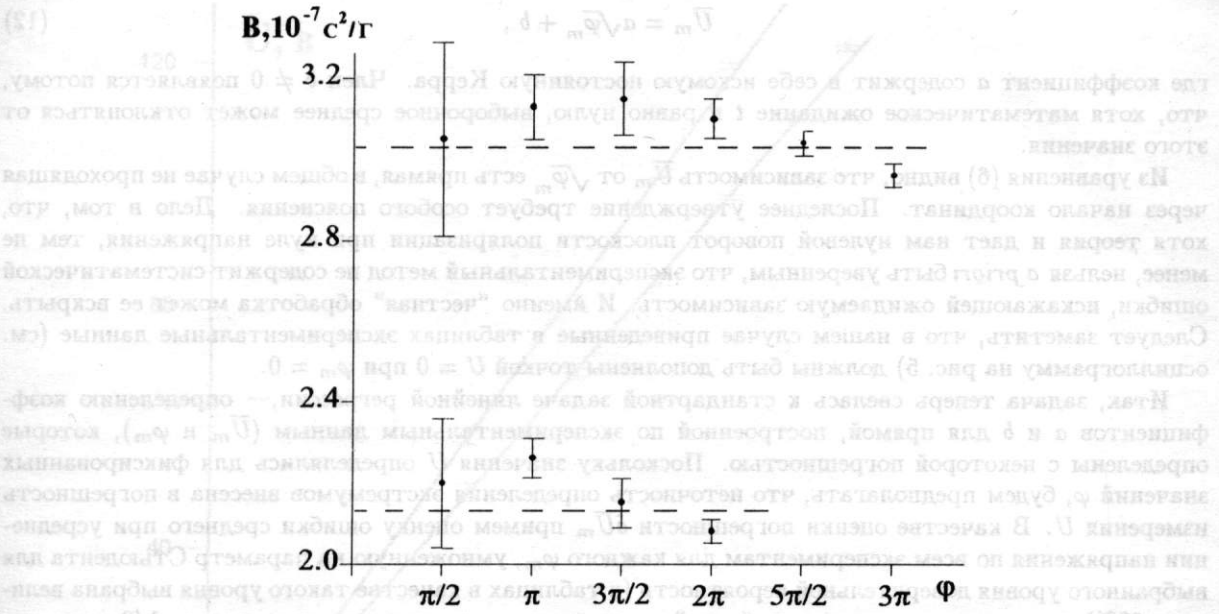


Рис. 8: “Зависимость” константы Керра от угла  $\varphi$  после поправки на запаздывание в ФДУ (пунктиром показаны средневзвешенные значения).

$B$  в виде

$$\langle B \rangle = C \cdot \varphi \cdot \left\langle \frac{1}{(U+t)^2} \right\rangle = \frac{C\varphi}{U^2} \cdot \left\langle \frac{1}{(1 + 2\frac{t}{U} + \frac{t^2}{U^2})} \right\rangle. \tag{8}$$

Математическое ожидание правой дроби не равно 1. Действительно, при  $|t/U| \ll 1$  (а только такой случай и представляет физический интерес) предыдущее выражение примет вид

$$\langle B \rangle \approx \frac{C\varphi}{U^2} \cdot \{ \langle 1 \rangle - 2 \langle \frac{t}{U} \rangle - \langle (\frac{t}{U})^2 \rangle \} = \frac{C\varphi}{U^2} \cdot \{ 1 - \langle (\frac{t}{U})^2 \rangle \}. \tag{9}$$

Кроме знакопеременного члена  $t/U$ , дающего нуль при симметричной функции распределения, квадратичный член всегда даст ненулевой вклад. Это означает, что в результате усреднения по формуле (8) мы получаем смещенную оценку  $B$ .

Теперь мы видим, что вопрос о том, как вычислить значение константы  $B$ , используя “первичные” экспериментальные данные, не так уж и тривиален. Во всяком случае ясно, что просто усреднять  $B$ , полученные по значениям  $U$  из каждого эксперимента нельзя. Однако, выход из тупика все же существует. Именно теперь нам и пригодятся чуть было не отброшенные “плохие” данные.

Перепишем выражение (6), выразив значения измеряемой величины  $U_{im}$  через остальные, включая и погрешность (хотя погрешность — непрерывная случайная величина, при конечном числе экспериментов мы получим дискретную выборку значений  $t_{im}$ ), где индекс  $i$  — номер эксперимента (номер строки в таблицах), а  $m$  — индекс соответствующего экстремума (номер столбца):

$$U_{im} = \sqrt{\frac{C}{B}} \cdot \sqrt{\varphi_m} + t_{im}. \tag{10}$$

Предел арифметического среднего

$$\bar{U}_m = 1/n \cdot \sum_{i=1}^n U_{im} \tag{11}$$

стремится к математическому ожиданию и, следовательно, в отличие от выражения (9), является несмещенной оценкой усредняемой величины. После выполнения такого усреднения мы получим

$$\bar{U}_m = a\sqrt{\varphi_m} + b, \quad (12)$$

где коэффициент  $a$  содержит в себе искомую постоянную Керра. Член  $b \neq 0$  появляется потому, что, хотя математическое ожидание  $t$  и равно нулю, выборочное среднее может отклоняться от этого значения.

Из уравнения (6) видно, что зависимость  $\bar{U}_m$  от  $\sqrt{\varphi_m}$  есть прямая, в общем случае не проходящая через начало координат. Последнее утверждение требует особого пояснения. Дело в том, что, хотя теория и дает нам нулевой поворот плоскости поляризации при нуле напряжения, тем не менее, нельзя *a priori* быть уверенным, что экспериментальный метод не содержит систематической ошибки, искажающей ожидаемую зависимость. И именно "честная" обработка может ее вскрыть. Следует заметить, что в нашем случае приведенные в таблицах экспериментальные данные (см. осциллограмму на рис. 5) должны быть дополнены точкой  $U = 0$  при  $\varphi_m = 0$ .

Итак, задача теперь свелась к стандартной задаче линейной регрессии, — определению коэффициентов  $a$  и  $b$  для прямой, построенной по экспериментальным данным ( $\bar{U}_m$  и  $\varphi_m$ ), которые определены с некоторой погрешностью. Поскольку значения  $U$  определялись для фиксированных значений  $\varphi$ , будем предполагать, что неточность определения экстремумов внесена в погрешность измерения  $U$ . В качестве оценки погрешности  $\delta\bar{U}_m$  примем оценку ошибки среднего при усреднении напряжения по всем экспериментам для каждого  $\varphi_m$ , умноженную на параметр Стьюдента для выбранного уровня доверительной вероятности (в таблицах в качестве такого уровня выбрана величина 95%), а погрешность измерения "нуля" мы приняли соответствующим примерно 1/3 толщины луча осциллографа.

Для определения "наилучших" параметров  $a$  и  $b$  используем метод минимизации<sup>7</sup>  $\chi^2$ . После нахождения параметров модели полученная "наилучшая" оценка  $a$  использовалась для нахождения "наилучшей" оценки  $B$  и оценки погрешности  $\delta B$ . Величина  $B$  в этом случае определялась из выражения

$$B = \frac{C}{a^2} \quad (13)$$

а относительная ошибка  $B$  есть

$$\frac{\delta B}{B} = 2 \left| \frac{\delta a}{a} \right| \quad (14)$$

Результаты расчетов приведены в Таблице 4, а построенные по ним кривые показаны на рис. 9.

Таблица 4

Результаты статистической обработки экспериментальных данных

	$\lambda = 4416 \text{ \AA}$	$\lambda = 6328 \text{ \AA}$
$a$	70.16	82.7
$\delta a$	0.13	0.26
$b$	0.00001	-0.000001
$\delta b$	0.0001	0.0001
$B \cdot 10^7 c^2 / z$	3.03	2.18
$\delta B \cdot 10^7 c^2 / z$	0.06	0.07

## 5 Об анализе и представлении результатов эксперимента

### 5.1 Полный анализ погрешностей эксперимента

Как правило, в эксперименте стремятся реализовать условия, когда все источники ошибок (за исключением статистических) устранены. Тогда анализ ошибок, проведенный в предыдущем разделе,

<sup>7</sup> Минимизация  $\chi^2$  отличается от обычной процедуры минимизации суммы квадратов отклонений тем, что в качестве минимизируемой величины берется сумма квадратов отклонений, каждое из которых поделено на квадрат соответствующей точности искомой функции, т.е. минимизируется функция  $\sum \text{limits}_i ((y_i - ax_i - b) / \delta y_i)^2$

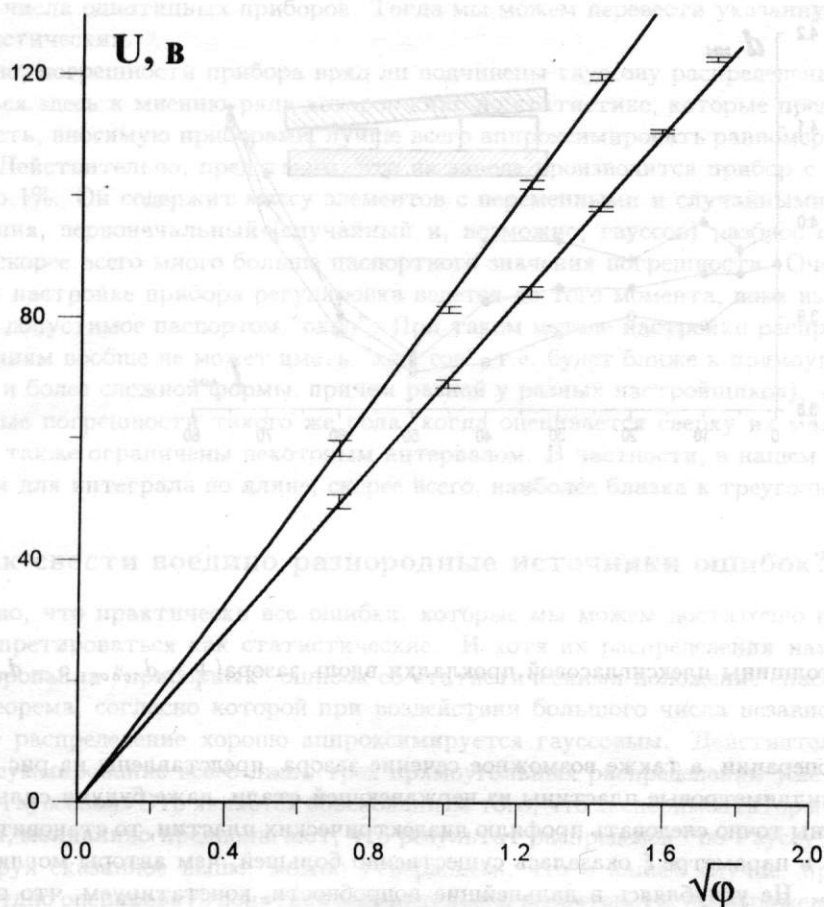


Рис. 9: Аппроксимация зависимости  $\bar{U}$  от  $\sqrt{\varphi}$ .

является исчерпывающим. К сожалению, часто имеются дополнительные источники ошибок, сравнимых по величине со статистическими. Это особенно справедливо в случае “косвенных измерений” (см., например, [2]), когда искомая величина вычисляется по нескольким измеренным величинам. В нашем случае — это выражение (13), которое, вспомнив исходную формулу (4), мы перепишем более корректно, учтя возможные вариации зазора  $d$  между пластинами конденсатора вдоль направления луча

$$B(\lambda) = \frac{1}{2\pi a^2(\lambda) \int_0^l d^{-2}(z) dz} \tag{15}$$

Согласно теории, полная относительная ошибка определяемой величины, которая представляет собой произведение измеренных,  $\delta B/B$  равна корню из суммы квадратов произведений относительных ошибок соответствующих величин, входящих в рабочую формулу. Если обозначить интеграл в выражении (15) через  $\xi$ , то, в соответствии с вышеупомянутым правилом, полная относительная ошибка величины  $B$  описывается выражением

$$\frac{\delta B}{B} = \sqrt{4 \left(\frac{\delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\delta \xi}{\xi}\right)^2} \tag{16}$$

Рассмотрим сначала второй член подкоренного выражения. Пользуясь истечением срока давности, следует повиниться, что на этапе планирования эксперимента авторы работы [3] не обратили достаточного внимания на роль “геометрического” фактора  $\xi$ , подсознательно решив, что точные измерения размеров с помощью микрометра и линейки — не бог весть какая трудность. Одна-



ко, будучи легкомысленными, но честными, они, после выполнения всех экспериментов, разобрали конденсатор и измерили толщину прокладок из оргстекла, задававших межэлектродный зазор  $d$ .

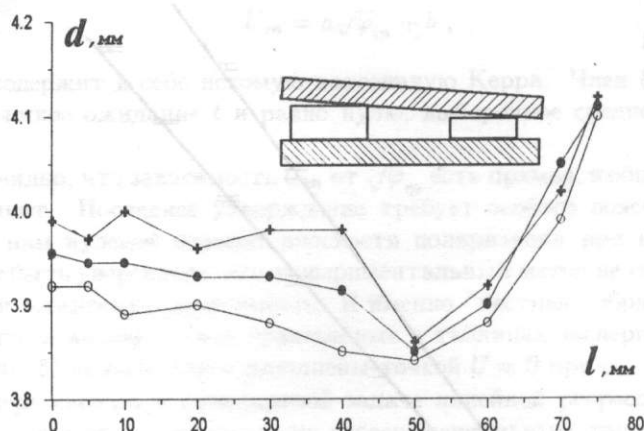


Рис. 10: Изменение толщины плексигласовой прокладки вдоль зазора (+ —  $d_{\text{левое}}$ , o —  $d_{\text{правое}}$ , • —  $d_{\text{среднее}}$ ).

Результаты этой операции, а также возможное сечение зазора, представлены на рис. 10. Если учесть, что четырехмиллиметровые пластины из нержавеющей стали, даже будучи сильно стянутыми, совсем не обязаны точно следовать профилю диэлектрических пластин, то становится ясным, что неопределенность в параметре  $\xi$  оказалась существенно большей, чем авторы могли первоначально предположить. Не углубляясь в дальнейшие подробности, констатируем, что оценка величины относительной ошибки, сделанная с достаточным запасом,  $\delta\xi/\xi$  дает значение около 2.6%. Поскольку при грубых оценках сверху излишние знаки смешны, можем в дальнейшем считать, что эта величина не превышает 3%. Ясно, что она одна и та же для обеих длин волн. Сравнивая эту величину со статистическим разбросом  $\delta a/a$ , видим, что при оценке точности измерений ею пренебрегать нельзя.

Обратимся теперь к первому члену. Статистическая погрешность определения величины  $a$  была проанализирована в предыдущем разделе, однако при ее определении имеется и другой источник погрешностей — неточность измерения величины напряжения  $U$  на пластинах, обусловленная погрешностями многоступенчатой процедуры калибровки нескольких делителей, ограниченной точностью высоковольтного вольтметра и другими подобными причинами. Поскольку функциональная зависимость  $a(U)$  линейна, мы должны записать

$$\left(\frac{\delta a}{a}\right)^2 = \left(\frac{\delta a}{a}\right)_{\text{стат}}^2 + \left(\frac{\delta U}{U}\right)^2 \quad (17)$$

Относительная погрешность  $\delta U/U$  по нашим оценкам  $\sim 1.2\%$ . О том, как оценивать величину “приборной” погрешности, мы поговорим в следующих разделах. Здесь же отметим только, что в процессе контрольной калибровки аппаратуры после окончания эксперимента (весьма полезная вещь!) было обнаружено неучтенное ранее сопротивление жилы измерительного кабеля, что потребовало дополнительной корректировки вычисленных величин  $B$  (умножения на коэффициент 1.08).

## 5.2 Следует ли рассматривать погрешности калибровки приборов как систематические?

Пусть некая величина измерена каким-либо прибором с некоторой статистической точностью. Тогда при записи результата можно привести среднеквадратичную погрешность и добавить, что кроме того результат имеет систематическую погрешность неизвестного знака, лежащую в пределах,

указанных в паспорте прибора. Более полезным практически, однако, будет иной подход, когда использованный в эксперименте экземпляр прибора рассматривается как некоторая "выборка" из большого числа однотипных приборов. Тогда мы можем перевести указанную погрешность в ряд статистических.

Конечно, погрешности прибора вряд ли подчинены гауссову распределению. Мы склонны присоединиться здесь к мнению ряда авторов книг по статистике, которые предлагают считать, что погрешность, вносимую приборами, лучше всего аппроксимировать равномерной функцией распределения. Действительно, представим, что на заводе производится прибор с указанной в паспорте точностью 1%. Он содержит массу элементов с переменными и случайными параметрами. После изготовления, первоначальный (случайный и, возможно, гауссов) разброс его показаний (до настройки) скорее всего много больше паспортного значения погрешности. Очевидно, что при окончательной настройке прибора регулировка ведется до того момента, пока измеряемое значение не попадет в допустимое паспортом "окно". При таком методе настройки распределение приборов по их показаниям вообще не может иметь "хвостов", т.е. будет ближе к прямоугольному (хотя может оказаться и более сложной формы, причем разной у разных настройщиков), чем к гауссову.

Все иные погрешности такого же рода, когда оценивается сверху их максимально возможная величина, также ограничены некоторым интервалом. В частности, в нашем случае, функция распределения для интеграла по длине, скорее всего, наиболее близка к треугольной.

### 5.3 Как свести воедино разнородные источники ошибок?

Теперь ясно, что практически все ошибки, которые мы можем достаточно надежно оценить, могут интерпретироваться как статистические. И хотя их распределения нам точно не известны, при суммировании "приборных" ошибок со статистическими положение спасает центральная предельная теорема, согласно которой при воздействии большого числа независимых распределений суммарное распределение хорошо аппроксимируется гауссовым. Действительно, нетрудно показать, что суммирование всего лишь трех прямоугольных распределений уже дает функцию очень близкую к гауссовой. Это является обоснованием того, что экспериментаторы часто, специально не оговаривая, молчаливо предполагают, что результат распределен "по Гауссу".

Суммируя сказанное выше, можно утверждать, что в нашем случае, при оценке суммарной ошибки трудно оперировать понятием доверительной вероятности, но выражения (16) и (17) должны дать достаточно хорошую оценку относительной точности измерения  $B$  по крайней мере с 68%-ной вероятностью. Для  $\lambda = 4416 \text{ \AA}$

$$\frac{\delta B}{B} = \sqrt{4[(0.002)^2 + (0.012)^2] + (0.03)^2} = 0.04. \quad (18)$$

Те же 4% получим и для  $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ . Из (18) следует, что в нашем случае попытки повысить точность результата, увеличивая число измерений, были бы неэффективными, поскольку в нашем случае "приборные" погрешности имеют тот же порядок величины, что и статистические. В этих условиях дальнейший набор статистики становится бессмысленным.

### 5.4 Как записать результат "по всем правилам"?

Несмотря на большое количество учебников и руководств по обработке экспериментальных данных найти в них какой-либо общепринятый стандарт для представления результатов измерений нам не удалось. Для определенных типов измерений (как правило технологических, широко используемых в практической инженерной деятельности) разработаны соответствующие нормативные документы, регламентирующие как способ оценки тех или иных видов погрешности, так и форму записи результатов (см., например, [15]). В этих документах рекомендуется записывать результат измерения величины  $Q$  и ее обработки в виде

$$\bar{Q}; \pm \Delta; P \text{ или } \bar{Q} \pm \Delta; P,$$

где  $\Delta$  — это доверительный интервал, вычисленный определенным способом, а  $P$  — доверительная вероятность.

При описании результатов научных экспериментов как правило, большинство авторов после всех этапов анализа своих экспериментальных данных (а иногда и без такого анализа) и после

проведенной ими математической обработки (которая обычно скрыта за кулисами опубликованных материалов) записывают свой результат в виде  $x = x_0 \pm \delta x$ , не указывая, что подразумевается под числом  $\delta x$ . Эту величину и называют погрешностью проведенных экспериментов.

Из общих соображений понятно, что речь идет о доверительном интервале, но при этом чрезвычайно редко упоминается подобный термин, ибо после слов “доверительный интервал” необходимо сказать “с доверительной вероятностью...” — а вот эту величину за исключением каких-то простейших случаев оценить не так-то легко. Во всяком случае это требует особого рассмотрения. Обычно в качестве величины доверительного интервала принимается оценка СКО (среднеквадратичное отклонение) или эта же величина, умноженная на параметр Стьюдента для доверительной вероятности 90, 95 или 99%. При этом автор волен выбирать в качестве оценки погрешности ту величину, которую он считает разумной, но читатель вправе надеяться, что ему сообщат, какова этот величина и как она получена.

Применительно к описанному выше эксперименту, методика вычисления погрешности и все промежуточные выкладки приведены явно, поэтому мы можем сегодня сказать, что (с учетом поправки в калибровке) постоянная Керра чистой воды при температуре 30° С равна

$$B = (3.03 \pm 0.13)10^{-7} \text{ c}^2/\text{г}, \lambda = 4416 \text{ \AA}; 68\%,$$

$$B = (2.18 \pm 0.09)10^{-7} \text{ c}^2/\text{г}, \lambda = 6328 \text{ \AA}; 68\%.$$

## 5.5 Таблицы и графики

Научная этика, да и элементарная порядочность требует от авторов любой научной работы при представлении собственных результатов сравнить их с другими данными, опубликованными предшественниками (это нужно сделать даже, если работы стали вам известны после завершения собственных экспериментов, что случается чаще, чем может подумать начинающий). Заметим, что, публикуя свою работу, вы тут же становитесь чьим-то предшественником, и вряд ли вам будет приятно, если последователи, следуя вашему обычаю, не сошлутся на ваш труд.

Итак, сопоставим наши результаты (здесь мы делаем это в сокращенном виде) с другими, сведя их в нижеследующую таблицу.

Таблица 6

Сравнение результатов измерений постоянной Керра

Работа	Характеристика воды	$T^\circ, C$	$\lambda$ , нм	$B, 10^{-7} \text{ c}^2/\text{г}$
[6]		20	589	4.7
[11]	Дважды дистиллированная вода	25	436	$3.72 \pm 0.14$
			546	$2.89 \pm 0.04$
			578	$2.72 \pm 0.11$
[3]	$\rho = 10^7 \text{ Ом} \cdot \text{см}$	30	441.6	$3.03 \pm 0.13$
			632.8	$2.18 \pm 0.09$

Табличное представление удобно тем, что информация передается точно, в цифровом виде. Например, можно сравнить величины погрешностей у разных авторов, с высокой точностью указана длина волны, на которой проводился соответствующий эксперимент, и т.п. С другой стороны, табличное представление затрудняет качественный анализ результата, не дает наглядного представления о характере функциональной зависимости измеряемой величины.

Рисунок 11 содержит те же данные, что и таблица, однако более нагляден, и позволяет проанализировать те же данные с иной точки зрения. Для удобства сравнения масштаб графика выбран иным, чем на рис. 3, где были представлены все ранее полученные другими авторами результаты. На новом рисунке взяты только наши точки и точки, полученные в другой, наиболее точной из известных нам работ [11]. Для сравнения, приведена также точка, соответствующая общепринятому [7] (“энциклопедическому”) значению.

График позволяет видеть, что результаты двух работ весьма близки. Если учесть некоторую разницу в температурах и составе воды, это свидетельствует в пользу достаточной точности этих

результатов. Бессмысленно обсуждать, какой из этих двух результатов “правильнее”, поскольку “теоремы, доказывающей отсутствие систематической ошибки” не существует. Если кому-то потребуется выбрать значение постоянной Керра и оценить величину погрешности, с которой она известна, он может это сделать сам, прочитав обе упомянутые работы. Не исключено, что он выберет какое-то среднее между ними значение и соответственно увеличит значение погрешности.

График позволяет выяснить, насколько результаты каждой работы соответствуют закону Хэйблока. Подгонка зависимости вида (3) произведена по методу наименьших квадратов. Зависимость  $n(\lambda)$  взята из [13]. Видно, что как результаты [3], так и [11] достаточно хорошо аппроксимируются зависимостью Хэйблока, хотя эти кривые и отличаются друг от друга некоторым численным множителем. Подобная подгонка теоретической зависимости под экспериментальные точки приносит, кроме чисто научного интереса, и практическую пользу. При такой подгонке получают численные коэффициенты для аналитической зависимости, позволяющей аппроксимировать значение постоянной Керра для любой длины волны в пределах экспериментальных точек.

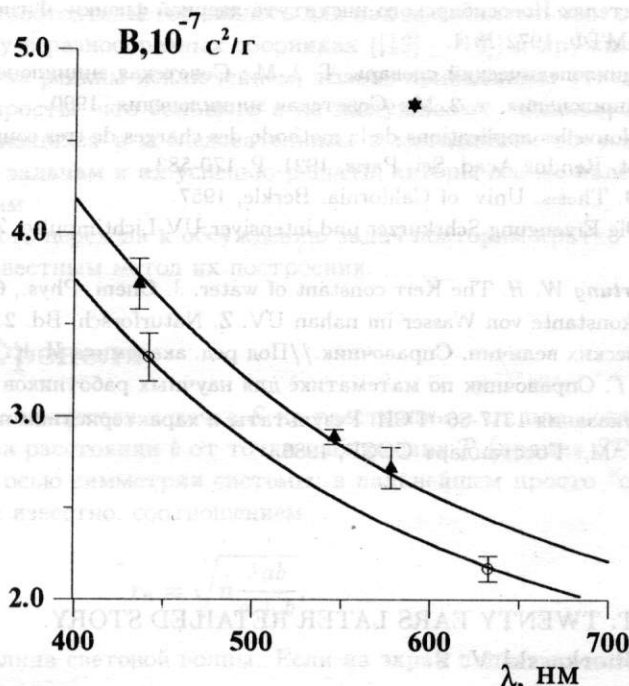


Рис. 11: Сравнение результатов измерений постоянной Керра (звездочка – [6], кружки – [3], треугольники – [11]).

С удовлетворением отмечаем, что персональный компьютер не смог уличить нас (Б.К.) даже *двадцать лет спустя* в сколь-нибудь существенных неточностях, и результат, приведенный в старой работе, практически совпадает с вышеуказанным. Достаточно хорошо мы оценили тогда и точность результатов, разве что жизненный опыт и приобретенная осторожность заставили нас теперь процентов на 30% повысить пределы возможной ошибки. Заметим, правда, что тогда, при первой обработке результатов, мы не обратили внимание на некорректность определения величины  $B$  усреднением по формуле (6), однако численное значение возможного смещения среднего по отношению к математическому ожиданию в нашем случае оказалось очень малым, и данные, полученные в 1975 году, остаются справедливыми и сегодня.

## 6 Заключение

Когда авторы взялись за данную работу, они не представляли сколь непростой она окажется. Обсуждения с многими людьми, как связанными с проведением точных измерений, так и с преподаванием, утвердили нас в том, что абсолютных рецептов и бесспорных истин в данной области не существует. Мы не уверены также, что все высказанные нами утверждения являются бесспорными.

Хочется надеяться, однако, что приведенная здесь история реального эксперимента окажется полезной как для студентов, начинающих экспериментальную деятельность, так и для преподавателей.

Авторы благодарны Л. М. Баркову, В. И. Лотову, В. И. Тельнову, В. И. Пальчикову, Г. В. Меллидину и многим другим за обсуждение разных аспектов проблемы обработки экспериментальных данных и конструктивную критику, а один из них (Б.К.) искренне благодарен своим соавторам по работе [3] за представленную возможность стать на некоторое время, хотя бы мысленно, на двадцать лет моложе.

## Литература

1. Росляков Г. В., Князев Б. А. Методы обработки экспериментальных данных. Новосибирск: НГУ, 1985.
2. Черкасский В. С., Князев Б. А. Начала обработки экспериментальных данных. Новосибирск: НГУ, 1993.
3. Князев Б. А., Кругляков Э. П., Воробьев В. В., Капитонов В. А. Постоянная Керра воды. Журнал прикладной механики и технической физики. 1976. № 1, с. 157-160.
4. Федоров В. В., Лагунов В. М. Применение водяной изоляции в импульсных генераторах тока и электронных ускорителях Новосибирского института ядерной физики. Физика плазмы. 1978. № 4(3), с. 703.
5. Рютов Д. Д. ПМТФ. 1972 № 4.
6. Физический энциклопедический словарь. Т. 2. М.: Советская энциклопедия, 1962.
7. Физическая Энциклопедия, т. 2. М.: Советская энциклопедия, 1990.
8. Pauthenier M. Nouvelles applications de la methode des charges de tres courte duree tres courte et eclairages instantes. Compt. Rendus Acad. Sci. Paris, 1921. P. 170-583.
9. Krause S. Ph. D. Thesis. Univ. of California. Berkle, 1957.
10. Frommhold L. Die Erzeugung Schrkurzer und intensiver UV-Lichtimpulse. Z. Naturforsch, Bd. 18a(T-5):590, 1963.
11. Meyers J. A. Ortung W. H. The Kerr constant of water. J. Chem. Phys., 67(9):1905, 1963.
12. Waibel J. Kerr-konstante von Wasser im nahan UV. Z. Naturforsch, Bd. 21a(1-2):186, 1966.
13. Таблицы физических величин. Справочник. // Под ред. академика И. К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976.
14. Корн Т., Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968.
15. Методические указания 1317-86 "ГСИ. Результаты и характеристики погрешности измерений. Формы представления". М.: Госстандарт СССР, 1986.

## KERR CONSTANT: TWENTY EARS LATER RETAILED STORY.

**Kniazev B. A., Cherkasski V. S.**

The paper is addressed to beginning experimentalists, students and hopefully can be useful for teachers. A detailed story of the old experiment aimed at the measurement of a physical constant is presented. Necessity of careful studies of the literature is shown and a specific example of the erroneous passing from one encyclopedia to another is given. A detailed description of the calibration of experimental apparatus and difficulties experimentalists meet is presented. Special attention is paid to a search for systematic uncertainties and ways to exclude them. The procedure of statistical data processing is described and it is shown that it should be thoroughly selected since sometimes even the wrong sequence of data processing can result in serious errors. The ways of presenting the obtained results are discussed and it is emphasized that they should be compared to those of preceding papers.

## МЕТОД ЗОН ФРЕНЕЛЯ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ

В. В. Бажанова

Новосибирский филиал Московской технологической академии легкой промышленности

Ю. И. Эйдельман

Новосибирский государственный университет

Метод зон Френеля использован для решения целого ряда нетрадиционных оптических задач.

Тема "Зоны Френеля" кажется настолько "избезженной" как в современных, так и в уже классических книгах по оптике (см., например [1] – [11]), что авторы не без колебаний решились взяться за эту работу. Удивительное обстоятельство явилось для них дополнительным стимулом: большое количество задач на эту тему в разнообразных сборниках ([12] – [16]) и дружное "единодушие" их авторов, ограничивающихся, за редким исключением, только приведением ответов. Что ж, может быть эти задачи настолько просты, что большего и не заслуживают. Однако, памятуя о "полчищах" студентов, часто нуждающихся в последовательном и методичном объяснении, как именно нужно подступаться к таким задачам и их успешно решать, авторы все же надеются, что их труд не окажется невостребованным.

Для более последовательного перехода к обсуждению задач повторим кратко рассмотрение действия зон Френеля, считая известным метод их построения.

### Кольцевые зоны Френеля

Для точечного источника, находящегося в точке  $S$  на расстоянии  $a$  от плоского экрана, который, в свою очередь, расположен на расстоянии  $b$  от точки наблюдения  $P$  (прямая  $SP$  перпендикулярна плоскости экрана и является осью симметрии системы; в дальнейшем просто "ось"), радиусы зон Френеля  $r_n$  описываются, как известно, соотношением

$$r_n = \sqrt{n \frac{\lambda ab}{a+b}},$$

где  $n$  — номер зоны,  $\lambda$  — длина световой волны. Если на экран падает плоский волновой фронт ( $a \rightarrow \infty$ ), то, естественно, что

$$r_n = \sqrt{n\lambda b}.$$

В обоих случаях зоны Френеля представляют собой концентрические кольца в плоскости экрана с центром в точке  $O$  на оси системы. Разности расстояний от краев соседних зон до точки наблюдения, по определению, отличаются на  $\lambda/2$ , а площади зон одинаковы.

Перейдем к известному графическому представлению вклада отдельной зоны в волновое поле  $U$  в точке  $P$  и суммирования вкладов всех зон. Для более строгого обоснования этого представления (авторы полагают, что именно это "место" наиболее "смущает" и в дальнейшем является препятствием к надежному овладению методом) воспользуемся интегралом Кирхгофа для вычисления: а) вклада  $\delta U$  малой кольцевой части какой-либо зоны; б) вклада  $U_n$   $n$ -той зоны и в) вклада  $U_R$  некоторого числа зон с максимальным радиусом  $R$ . При этом достаточно сразу ограничиться приближением этого интеграла для случая плоского исходного волнового фронта, коэффициент наклона [7] считать равным 1 и учесть изменение расстояния от текущей точки  $Q$  на экране до точки  $P$  только в фазовом подынтегральном экспоненциальном множителе. Введем полярную систему координат  $(\rho, \alpha)$  с началом в точке  $O$  для описания положения точки  $Q$ . Тогда ( $k = 2\pi/\lambda$ )

$$\delta U(P) = \frac{e^{ikb}}{i\lambda b} \int_{\rho_0}^{\rho_0+\delta\rho} \int_0^{2\pi} e^{\frac{ik\rho^2}{2b}} \rho d\rho d\alpha,$$

$$U_n(\mathcal{P}) = \frac{e^{ikb}}{i\lambda b} \int_{r_{n-1}}^{r_n} \int_0^{2\pi} e^{\frac{ik\rho^2}{2b}} \rho d\rho d\alpha,$$

$$U_R(\mathcal{P}) = \frac{e^{ikb}}{i\lambda b} \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{\frac{ik\rho^2}{2b}} \rho d\rho d\alpha.$$

Несложными вычислениями можно получить следующий результат:

$$\delta U(\mathcal{P}) \propto e^{i\frac{k\rho_0}{2b}\delta\rho} \delta\rho,$$

$$U_n(\mathcal{P}) \propto 2i(-1)^{n+1},$$

$$U_R(\mathcal{P}) \propto i\left(1 - e^{\frac{i\pi R^2}{b\lambda}}\right).$$

Теперь нетрудно ввести графическое представление для описания действия отдельных зон Френеля и их суммарного действия в целом, используя известное геометрическое представление комплексных чисел на плоскости. Будем рассматривать комплексные величины  $\delta U$ ,  $U_n$  и  $U_R$  на комплексной плоскости с началом координат в точке  $O$ . На этой плоскости они будут представляться в виде векторов, модуль которых пропорционален амплитуде самих величин, а ориентация которых (угол по отношению к горизонтальной действительной оси) будет определяться значением их фазы (показатель мнимой экспоненты; он в точности характеризует набег фазы на соответствующей части зоны). Таким образом, если разбить зону на много малых равных частей, то вклад каждой из них будет представляться векторами одинаковой длины, каждый из которых, начинаясь в "конце" предшествующего вектора, будет повернут относительно него на дополнительный угол, пропорциональный набегу фазы на этой части зоны. Следовательно, при разбиении зоны на неограниченное число частей, концы векторов, отвечающих за вклад каждой части, будут описывать дугу окружности. Из выражения для  $U_1$  видно, что соответствующий вектор  $\overrightarrow{OM}_1$  будет чисто мнимым, т. е. он направлен вверх вдоль мнимой оси (Рис. 1а). Аналогично, разбиение второй зоны на неограниченное число частей на рассматриваемой диаграмме описывается второй полуокружностью, "стартовой" в  $M_1$  и заканчивающейся в  $O$ . Поэтому вектор, описывающий действие второй зоны, также будет чисто мнимым (см. выражение для  $U_2$ ), но направленным в противоположную сторону по отношению к  $\overrightarrow{OM}_1$ , так что суммарное действие двух первых зон будет равно нулю. Выражение для  $U_R$  показывает, что суммарное действие  $n$  зон (при этом  $R = \sqrt{n\lambda b}$ ), в зависимости от четности или нечетности  $n$ , будет либо нулевым, либо совпадать с действием только первой зоны. Действие же необязательно целого числа зон будет описываться вектором  $\overrightarrow{OM}$ , оканчивающимся на уже "построенной первыми двумя зонами" окружности, с центром, лежащим на мнимой оси (Рис. 1б).

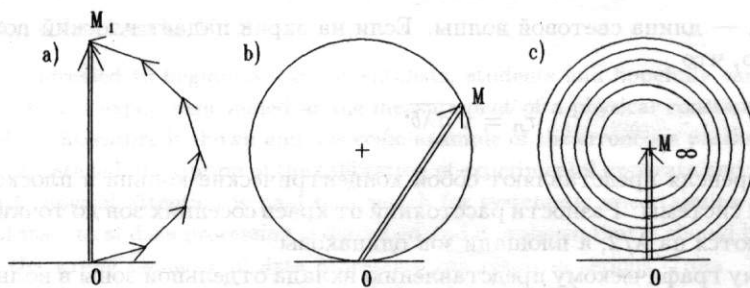


Рис. 1: Графическое представление действия зон Френеля.

Учтем теперь медленное уменьшение вклада очередной зоны по мере роста ее номера (оно определяется как постепенным уменьшением площади зоны, так и сопровождающимся падением коэффициента наклона). На диаграмме этот процесс проявится, естественно, в постепенном уменьшении радиуса полуокружности, "отвечающей" за эту зону; т. к. каждая из них начинается в конце предшествующей, то конец вектора  $\overrightarrow{OM}$  будет описывать свертывающуюся спираль (Рис. 1с) <sup>1</sup>. Ясно,

<sup>1</sup> Далее в решениях многих задач будет использоваться это представление, не получившее, к сожалению, как, например, спираль Корню, собственного имени. Необходимость частых ссылок требует его наличия, и нам представляется справедливым использовать в этих случаях имя диаграмма или спираль Френеля, а для охватывающей ее окружности — окружность Френеля.

что центр спирали  $M_\infty$  будет совпадать с центром уже построенной окружности, определяющей действие первых двух зон. В соответствии со смыслом диаграммы, вектор  $\vec{OM}_\infty$  будет описывать действие полностью открытого волнового фронта<sup>2</sup>. Отсюда очевидный и уже известный со времен Френеля результат: действие небольшого нечетного числа открытых зон в 2 раза по амплитуде  $\mathcal{I}$  и в 4 раза по интенсивности  $\mathcal{I} \propto \mathcal{U}^2$  превышает действие открытого фронта.

Рассмотрим теперь часто встречающуюся ситуацию с прохождением волнового фронта через прозрачную среду с показателем преломления  $n \neq 1$ . Понятно, что построение зон Френеля в этом случае будет таким же, но следует учесть дополнительный *продольный* набег фазы, равный  $\Delta\varphi = knL$  и описываемый в выражении для волнового поля фазовым множителем  $e^{i\Delta\varphi}$  (здесь  $L$  — путь, проходимый в среде; при введении графического представления зон этот множитель был несущественен и не принимался во внимание). Геометрическое представление комплексных величин означает, что на диаграмме Френеля вектор  $\vec{OM}$ , описывающий действие какой-либо части фронта без учета продольного набега фазы, должен быть просто повернут на некоторый угол в направлении против часовой стрелки, соответствующем увеличению фазы. При равенстве набега фазы  $2\pi$  вектор  $\vec{OM}$  должен остаться неизменным (т.к.  $e^{2\pi i} = 1$ ), т.е. угол его поворота также равен  $2\pi$ . Следовательно, при произвольной величине продольного набега фазы соответствующий угол  $\beta$  поворота вектора  $\vec{OM}$  равен дробной (по модулю  $2\pi$ ) части этого набега фазы:  $\beta = \Delta\varphi \pmod{2\pi}$ .

В заключение раздела отметим (по очевидным соображениям, без обсуждения), что при вычислении волновых полей будет активно использоваться *принцип Бабине*. В соответствии с ним волновое поле при полностью открытом фронте есть сумма волновых полей от дополнительных экранов, т.е. экранов, суммарная конфигурация отверстий в которых образует полностью “открытую” плоскость.

Дальнейшее рассмотрение различных ситуаций продолжим в задачах (не всегда ссылая на задачу означает, что в соответствующем сборнике она приведена именно в использованной ниже формулировке).

## Задачи

Не ищи к колодцам дальний путь,  
а попробуй рядом зачерпнуть.

Сэм Уолтер Фосс, “Back Country Poems” (1892)

**Задача 1.** Плоская монохроматическая волна с интенсивностью  $\mathcal{I}_0$  падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием. Какова интенсивность  $\mathcal{I}$  за экраном в точке, для которой отверстие: а) равно 1-й зоне Френеля; б) внутренней половине 1-й зоны; в) сделало равным 1-й зоне, а затем закрыли его половину по диаметру; г) равно полутора зонам; д) равно трети 1-й зоны (задачи 3.54 и 3.65 [12], 5.73 [14], 5.100 [15]).

**Решение.** а) Решение задачи в этом случае уже приведено выше. В самом деле, точка  $M_1$  на окружности Френеля, соответствующая первой зоне, лежит на верхнем конце ее диаметра, проведенного вертикально (Рис. 2а), так что действие отверстия, описываемое длиной вектора  $\vec{OM}_1$ , вдвое превышает действие полностью открытого фронта. Следовательно,  $\mathcal{I} = 4\mathcal{I}_0$ .

б) Точка  $M_{1/2}$ , описывающая действие половины 1-й зоны, находится, естественно, на окружности Френеля, посередине между  $O$  и  $M_1$  (Рис. 2б), так что длина вектора  $\vec{OM}_{1/2}$  в  $\sqrt{2}$  превышает  $\mathcal{R}_F$  и поэтому  $\mathcal{I} = 2\mathcal{I}_0$ .

в) Из вычисления действия  $n$ -той зоны было видно, что в нем производится суммирование действия элементов зоны по азимутальному углу  $\alpha$  (в пределах от 0 до  $2\pi$ ). Если же часть зоны по углу  $\alpha$  перекрыта, то действие зоны уменьшается пропорционально. Таким образом, если первая зона перекрыта наполовину по диаметру, то ее действие уменьшится вдвое и будет описываться вектором  $\frac{1}{2}\vec{OM}_1 = \vec{M}_\infty M_1$ , т.е. станет равным действию полностью открытого фронта. Следовательно,  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0$ .

г) Ясно, что точка  $M_{3/2}$ , будучи на окружности Френеля, должна лежать посередине между точками  $M_1$  и  $M_2$ , описывающими действие первой и второй зон, т.е. находится на левом кон-

<sup>2</sup>Обозначим длину этого вектора как  $\mathcal{R}_F$ , так что  $\mathcal{I}_0 \propto \mathcal{R}_F^2$ .



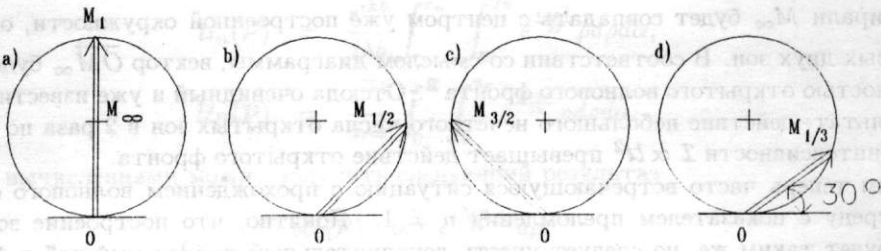


Рис. 2: к задаче 1.

це диаметра, проведенного горизонтально (Рис. 2с). Следовательно, длина вектора  $\vec{OM}_{3/2}$  в  $\sqrt{2}$  превышает  $R_F$  и поэтому  $I = 2I_0$ .•

д) Точка  $M_{1/3}$  находится на окружности Френеля, и вектор  $\vec{OM}_{1/3}$  должен составлять с горизонтальной осью угол  $30^\circ$  (Рис. 2д), как это ясно из формулы для действия  $U_n$  части зоны при  $n = 1/3$ . Поэтому длина вектора  $\vec{OM}_{1/3}$  будет совпадать с  $R_F$ , так что  $I = I_0$ .•

**Задача 2.** Плоская монохроматическая волна с интенсивностью  $I_0$  падает нормально на непрозрачный диск, закрывающий для точки наблюдения 1-ю зону Френеля. а) Какова интенсивность  $I$  в точке наблюдения. Какой она стала после того, как у диска удалили: б) половину (по диаметру); в) половину (по диаметру) внешней половины 1-й зоны (задачи 5.101 [15] и 270 [16]).

**Решение.** В силу принципа Бабинье действие волнового поля в случае, когда его часть перекрыта экраном, описывается вектором, равным разности векторов  $\vec{OM}_\infty$  (действие полностью открытого фронта) и  $\vec{OM}$  (действие перекрывающего экрана). Применим этот принцип.

а) Ясно, что длина вектора  $\vec{M}_1\vec{M}_\infty$  (Рис. 3а) равна  $R_F$ , и поэтому  $I = I_0$ .•

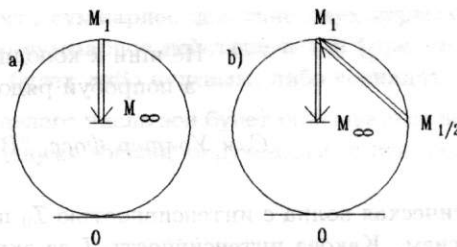


Рис. 3: к задаче 2.

б) Удаление половины (по диаметру) перекрывающего диска означает открытие соответствующей части фронта (в рассматриваемом случае — половины 1-й зоны). По принципу Бабинье, к вектору  $\vec{M}_1\vec{M}_\infty$  из предыдущего случая следует добавить вектор, описывающий действие вновь открытой части фронта. Таковым является, как показано в задаче 1в), вектор  $\vec{M}_\infty\vec{M}_1$ . Следовательно,  $I = 0$ .•

в) Как ясно из рассмотрения предыдущего случая, необходимо найти сначала действие половины (по диаметру) внешней половины 1-й зоны. На диаграмме Френеля действие половины 1-й зоны описывается вектором  $\vec{OM}_{1/2}$  (Рис. 3б); следовательно вектор  $\vec{M}_{1/2}\vec{M}_1$  описывает действие внешней половины 1-й зоны. Таким образом, искомому действию соответствует сумма векторов  $\vec{M}_1\vec{M}_\infty$  и  $\frac{1}{2}\vec{M}_{1/2}\vec{M}_1$  (множитель 1/2 появляется потому, что внешняя половина 1-й зоны открыта наполовину). Таким образом,  $I \propto |\vec{M}_1\vec{M}_\infty + \frac{1}{2}\vec{M}_{1/2}\vec{M}_1|^2$ . Тривиальные вычисления (конечно, с учетом угла между складываемыми векторами!) дают искомый результат:  $I = I_0/2$ .•

**Задача 3.** Посередине между точечным источником и экраном (расстояние между ними  $2L$ ) помещен непрозрачный диск радиуса  $R$ , перекрывающий небольшое число зон Френеля. Плоскость диска параллельна экрану, а его ось проходит через источник (длина волны  $\lambda$ ). В центре экрана

светлое пятно<sup>3</sup>. Какого минимального радиуса  $\rho$  нужно сделать круглое отверстие в центре диска, чтобы пятно на экране исчезло? При каких  $R$  это возможно (задача 3.67 [12])?

*Решение.* Так как диск перекрывает малое число зон, то соответствующая ему точка  $M_d$  лежит на окружности Френеля, так что действие открытой части фронта описывается вектором  $\overline{M_d M_\infty}$ , длина которого равна, естественно,  $\mathcal{R}_F$  (Рис. 4а). Исчезновение светлого пятна при открытии в центре диска круглого отверстия возможно только в том случае, если вектор, описывающий действие вновь открытого фронта, противоположен по направлению и равен по величине (!) вектору  $\overline{M_d M_\infty}$ . Следовательно, новое отверстие должно описываться вектором  $\overline{O M_h}$ , длина которого также равна  $\mathcal{R}_F$ . Это возможно (см. задачу 1д), если новое отверстие открывает треть 1-й зоны<sup>4</sup>.

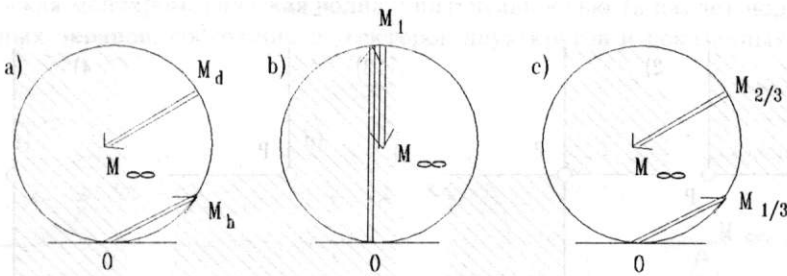


Рис. 4: к задачам 3-5.

Это означает, что вектор  $\overline{M_d M_\infty}$  также идет под углом  $30^\circ$  к горизонтальной оси, т.е. диск должен перекрывать минимально две трети 1-й зоны или же  $2m + \frac{2}{3}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ). Итак<sup>5</sup>,  $\rho = r_{1/3} = \sqrt{\frac{1}{6}\lambda L}$  и  $R = r_{2m+2/3} = \sqrt{(m + 1/3)\lambda L}$ , где  $m = 0, 1, \dots$  •

**Задача 4.** Плоская монохроматическая волна падает нормально на непрозрачный полудиск, закрывающий для точки наблюдения небольшое нечетное число полужон Френеля. Какова интенсивность в точке наблюдения (задача 273 [16])?

*Решение.* Воспользуемся принципом Бабиня. Допустим сначала, что на пути волнового фронта находится полный диск, перекрывающий небольшое нечетное число зон. Тогда на диаграмме Френеля начало вектора, описывающего действие открытой части фронта, находится в точке  $M_1$ , соответствующей 1-й зоне (Рис. 4б). Поэтому вектор  $\overline{M_1 M_\infty}$  направлен вертикально вниз, и его длина равна  $\mathcal{R}_F$ . Уберем половину диска по диаметру, открыв тем самым дополнительно небольшое нечетное число полужон. Оставшийся полудиск совпадает, таким образом, с заданным. Действие вновь открытой части фронта будет описываться вектором  $\frac{1}{2}\overline{O M_1}$ , направленным вертикально вверх и длиной, очевидно, тоже равной  $\mathcal{R}_F$ . Следовательно, суммарное действие открытой части волнового фронта равно нулю и  $\mathcal{I} = 0$ . •

**Задача 5.** Вдали от точечного источника  $\mathcal{S}$  стоит бесконечный идеально отражающий экран. Из экрана удален диск диаметром  $d_1 = 2r_1\sqrt{2/3}$  ( $r_1$  — радиус первой зоны Френеля) и в его плоскости соосно помещен другой диск, диаметром  $d_2 = d_1/\sqrt{2}$ . Найти интенсивность  $\mathcal{I}$  отраженной волны в точке  $\mathcal{S}$  (задача 4.32 [13]).

*Решение.* Заменяем идеально отражающий экран (включая диск, размещенный в отверстии этого экрана) дополнительным, “по Бабиня”, экраном. Ясно, что введенный экран представляет из себя непрозрачное кольцо, внешний радиус которого равен  $r_1\sqrt{2/3}$ , т.е. составляет  $2/3$  1-й зоны, а внутренний, соответственно, —  $r_1\sqrt{1/3}$ , т.е. только ее треть. Вычисление интенсивности  $\mathcal{I}$  волны,

<sup>3</sup>Как известно, оно называется пятном Пуассона (см. “Доклад, сделанный г-ном Араго в Академии Наук” в [9], стр.138), и Араго первым подтвердил экспериментально его существование [9] (еще в 1715 г. Делиль наблюдал светлое пятнышко в центре геометрической тени, отбрасываемой шариками разных размеров, но это наблюдение не привлекло внимания и было забыто; см., например, [9], стр.561).

<sup>4</sup>Такой же вектор соответствует  $2m + \frac{1}{3}$  зонам, где  $m = 1, 2, \dots$ ; кроме того, такую же длину  $\mathcal{R}_F$  имеют и вектора, соответствующие  $2m + \frac{5}{3}$  открытым зонам. В задаче же речь идет о минимальном отверстии.

<sup>5</sup>В выражениях для  $\rho$  и  $R$  учтено, что на диск падает сферический волновой фронт, так что радиус  $n$ -той зоны Френеля равен  $\sqrt{\frac{1}{2}n\lambda L}$ .

отраженной от заданного экрана, эквивалентно вычислению интенсивности света, дифрагировавшего на введенном непрозрачном кольце. Волновой фронт, прошедший внутреннюю часть кольца, описывается на диаграмме Френеля вектором  $\overrightarrow{OM}_{1/3}$ , идущим под углом  $30^\circ$  к горизонтальной оси и равным, следовательно,  $\mathcal{R}_F$ . Волновому фронту, распространяющемуся "снаружи" внешнего края кольца, соответствует вектор  $\overrightarrow{M_{2/3}M_\infty}$ , который (см., например, задачу 3) антипараллелен  $\overrightarrow{OM}_{1/3}$  и равен ему по длине. Поэтому полное волновое поле за непрозрачным кольцом в рассматриваемой точке равно нулю и, следовательно,  $\mathcal{I} = 0$ . •

**Задача 6.** Плоская монохроматическая волна с интенсивностью  $\mathcal{I}_0$  падает нормально на поверхности показанных на рисунке непрозрачных экранов.

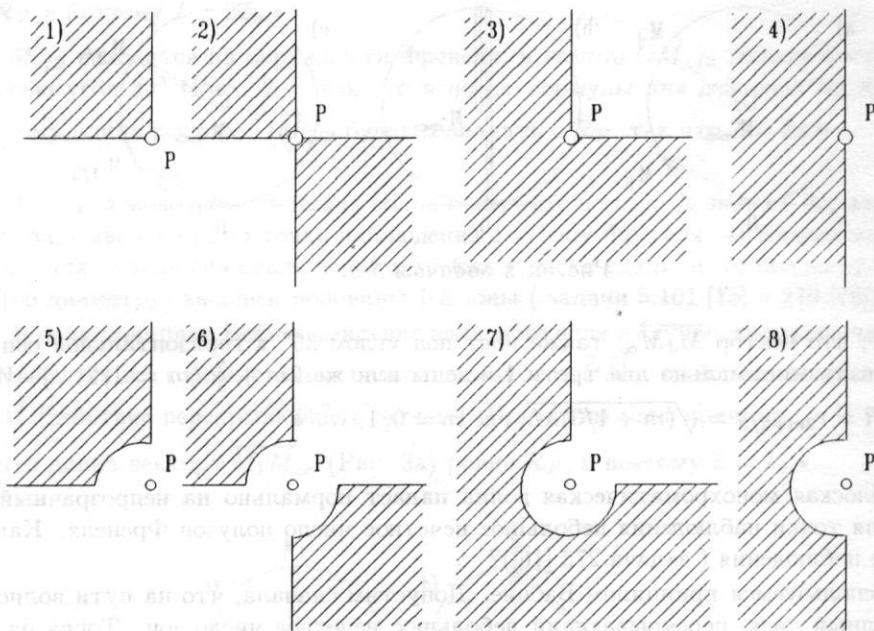


Рис. 5: к задаче 6.

Найти интенсивность света  $\mathcal{I}$  в точке  $P$ : а) расположенной за вершиной угла экранов 1-3 и за краем полуплоскости 4; б) для которой закругленный край экранов 5-8 совпадает с границей 1-й зоны Френеля; в) обобщить полученные результаты одной формулой для экранов 1-4 и 5-8 (задачи 5.102 [15] и 292 [16]).

**Решение.** а) Каждый из рассматриваемых в этой задаче экранов оставляет открытой по площади, т. е. по азимутальному углу  $\alpha$  определенную часть (при полностью открытом фронте  $\alpha = 2\pi$ ). Соответственно этому, волновое поле в точке наблюдения уменьшается пропорционально, а интенсивность — квадратично. Таким образом, получаем следующий результат. Экран 1: открыто  $3/4$  полного фронта, поэтому  $\mathcal{I} = (3/4)^2 \cdot \mathcal{I}_0 = 9/16 \cdot \mathcal{I}_0$ . Экраны 2 и 4: открыта половина полного фронта, так что  $\mathcal{I} = (1/2)^2 \cdot \mathcal{I}_0 = 1/4 \cdot \mathcal{I}_0$ . Экран 3: свободна лишь четверть полного фронта, следовательно,  $\mathcal{I} = (1/4)^2 \cdot \mathcal{I}_0 = 1/16 \cdot \mathcal{I}_0$ . •

б) Закругление центральной части экранов из предыдущей задачи по границе первой зоны Френеля открывает тем самым соответствующую часть по площади этой зоны. Действие вновь открытой части зоны следует добавить к уже найденному действию открытой ранее части волнового фронта. Учтем, что действие всей первой зоны Френеля вдвое превышает действие полностью открытого фронта, и соответствующий вектор на диаграмме Френеля ( $\overrightarrow{OM}_1$ ) сонаправлен с вектором, описывающим действие полностью открытого фронта ( $\overrightarrow{OM}_\infty$ ). Таким образом, для экрана 1 получим, что  $\mathcal{I} = (3/4 + 1/4 \cdot 2)^2 \cdot \mathcal{I}_0 = 25/16 \cdot \mathcal{I}_0$ . Аналогично, для экранов 2 и 4 имеем  $\mathcal{I} = (1/2 + 1/2 \cdot 2)^2 \cdot \mathcal{I}_0 = 9/4 \cdot \mathcal{I}_0$ . Наконец, для экрана 3 находим, что  $\mathcal{I} = (1/4 + 3/4 \cdot 2)^2 \cdot \mathcal{I}_0 = 49/16 \cdot \mathcal{I}_0$ . •

в) Если  $\alpha$  — угол, соответствующий перекрытой части волнового фронта, то из рассмотрения

случаев а) и б) с очевидностью следует, что для первого из них

$$I = \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 I_0,$$

а для второго из них соответственно

$$I = \left[\left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) + 2\frac{\alpha}{2\pi}\right]^2 I_0 = \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 I_0,$$

что и требовалось получить. •

**Задача 7.** Плоская монохроматическая волна с интенсивностью  $I_0$  падает нормально на поверхности непрозрачных экранов, состоящих из секторов двух кругов и показанных на рисунке (Рис. 6а, б).

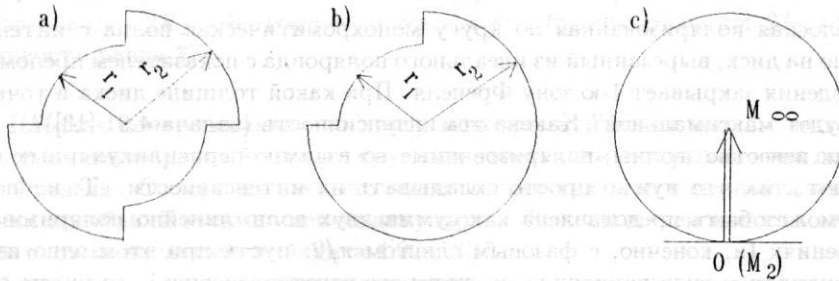


Рис. 6: к задаче 7.

Радиусы кругов соответствуют 1-й и 2-й зонам Френеля для точки наблюдения. Найти интенсивность света в этой точке (задача 4.34 [13]).

**Решение.** Для первого из экранов сначала диск перекрывал две зоны Френеля, так что вектор, описывающий действие открытой части фронта (в уже стандартных для настоящей статьи обозначениях это вектор  $\overrightarrow{M_2 M_\infty}$ ; рис. 6с), совпадает с вектором полностью открытого фронта (вектор  $\overrightarrow{O M_\infty}$ ). Далее открывается половина (по площади) второй зоны, для которой соответствующий вектор антипараллелен вектору  $\overrightarrow{O M_\infty}$  и вдвое превышает его по длине. Поэтому открытой данным диском части волнового фронта будет соответствовать суммарный вектор  $\overrightarrow{M_2 M_\infty} + 1/2 \cdot (-2\overrightarrow{O M_\infty}) = 0$ , так что  $I = 0$ .

Для второго из экранов открыта лишь четверть второй зоны. Поэтому открытому им волновому фронту соответствует суммарный вектор  $\overrightarrow{M_2 M_\infty} + 1/4 \cdot (-2\overrightarrow{O M_\infty}) = 1/2 \cdot \overrightarrow{O M_\infty}$ , так что  $I = 1/4 \cdot I_0$ .

**Задача 8.** Плоская монохроматическая волна с интенсивностью  $I_0$  падает нормально на прозрачный стеклянный диск толщины  $h$  с показателем преломления  $n$ , размер которого соответствует полутора зонам Френеля для некоторой точки наблюдения. При какой минимальной толщине диска интенсивность в этой точке будет максимальной? Какова эта интенсивность (задачи 5.105 [15] и 272 [16])?

**Решение.** Ясно, что на диаграмме Френеля не занятой диском части волнового фронта соответствует вектор  $\overrightarrow{M_{3/2} M_\infty}$ , направленный вдоль горизонтальной оси от начальной точки  $M_{3/2}$  (Рис. 7) В эту же точку  $M_{3/2}$  “смотрит” вектор  $\overrightarrow{O M_{3/2}}$ , описывающий действие полутора зон в случае, если показатель преломления диска  $n$  равен 1.

Для  $n > 1$  при прохождении через диск волнового фронта его фаза дополнительно возрастает на величину  $\Delta\varphi = k(n - 1)h = 2\pi(n - 1)h/\lambda$ , что означает доворот вектора  $\overrightarrow{O M_{3/2}}$  на угол  $\beta = \Delta\varphi \pmod{2\pi}$  в направлении против часовой стрелки. Поскольку полная амплитуда в точке наблюдения определяется суммой волнового поля, прошедшего вне и через собственно диск, то максимум интенсивности будет иметь место в случае, когда вектор  $\overrightarrow{O M_{3/2}}$  станет сонаправленным с вектором  $\overrightarrow{M_{3/2} M_\infty}$ . Таким образом, вектор  $\overrightarrow{O M_{3/2}}$  должен быть повернут на угол  $\beta = 225^\circ = 5\pi/4$  (Рис.

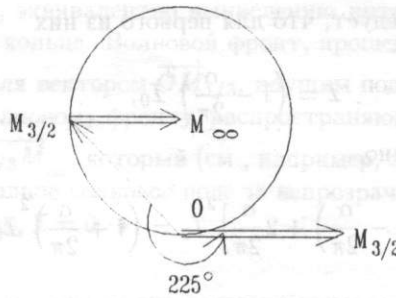


Рис. 7: к задаче 8.

7). Следовательно,  $h_{min} = \frac{5}{8} \frac{\lambda}{n-1}$ . Легко также найти и значение максимума, т.к. длины векторов  $\overrightarrow{M_{3/2}M_\infty}$  и  $\overrightarrow{OM_{3/2}}$  равны соответственно  $\mathcal{R}_F$  и  $\sqrt{2}\mathcal{R}_F$ , так что  $I_{max} = (1 + \sqrt{2})^2 I_0 = (3 + 2\sqrt{2})I_0$ .

**Задача 9.** Плоская поляризованная по кругу монохроматическая волна с интенсивностью  $I_0$  падает нормально на диск, вырезанный из идеального поляроида с показателем преломления  $n$ . Диск для точки наблюдения закрывает 1-ю зону Френеля. При какой толщине диска в точке наблюдения интенсивность будет максимальной? Какова эта интенсивность (задача 4.91 [13])?

**Решение.** Как известно, волны, поляризованные во взаимно перпендикулярных направлениях, не интерferируют, так что нужно просто складывать их интенсивности. Т.к. поляризованная по кругу волна может быть представлена как сумма двух волн, линейно поляризованных в поперечных направлениях (и, конечно, с фазовым сдвигом  $\pi/2$ ; пусть при этом одно из направлений поляризации совпадает с осью поляроида, из которого изготовлен диск), то будем рассматривать прохождение каждой из этих компонент, имеющих амплитуду  $\sqrt{I_0/2}$ , независимо. Для той из них, которая перпендикулярна оси поляроида, диск непрозрачен, так что в точку наблюдения попадает волновой фронт, проходящий вне диска, перекрывающего 1-ю зону. Следовательно, интенсивность этой компоненты в точке наблюдения будет  $I_0/2$ .

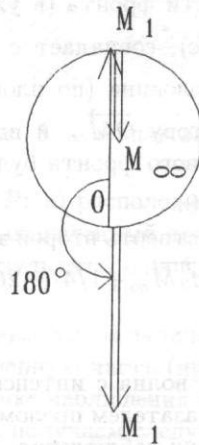


Рис. 8: к задаче 9.

Для второй компоненты ситуация совершенно аналогична той, что описана в предыдущей задаче. В самом деле, на диаграмме Френеля не занятой диском части волнового фронта соответствует вектор  $\overrightarrow{M_1M_\infty}$ , направленный вертикально вниз от начальной точки  $M_1$ , лежащей на верхнем конце диаметра окружности Френеля, проведенного вертикально. В эту же точку  $M_1$  "смотрит" вектор  $\overrightarrow{OM_1}$ , описывающий действие 1-й зоны в случае, если показатель преломления диска  $n$  равен 1. Для  $n > 1$  при прохождении через диск волнового фронта его фаза дополнительно возрастает на величину  $\Delta\varphi = k(n-1)h = 2\pi(n-1)h/\lambda$ , что означает доворот вектора  $\overrightarrow{OM_1}$  на угол  $\beta = \Delta\varphi \pmod{2\pi}$  в направлении против часовой стрелки. Поскольку полная амплитуда в точке наблюдения определяется суммой волнового поля, прошедшего вне и через собственно диск, то максимум интенсивности будет иметь место в случае, когда вектор  $\overrightarrow{OM_1}$  станет сонаправленным с вектором  $\overrightarrow{M_1M_\infty}$  (Рис.

8). Таким образом, вектор  $\vec{OM}_1$  должен быть повернут на угол  $\beta = 180^\circ + 360^\circ m = \pi + 2\pi m$ . Следовательно,  $h = \frac{1+2m}{2} \frac{\lambda}{n-1}$ . Теперь можно найти максимальную интенсивность этой компоненты в точке наблюдения: длина вектора  $\vec{M_1M_\infty}$  равна  $\mathcal{R}_F$  (амплитуда поля  $\sqrt{\mathcal{I}_0/2}$ ), а длина  $\vec{OM}_1$  вдвое больше, так что  $\mathcal{I} = [(1+2) \cdot \sqrt{\mathcal{I}_0/2}]^2 = 9/2 \cdot \mathcal{I}_0$ . Таким образом, полная максимальная интенсивность в точке наблюдения равна  $\mathcal{I}_{max} = 1/2 \cdot \mathcal{I}_0 + 9/2 \cdot \mathcal{I}_0 = 5\mathcal{I}_0$ .

**Задача 10.** Как изменится интенсивность в точке экрана, на который падает монохроматическая волна интенсивности  $\mathcal{I}_0$ , если на пути света поставить прозрачный диск, перекрывающий полторы зоны Френеля и поворачивающий плоскость поляризации света на  $90^\circ$  (задача 4.93 [13])?

**Решение.** Поскольку свет, прошедший мимо диска (1-я "компонента"), не изменит направления своей поляризации, а свет, прошедший через него (2-я "компонента"), приобретет поперечное направление поляризации, то в точке наблюдения нужно складывать интенсивности этих компонент. Для первой из них имеем, как всегда, значение  $\mathcal{I}_0$ , т.к. ей на диаграмме Френеля соответствует вектор длины  $\mathcal{R}_F$ . Поскольку для 2-й компоненты открыто полторы зоны, то ей на диаграмме соответствует вектор длины  $\sqrt{2}\mathcal{R}_F$ . Поэтому ее интенсивность будет составлять  $2\mathcal{I}_0$ , а, следовательно, полная интенсивность равна  $3\mathcal{I}_0$ .

**Задача 11.** Плоская поляризованная по кругу монохроматическая волна с интенсивностью  $\mathcal{I}_0$  падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием, открывающим для точки наблюдения 1-ю зону Френеля. Отверстие закрыто поляроидами так, что в первой и второй половинах зоны направления колебаний взаимно перпендикулярны. Каковы интенсивность света и характер его поляризации в точке наблюдения (задача 4.92 [13])?

**Решение.** Представим падающую на экран волну как сумму двух компонент, линейно поляризованных в поперечных направлениях (и, конечно, с фазовым сдвигом  $\pi/2$ ). Пусть при этом одно из направлений поляризации совпадает с осью одного из поляроидов, из которого изготовлен диск. Тогда направление поляризации второй компоненты совпадет с осью второго поляроида. Будем рассматривать прохождение каждой из этих компонент, имеющей амплитуду  $\mathcal{U}_0 = \sqrt{\mathcal{I}_0/2}$ , независимо. Так как волны, поляризованные во взаимно перпендикулярных направлениях, не интерферируют, то нужно складывать интенсивности прошедших через поляроиды компонент. Но для каждой из компонент открыто по половине зоны, так что интенсивность прошедшего света составляет  $\mathcal{I} = (\sqrt{2}\mathcal{U}_0)^2 = \mathcal{I}_0$ . Следовательно, полная интенсивность в точке наблюдения будет вдвое больше, т.е.  $\mathcal{I} = 2\mathcal{I}_0$ . Нетрудно найти и характер поляризации в точке наблюдения. В самом деле, до прохождения через поляроиды компоненты были поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях и имели относительный сдвиг фаз  $\pi/2$ . После поляроидов они по-прежнему ортогональны друг другу (имеют амплитуды  $\mathcal{U}_{1,2} = \sqrt{2}\mathcal{U}_0 = \sqrt{\mathcal{I}_0}$ ) и т.к. компоненты света, прошедшего через разные половины одной зоны, приобретают относительный сдвиг фаз  $\pi/2$ , то теперь между компонентами сдвиг фаз станет равным 0 или  $\pi$ . Это означает, что свет будет иметь линейную поляризацию в направлении биссектрисы угла между осями поляроидов. Этот вывод, естественно, не противоречит уже полученному результату для интенсивности: амплитуда суммарной линейно поляризованной волны в точке наблюдения будет составлять  $\mathcal{U} = \sqrt{2}\mathcal{U}_{1,2} = \sqrt{2\mathcal{I}_0}$ , что как раз соответствует найденной ранее интенсивности  $2\mathcal{I}_0$ .

**Задача 12.** Плоская монохроматическая волна с длиной волны  $\lambda$  и интенсивностью  $\mathcal{I}_0$  падает нормально на стеклянную пластинку с показателем преломления  $n$ . В пластинке вырезано отверстие, соответствующее по размеру 1-й зоне Френеля для некоторой точки наблюдения. При какой толщине  $h$  пластинки интенсивность в этой точке будет максимальной? Какова эта интенсивность (задача 4.33 [13])?

**Решение.** На диаграмме Френеля волновому фронту, проходящему через не занятую отверстием часть пластинки, соответствует вектор  $\vec{M_1M_\infty}$ , направленный вертикально вниз от начальной точки  $M_1$ , лежащей на верхнем конце диаметра окружности Френеля, проведенного вертикально. В эту же точку  $M_1$  "смотрел" бы вектор  $\vec{OM}_1$ , описывающий действие 1-й зоны, если бы отверстие в пластинке отсутствовало. Его наличие означает для проходящего через него света отставание по фазе по сравнению со светом, идущим через пластинку с показателем преломления  $n > 1$ . Ясно, что величина возникшей разности фаз равна  $\Delta\varphi = k(n-1)h = 2\pi(n-1)h/\lambda$ , и ей соответствует поворот на диаграмме Френеля вектора  $\vec{OM}_1$  на угол  $\beta = \Delta\varphi \pmod{2\pi}$  в направлении, соответ-

ствующем уменьшению фазы волны, т. е. по часовой стрелке. Поскольку полная амплитуда в точке наблюдения определяется суммой волнового поля, прошедшего вне и через отверстие, то максимум интенсивности будет иметь место в случае, когда вектор  $\vec{OM}_1$  станет сонаправленным с вектором  $\vec{M}_1\vec{M}_\infty$ <sup>6</sup>. Таким образом, вектор  $\vec{OM}_1$  должен быть повернут на угол  $\beta = 180^\circ + 360^\circ m = \pi + 2\pi m$ . Следовательно,  $h_{min} = \frac{1+2m}{2} \frac{\lambda}{n-1}$ . Легко также найти и значение максимума, т. к. длины векторов  $\vec{M}_1\vec{M}_\infty$  и  $\vec{OM}_1$  равны, соответственно,  $\mathcal{R}_F$  и  $2\mathcal{R}_F$ , так что  $I_{max} = (1+2)^2 I_0 = 9I_0$ .

**Задача 13.** Плоская монохроматическая волна с длиной волны  $\lambda$  и интенсивностью  $I_0$  падает нормально на стеклянную пластинку с показателем преломления  $n$ . На противоположной стороне

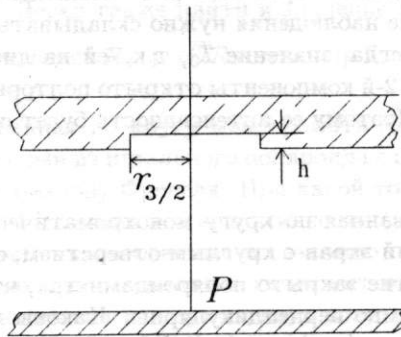


Рис. 9: к задаче 13.

пластинки сделана выемка, соответствующая по размеру полутора зонам Френеля для некоторой точки наблюдения. При какой глубине  $h$  выемки интенсивность света в точке наблюдения будет: а) максимальной; б) минимальной; в) равной интенсивности падающего света? Каковы будут интенсивности в точке наблюдения в этих случаях (задача 5.103 [15])?

**Решение.** На диаграмме Френеля волновому фронту, проходящему через не занятую выемкой часть пластинки, соответствует вектор  $\vec{M}_{3/2}\vec{M}_\infty$ , направленный вниз под углом  $45^\circ$  от начальной точки  $M_{3/2}$ , лежащей на левом конце диаметра окружности Френеля, проведенного горизонтально. В эту же точку  $M_{3/2}$  "смотрел" бы вектор  $\vec{OM}_{3/2}$ , описывающий действие полутора зон, если бы выемка в пластинке отсутствовала. Ее наличие означает для проходящего через нее света отставание по фазе по сравнению со светом, идущим через пластинку с показателем преломления  $n > 1$ . Величина возникшей разности фаз равна  $\Delta\varphi = k(n-1)h = 2\pi(n-1)h/\lambda$ , и ей соответствует поворот на диаграмме Френеля вектора  $\vec{OM}_{3/2}$  на угол  $\beta = \Delta\varphi \pmod{2\pi}$  в направлении, соответствующем уменьшению фазы волны, т. е. по часовой стрелке. Полная амплитуда в точке наблюдения определяется, естественно, суммой волнового поля, прошедшего через выемку и вне ее. Теперь нетрудно рассмотреть интересные нас случаи.

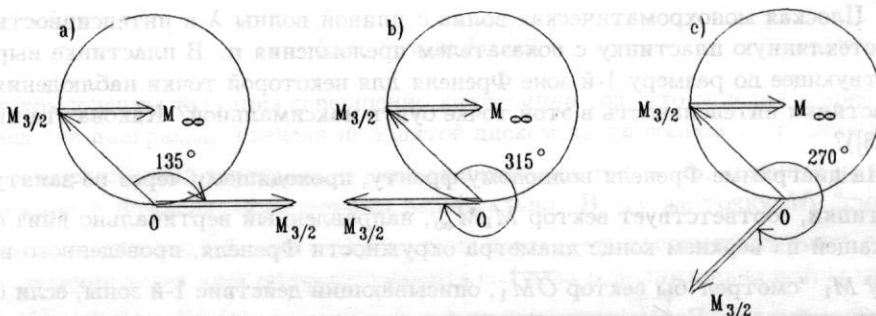


Рис. 10: к задаче 13.

<sup>6</sup> Ясно, что рисунок к этой задаче совпадает с рис. 8 к задаче 9, но поворот вектора  $\vec{OM}_1$  осуществляется на такой же угол в противоположном направлении.

а) Максимум интенсивности будет иметь место тогда, когда вектор  $\vec{OM}_{3/2}$  станет сонаправленным с вектором  $\vec{M}_{3/2}M_{\infty}$ . Таким образом, вектор  $\vec{OM}_{3/2}$  должен быть повернут на угол  $\beta = 135^\circ + 360^\circ m = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m$  (Рис. 10а). Следовательно,  $h = (\frac{3}{8} + m)\frac{\lambda}{n-1}$ . Легко также найти и значение максимума, т.к. длины векторов  $\vec{M}_{3/2}M_{\infty}$  и  $\vec{OM}_{3/2}$  равны соответственно  $\mathcal{R}_F$  и  $\sqrt{2}\mathcal{R}_F$ , так что  $I_{max} = (1 + \sqrt{2})^2 I_0 = (3 + 2\sqrt{2})I_0$ .

б) Минимум интенсивности будет иметь место в случае, когда вектор  $\vec{OM}_{3/2}$  станет противоположно направленным вектору  $\vec{M}_{3/2}M_{\infty}$ , т.е. вектор  $\vec{OM}_{3/2}$  должен быть повернут на угол  $\beta = 315^\circ + 360^\circ m = \frac{7\pi}{4} + 2\pi m$  (Рис. 10б). Следовательно, аналогично предыдущему случаю, получаем, что  $h = (\frac{7}{8} + m)\frac{\lambda}{n-1}$  и  $I_{min} = (1 - \sqrt{2})^2 I_0 = (3 - 2\sqrt{2})I_0$ .

в) Наконец, интенсивность в точке наблюдения останется равной  $I_0$ , если вектор  $\vec{OM}_{3/2}$  будет повернут на угол  $\beta = 270^\circ + 360^\circ m = \frac{3\pi}{2} + 2\pi m$  (Рис. 10с). Следовательно,  $h = (\frac{3}{8} + m)\frac{\lambda}{n-1}$ . •

**Задача 14.** Плоская монохроматическая волна с  $\lambda$  и интенсивностью  $I_0$  падает нормально на стеклянную пластинку с показателем преломления  $n$ . Противоположная сторона пластинки представляет собой непрозрачный экран с круглым отверстием, соответствующим по размеру 1-й зоне Френеля для некоторой точки наблюдения. В середине отверстия сделана круглая выемка, размер которой соответствует половине 1-й зоны. При какой глубине  $h$  выемки интенсивность света в точке наблюдения будет максимальной? Какова эта интенсивность (задача 5.104 [15])?

**Решение.** Непрозрачность второй стороны пластинки означает, что в действительности исходная волна падает на стеклянный диск, радиус которого равен  $r_1$ , и с одной стороны которого сделана выемка радиуса  $r_{1/2}$ . На диаграмме Френеля волновому фронту, проходящему через не занятую выемкой часть диска, соответствует вектор  $\vec{M}_{1/2}M_1$ , направленный вверх под углом  $45^\circ$  от начальной точки  $M_{1/2}$ , лежащей на правом конце диаметра окружности Френеля, проведенного горизонтально. В эту же точку  $M_{1/2}$  "смотрел" бы вектор  $\vec{OM}_{1/2}$ , описывающий действие полови-

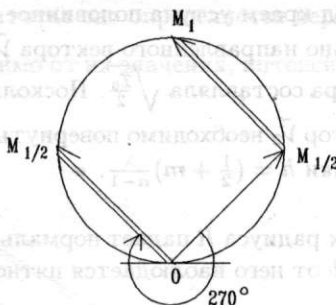


Рис. 11: к задаче 14.

ны зоны, если бы выемка в диске отсутствовала. Ее наличие означает для проходящего через нее света отставание по фазе по сравнению со светом, идущим через диск с показателем преломления  $n > 1$ . Величина возникшей разности фаз равна  $\Delta\varphi = k(n-1)h = 2\pi(n-1)h/\lambda$  и ей соответствует поворот на диаграмме Френеля вектора  $\vec{OM}_{1/2}$  на некоторый  $\beta = \Delta\varphi \pmod{2\pi}$  в направлении, соответствующем уменьшению фазы волны, т.е. по часовой стрелке. Аналогично предыдущим задачам ясно, что максимум интенсивности будет иметь место тогда, когда вектор  $\vec{OM}_{1/2}$  станет сонаправленным с вектором  $\vec{M}_{1/2}M_1$ . Таким образом, вектор  $\vec{OM}_{1/2}$  должен быть повернут на угол  $\beta = 270^\circ + 360^\circ m = \frac{3\pi}{2} + 2\pi m$ . Следовательно,  $h = (\frac{3}{4} + m)\frac{\lambda}{n-1}$ . Легко также найти и значение максимума, т.к. длины векторов  $\vec{M}_{1/2}M_1$  и  $\vec{OM}_{1/2}$  равны  $\sqrt{2}\mathcal{R}_F$ , то  $I_{max} = (2\sqrt{2})^2 I_0 = 8I_0$ . •

**Задача 15.** Плоская монохроматическая волна с длиной волны  $\lambda$  и интенсивностью  $I_0$  падает нормально на стеклянную пластинку, профиль которой показан на рисунке. При какой высоте  $h$



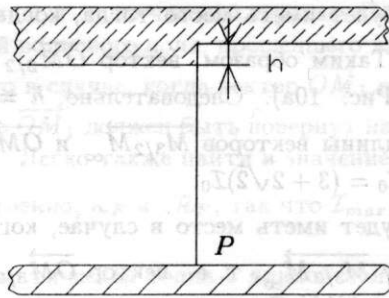


Рис. 12: к задаче 15.

уступа интенсивность света в точках, расположенных под его краем, будет: а) минимальна (чему равен этот минимум?) и б) вдвое меньше, чем  $I_0$  (задача 5.110 [15])?

*Решение.* Для любой точки под краем уступа стеклянная пластинка открывает весь волновой фронт, половина которого, проходя большую толщину пластинки, приобретает дополнительный набег фазы  $\Delta\varphi = k(n-1)h = 2\pi(n-1)h/\lambda$ . Следовательно, вектор  $\vec{M}_1\vec{M}_\infty$ , направленный вертикально вверх, необходимо разделить на два одинаковых вектора  $\vec{V}_1$  и  $\vec{V}_2$ , каждый из которых описывает действие половины (по площади) всего волнового фронта — вне уступа и под ним. Второй из этих векторов, в соответствии с дополнительной разностью фаз, должен быть на диаграмме Френеля повернут против часовой стрелки на угол  $\beta = \Delta\varphi \pmod{2\pi}$ . Теперь нетрудно рассмотреть интересные нас ситуации.

а) Минимум интенсивности будет иметь место в случае, когда вектор  $\vec{V}_2$  станет противоположно направленным вектору  $\vec{V}_1$ , для чего он должен быть повернут на угол  $\beta = 180^\circ + 360^\circ m = \pi + 2\pi m$ , что соответствует толщине пластинки  $h = (1 + 2m)\frac{\lambda}{n-1}$ . Поскольку длины векторов  $V_1$  и  $V_2$  одинаковы (и равны, как нетрудно видеть,  $\frac{\sqrt{I_0}}{2}$ ), то понятно, что при этом получится нулевая интенсивность:  $I_{min} = 0$ .

б) Чтобы получить в точках под краем уступа половинное значение интенсивности, необходимо, чтобы после сложения вертикально направленного вектора  $\vec{V}_1$  и повернутого на некоторый угол вектора  $\vec{V}_2$ , длина суммарного вектора составляла  $\frac{\sqrt{I_0}}{2}$ . Поскольку длины обоих векторов одинаковы и равны  $\frac{\sqrt{I_0}}{2}$ , то понятно, что вектор  $\vec{V}_2$  необходимо повернуть на угол  $\beta = 90^\circ + 360^\circ m = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$ , что соответствует толщине пластинки  $h = (\frac{1}{2} + m)\frac{\lambda}{n-1}$ . •

**Задача 16.** На непрозрачный диск радиуса  $R$  падает нормально плоская световая волна длины  $\lambda$ . В точке  $P$  на его оси на расстоянии  $b$  от него наблюдается пятно Пуассона (см. задачу 3). Оценить его радиальный размер.

*Решение.* Очевидно, что для точки  $P$  диск перекрывает такое число  $m$  зон Френеля, что  $R = r_m$ , откуда  $m = \frac{R^2}{\lambda b}$ . Построим зоны Френеля для точки  $P_\rho$ , находящейся на том же расстоянии  $b$  от диска и отстоящей на расстояние  $\rho$  от оси. В этом случае границы зон уже не будут симметрично располагаться по поверхности диска, и он с одного своего края может перекрыть одно число зон ( $R - \rho = r_m$ ), в то время как число зон с противоположной стороны может оказаться другим:  $R + \rho = r_n$ . Как только значения  $m$  и  $n$  станут отличаться на единицу, это будет означать, что от разных краев диска волны приходят в противофазе и, следовательно, интенсивность в точке  $P_\rho$  резко упадет по сравнению с интенсивностью в точке  $P$ . Таким образом, соответствующее значение  $\rho$  можно принять за радиальный размер пятна Пуассона:

$$1 = n - m = \frac{(R + \rho)^2 - (R - \rho)^2}{\lambda b} = \frac{4R\rho}{\lambda b},$$

откуда

$$\rho \approx \frac{\lambda b}{4R}.$$

**Задача 17 (эксперимент Поля [8]).** Между светящимся (длина волны  $\lambda = 5500\text{Å}$ ) предметом

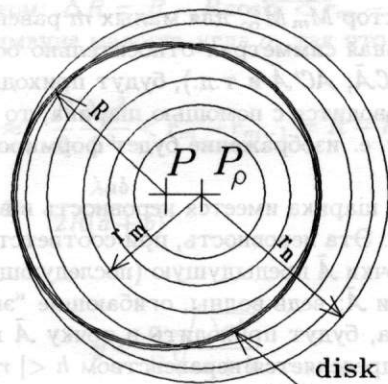


Рис. 13: к задаче 16.

конечного размера  $y$  и фотопластинкой поместили непрозрачный шарик диаметра  $2R = 40$  мм. Расстояние между предметом и шариком  $a = 12$  м, а между шариком и фотопластинкой  $b = 18$  м.  
 а) Найти минимальную высоту  $h$  неровностей шарика, при которой изображение будет испорчено.  
 б) Когда шарик может быть заменен диском (задачи 3.58 [12], 5.108 [15] и 271 [16])?

**Решение.** Прежде всего необходимо уточнить, что в отличие от обычного *фотоизображения*, получающегося на вполне определенном расстоянии от фотографируемого предмета, в данном эксперименте речь идет об *дифракционном* изображении, которое может быть получено в любом месте за шариком. Рассмотрим формирование изображения более детально. Возьмем произвольную точку предмета  $A$  на некотором расстоянии  $\Delta y$  от оси системы, проходящей через центры предмета и шарика ( $A_0$  и  $O$  соответственно), и проведем еще одну ось  $AO$ . На расстоянии  $b$  от шарика изображение  $\tilde{A}$  точки  $A$  формируется всеми лучами, идущими от нее и огибающими шарик вследствие дифракции. Для точки  $\tilde{A}$  шарик представляет собой непрозрачный "экран" (диск, плоскость которого перпендикулярна оси  $AO$ ; его часть показана на рис. 14), перекрывающий  $m$  зон Френеля. Число этих зон нетрудно подсчитать: оно определяется неравенством  $R < r_m = \sqrt{\frac{m\lambda ab}{a+b}}$ , откуда  $m = \frac{R^2(a+b)}{\lambda ab}$ . При малых  $m$ , независимо от их значения, интенсивность света в точке  $\tilde{A}$  определяется

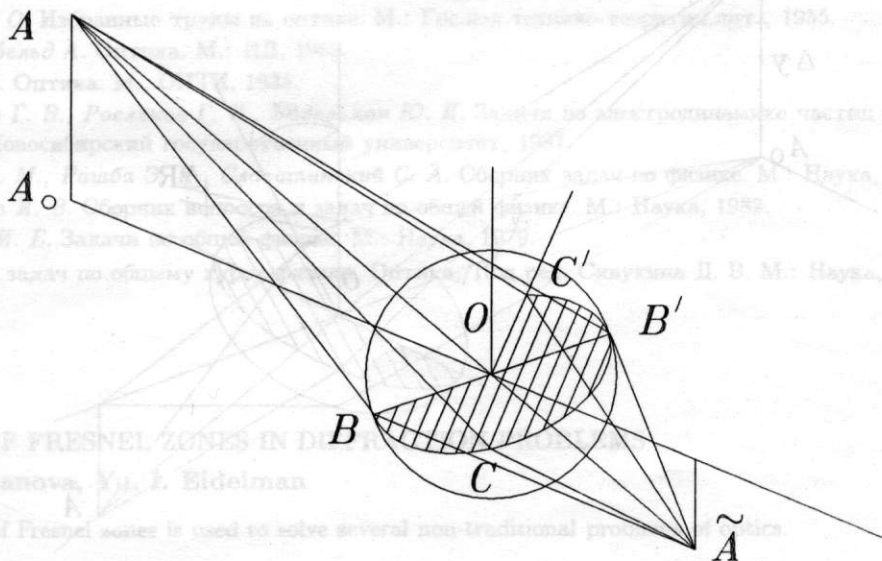


Рис. 14: к задаче 17.

частью волнового фронта вне "экрана" и, в соответствии с диаграммой Френеля, практически такая

же, что и в плоскости “экрана” (вектор  $\overrightarrow{M_m M_\infty}$  для малых  $m$  равен радиусу окружности Френеля). Поскольку имеет место азимутальная симметрия относительно оси  $A\tilde{A}$ , то все лучи, огибающие “экран” (например,  $AB\tilde{A}$ ,  $AB'\tilde{A}$ ,  $AC\tilde{A}$ ,  $AC'\tilde{A}$  и т.д.), будут приходить в точку  $\tilde{A}$  в одинаковой фазе. Т.к. “фотографирование” производится с помощью шарика, то вышеприведенное рассмотрение справедливо для любой точки  $A$ , т. е. изображение будет формироваться одинаковым образом для всех точек предмета.

а) Пусть теперь на поверхности шарика имеется неровность в виде царапины (или “горы”) глубиной (соответственно, высотой)  $h$ . Эта неровность, при соответствующем своем размере, откроет (в случае “горы” — закроет) для точки  $\tilde{A}$  предыдущую (последующую) зону Френеля, испортив тем самым качество изображения точки  $\tilde{A}$ : ведь волны, огибающие “экран” в месте нахождения неровности и в остальной части шарика, будут приходить в точку  $\tilde{A}$  в противофазе. Таким образом, допустимый размер неровностей определяется неравенством  $h < |r_m - r_{m\pm 1}|$ . Вспоминая формулу для радиуса зоны Френеля и используя найденное ранее выражение для номера  $m$ , имеем:

$$\begin{aligned}
 h < |r_m - r_{m\pm 1}| &= \sqrt{\frac{\lambda ab}{a+b}} |\sqrt{m} - \sqrt{m\pm 1}| = \\
 &= |R - R\sqrt{1 \pm \frac{\lambda ab}{R^2(a+b)}}| \approx |\pm \frac{\lambda ab}{2R(a+b)}| = \frac{\lambda ab}{2R(a+b)}.
 \end{aligned}$$

Для значений параметров, использованных в эксперименте Поля, получаем, таким образом, что  $h < 0.1$  мм.

б) Заменим шарик диском. Теперь эквивалентный ему непрозрачный “экран” представляет собой эллиптический диск, тем более “сплюснутый”, чем дальше отстоит точка  $A$  предмета от оси системы  $A_0O$  (это “сплющивание” будет происходить вдоль направления  $A_0A$ ). Следовательно, нарушена азимутальная симметрия относительно оси  $A\tilde{A}$ , и лучи, огибающие “экран”, будут приходить в точку  $\tilde{A}$  в разной фазе в зависимости от того, с какой стороны они огибают “экран” — со “сплюснутой” или с “нормальной”. Изображение  $\tilde{A}$  точки  $A$  “испортится”, когда число зон, перекрытых “сплюснутым” направлением, станет на единицу отличаться от числа зон, перекрытых “нормальным”, т. к. волны, огибающие “экран” для этих направлений, будут приходить в точку  $\tilde{A}$  в противофазе. Оценим величину видимой “сплюснутости” диска. Она определяется углом  $\alpha$  между

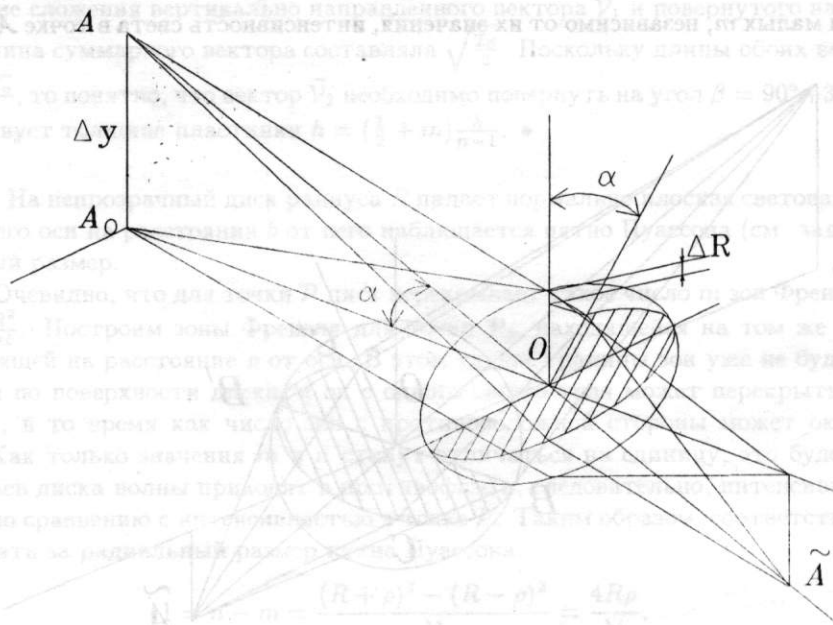


Рис. 15: к задаче 17.

осями  $A_0O$  и  $AO$ : под этим углом зрения радиус диска  $R$  имеет видимый из точки  $A$  размер  $R \cos \alpha$ . В свою очередь, максимальная величина угла  $\alpha$  определяется предельной высотой точки  $A$  над осью  $A_0O$ , т. е. фактически размером предмета  $\Delta y$ :  $\text{tg } \alpha = \frac{\Delta y}{a}$ . Теперь нетрудно найти условие, когда

шарик может быть заменен диском:  $\Delta R = R - R \cos \alpha < r_m - r_{m-1}$ . Преобразуя выражение для величины  $\Delta R$  и принимая во внимание малость угла  $\alpha$ , так что  $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{a}$ , получим:

$$\Delta R = 2R \sin^2 \frac{\alpha}{2} \approx \frac{R \Delta y^2}{2a^2} < r_m - r_{m-1} = R - R \sqrt{1 - \frac{\lambda ab}{R^2(a+b)}} \approx \frac{\lambda ab}{2R(a+b)},$$

откуда окончательно находим:

$$y < \frac{a}{R} \sqrt{\frac{\lambda ab}{a+b}}.$$

Для значений параметров, использованных в эксперименте Поля, получаем, таким образом, что  $\Delta y < 1$  м. •

В заключение один из авторов (Ю.И.Э.) выражает искреннюю признательность всем преподавателям электродинамики на физическом факультете Новосибирского государственного университета, продолжающееся сотрудничество с которыми помогает ему открывать для себя все новые и новые интереснейшие грани предмета.

## Литература

1. Мешков И. Н., Чириков Б. В. Электромагнитное поле. Часть 2. Электромагнитные волны и оптика. Новосибирск: Наука, 1987.
2. Бутиков Е. И. Оптика. М.: Высшая школа, 1986.
3. Матвеев А. Н. Оптика. М.: Высшая школа, 1985.
4. Сивухин Д. В. Курс общей физики: В 4 т. М.: Наука, 1985. Т. IV: Оптика.
5. Калитиевский Н. И. Волновая оптика. М., Наука, 1971.
6. Ландсберг Г. С. Оптика. М., Наука, 1976.
7. Борн М., Вульф Э. Основы оптики. М., Наука, 1970.
8. Поль Р. В. Оптика и атомная физика. М., Наука, 1966.
9. Френель О. Избранные труды по оптике. М.: Гос. изд. технико-теоретич. лит., 1955.
10. Зоммерфельд А. Оптика. М.: ИЛ, 1953.
11. Друде П. Оптика. М., ОНТИ, 1935.
12. Меледин Г. В., Росляков Г. В., Эйдельман Ю. И. Задачи по электродинамике частиц и волн. Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 1987.
13. Козел С. М., Рашба Э. И., Славатинский С. А. Сборник задач по физике. М.: Наука, 1987.
14. Савельев И. В. Сборник вопросов и задач по общей физике. М.: Наука, 1982.
15. Иродов И. Е. Задачи по общей физике. М.: Наука, 1979.
16. Сборник задач по общему курсу физики. Оптика./Под ред. Сивухина Д. В. М.: Наука, 1977.

## METHOD OF FRESNEL ZONES IN DIFFRACTION PROBLEMS

V. V. Bazhanova, Yu. I. Eidelman

The method of Fresnel zones is used to solve several non-traditional problems of optics.

## SIMPLE EVALUATION OF THE CRYSTAL CONSTANT FOR ALKALI METALS

I.B. Khriplovich

Budker Institute of Nuclear Physics, 630090 Novosibirsk, Russia

The crystal constants of alkali metals is expressed via the binding energies of free atoms. The relation obtained is in quantitative agreement with experimental data.

It is only natural to expect that the following estimate for a metal crystal constant should be valid by order of magnitude: this constant should be close to the doubled radius of the free atom. We will check how accurate quantitatively this estimate is for alkali metals. The crystal constants of alkali metals are expressed via the binding energies of free atoms. The relation obtained is in quantitative agreement with experimental data.

Let us start from the atomic radius. For the hydrogen s-states it is described by the following formula (in the units of the Bohr radius):

$$\langle r_H \rangle = \frac{3}{2} n^2 \quad (1)$$

where  $n$  is the principal quantum number. In alkalis the outer electron energy is well described by the following phenomenological expression:

$$E_{nl} = -\frac{Ry}{\nu^2} \quad (2)$$

Here  $Ry$  is the Rydberg constant;  $\nu$  is the effective principal quantum number:  $\nu = n_r + l + 1 - \sigma_l$ ; the quantum defect  $\sigma_l$  depends weakly on the usual radial quantum number  $n_r$  at the fixed orbital angular momentum  $l$ . The atomic radius  $\langle r \rangle$  depends mainly on the long-distance behaviour of the wave function which in its turn is determined by the electron binding energy. Therefore, it is only natural to assume that the alkali atom radius is given by a formula analogous to (1):

$$\langle r \rangle = \frac{3}{2} \nu^2 \quad (3)$$

In other words, the doubled ground state atomic radius equals (in the Bohr radius units)

$$2 \langle r \rangle = 3 \frac{Ry}{I} \quad (4)$$

where  $I$  is the ionization potential.

Now we have to compare this quantity with the crystal constants. All alkali metals belong to the body-centered cubic crystals. Beside the cube edge  $\bar{a}$ , there is an even shorter interatomic distance, half of the main diagonal  $d/2 = \bar{a} \sqrt{3}/2$ . The results of comparison are presented in the Table (all values are given in the units of the Bohr radius).

$$2 \langle r \rangle = 3 Ry/I \quad \bar{a} \quad d/2$$

Li	7.57	5.72	6.61
Na	7.94	7.00	8.08
K	9.41	8.72	10.06
Rb	9.77	9.19	10.60
Cs	10.48	9.89	11.42

Even in the worst case, that of lithium, the error of estimate (4) is about 25% only. For all other metals this estimate falls in between  $\bar{a}$  and  $d/2$ , i.e., it can be considered as quantitatively correct.

I am grateful to Claude Guet for useful discussions.

## ПРОСТАЯ ОЦЕНКА КОНСТАНТЫ КРИСТАЛЛА ДЛЯ ЩЕЛОЧНЫХ МЕТАЛЛОВ

И. Б. Хриплович

Константа кристаллов щелочных металлов выражена через энергию связи свободных атомов. Полученная зависимость количественно совпадает с экспериментальными данными.

### Задача

Оценить с помощью соотношения неопределенностей глубину уровня в одномерной мелкой яме.

### Решение задачи <sup>1</sup>

Критический прицельный параметр  $\rho$ , на котором взаимодействие еще существенно, определяется из следующего условия: неопределенность энергии, связанная со временем пролета,

$$\hbar/\tau \sim \hbar v/\rho,$$

сравнима с характерной энергией взаимодействия на расстоянии порядка прицельного параметра,

$$g^2 \frac{\exp(-\rho/a)}{\rho}.$$

При этом полное сечение составляет

$$\sigma \sim \pi \rho^2 \sim \pi a^2 \ln^2(g^2/\hbar v).$$

<sup>1</sup>Текст задачи был опубликован в СФЖ № 1 за 1995 год.

## INTUITIVE EXPLANATION OF THE SECOND HUND'S RULE

I. B. Khriplovich

Budker Institute of Nuclear Physics, 630090 Novosibirsk, Russia

The intuitive explanation of the second Hund's rule is given.

The qualitative explanation of the first Hund's rule (the term with the greatest possible value of the total electron spin  $S$  for the given electron configuration has the lowest energy) is well-known. In the state with the greatest  $S$  the spin wave function is "most symmetrical". Therefore, the coordinate wave function of this state is "most antisymmetrical" which minimizes the probability of finding electrons close together, and in such a way minimizes the Coulomb interelectron repulsion.

But what is the origin of the second Hund's rule? Why at given  $S$  is it the term with the greatest possible value of the total orbital momentum  $L$  which has the lowest energy? In some textbooks this rule, first established empirically, is confirmed by direct (and rather tedious) calculations of the residual Coulomb interaction between electrons. But the second Hund's rule lacked a simple and transparent explanation. Such an explanation is presented below.

Without any claims of general proof I'll confine myself to a simple example of the system of two equivalent  $p$ -electrons,  $p^2$ . According to the first Hund's rule, its lowest terms are triplet ones,  $^3P_{0,1,2}$ .

As to the singlet terms,  $^1S_0$  and  $^1D_2$ , their radial wave functions are identical (to lowest approximation in the residual interaction). So, let us compare the angular ones. The angular single- $p$ -electron wave function is nothing but a normalized component, cartesian or spherical one, of the unit radius-vector,  $\sqrt{3}n_i$ . Then the  $^1S_0$  total angular wave function, again properly normalized, is

$$\sqrt{3} \vec{n}^{(1)} \cdot \vec{n}^{(2)} \quad (1)$$

where the superscripts refer to the first and second electron respectively. As a representative of the  $^1D_2$  states let us choose, e.g., that with  $L_z = +2$  which is just a product of the single-electron wave functions corresponding to  $l_z = +1$  each:

$$\left( \frac{-n_x^{(1)} - in_y^{(1)}}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{-n_x^{(2)} - in_y^{(2)}}{\sqrt{2}} \right). \quad (2)$$

Let us consider the extreme case of the coinciding coordinates of the two electrons. At  $\vec{n}^{(1)} = \vec{n}^{(2)}$  the wave function (1) squared equals 3. The modulus squared of the wave function (2) is  $(n_x^2 + n_y^2)^2/4$ . Even its maximum value, 1/4, is smaller than 3.

It gets obvious now that the probability to find the two electrons close together in the  $D$ -state is less than that in the  $S$ -state. The Coulomb repulsion in the  $D$ -state is less also, and its energy is indeed lower.

## ИНТУИТИВНОЕ ОБЪЯСНЕНИЕ ВТОРОГО ПРАВИЛА ХУНДА

И. Б. Хриплович

Приведено интуитивное объяснение второго правила Хунда.

## СЕЙСМИКА И УСКОРИТЕЛИ

В. В. Пархомчук, В. Д. Шильцев  
Институт ядерной физики, Новосибирск, 630090

Современные ускорители заряженных частиц для исследования физики высоких энергий предъявляют столь жесткие требования к стабильности положения своих элементов, что колебания почвы являются серьезным препятствием их функционирования. В работе рассмотрены основные механизмы воздействия сейсмозумов на пучки частиц в ускорителях, описаны результаты экспериментальных исследований в этой области. Подробно обсуждены и проанализированы данные о долговременных смещениях грунта, показан их диффузный характер, который ведет к наблюдаемым диффузиям орбит в ускорителях.

### Введение

В настоящее время пучки ускоренных заряженных частиц находят широкое применение при проведении экспериментальных исследований во многих областях физики и других точных наук. Для многих экспериментов принципиально важно уметь получать пучки с малыми размерами и малым разбросом импульсов частиц, поддерживать их параметры постоянными в течении длительного времени движения частиц в магнитной системе накопителя.

Особенно высокие требования предъявляет к качеству пучков физика высоких энергий и элементарных частиц, так как необходимо обеспечить высокую плотность встречных пучков. Первый электрон-позитронный коллайдер со встречными пучками ВЭПП-2, построенный в Новосибирске, имел размеры несколько метров. На текущий момент развитие метода встречных пучков привело к тому, что во многих странах мира проектируются, строятся и уже построены несколько больших коллайдеров на энергии в несколько единиц и даже десятков Тера-электрон-Вольт ( $1 \text{ ТэВ} = 10^{12} \text{ эВ}$ ) с периметрами в десятки километров. Самый грандиозный проект Сверхпроводящего Суперколлайдера SSC (США) на энергию частиц в пучке 20 ТэВ с периметром 90 км в настоящее время, к сожалению, остановлен. Большой Адронный Коллайдер LHC (Европейский Ядерный Центр ЦЕРН, Швейцария) с проектной энергией 8 ТэВ и периметром 30 км надеются построить к началу 21 века. Проект Ускорительно-Накопительного Комплекса УНК Института физики высоких энергий в г.Протвино на 3 ТэВ в данный момент финансируется так, что момент его запуска совершенно неясен. Наибольшую энергию (1 ТэВ) имеет протон-антипротонный коллайдер Tevatron (Теватрон, США) с периметром 6 км. Из ускорителей легких частиц отметим бурно развивающееся направление линейных электрон-позитронных коллайдеров на энергию 1–2 ТэВ, проекты которых разрабатываются в России (ИЯФ СО РАН), Германии, Японии и США.

Высокая светимость этих установок достигается в первую очередь за счет малых размеров пучков в месте встречи: например, в SSC протонные пучки при столкновении должны иметь поперечный среднеквадратичный размер 5 микрон, а в линейных коллайдерах вертикальный размер составляет несколько десятков Ангстрем. Такие невиданные ранее малые размеры предполагают очень высокую фазовую плотность частиц в пространстве “обобщенные координаты — сопряженные импульсы”. Выполнение этой задачи осложняется тем, что размеры этих установок составляют десятки километров и состоят они из тысяч элементов, которые могут приводить к расплыванию фазового объема — нагреву сгустков.

Обе указанные ветви коллайдеров не имеют такого внутреннего процесса, ведущего к уменьшению фазового объема, каким является синхротронное излучение, поэтому единственный достаточно эффективный путь — формировать пучки с малым фазовым объемом (эмиттансом) на малых энергиях и стараться сохранять его при длительной работе (до нескольких десятков часов) на высокой энергии эксперимента.

Особое внимание следует уделить внешним воздействиям на пучки заряженных частиц, в частности, на вибрации, которые могут серьезно препятствовать эффективной работе этих ускорителей.



Смещение магнитных элементов от идеального положения приводит к возбуждению бетатронных колебаний частиц и искажению положения орбиты частиц. Это приводит к постепенному росту поперечных размеров пучка и медленному дрейфу центра пучка, что вызывает проблемы при осуществлении встречных столкновений с другим пучком.

Исследования колебаний проводятся на работающих установках и, как правило, вблизи от дорог, больших компрессорных станций, в отличие от чистых сейсмических станций, расположенных вдали от техногенной активности и на выходах твердых пород.

Поскольку важность этого вопроса хорошо понималась многими физиками-ускорительщиками, то исследования вибраций и дрейфа элементов ускорителей начались, когда стало невозможно установить ускоритель на одном фундаменте или платформе. Исследования проводились в ЦЕРНе (Женева), в ИФВЭ (Протвино), в ИЯФе (Новосибирск) и во многих других ускорительных центрах. Авторы начали такие исследования в связи с проектом строительства линейного коллайдера ВЛЭПП в Протвино и провели ряд экспериментальных исследований в ИЯФе и в SSCL (США).

Взгляд на проблему сейсмике со стороны ускорительщиков, конечно, носит весьма специфический и ограниченный характер, но может оказаться интересным в других областях, и поэтому авторы решились на представление этого обзора в общезначимом журнале.

## 1 Влияние вибраций на пучки в ускорителях

Циклический ускоритель или накопительное кольцо можно упрощенно представить, как некоторую регулярную магнитную структуру, состоящую из дипольных магнитов с вертикальным полем, заворачивающим пучок в горизонтальном направлении, и попеременно расположенных фокусирующих и дефокусирующих квадрупольных магнитов. Такая структура, называемая "жестко фокусирующей", удерживает частицы на постоянной орбите вокруг кольца, позволяя им лишь осциллировать около нее. Та из орбит, которая проходит через центры всех квадрупольных магнитов, называется "центральной орбитой". Если частица движется по этой орбите, то она только заворачивается дипольными магнитами, потому что на оси квадрупольных магнитов нет магнитного поля. При постройке и запуске ускорителя все дипольные и квадрупольные магниты устанавливаются так, чтобы заряженные частицы двигались по центральной орбите.

Из-за движения земли положение магнитных элементов меняется со временем. Перемещение даже одной из квадрупольных линз приводит к тому, что орбита пучка в ускорителе смещается от своего начального идеального положения. Ввиду значительного количества магнитных элементов в современных ускорителях, накапливаемые при их перемещениях искажения орбит могут препятствовать работе, вынуждая время от времени переставлять элементы на начальные позиции.

Рассмотрим вкратце эффект от смещения квадрупольной линзы. Движение частиц вдоль периметра накопителя представляет собой квазисинусоидальные колебания:

$$x(s) = A\sqrt{\beta(s)}\cos(\phi(s) - \phi_0), \quad (1)$$

где  $A$  — характеристика амплитуды частицы,  $\beta(s)$  — так называемая бета-функция, характеризующая силу фокусировки в конкретном месте  $s$  вдоль периметра накопителя ( $\sqrt{\beta(s)}$  есть функция-огнивающая пучка в точке периметра ускорителя  $s$ ),  $\phi(s)$  — набег фазы колебаний,  $\phi_0$  — начальное значение фазы. Поперечное смещение  $\delta_i$  оси квадрупольной линзы относительно идеальной замкнутой орбиты вызывает поперечный удар по пролетающему пучку, и он отклоняется на угол  $\delta\theta_i$ , равный:

$$\delta\theta_i = \frac{\delta_i}{F}, \quad (2)$$

где  $F$  — фокусное расстояние линзы. Дальнейший сценарий зависит от временных характеристик движения линзы. Если это смещение медленное и изменяется мало за время оборота сгустка, то в результате многократного воздействия на пучок смещенной линзы возникает искажение замкнутой орбиты. Величина искажения легко вычисляется из двух условий: первое — орбита должна быть периодической с периодом, равным периметру кольца  $P$ , т.е.  $x(s) = x(s + P)$ , второе — в точке расположения смещенной линзы орбита должна иметь излом наклона  $dx/ds$ , в точности равный  $\delta\theta_i$ . В результате, новое положение орбиты равно [1]:

$$x(s) = \frac{\Delta\theta \cdot \beta^{1/2}(s)\beta^{1/2}(0)}{2\sin(\pi\nu)} \cos(\phi(s) - \pi\nu), \quad (3)$$

где  $\beta(s)$ ,  $\beta(0)$  — значения бета-функции в точке наблюдения и точке возмущения,  $\phi(s)$  — разность бетатронных фаз между этими точками,  $2\pi\nu$  — полный набег бетатронной фазы на всем периметре ускорителя.

Это выражение верно для обеих поперечных координат. Ввиду линейности задачи, смещения орбиты от отклонений всех линз вдоль кольца складываются, и полное смещение, таким образом, равно:

$$x(s) = \sum_i^{\text{all}} \frac{\delta\theta_i \cdot \beta^{1/2}(s)\beta_i^{1/2}}{2 \sin(\pi\nu)} \cos(\phi(s) - \phi_i - \pi\nu). \quad (4)$$

При медленном изменении координат линз  $\delta_i(t)$  орбита соответственно изменяется, а величина этих изменений во многом определяется корреляциями в движении соседних линз. Сумма в уравнении (4) близка к вычислению амплитуды пространственной гармоники от  $\delta_i(s)$  на частоте (пространственной)  $\frac{\nu}{R}$ .

Рассмотрим часто встречающийся случай, при котором фокусные расстояния всех линз одинаковы и равны  $\pm F$  (такая фокусирующая структура называется "FODO структурой"), а ошибки выставки квадруполей  $\delta_i$  пространственно некоррелированы, т.е.  $\langle \delta_i \cdot \delta_j \rangle = \langle \delta^2 \rangle$  для  $i = j$  и 0 для  $i \neq j$ . Ниже будет показано, что такое некоррелированное движение наиболее характерно для медленного дрейфа элементов. В этом случае среднеквадратичное искажение орбиты равно:

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \frac{\beta \langle \beta \rangle N \langle \delta^2 \rangle}{16F_0^2 \sin^2 \pi\nu}, \quad (5)$$

где  $\langle \beta \rangle$  — среднее значение функции огибающей пучка в фокусирующей структуре.

В случае быстрых колебаний линзы, когда за время оборота пучка ее положение существенно изменяется, говорить о положении замкнутой орбиты нельзя. Реально каждый следующий удар при пролете линзы будет просто возбуждать колебания пучка вокруг орбиты. В случае, если удары на каждом обороте случайны, амплитуда колебаний пучка как целого будет расти со временем, в среднем, как  $\sqrt{t}$ . Для ускорительщиков основным параметром пучка является его объем на фазовой плоскости "координата — угол"  $\epsilon = \sqrt{\langle x^2 \rangle \cdot \langle x'^2 \rangle - \langle xx' \rangle^2}$ . Темп прироста этой величины при быстрых случайных перемещениях одной линзы равен [2]:

$$\left\langle \frac{d\epsilon}{dt} \right\rangle = \frac{f_0 \beta_i \langle \delta\theta_i^2 \rangle}{2}. \quad (6)$$

Здесь  $f_0$  — частота обращения частиц в кольце,  $\beta_i$  — как и выше, бета-функция в точке расположения линзы.

Такие колебания пучка как целого были бы не столь опасны, если бы пучок вел себя как одна частица. Однако в реальности движение сгустка частиц подобно движению набора отдельных осцилляторов с близкими, но не одинаковыми частотами: после любого толчка система движется как целое только некоторое время, а затем набегают значительная разность фаз между разными осцилляторами. При этом реальная амплитуда колебаний отдельных частиц не уменьшается, а движение "центра масс" системы исчезает. Таким образом, первоначально когерентный удар по пучку переходит в "тепловое" движение частиц.

Для протонных накопителей, в которых радиационное затухание поперечных колебаний слабое, процесс такой декогеренции обуславливается нелинейными полями магнитной системы и электромагнитными полями встречного сгустка, которые приводят к зависимости бетатронной частоты от амплитуды колебаний и, соответственно, разбросу частот в пучке.

Если определить время декогеренции (число оборотов)  $N_{dec}$ , как время, после которого амплитуда уменьшается вдвое, то оценки для SSC показывают [3], что  $N_{dec} \approx 500$  оборотов или примерно 0.15 сек.

Одним из способов борьбы с ростом эмиттанса пучка в коллайдере является использование систем обратных связей, в которых сигнал когерентных колебаний сначала измеряется пикап-электродом, а затем усиливается и подается на другой электрод, способный воздействовать на пучок электрическим или магнитным полем и уменьшать этим поперечные бетатронные колебания. С учетом конечного времени декогерентности такие системы позволяют снизить требования на шумы в сотни раз.

Итак, мы рассмотрели два пути воздействия смещения колебаний земли и магнитов на пучки в ускорителях. Если вибрации происходят на частоте порядка или больше частоты обращения частиц в кольце, то они приводят к росту фазового объема пучка, а если частота колебаний много меньше частоты обращения, то происходит искажение замкнутой орбиты. Следует сказать, что ввиду сильного уменьшения амплитуды вибраций с ростом частоты (см. ниже) первый эффект по-настоящему проявляется лишь для очень больших ускорителей с малыми частотами обращения (например, SSC и LHC — 3.4 кГц и 12 кГц соответственно). Искажение орбиты из-за перемещений элементов значимо для всех ускорителей, однако, также наиболее ярко проявляется на суперколлайдерах, из-за того, что, как будет показано ниже, амплитуды некоррелированных смещений участков ускорителя растут с ростом пространственных масштабов.

Для представления масштабов величин приведем ниже опасные значения амплитуд вибраций для наиболее чувствительного ускорителя — суперколлайдера SSC : для него опасны высокочастотные вибрации с частотой порядка килоГерца и амплитудой  $10^{-4}$  микрона (1 Ангстрем !) и низкочастотные некоррелированные вибрации с амплитудой 0.3 мкм. Много это или мало — смотрите следующую главу, посвященную измерениям вибраций на ускорителях.

## 2 Экспериментальные исследования сейсмических шумов и их влияния на ускорители

### 2.1 Аппаратура для измерения сейсмических вибраций

Предыдущее рассмотрение показало, что для исследования всех источников возмущения движения пучков в ускорителях необходимо проводить измерения в очень широком частотном диапазоне от почти постоянных сигналов до нескольких килоГерц. Динамический диапазон колебаний земли необычайно велик — от сотен микрон при 0.001 Гц до долей Ангстрема при килоГерце, т.е. более 7 порядков по амплитуде. Ни один из существующих приборов для геофизических измерений не может работать в столь широком частотном и динамическом диапазонах. Ниже мы кратко опишем измерительные приборы, с которыми либо нам довелось работать при проведении экспериментов по влиянию сеймики на ускорители, либо другие исследователи использовали для сходных целей.

Сейсмометрическое оборудование, подходящее для поставленной задачи, представлено несколькими типами приборов. Для измерений в области частот 100–2000 Гц используются акселерометры на основе пьезокристаллов. Если корпус акселерометра вибрирует с амплитудой  $x$  и частотой  $f$ , то сигнал напряжения с пьезоэлемента, на который давит пробная масса, пропорционален ускорению  $U \propto a = (2\pi f)^2 x$ . Такая зависимость показывает, что прибор удобно использовать при больших  $f$ . Пьезоакселерометры широко используются для анализа вибраций в промышленности, однако, лишь некоторые специальные малошумящие датчики способны измерять естественные вибрации земли с амплитудами  $10^{-4} \div 10^{-5}$  мкм на килоГерцовых частотах.

В области частот 0.001–200 Гц широко используются велосиметры, в которых сигнал генерируется катушкой, движущейся в постоянном магнитном поле. Катушка располагается на механическом маятнике, приходящем в движение, если точка его подвеса (т.е. корпус прибора) колеблется. При этом выходной сигнал на частотах выше собственного резонанса маятника пропорционален скорости колебаний корпуса  $v = (2\pi f)x$ . В указанном диапазоне средних и малых частот  $f$  такие приборы имеют значительное преимущество перед акселерометрами в чувствительности, и некоторые из них позволяют измерять вибрации земли с амплитудой менее  $10^{-2}$  мкм на частоте 1 Гц. Для расширения частотного диапазона в таких датчиках используется сильная электрическая отрицательная обратная связь по положению маятника.

На еще более низких частотах сигналы и ускорения и скорости малы, плохо выделяются над уровнем собственных шумов датчиков, поэтому лучше всего использовать приборы, измеряющие перемещение  $x$ . Одним из таких приборов является система по измерению смещений точек относительно длинной натянутой струны. Обычно для этих целей используют вольфрамовую или инваровую нить с низким коэффициентом теплового расширения, диаметром 20–100 мкм и длиной 5–50 метров. К нити через блок присоединяется груз, который натягивает ее. Даже при предельных значениях натяжения провис середины длинной нити значителен (десятки мм), и поэтому нити длиннее 50 метров практически не используются. Положение натянутой нити относительно точек крепления достаточно стабильно (лучше 0.1 мкм за час), и его можно использовать в качестве репера для определения перемещения какого-либо объекта. Для этого на нить либо подают постоянное

или переменное напряжение, либо пропускают по ней ток, а на исследуемых объектах устанавливают электростатические или магнитные датчики положения нити (нить проходит через датчики и не касается их). Этот метод опробован нами в Протвино для тестовой установки ВЛЭПП [3]; кроме этого, подобные системы использованы в DESY (Германия) и в SLAC (США) для выставки элементов ускорителей.

Для высокоточных измерений на базах от 50 метров до километра широко используются гидростатические уровни, работающие на принципе сообщающихся сосудов и измеряющие только вертикальные относительные смещения. Два или более сосуда соединены не только трубой для жидкости, но и сообщаются воздушной трубой для обеспечения равенства атмосферного давления. В качестве рабочей жидкости чаще всего используется вода. Во избежание образования пузырьков, вода время от времени прокачивается по обратной трубе. Уровень жидкости в каждом из "стаканов" измеряется электростатическим датчиком, т.е. измеряется емкость между металлической пластиной и водной поверхностью. Поскольку вода имеет относительно большой коэффициент теплового расширения  $2.1 \cdot 10^{-4} \text{ град}^{-1}$ , то для прецизионных измерений ее температуру специально стабилизируют. На 50-метровом гидроуровне в КЕК (Япония) точность измерений составляла лучше 0.1 мкм [4]. Самая большая система уровней установлена на источнике синхротронного излучения ESRF (Франция): 288 "стаканов" расположены по периметру кольца 1 км.

Можно так же сказать, что поскольку ускорители так чувствительны к вибрациям, то и сами они являются достаточно прецизионным инструментом по их измерению. Приведем два примера: ускорительщики из SLAC по информации об изменении траектории пучка электронов в 3-км линейном ускорителе с хорошей точностью определили смещения земли после 8-балльного землетрясения в Калифорнии (разлом Сан-Андреас) в 1989 г; в Швейцарии по суточным вариациям энергии электронов в циклическом ускорителе LEP с периметром 27 км измеряют амплитуды лунных и солнечных приливов. Тем не менее два обстоятельства не позволяют широко использовать ускорители для этих целей: во-первых, ускоритель, его компрессоры, насосы, генераторы и пр. чаще всего сами являются мощными источниками вибраций; а во-вторых, стоимость такого "сейсмического прибора" примерно в миллион раз выше, чем любого сейсмодатчика из перечисленных выше.

## 2.2 Сейсмические вибрации

Для того чтобы определить амплитуды процессов с разными частотами в заданном диапазоне, используется преобразование Фурье. Сразу следует отметить, что, вообще говоря, естественные сейсмические колебания не представляют из себя гармонические колебания, волну в грунте или набор таких волн, и поэтому их часто называют "сейсмошумами". Для их описания используются термины и единицы из статистического анализа шумов, в частности, *спектральная плотность мощности*  $S(f)$  в единицах *квадрат амплитуды (мощность) в единичной полосе частот*, т.е.  $\text{мкм}^2/\text{Гц}$ . Среднеквадратичное значение сигнала  $X_{rms}$  в полосе частот от  $f_{min}$  до  $f_{max}$  вычисляется из спектра мощности  $S(f)$  в соответствии с формулой:

$$X_{rms} = \sqrt{\int_{f_{min}}^{f_{max}} S(f) df}. \quad (7)$$

На (рис. 1) из [5] изображены спектры мощности колебаний земли, измеренные в тоннелях ускорителей четырех лабораторий: УНК (г.Протвино, Подмосковье), SSC (США), CERN (Швейцария), КЕК (Япония).

Все спектры получены в тихих условиях и выглядят одинаково (в дважды логарифмическом масштабе). Из рисунка можно сделать ряд выводов: с ростом частоты от 0.01 Гц до 1 кГц спектры мощности резко падают примерно, как  $f^{-3}$ ; этому соответствует среднеквадратичная амплитуда  $x$  на частоте  $f$  порядка 0.01 мкм/ф ( $f$  — в Гц), или, что то же, для колебаний со всеми частотами скорость шумовых перемещений грунта примерно константа  $v = 2\pi f x \approx 0.06 \text{ мкм/с}$ . Уверенного ответа на вопрос, почему это так, пока нет. Тем не менее, существуют попытки обоснования близости процессов в грунте к процессам турбулентности в жидкостях и газах и построения феноменологических законов наподобие известного "закона Колмогорова-Обухова" для спектра развитой турбулентности.

На (рис. 1) на фоне общей падающей тенденции видны несколько выделяющихся пиков, которые отражают волновые движения грунта: ряд пиков на гармониках сети от работающего оборудования (в США 60 Гц, 120 Гц и т.д.), 1-4 Гц — шумы верхней части земной коры. Отчетливо виден

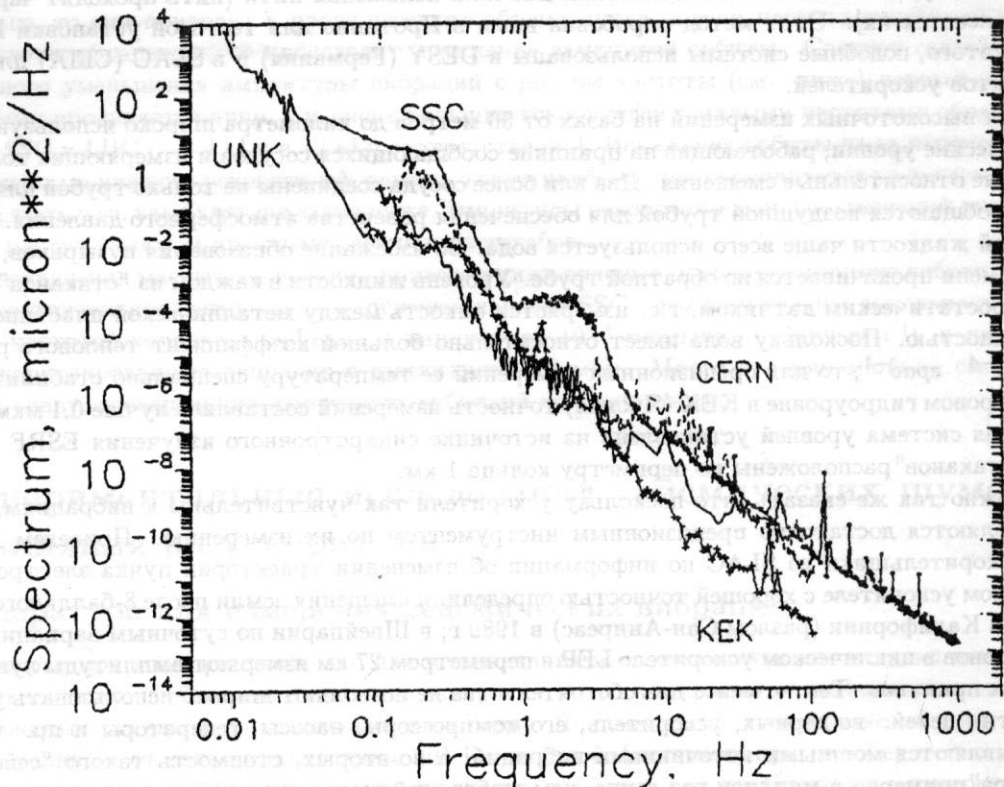


Рис. 1: Спектры мощности в тоннелях различных ускорителей: SSC, CERN, KEK и УНК.

широкий пик в районе частот 0.1 – 0.2 Гц. Это так называемое “микросейсмическое 7-секундное бормотание” Земли, вызываемое волнами прибоев на ближайших морских побережьях. Для Протвино это далекие Балтийское и Баренцево моря, и поэтому амплитуда от них невелика — около 0.7 мкм. Для Новосибирска, находящегося почти в центре Евразийского континента, амплитуда микросейсма еще меньше и редко превосходит 0.2 мкм.

Очень интересен вопрос о том, насколько связаны колебания в разных точках, сфазированы ли они. Тщательные многократные измерения показывают, что только вышеуказанные волновые процессы обладают заметной пространственной корреляцией, и что для частот более 1 Гц уже на расстоянии 100 м движения двух точек земли практически не связаны друг с другом, хотя расчетная длина волны в грунте несколько сотен метров. Это означает, что сейсмшумы порождаются множественными некоррелированными локальными источниками — вывод очень важный для ускорителей, т.к. искажение орбиты пучков пропорционально амплитуде именно некоррелированных смещений. Это неоднократно подтверждалось экспериментально в измерениях в Протвино, Новосибирске, SSC и др.

Обсуждаемые нами результаты измерений относятся к грунту в “тихих” условиях. Амплитуды и корреляции колебаний земли существенно возрастают при наличии мощных источников вибрации как искусственного, так и естественного происхождения. Наиболее мощные из них - землетрясения. Волны от очагов землетрясений могут быть в принципе опасны для больших ускорителей, поэтому ускорители стараются строить в сейсмически тихих местах.

Кроме землетрясений сильные колебания земли могут вызываться и ветром — например, мы наблюдали, как во время снежной бури амплитуды колебаний земли с периодами 10–100 с возрастали в несколько раз и достигали 10 мкм [3].

### 3 Долговременные перемещения участков грунта

Как уже отмечалось выше, медленные перемещения различных участков тоннеля ускорителя вызывают искажения орбиты и могут препятствовать его надежному функционированию. Этим и

обусловлен интерес ускорительщиков к сверхнизкочастотным подвижкам грунта.

### 3.1 Закон АТЛ диффузного движения земли

Для измерения долговременной стабильности относительного положения элементов ускорителей регулярно проводится высокоточное нивелирование вдоль трассы движения частиц. Многократные измерения за несколько лет на различных ускорителях дают временные зависимости относительного положения магнитных элементов. Для выяснения статистических характеристик этих временных рядов мы построили зависимости дисперсии относительного смещения  $(x_i - x_j)$  от расстояния между точками  $L(i, j)$  (индексы  $i, j$  — номера магнитов, расстояние между которыми равно  $L$ ,  $N$  — полное их число).

$$\langle \delta x(L)^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{(i,j)}^N (x_i - x_j)^2. \quad (8)$$

При таком анализе выяснилось, что многочисленные данные можно описать простым феноменологическим законом, при котором дисперсия относительных смещений пропорциональна расстоянию между этими точками  $L$  и времени наблюдения  $T$ :

$$\langle dX^2 \rangle = A \cdot T \cdot L, \quad (9)$$

где константа  $A$  равна примерно  $10^{-4} \text{ мкм}^2 / (\text{с} \cdot \text{м})$ . Эта формула впервые была предложена нами в работе [6, 3] в 1991 г. для описания данных оптического нивелирования двухкилометровой трассы в районе строительства комплекса УНК в течении 2 лет (1986–1988 гг.) и измерений долговременных перемещений с помощью 20-метровой натянутой нити. В литературе последних лет формула 9 получила название “закона АТЛ” — из-за ее вида.

В дальнейших работах проанализированы данные о вертикальных перемещениях трехкилометрового тоннеля SLAC (Калифорния, США) в течении 17 лет (1966–1983), тоннеля ускорителя PEP в SLAC (периметр 2000 м, время наблюдения 20 месяцев, с июня 1985 г. по март 1987 г.), данные о медленных уходах пучков и тоннелей других ускорителей. Все они хорошо описываются законом (9). На (рис. 2) из [7] показаны результаты обработки этих данных.

Из закона АТЛ (9) можно определить спектральную плотность мощности относительных перемещений двух точек на расстоянии  $L$ :

$$S(f) = \frac{A \cdot L}{2\pi^2 f^2}. \quad (10)$$

*Задача читателю* — вывести эту формулу.

Интересно сравнить (10) с результатами долговременных геофизических измерений. Так, например, спектр мощности горизонтальных смещений грунта в диапазоне частот  $3 \cdot 10^{-8} - 2 \cdot 10^{-2}$  Гц измерялся в обсерватории Pinion-Flat (Калифорния, США) с помощью лазерного интерферометра длиной  $L = 26$  м [8]. Место измерений располагалось на поверхности, на выходе жестких гранитных пород. Амплитуда годовых смещений составила примерно 100 мкм. Если не принимать во внимание четыре пика в спектре, связанные с лунно-солнечными приливами, то полученный спектр мощности для частот ниже  $10^{-4}$  Гц (периоды сутки и более) хорошо аппроксимируется зависимостью (10) с коэффициентом  $A = 10^{-5} \text{ мкм}^2 / (\text{с} \cdot \text{м})$ .

Тщательные измерения медленных смещений земли были проведены группой физиков ускорительной лаборатории КЕК, Япония [4]. При этом использовался гидростатический уровень, который позволял наблюдать относительные вертикальные перемещения двух точек на расстоянии 48 м с точностью порядка 0.1 мкм. Измерениям таким гидроуровнем проводились на поверхности в тоннеле ускорителя TRISTAN и в шахте г.Сазаре на глубине 100 м. Оказалось, что и для вертикальных смещений спектр аппроксимируется формулой (10).

Все полученные данные собраны в таблице 1.

Из таблицы можно сделать вывод, что диффузия меньше проявляется в глубоко пролегающих тоннелях и шахтах (SPS, Sazare) и на жестких монолитных плитах (обсерватория Pinion-Flat). Все остальные случаи можно примерно описывать законом АТЛ с коэффициентом  $A = 1.0 \cdot 10^{-4} \text{ мкм}^2 / (\text{с} \cdot \text{м})$ .

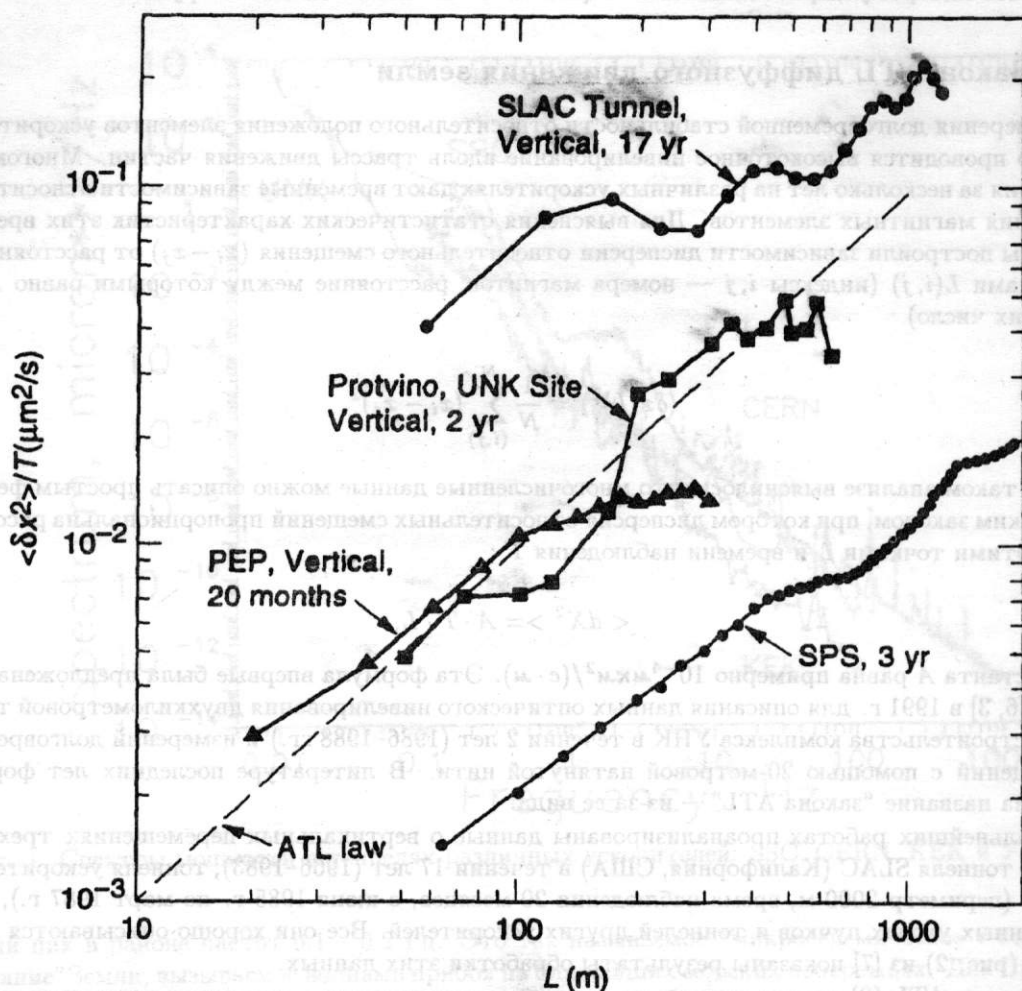


Рис. 2: Дисперсия смещений за единицу времени  $\delta x^2/T$  для тоннелей УНК, SPS, SLAC и PEP в зависимости от расстояния между точками.

### 3.2 Следствия закона ATL для ускорителей

Поскольку коэффициент диффузии земли мал, то проявляться она может либо на больших временах (например, изменения профиля участка поверхности), либо на больших расстояниях. На больших ускорителях, ввиду их чувствительности к пространственно некоррелированным перемещениям квадруполей (см. формулу 5), диффузия будет проявляться в медленных случайных уходах орбиты пучков, а на коллайдерах — и к разведению пучков в местах встречи.

Используя формулу (5) для искажений орбиты под действием диффузного перемещения фокусирующих элементов по закону ATL, можно оценить среднеквадратичное смещение орбиты  $\Delta X$  в накопительном кольце периметром  $P$ :

$$\Delta X \approx \sqrt{\frac{ATP}{4\sin^2(\pi\nu)}}. \quad (11)$$

Из этой формулы легко видеть, что диффузия больше для больших ускорителей.

Измерения перемещений орбит пучков электронов и позитронов в накопителе TRISTAN (КЕК, Япония) в течении нескольких суток и в протон-электронном коллайдере HERA (DESY, Германия) в течении нескольких месяцев с хорошей точностью продемонстрировали зависимость  $\propto \sqrt{T}$ . При этом смещения орбиты в кольце TRISTAN составляли 0.3 мм за 48 часов, а в протонном кольце HERA — порядка 0.7 мм за месяц. Можно отметить, что эти ускорители, во-первых, отличаются высокой степенью стабилизации магнитных полей элементов, и во-вторых, имеют большие

Таблица 1: Коэффициенты диффузии земли

Измерения	$A, 10^{-4} \text{ мкм}^2 / (\text{с} \cdot \text{м})$	L, м	T
Тоннель SLAC	2.0	3000	17 лет
Трасса УНК	1.0	2000	2 года
Тоннель PEP	1.0	2000	20 мес
Тоннель SPS	0.14	2000	12 лет
Шахта Sazare	0.005	50	1 мес
ст. Pinion-Flat	0.1	26	1 год
Тоннель TRISTAN	1.2	3000	1 мес
Пучок $e^-$ TRISTAN	1 ÷ 2	3000	10 ÷ 50 час
Измерения нитью	0.6 ÷ 3.0	1 ÷ 20	1 ÷ 72 час

Таблица 2: Уходы орбиты в SSC и в линейном коллайдере

T	1 с	1 мин	1 час	1 день	1 мес	1 год	10 лет
$(\Delta X/\sigma)_{SSC}$	0.04	0.32	2.5	12	66	240	760
$(\Delta X/\sigma)_{LC}$	0.34	2.7	21	100	570	1960	6210

пространственные размеры (периметр TRISTAN 3 км, периметр протонного кольца HERA около 6 км).

Для того, чтобы понять, насколько диффузия опасна для других ускорителей, сравним вызываемые ею смещения орбиты с поперечным размером сгустка  $\sigma$ . В таблице 2 представлено, как меняется со временем  $T$  отношение  $\Delta X/\sigma$  для двух коллайдеров: SSC — протон-протонный Суперколлайдер с периметром  $C = 87$  км и размером в месте встречи  $\sigma = 5$  мкм; LC — линейный электрон-позитронный коллайдер длиной  $2 \times 12$  км, например, типа проектов ВЛЭПП или JLC (Япония) — с вертикальным размером в месте встречи  $\sigma = 0.005$  мкм. Отметим, что отношение  $\Delta X/\sigma$  для кольцевой машины универсально — оно одинаково в любой точке ускорителя.

Если в месте встречи коллайдера пучки не сталкиваются “лоб-в-лоб” (разведены более чем на  $0.3\sigma$ ), то частицы не взаимодействуют, и светимость (эффективность работы) установки падает. Из таблицы 2 видно, что такая ситуация будет происходить на SSC каждую минуту, а в линейном коллайдере — каждую секунду. Способ борьбы с этим явлением известен: вблизи места столкновения сгустков установить корректирующие элементы, которые в соответствии с сигналами от рядом расположенного датчика положения пучков, подстраивают лобовое столкновение. Естественно, делать это нужно чаще, чем раз в 1 мин в SSC и один раз в 1 сек в LC.

При такой локальной и быстрой юстировке предполагается, что во всей остальной части коллайдера ничего корректировать не надо. Единственное ограничение, чтобы пучок не касался стенок вакуумной камеры. Поперечный размер вакуумной камеры, выраженный в единицах  $\sigma$ , для SSC равен примерно  $300\sigma$ , а для LC  $\approx 2000\sigma$ . Такие искажения в обоих случаях накапливаются за 1–2 года (см. Таблицу 2). Это означает, что по прошествии этого интервала времени почти все фокусирующие элементы придется механически переставлять на свои первоначальные “идеальные” места.



### 3.3 Метод моделирования диффузии земли

До недавнего времени в программах по расчету ускорителей смещения магнитных элементов предполагались стационарными — как ошибки в начальной выставке ускорителей. Появление проектов новых больших суперколлайдеров потребовало расчета влияния диффузии земли на долговременное поведение ускорителя (искажение орбиты, динамическую апертуру и пр.). Для того, чтобы включить закон АТЛ в расчеты, был создан ряд алгоритмов, наиболее простой и наглядный из которых изложен ниже.

Метод [7] применим для моделирования одномерной задачи, когда перемещающиеся точки находятся на одной линии. Предположим, что  $N$  точек равномерно расставлены через  $l$  метров (полная длина  $Nl$ ). Изначально при  $t = 0$  смещения всех точек равны  $x_i = 0, i = 1, 2, \dots, N$ . Рекурсивная процедура вычисления смещения во время  $T = k \cdot \tau$  через смещения на предыдущем шаге  $T = (k-1) \cdot \tau$  выглядит следующим образом:

$$x_i^k = x_i^{k-1} + \sqrt{A\tau l} \sum_{m=0}^i \Delta_m^k, \quad (12)$$

где  $A$  — коэффициент в законе АТЛ, а  $\Delta_m^k$  есть независимые, случайные числа с Гауссовским распределением, причем:

$$\langle \Delta_m^k \rangle = 0, \langle \Delta_m^k \Delta_{m'}^{k'} \rangle = \delta_{mm'} \delta_{kk'}, \quad (13)$$

здесь  $\delta_{nn'}$  — символ Кронекера. Взяв квадрат от выражения (12) и усреднив, нетрудно получить требуемый закон диффузии  $\langle (x_i^k - x_{i+n}^k)^2 \rangle = Ak\tau nl = ATL$ . Если необходимо моделировать кольцевую машину, то для обеспечения замкнутости  $x_0^k = x_N^k$  надо вычесть тренд (наклон данных) и не играющую роли константу:

$$x_i^k \rightarrow x_i^k - x_0^k - (x_N^k - x_0^k) \cdot \frac{i}{N} \quad (14)$$

Описанный алгоритм быстр, прост и дает требуемые пространственно-временные зависимости закона АТЛ.

### 3.4 Физические основы и пределы использования закона АТЛ

Временные и пространственные пределы возможного использования закона АТЛ сегодня не вполне ясны. В качестве экстремистского варианта использования этой процедуры для поверхности всей Земли в целом можно привести вычисления вариаций уровня моря от времени в предположении, что изменения взаимной высоты гор происходят в соответствии с законом АТЛ, а объем воды постоянен и она равномерно заполняет все возникающие провалы. При моделировании на ЭВМ перемещения дна моря и поверхности суши мы использовали изложенный выше метод сложения случайных чисел с коэффициентом  $A = 10^{-4} \text{ мкм}^2 / (\text{с} \cdot \text{м})$ . График, полученный в результате такого моделирования случайного блуждания уровня, вместе с данными о реальном изменении уровня из работы [9], показан на (рис.3).

Видно, что хотя моделирование и не дает точных значений (все-таки числа случайные), но правильно предсказывает амплитуды изменений и случайный характер этого процесса: обе зависимости на рисунке выглядят очень похоже.

Если обратиться к другой предельной области — микроскопических масштабов и времен, то и там существует поразительное совпадение коэффициентов диффузии атомов с предсказаниями закона АТЛ (более чем макроскопического!). Еще 50 лет назад Я. И. Френкель предсказал [10], что поверхностное ползание частиц кристаллов приводит к тому, что на участке длиной  $L$  средний квадрат смещения пропорционален  $L$  (пространственная диффузия), и более того, временные изменения шероховатостей также подчиняются закону диффузии во времени. Совсем недавно изобретенный сканирующий туннельный микроскоп позволил напрямую наблюдать диффузию димеров сурьмы (димер — молекула, состоящая из двух атомов) на (001) поверхности монокристаллов кремния [11]. Для димеров сурьмы эта поверхность представляет собой набор параллельных “потенциальных канав”, и исследователи фиксировали перескоки димеров из одной “канавы” в другую. Было установлено, что среднеквадратичное перемещение ведет себя по закону диффузии:

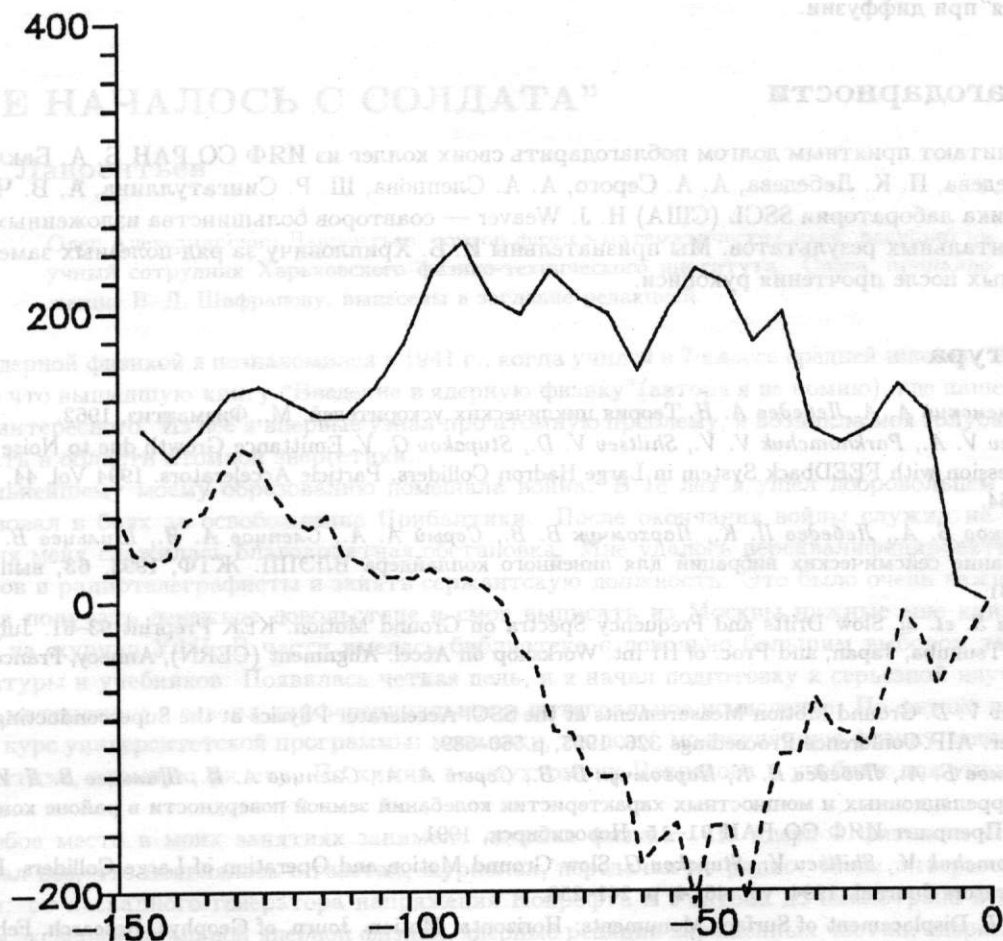


Рис. 3: Изменение уровня моря ( в метрах) за последние 150 млн. лет  
(Сплошная линия — по данным [9]; результаты компьютерного моделирования по закону ATL — пунктир).

$$\langle \Delta X^2 \rangle = 2DT. \quad (15)$$

Если применить закон ATL (9) и оценить коэффициент диффузии, как  $D = AL/2$ , то для исследуемой области с размерами  $L \approx 100$  Ангстрем это даст  $D \approx 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ А}^2/\text{с}$ . Экспериментальный результат, полученный при комнатной температуре,  $D = 10^{-4 \pm 1} \text{ А}^2/\text{с}$ . Удивительное совпадение!

Близость значений амплитуд флуктуаций уровня моря и диффузии поверхности кристаллов с модельными предсказаниями, конечно, не может служить доказательством возможности столь смелой экстраполяции закона ATL в области макро- и микромасштабов, но, наверняка, привлекает внимание к этой модели.

Следует отметить, что диффузное движение земли имеет весьма малые амплитуды и служит как бы фоном для регулярных (обратимых) процессов с большой амплитудой. Более того, эти сильные процессы, на наш взгляд, являются источниками (энергии) диффузии грунта, вызывая ее через нелинейные свойства вещества, такие как гистерезисные явления, неэластичность (зависимость модуля Юнга от величины смещения) и пр. Как примеры таких регулярных процессов могут рассматриваться суточные лунные и солнечные приливы (амплитуда на суше до 50 см), годовые, сезонные и суточные изменения температуры, приводящие к тепловому расширению грунта (до нескольких см за год), изменения атмосферного давления, естественные и искусственные ландшафтные изменения (постройка плотин и водохранилищ, экскавационные работы и выветривание, колебания уровня грунтовых вод и пр.), тепловые выделения Земли и т. п. При этом время

от времени происходят "микрорывы" двух соседних участков грунта — проявления "случайного блуждания" при диффузии.

## 4 Благодарности

Авторы считают приятным долгом поблагодарить своих коллег из ИЯФ СО РАН Б. А. Баклакова, В. А. Лебедева, П. К. Лебедева, А. А. Серого, А. А. Слепцова, Ш. Р. Сингатуллина, А. В. Чупыра и сотрудника лаборатории SSCL (США) Н. J. Weaver — соавторов большинства изложенных выше экспериментальных результатов. Мы признательны И. Б. Хриповичу за ряд полезных замечаний, высказанных после прочтения рукописи.

## Литература

1. Коломенский А. А., Лебедев А. Н. Теория циклических ускорителей. М., Физматгиз, 1962.
2. Lebedev V. A., Parkhomchuk V. V., Shiltsev V. D., Stupakov G. V. Emittance Growth due to Noise and its Suppression with FEEDback System in Large Hadron Colliders. Particle Accelerators. 1994 Vol. 44, 3-4, p. 147-164.
3. Баклаков Б. А., Лебедев П. К., Пархомчук В. В., Серый А. А., Слепцов А. И., Шильцев В. Д. Исследование сейсмических вибраций для линейного коллайдера ВЛЭПП. ЖТФ, 1993, 63, вып. 10, с. 122-131.
4. Takeda S. et. al. Slow Drifts and Frequency Spectra on Ground Motion. KEK Preprint 93-61. July 1993, KEK, Tsukuba, Japan, and Proc. of III Int. Workshop on Accel. Alignment (CERN), Annecy, France, Sept. 1993.
5. Shiltsev V. D. Ground Motion Measurements at the SSC. Accelerator Physics at the Superconducting Super Collider. AIP Conference Proceedings 326. 1995, p.560-589.
6. Баклаков Б. А., Лебедев П. К., Пархомчук В. В., Серый А. А., Слепцов А. И., Шильцев В. Д. Измерение корреляционных и мощностных характеристик колебаний земной поверхности в районе комплекса УНК. Препринт ИЯФ СО РАН 91-15. Новосибирск, 1991.
7. Parkhomchuk V., Shiltsev V., Stupakov G. Slow Ground Motion and Operation of Large Colliders. Particle Accelerators Journal. 1994, vol. 46, 4, p. 241-258.
8. Wyatt F. Displacement of Surface Monuments: Horizontal Motion. Journ. of Geophys. Research. Feb. 1982, vol. 87, B2, p. 979-989.
9. Scientific American. October 1993, p. 31.
10. Френкель Я. И. О поверхностном ползании частиц кристаллов и естественной шероховатости кристаллических граней. ЖЭТФ. 1946, 16 с. 39.
11. Mo Y. W. Physical Review Letters. Vol. 71, 18, p.2923.

## SEISMICS AND ACCELERATORS

V. V. Parkhomchuk, V. D. Shiltsev

Modern accelerators of charged particles used in high energy physics impose hard requirements on the position stability of their elements so that ground vibrations place a serious obstacle for their operation. Main mechanisms of the seismic noise influence on particle beams are described, results of experimental studies in this field are presented. Data on long-term ground drifts are analyzed, their diffuse character is shown resulting in the observed diffusion of orbits in accelerators.