МЕТОД ИЗОБРАЖЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРО- И МАГНИТОСТАТИКИ

В. В. Бажанова
Новосибирский филиал Московской технологической академии легкой промышленности
Ю. И. Эйдельман
Новосибирский государственный университет, 630090

Метод изображений использован для решения целого ряда нетрадицирнных задач электро- и магнитостатики.

1. Базовые задачи (I): заряд вне проводящего заземленного (изолированного) шара (сферы)

а) Рассмотрим поле заряда Q, находящегося вне проводящего шара радиуса R на расстоянии L_Q от его центра. Очевидно, что поле во всем пространстве складывается из поля собственно заряда Q и суммарного поля зарядов, индуцированных на поверхности шара с плотностью σ. Потенциалы внутри φ_{in} и вне φ_{out} шара удовлетворяют уравнению Лапласа: $\Delta\varphi_{\text{out}} = 0$ и $\Delta\varphi_{\text{in}} = 0$. Граничные условия непрерывности потенциала, тангенциальной компоненты электрического поля имеют стандартный вид (начало координат в центре шара):

$$\varphi_{\text{out}}\big|_{r=R} = \varphi_{\text{in}}\big|_{r=R} = 0,$$
$$\left.\frac{\partial\varphi_{\text{out}}}{\partial\tau}\right|_{r=R} = \left.\frac{\partial\varphi_{\text{in}}}{\partial\tau}\right|_{r=R}.$$

Как известно (см. задачу 1.10 [1]), в поле двух разноименных зарядов q_1 и q_2, находящихся на расстоянии a друг от друга, всегда есть сферическая поверхность с нулевым потенциалом такая, что ее радиус $R = \left|\frac{q_1 q_2}{q_1^2 - q_2^2}a\right|$, а центр расположен на проходящей через заряды прямой на расстоянии $x = \frac{q_1^2}{q_1^2 - q_2^2}a$ от заряда q_1 со стороны заряда q_2. Нетрудно показать, что

$$x = \left|\frac{q_1}{q_2}\right| R \quad \text{и} \quad x(a-x) = R^2.$$

Из сравнения этих двух электростатических ситуаций видно, что поле поверхностных зарядов σ совпадает вне шара с полем их точечного “изображения” $Q_i = -QR/L_Q$, расположенного на расстоянии $L_i = R^2/L_Q$ от центра шара на прямой, которая соединяет заряд Q и центр шара (в направлении от центра шара к заряду). Таким образом:

$$\varphi_{\text{out}} = \frac{Q}{r_Q} + \frac{Q_i}{r_i},$$

где $r_{Q,i}$ есть расстояния до точки наблюдения от заряда и его изображения. В сферической системе координат с осью вдоль прямой “центр шара — заряд” и началом координат в центре шара имеем:

$$r_{Q,i} = \sqrt{r^2 + L_{Q,i}^2 - 2rL_{Q,i}\cos\theta},$$

где θ — полярный угол. Отметим, что расстояния $r_{Q,i}$ до произвольной точки P на поверхности шара (будем их обозначать как $\tilde{r}_{Q,i}$) связаны друг с другом преобразованием инверсии относительно окружности, являющейся сечением шара плоскостью, которая проходит через P и ось симметрии системы:

$$\frac{\tilde{r}_Q}{\tilde{r}_i} = \frac{\sqrt{R^2 + L_Q^2 - 2RL_Q\cos\theta}}{\sqrt{R^2 + L_i^2 - 2RL_i\cos\theta}} = \frac{L_Q}{R} = \frac{R}{L_i}.$$

Ясно, что потенциал $\varphi_{\rm in}$ внутри шара всюду постоянен (идеальная проводящая область является эквипотенциальной) и равен нулю:

$$\varphi_{\rm in} = 0.$$

Теперь нетрудно найти распределение индуцированного заряда по поверхности шара. Оно определяется граничным условием и дает следующий результат:

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi_{\rm out}}{\partial r}\bigg|_{r=R} = -\frac{Q}{4\pi}\frac{L_Q^2-R^2}{R\tilde{r}_Q^3},$$

при этом полный индуцированный заряд Q_b на поверхности шара равен

$$Q_b = q_i = -Q\frac{R}{L_Q}, \text{ так что } \mid Q_b \mid < Q.$$

Этот результат легко представим "на пальцах", если использовать язык силовых линий электростатического поля. Так, основной заряд Q создает в окружающем его пространстве $4\pi Q$ силовых линий и лишь часть из них, в количестве $4\pi \mid Q_b \mid = 4\pi QR/L_Q$, замыкается на распределенные по поверхности шара индуцированные заряды. Естественно, эти линии нормальны к поверхности шара. Внутри шара силовые линии электростатического поля вообще отсутствуют (в нем поле равно нулю).

b) Пусть теперь шар будет изолирован, т. е. поддерживается с нулевым полным зарядом. Тогда на шаре нужно разместить заряд $-Q_b$, но так, чтобы не нарушить оставшимися прежними граничные условия для потенциалов. Это возможно только единственным способом: "размазать" этот дополнительный заряд равномерно по поверхности шара. Вне шара этот поверхностный заряд будет "выглядеть" как точечный заряд, размещенный в центре шара. Таким образом:

$$\varphi_{\rm out} = \frac{Q}{r_Q} + \frac{Q_i}{r_i} - \frac{Q_i}{r}.$$

На поверхности шара значение потенциала равно $-Q_i/R$. Поэтому распределение потенциала внутри шара будет однородным:

$$\varphi_{\rm in} = -\frac{Q_i}{R},$$

электрическое поле внутри шара и полный индуцированный заряд на его поверхности равны нулю, а распределение индуцированного на поверхности заряда имеет вид

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi_{\rm out}}{\partial r}\bigg|_{r=R} = -\frac{Q}{4\pi}\frac{L_Q^2-R^2}{R\tilde{r}_Q^3} - \frac{Q_i}{4\pi R^2}.$$

Вышеприведенный результат означает, в частности, что поле проводящего изолированного шарика в поле внешнего удаленного ($L_Q \gg R$) точечного заряда Q является полем диполя с моментом p, равным

$$p = Q_i \cdot L_i = QR\left(\frac{R}{L_Q}\right)^2$$

и направленным вдоль прямой центр шарика — заряд Q в сторону от этого заряда.

Задача 1. Найти силу взаимодействия двух маленьких проводящих шариков радиуса R, расположенных на расстоянии $L \gg R$ друг от друга, если один из них заряжен и имеет заряд Q.

Решение[1]. Из предыдущего изложения видно, что поле незаряженного шарика в месте нахождения заряженного будет полем диполя $\vec{p} = -QR\left(\frac{R}{L}\right)^2\frac{\vec{L}}{L}$, где вектор $\vec{L}$ направлен от незаряженного шарика к заряженному. Поэтому сила взаимодействия между шариками будет равна:

$$\vec{F} = -Q\frac{2(\vec{p}\vec{L})\vec{L}}{L^5} = -2Q\frac{R^3}{L^5}\frac{\vec{L}}{L}.$$

c) Заменим теперь проводящий шар (для обеих ситуаций) проводящей сферой того же радиуса. Уравнения и граничные условия остаются теми же. Поэтому в силу единственности решения задачи электростатики можно утверждать, что задачи со сферой будут иметь те же решения. •

[1] Конец решения помечается значком • .

2. Базовые задачи (II): заряд внутри проводящей заземленной (изолированной) сферы

a) Рассуждая аналогично предыдущему, нетрудно сообразить, что поле внутри проводящей заземленной сферы складывается из собственно поля заряда Q и поля индуцированных на ее поверхности зарядов σ, которые можно заменить изображением $Q_i = -QR/L_Q$ ($|Q_i| > Q$). Заряд изображения расположен на прямой центр сферы — заряд Q вне сферы со стороны заряда Q на расстоянии $L_i = R^2/L_Q$ от центра сферы. Таким образом:

$$\varphi_{\text{in}} = \frac{Q}{r_Q} + \frac{Q_i}{r_i}$$

при этом потенциал φ_{out} поля вне сферы равен нулю всюду. Поэтому распределение индуцированного заряда по поверхности сферы имеет вид

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi_{\text{in}}}{\partial r}\bigg|_{r=R} = -\frac{Q}{4\pi}\frac{R^2}{R\tilde{r}_Q^3}\frac{L_Q^2}{},$$

а полный индуцированный заряд равен $Q_b = -Q$. Смысл этого результата "на пальцах": все $4\pi Q$ силовых линий, выходящих из заряда Q, замыкаются на индуцированных на поверхности зарядах, так что в системе просто больше нет "других" силовых линий и поэтому поле вне сферы отсутствует.

b) Пусть, наконец, сфера изолирована, т. е. ее полный заряд равен нулю. Вновь это означает, что на ней нужно разместить "дополнительный" заряд $-Q_b = Q$, не нарушающий условие эквипотенциальности сферы. Единственный способ — равномерно распределить этот заряд по поверхности. Внутри сферы он создает постоянный потенциал Q/R, а снаружи "выглядит" как точечный заряд в центре сферы. Следовательно,

$$\varphi_{\text{in}} = \frac{Q}{r_Q} + \frac{Q_i}{r_i} + \frac{Q}{R} \quad \text{и} \quad \varphi_{\text{out}} = \frac{Q}{r},$$

так что

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\varphi_{\text{in}}}{\partial n}\bigg|_{r=R} - \frac{\partial\varphi_{\text{out}}}{\partial n}\bigg|_{r=R}\right) = -\frac{Q}{4\pi}\frac{R^2 - L_Q^2}{R\tilde{r}_i^3} + \frac{Q}{4\pi R^2}.$$

Теперь, основываясь на решениях этих базовых задач, можно исследовать некоторые интересные электро- и магнитостатические ситуации. Отметим, что не всегда ссылка на литературу означает достаточно полное рассмотрение в ней соответствующей задачи.

3. Электростатика

Задача 2. Электрический диполь $\vec{p}$ находится на расстоянии L от центра заземленной проводящей сферы радиуса R. Найти потенциал системы и энергию взаимодействия U диполя со сферой (задача 2.30 [1] и задачи 164, 165 [2]).

Решение. Ясно, что нужно просто воспользоваться "изображениями" в сфере каждого из "зарядов" $\pm q$, раздвинутых на расстояние $2\vec{a}$ (так что $\lim\limits_{\vec{a}\to 0} 2q\vec{a} = \vec{p}$). Поскольку расстояния от зарядов $\pm q$ до центра сферы чуть-чуть разные ($r_\pm = \sqrt{L^2 + a^2 \pm 2La\cos\theta}$, где θ — угол между вектором $\vec{p}$ и радиус-вектором $\vec{L}$ из начала координат в точку нахождения диполя), то величины зарядов изображений $q_\pm^{(i)}$ и их местоположения $\vec{r}_\pm^{\,(i)}$ не совпадут и, следовательно, при $\vec{a} \to 0$ эти заряды изображения будут эквивалентны некоторому эффективному заряду $Q^{(i)}$ и "диполю изображения" $\vec{p}^{\,(i)}$. Во введенных обозначениях оба случая (диполь вне и внутри сферы) выглядят одинаково, так что получаем решение сразу для обеих ситуаций. Итак, имеем:

$$q_\pm^{(i)} = \mp q\frac{R}{r_\pm} = \mp q\frac{R}{L}\left(1 \pm 2\frac{a}{L}\cos\theta + \frac{a^2}{L^2}\right)^{-1/2} \approx \mp q\frac{R}{L}\left(1 \mp \frac{a}{L}\cos\theta\right)$$

и тогда

$$Q^{(i)} = \lim_{\vec{a}\to 0}\left(q_+^{(i)} + q_-^{(i)}\right) = \lim_{\vec{a}\to 0}\frac{2qaR\cos\theta}{L^2} = \frac{R}{L^3}(\vec{p}\vec{L}).$$

Далее, т. к.

$$\vec{r}_{\pm}^{\,(i)} = \frac{R^2}{r_{\pm}^2}\vec{r}_{\pm},$$

то вектор $2\vec{a}^{(i)}$ диполя изображения равен

$$2\vec{a}^{(i)} = \vec{r}_{-}^{\,(i)} - \vec{r}_{+}^{\,(i)} \approx -2\vec{a}\frac{R^2}{L^2} + 4\frac{\vec{a}\vec{L}}{L^2}\frac{R^2}{L^2}\vec{L}$$

и поэтому получаем, что[2]

$$\vec{p}^{\,(i)} = \lim_{\vec{a}\to 0} 2\vec{a}^{(i)}\left|\frac{q_{+}^{(i)} + q_{-}^{(i)}}{2}\right| \approx -\vec{p}\frac{R^3}{L^3} + 2\frac{R^3}{L^3}\frac{(\vec{p}\vec{L})\vec{L}}{L^2}.$$

Наконец, остается вопрос о положении заряда и диполя изображения. Нетрудно показать, что в пределе $\vec{a} \to 0$ вектора $\vec{r}_{\pm}^{\,(i)}$ "сходятся" в точке O_i с радиус-вектором $\vec{r}^{\,(i)} = (R^2/L^2)\vec{L}$, которая и является искомым положением изображений. Таким образом, потенциал $\varphi(\vec{r})$ поля имеет следующий вид:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{p}(\vec{r} - \vec{L})}{|\,\vec{r} - \vec{L}\,|^3} + \frac{Q^{(i)}}{|\,\vec{r} - \vec{r}^{\,(i)}\,|} + \frac{\vec{p}^{\,(i)}(\vec{r} - \vec{r}^{\,(i)})}{|\,\vec{r} - \vec{r}^{\,(i)}\,|^3}$$

или, после несложных преобразований,

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{(\vec{p}\,\vec{r})}{|\,\vec{r} - \vec{L}\,|^3} - \frac{R^3}{L^3}\frac{(\vec{p}\,\vec{r})}{|\,\vec{r} - \frac{R^2}{L^2}\vec{L}\,|^3} - \frac{(\vec{p}\,\vec{L})}{|\,\vec{r} - \vec{L}\,|^3} + \frac{R^3}{L^3}\frac{r^2}{R^2}\frac{(\vec{p}\,\vec{L})}{|\,\vec{r} - \frac{R^2}{L^2}\vec{L}\,|^3}.$$

Практически очевидно, что, как и должно быть, $\varphi(r = R) = 0$ (для этого нужно, конечно, воспользоваться тем, что при $r = R$ выполняется соотношение $L\,|\,\vec{r} - \vec{r}^{\,(i)}\,| = R\,|\,\vec{r} - \vec{L}\,|$). Теперь нетрудно найти энергию взаимодействия диполя со сферой: нужно просто сложить энергии U_1 и U_2 взаимодействия диполя $\vec{p}$ с зарядом $Q^{(i)}$ и диполем $\vec{p}^{\,(i)}$ (учитывая при этом, что радиус-вектор из точки O_i к диполю $\vec{p}$ есть $\vec{r}_i = \vec{L} - \vec{r}^{\,(i)}/2 = \vec{L}(1 - R^2/L^2)$):

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^{(i)}(\vec{p}\,\vec{r}_i)}{r_i^3} + \frac{1}{2}\left[\frac{(\vec{p}\,\vec{p}^{\,(i)})}{r_i^3} - \frac{3(\vec{p}\,\vec{r}_i)(\vec{p}^{\,(i)}\vec{r}_i)}{r_i^5}\right]$$

Подчеркнем важность в данном случае множителя "1/2", всегда появляющегося при рассмотрении взаимодействия между "объектом" и его изображением. •

Задача 3. Определить силу $\vec{F}$ и вращательный момент $\vec{N}$, приложенные к диполю $\vec{p}$, расположенному вне сферы радиуса R на большом удалении L от нее (задача 2.30 [1] и задачи 164, 165 [2]).

Решение. Воспользуемся найденным в предыдущей задаче выражением для энергии взаимодействия диполя с индуцированными на сфере зарядами. Т. к. диполь $\vec{p}$ находится вне сферы на большом расстоянии от нее ($L \gg R$), то $r^{(i)} = R^2/L \ll R$ и, следовательно, $\vec{r}_i \approx \vec{L}$. Поэтому:

$$\begin{aligned}\vec{F} \;&=\; -\vec{\nabla}U = \frac{Q^{(i)}\vec{p}}{2L^3} + \\ &+\; 3\frac{-Q^{(i)}(\vec{p}\,\vec{L})\vec{L} + (\vec{p}\,\vec{p}^{\,(i)})\vec{L} + (\vec{p}\,\vec{L})\vec{p}^{\,(i)} + (\vec{p}^{\,(i)}\vec{L})\vec{p}}{2L^5} - 15\frac{(\vec{p}\,\vec{L})(\vec{p}^{\,(i)}\vec{L})\vec{L}}{2L^7}.\end{aligned}$$

[2] Необходимо отметить, что в электростатической системе, описывающей проводящую сферу, полный заряд $Q^{(i)}$ не равен нулю и поэтому ее (системы) дипольный момент зависит от выбора (положения) системы координат. Выражение для $\vec{p}^{\,(i)}$ найдено в "собственной" системе, в начале которой размещается заряд $Q^{(i)}$. В системе координат с началом в центре сферы дипольный момент $\vec{P}^{(i)}$ будет отличаться от найденного, как известно, на величину $Q^{(i)}\vec{r}^{\,(i)} = Q^{(i)}\frac{R^2}{L^2}\vec{L}$ и равен, таким образом,

$$\vec{P}^{(i)} = -\vec{p}\frac{R^3}{L^3} + 3\frac{R^3}{L^3}\frac{(\vec{p}\,\vec{L})\vec{L}}{L^2}$$

в полном соответствии с правилом $\vec{P}^{(i)} = q_{+}^{(i)}\vec{r}_{+}^{\,(i)} + q_{-}^{(i)}\vec{r}_{-}^{\,(i)}$.

Момент силы, действующей на диполь со стороны поля $\vec{E}$ индуцированных зарядов сферы, находится аналогично:

$$\vec{N} = \frac{1}{2}[\vec{p}\vec{E}] = \frac{Q^{(i)}[\vec{p}\vec{L}]}{2r^3} - \frac{[\vec{p}\vec{p}^{(i)}]}{2L^3} + 3\frac{(\vec{p}^{(i)}\vec{L})[\vec{p}\vec{L}]}{2L^5}.$$

Задача 4. Нить, заряженная с линейной плотностью κ, расположена вне проводящего заземленного (изолированного) бесконечного цилиндра радиуса R параллельно его оси на расстоянии L от нее. Найти потенциал системы, распределение индуцированного на поверхности цилиндра заряда и его полную погонную величину.

Решение. В силу симметрии задачи по z достаточно рассмотреть ситуацию в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, в которой удобно ввести полярную систему координат ρ и α. Потенциал бесконечной прямой заряженной нити, как известно, имеет логарифмическую зависимость: $\varphi(\rho) = -2\kappa \ln \rho + C$, где C — некоторая размерная константа.

а) *Цилиндр заземлен*[3]. Будем искать поле вне цилиндра состоящим из двух слагаемых: поля самой нити и поля индуцированных на поверхности цилиндра зарядов, которые заменим их некоторым изображением κ_i. По аналогии с предыдущими задачами предположим, что нить изображения размещается внутри цилиндра параллельно его оси на таком расстоянии L_i, что $L_i L = R^2$. Таким образом,

$$\varphi_{\text{out}}(\rho) = -2\kappa \ln \rho_\kappa - 2\kappa_i \ln \rho_i + C,$$

где $\rho_\kappa = \sqrt{\rho^2 + L^2 - 2\rho L \cos\alpha}$ и $\rho_i = \sqrt{\rho^2 + L_i^2 - 2\rho L_i \cos\alpha}$ — расстояния от нити и ее изображения до точки поля. Как и прежде, для точек на поверхности цилиндра ($\rho = R$) имеем $\tilde{\rho}_\kappa R = \tilde{\rho}_i L$. Поэтому нетрудно видеть, что при $\kappa_i = -\kappa$ и $C = -2\kappa \ln(R/L)$ на поверхности цилиндра будет достигаться требуемое равенство нулю потенциала φ. Тогда внутри цилиндра, как и в соответствующих базовых задачах, потенциал равен нулю всюду. Итак,

$$\varphi_{\text{in}} = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_{\text{out}}(\rho) = -2\kappa \ln \frac{\rho_\kappa R}{\rho_i L}.$$

Проверим непрерывность тангенциальной компоненты поля на поверхности цилиндра. В нашем случае она означает равенство нулю производной $\partial\varphi_{\text{out}}/\partial\alpha$ при $\rho = R$. Проверяем:

$$\left.\frac{\partial\varphi_{\text{out}}}{\partial\alpha}\right|_{\rho=R} = -2\kappa \frac{1}{\tilde{\rho}_i\tilde{\rho}_\kappa}\left(\tilde{\rho}_i \left.\frac{\partial\rho_\kappa}{\partial\alpha}\right|_{\rho=R} - \tilde{\rho}_\kappa \left.\frac{\partial\rho_i}{\partial\alpha}\right|_{\rho=R}\right) =$$
$$= -2\kappa \frac{R\sin\alpha}{\tilde{\rho}_\kappa\tilde{\rho}_i}\left(\frac{\tilde{\rho}_i L}{\tilde{\rho}_\kappa} - \frac{\tilde{\rho}_\kappa L_i}{\tilde{\rho}_i}\right) = \dots \equiv 0,$$

что и требовалось показать. Итак, потенциал поля найден. Тогда распределение индуцированного заряда по поверхности цилиндра будет равно

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left.\frac{\partial\varphi_{\text{out}}}{\partial\rho}\right|_{\rho=R} = -\frac{\kappa}{2\pi}\frac{L^2 - R^2}{R\tilde{\rho}_\kappa^2},$$

а полный погонный индуцированный заряд κ_b, естественно, будет равен $-\kappa$. На языке линий поля полученный результат означает (ср. с соответствующей базовой задачей!), что все $4\pi\kappa$ силовых линий, выходящих из заряженной нити, замыкаются на индуцированных на поверхности цилиндра зарядах.

b) *Цилиндр изолирован*[4]. Для сохранения электронейтральности цилиндра, т. е. нулевого полного заряда на его поверхности, добавляем равномерно распределенный по ней погонный заряд $-\kappa_i = \kappa$.

[3] Заземленность цилиндра нужно понимать в том смысле, что потенциал системы отсчитывается от его значения на поверхности цилиндра.

[4] Ясно, что бесконечный проводящий изолированный цилиндр есть некая абстракция. Она, однако, легко моделируется проводящим изолированным тором, у которого большой радиус $\to \infty$; заряженная нить в этом случае располагается соосно тору, а рассматриваемое далее решение справедливо в области, где можно пренебречь кривизной тора.

Внутри цилиндра этот заряд добавляет константу $-2\pi\kappa \ln R$ к потенциалу, а вне выглядит как нить, находящаяся на оси цилиндра. Таким образом, получаем:

$$\varphi_{\text{out}}(\rho) = -2\kappa \ln \frac{\rho_\kappa R}{\rho_i L} - 2\kappa \ln \rho, \qquad \varphi_{\text{in}} = -2\kappa \ln R$$

и, следовательно,

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \varphi_{\text{in}}}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=R} - \frac{\partial \varphi_{\text{out}}}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=R}\right) = \frac{\kappa}{2\pi R}\left(\frac{L^2 - R^2}{\tilde{\rho}_\kappa^2} - 1\right),$$

так что $\kappa_b = 0$[5]. •

Следующие две задачи в силу совпадения граничных условий имеют одно и то же решение.

Задача 5a. Нить, заряженная с линейной плотностью κ, расположена внутри заземленной проводящей цилиндрической поверхности радиуса R параллельно ее оси на расстоянии L от нее. Найти потенциал системы, распределение индуцированного на поверхности заряда и его полную погонную величину.

Задача 5b. В сплошном проводнике вырезана бесконечная цилиндрическая полость радиуса R. Параллельно ее оси на расстоянии L от нее находится нить, заряженная с линейной плотностью κ. Найти потенциал системы, распределение на поверхности полости индуцированного заряда и его полную погонную величину.

Решение. Нетрудно видеть, что эти ситуации полностью совпадают с приведенной в задаче 4a, если в ней "поменять местами" внутреннюю и внешнюю области. Таким образом,

$$\varphi_{\text{in}}(\rho) = -2\kappa \ln \frac{\rho_\kappa R}{\rho_i L}, \qquad \varphi_{\text{out}} = 0$$

и

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \varphi_{\text{in}}}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=R} = \frac{\kappa}{2\pi}\frac{R^2 - L^2}{R\tilde{\rho}_\kappa^2},$$

а полный погонный индуцированный заряд κ_b будет равен $-\kappa$. •

Прежде чем перейти к рассмотрению следующих задач, в которых будут "участвовать" диэлектрические свойства среды, необходимо сделать важное методическое замечание. В предыдущих задачах вычислялся, в частности, индуцированный заряд. Эта "индуцированность" проявлялась в том, что появление заряда на соответствующей границе вызывалось наличием "источника" поля в виде заданных зарядов. Важно, что по своей природе этот индуцированный заряд является *свободным*. Как только мы "включаем" диэлектрические свойства сред, на их границах появляются *связанные* заряды, очень четкое разграничение которых со свободными можно найти в [3]. На практике разница между этими типами зарядов проявляется в том, что плотность свободных зарядов σ_f определяется скачком нормальной компоненты вектора $\vec{D}$ индукции электрического поля (в предыдущих задачах — вектора $\vec{E}$ электрического поля, т. к. диэлектрическая проницаемость среды ε всюду равнялась 1); плотность σ связанных зарядов определяется скачком нормальной компоненты вектора $\vec{P}$ поляризации. Таким образом, на незаряженной границе двух диэлектрических сред $(\sigma_f = 0)$ выполняются следующие соотношения:

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n},$$

[5]Эта электростатическая ситуация заслуживает специального рассмотрения, если нить достаточно удалена от цилиндра, так что $L \gg R$. В этом случае две нити (изображения и на оси цилиндра), разноименно заряженные и раздвинутые на расстояние $L_i = R^2/L \ll R$, образуют так называемый плоский диполь с погонным (на единицу длины вдоль z) дипольным моментом $\vec{d}$, равным

$$\vec{d} = -\kappa L_i \frac{\vec{L}}{L} = -\kappa \frac{R^2}{L^2}\vec{L}.$$

Полезно привести выражения для потенциала φ_d и поля $\vec{E}_d$ такой системы (естественно, в плоскости (x, y) с радиус-вектором $\vec{\rho}$ точки наблюдения):

$$\varphi_d = \frac{2\vec{d}\,\vec{\rho}}{\rho^2}, \qquad \vec{E}_d = -\frac{\partial \varphi_d}{\partial \vec{\rho}} = -\frac{2\vec{d}}{\rho^2} + \frac{4(\vec{\rho}\,\vec{d})\vec{\rho}}{\rho^4}.$$

$$\sigma = P_{1n} - P_{2n} = -\frac{\varepsilon_1 - 1}{4\pi}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} + \frac{\varepsilon_2 - 1}{4\pi}\frac{\partial\varphi_2}{\partial n},$$

где орт нормали $\vec{n}$ проведен из первой среды во вторую.

Задача 6. Бесконечный прямой цилиндр радиуса R и диэлектрической проницаемости ε_1 (среда 1) расположен в среде 2 с диэлектрической проницаемостью ε_2. Определить поле, создаваемое бесконечной прямой заряженной нитью (погонная плотность заряда κ), параллельной оси цилиндра и находящейся вне его на расстоянии L от нее, и распределение связанного заряда на границе (см. задачу 3 к §7 [4]).

Решение. Попробуем по аналогии с предыдущими задачами искать поле в среде 2 как суперпозицию поля собственно нити и поля распределения связанных на границе раздела сред зарядов, которые заменим нитью изображения $\kappa^{(1)}$, расположенной в среде 1. Наконец, для обеспечения "электронейтральности" поместим на оси цилиндра еще одну нить $\kappa^{(3)}$. Поле внутри цилиндра (среда 1) складывается из поля заданной нити и поля связанных зарядов. Заменяющую их нить изображения $\kappa^{(2)}$ поместим в среде 2 там, где расположена основная нить (вообще, в методе изображений для решения вопроса о размещении изображения есть хорошее мнемоническое правило: при вычислении поля от изображения в "среде 1" само изображение нужно помещать в "противоположной" "среде 2"). Итак:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\text{in}}(\rho) &= -\frac{2\kappa^{(2)}}{\varepsilon_1}\ln\rho_\kappa + C_1, \\
\varphi_{\text{out}}(\rho) &= -\frac{2\kappa}{\varepsilon_2}\ln\rho_\kappa - \frac{2\kappa^{(1)}}{\varepsilon_2}\ln\rho_i - \frac{2\kappa^{(3)}}{\varepsilon_2}\ln\rho + C_2,
\end{aligned}$$

где вновь введены расстояния ρ_κ и ρ_i от нити и ее изображения до точки поля. Как и ранее, на поверхности цилиндра ($\rho = R$) расстояния $\tilde{\rho}_\kappa$ и $\tilde{\rho}_i$ связаны соотношением $R\tilde{\rho}_\kappa = L\tilde{\rho}_i$. Условия сшивки на поверхности цилиндра потенциалов и нормальных компонент вектора $\vec{D}$ для произвольных значений α дают следующую систему уравнений для пяти неизвестных $\kappa^{(i)}$ и C_i:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2\kappa^{(2)} &= \varepsilon_1(\kappa + \kappa^{(1)}), \\
\varepsilon_2 C_1 &= \varepsilon_2 C_2 - 2\kappa^{(1)}\ln\frac{R}{L} - 2\kappa^{(3)}\ln R, \\
\kappa^{(2)} &= \kappa + \kappa^{(1)} + 2\kappa^{(3)}, \\
\kappa^{(2)} &= \kappa + \kappa^{(1)}\frac{L^2}{R^2} + \kappa^{(3)}\Big(1 + \frac{L^2}{R^2}\Big).
\end{aligned}$$

Решая эту систему, получаем:

$$\kappa^{(1)} = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\kappa, \quad \kappa^{(2)} = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\kappa, \quad \kappa^{(3)} = -\kappa^{(1)},$$

и тогда константы C_1, C_2 связаны таким соотношением (ясно, что потенциал определяется с точностью до аддитивной константы и поэтому достаточно найти только это соотношение):

$$C_2 = C_1 - 2\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\kappa \cdot \ln L.$$

Распределение заряда, связанного на поверхности цилиндра, находится стандартным образом:

$$\sigma = -\frac{\varepsilon_1 - 1}{4\pi}\frac{\partial\varphi_{\text{in}}}{\partial\rho}\Big|_{\rho=R} + \frac{\varepsilon_2 - 1}{4\pi}\frac{\partial\varphi_{\text{out}}}{\partial\rho}\Big|_{\rho=R} = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\frac{\kappa}{2\pi R}\Big(\frac{L^2 - R^2}{\tilde{\rho}_\kappa^2} - 1\Big),$$

а полный связанный заряд равен нулю. Предельный переход с $\varepsilon_1 \to \infty$ и $\varepsilon_2 = 1$ соответствует уже рассмотренной ранее ситуации с нитью вне проводящего изолированного цилиндра (задача 4b), в чем легко убедиться непосредственной проверкой. ◦

Задача 7. Бесконечный прямой цилиндр радиуса R и диэлектрической проницаемостью ε_1 находится в среде с диэлектрической проницаемостью ε_2. Определить поле, создаваемое бесконечной прямой заряженной нитью с погонной плотностью заряда κ, расположенной внутри цилиндра параллельно его оси на расстоянии L от нее, а также распределение связанного заряда на границе (см. задачу 4 к §7 [4]).

Решение. Аналогично предыдущей задаче будем искать поле внутри цилиндра как суперпозицию поля собственно нити и поля связанных на границе раздела сред зарядов, которые заменим нитью изображения $\kappa^{(1)}$, расположенной вне цилиндра. Поле же вне цилиндра складывается из поля заданной нити и поля связанных зарядов. Заменяющую их нить изображения $\kappa^{(2)}$ поместим внутри цилиндра там же, где расположена основная нить, а обеспечивающий "электронейтральность" заряд, распределенный по границе раздела сред, внутри цилиндра лишь "смещает" значение потенциала, а снаружи выглядит как нить $\kappa^{(3)}$, расположенная на оси. Итак:

$$\varphi_{\rm in}(\rho) = -\frac{2\kappa}{\varepsilon_1}\ln\rho_\kappa - \frac{2\kappa^{(1)}}{\varepsilon_1}\ln\rho_i + C_1,$$
$$\varphi_{\rm out}(\rho) = -\frac{2\kappa^{(2)}}{\varepsilon_2}\ln\rho_\kappa - \frac{2\kappa^{(3)}}{\varepsilon_2}\ln\rho + C_2,$$

где ρ_κ и ρ_i суть те же величины, что и в предыдущей задаче, так что на поверхности цилиндра $R\tilde\rho_\kappa = L\tilde\rho_i$. На этот раз система уравнений для пяти неизвестных $\kappa^{(i)}$ и C_i будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1\kappa^{(2)} &= \varepsilon_2(\kappa+\kappa^{(1)}),\\
C_1 &= C_2 - \frac{2\kappa^{(3)}}{\varepsilon_2}\ln R - \frac{2\kappa^{(1)}}{\varepsilon_1}\ln\frac{R}{L},\\
\kappa^{(2)} &= \kappa+\kappa^{(1)}\frac{L^2}{R^2} - \kappa^{(3)}\Big(1+\frac{L^2}{R^2}\Big),\\
\kappa^{(2)} &= \kappa+\kappa^{(1)} - 2\kappa^{(3)}.
\end{aligned}$$

Решая эту систему, получаем:

$$\kappa^{(1)} = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\kappa,\quad \kappa^{(2)} = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\kappa,\quad \kappa^{(3)} = \kappa^{(1)},$$

а константы C_1, C_2 связаны соотношением:

$$C_2 = C_1 - 2\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\kappa^{(1)}\cdot\ln R + \frac{2\kappa^{(1)}}{\varepsilon_1}\ln L.$$

Следовательно, распределение заряда, связанного на поверхности цилиндра, имеет такой вид:

$$\sigma = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\frac{\kappa}{2\pi R}\Big(\varepsilon_1+\varepsilon_2\frac{R^2-L^2}{\tilde\rho_\kappa^2}\Big),$$

а полный погонный связанный заряд равен

$$\kappa_b = \kappa\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}.$$

Предельный случай $\varepsilon_1 = 1$ и $\varepsilon_2 \to \infty$ соответствует задаче 5b и нетрудно убедиться, что полученные результаты переходят в соответствующие выражения. •

Следующая задача описывает реальную проблему определения тока электронного пучка, пролетающего через цилиндрическую камеру канала его транспортировки. Поскольку, как правило, такие пучки имеют эллиптическую форму поперечного сечения, то кроме полного тока пучка можно также определить характер этой эллиптичности, т. е. отношение размеров полуосей эллипса и его ориентацию. Разработаны и эффективно применяются [5] пролетные датчики тока пучка, основанные на решении этой задачи.

Задача 8. Внутри бесконечного проводящего заземленного цилиндра радиуса R параллельно его оси на расстоянии L от нее расположен бесконечный прямой электронный пучок с погонными плотностью заряда κ и плоским дипольным моментом $\vec d$. Найти распределение индуцированного заряда по поверхности цилиндра.

Решение. Вклад в потенциал поля $\varphi_\kappa(\rho)$ внутри цилиндра и соответствующее распределение индуцированного заряда σ_κ по поверхности цилиндра уже были найдены в задаче 4а, так что сразу воспользуемся полученным там результатом:

$$\varphi_\kappa(\rho) = -2\kappa \ln \frac{\rho_\kappa R}{\rho_i L}, \qquad \sigma_\kappa = \frac{\kappa}{2\pi} \frac{R^2 - L^2}{R\tilde{\rho}_\kappa^2}.$$

Здесь, как и раньше $\rho_{\kappa,i}$ — расстояния до точки поля от нити или от ее изображения, расположенного на расстоянии $L_i = R^2/L$ от оси цилиндра, а $\tilde{\rho}_{\kappa,i}$ — эти же расстояния для точек на поверхности цилиндра. Как всегда, эти расстояния связаны друг с другом преобразованием инверсии: $L\tilde{\rho}_i = R\tilde{\rho}_\kappa$.

Перейдем к рассмотрению вклада плоского диполя $\vec{d}$. Для этого воспользуемся тем же естественным приемом, что и в задаче 2: плоский диполь "состоит" из двух разноименно заряженных нитей $\pm\kappa_d$, раздвинутых из точки с радиус-вектором $\vec{L}$ на вектор $\pm\vec{a}$, так что $\lim\limits_{\vec{a}\to 0} 2\kappa_d\vec{a} = \vec{d}$. Изображения этих нитей имеют ту же величину $\mp\kappa_d$ и расположены в точках с радиус-векторами $\vec{\rho}_\pm^{(i)}$ такими, что

$$\vec{\rho}_\pm^{(i)} = \frac{R^2}{\rho_\pm^2}\vec{\rho}_\pm, \quad \text{где} \quad \vec{\rho}_\pm = \vec{L} \pm \vec{a}.$$

Каждая из нитей, составляющая $\vec{d}$, вместе со своим изображением дает вклад в потенциал поля, аналогичный вкладу нити κ и ее изображения. Поэтому сразу можно написать с точностью до константы C следующее выражение для потенциала φ_d в точке поля с радиус-вектором $\vec{\rho}$:

$$\varphi_d(\vec{\rho}) = -2\kappa_d \ln \frac{|\vec{\rho} - \vec{\rho}_+|}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}_-|} \frac{|\vec{\rho} - \vec{\rho}_-^{(i)}|}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}_+^{(i)}|} + C = -\kappa_d \ln \frac{|\vec{\rho} - \vec{\rho}_+|^2}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}_-|^2} \frac{|\vec{\rho} - \vec{\rho}_-^{(i)}|^2}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}_+^{(i)}|^2} + C.$$

Для всех расстояний, входящих в φ_d, нетрудно получить следующие выражения, справедливые с точностью до членов первой степени по $\vec{a}$:

$$|\vec{\rho} - \vec{\rho}_\pm|^2 \simeq |\vec{\rho} - \vec{L}|^2 \left[1 \mp \frac{2\vec{a}(\vec{\rho} - \vec{L})}{|\vec{\rho} - \vec{L}|^2}\right],$$

$$|\vec{\rho} - \vec{\rho}_\pm^{(i)}|^2 \simeq |\vec{\rho} - \frac{R^2}{L^2}\vec{L}|^2 \left[1 \mp 2\left(\vec{\rho} - \frac{R^2}{L^2}\vec{L}\right) \frac{R^2}{L^2} \frac{\vec{a} - 2\frac{(\vec{a}\vec{L})\vec{L}}{L^2}}{|\vec{\rho} - \frac{R^2}{L^2}\vec{L}|^2}\right].$$

Подставляя эти формулы в выражение для φ_d, после несложных преобразований и после перехода к пределу $\vec{a} \to 0$ найдем, что суммарный вклад в поле от диполя $\vec{d}$ и его изображения $\vec{d}^{(i)}$ равен:

$$\varphi_d(\vec{\rho}) = \frac{2\vec{d}(\vec{\rho} - \vec{L})}{|\vec{\rho} - \vec{L}|^2} + \frac{2\vec{d}^{(i)}\left(\vec{\rho} - \frac{R^2}{L^2}\vec{L}\right)}{|\vec{\rho} - \frac{R^2}{L^2}\vec{L}|^2} + C,$$

где

$$\vec{d}^{(i)} = \frac{R^2}{L^2}\left[-\vec{d} + 2\frac{(\vec{L}\vec{d})\vec{L}}{L^2}\right].$$

Аддитивную константу C подберем так, чтобы на поверхности цилиндра при $\rho = R$ потенциал φ_d был равен нулю. Простые вычисления дают для нее следующее значение:

$$C = 2\frac{\vec{L}\vec{d}}{L^2}.$$

Итак, полное выражение для потенциала, создаваемого внутри цилиндра электронным пучком с линейным зарядом κ и плоским диполем $\vec{d}$, таково:

$$\varphi(\vec{\rho}) = -2\kappa \ln \frac{|\vec{\rho} - \vec{L}|}{|\vec{\rho} - \frac{R^2}{L^2}\vec{L}|} \frac{R}{L} + \frac{2\vec{d}(\vec{\rho} - \vec{L})}{|\vec{\rho} - \vec{L}|^2} + \frac{2\frac{R^2}{L^2}\left[-\vec{d} + 2\frac{(\vec{L}\vec{d})\vec{L}}{L^2}\right]\left(\vec{\rho} - \frac{R^2}{L^2}\vec{L}\right)}{|\vec{\rho} - \frac{R^2}{L^2}\vec{L}|^2} + 2\frac{\vec{L}\vec{d}}{L^2}.$$

Простые, но громоздкие вычисления подтверждают, что полученное выражение удовлетворяет граничному условию равенства нулю тангенциальной компоненты электрического поля на поверхности цилиндра. Столь же простые, но и столь же громоздкие вычисления дают следующее выражение для искомого распределения плотности индуцированного заряда на поверхности цилиндра[6] (для более удобной записи этого результата следует ввести относительный вектор $\vec{x} = \vec{L}/R$ положения пучка в цилиндре и орт внешней нормали $\vec{n} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ к его поверхности, а угол α отсчитывать от направления вдоль вектора $\vec{x}$):

$$\sigma(\alpha) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi(\vec{\rho})}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=R} = \frac{\kappa}{2\pi R}\frac{1-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2} - \frac{1}{\pi R^2}\frac{-(1-x^2)(\vec{n}\vec{d})+2(1-\vec{n}\vec{x})(\vec{x}\vec{d})}{(1-2x\cos\alpha+x^2)^2}$$

Решение данной электростатической задачи можно считать завершенным, но, конечно, нельзя не дополнить его рассмотрением того, как из этих результатов извлечь параметры электронного пучка, а именно: его положение x (во введенной координатной системе пучок имеет нулевую y-координату), "ток" κ и вектор дипольного момента $\vec{d}$, характеризующий ориентацию эллипса пучка (поворот вектора $\vec{d}$ относительно $\vec{x}$ на угол α_0) и величину его эллиптичности (длина вектора $\vec{d}$). Для определения этих параметров необходимо, как известно, вычислить моменты функции распределения плотности индуцированных зарядов:

$$\mathcal{J}_0 = \int_{-\pi}^{\pi}\sigma(\alpha)\,d\alpha, \quad \mathcal{J}_c = \int_{-\pi}^{\pi}\sigma(\alpha)\cos\alpha\,d\alpha,$$

$$\mathcal{J}_s = \int_{-\pi}^{\pi}\sigma(\alpha)\sin\alpha\,d\alpha, \quad \mathcal{J}_2 = \int_{-\pi}^{\pi}\sigma(\alpha)\cos 2\alpha\,d\alpha.$$

Эти расчеты, к сожалению, тоже громоздки и содержат вычисления не всегда "приятных" интегралов[7], поэтому, опуская их, приведем сразу окончательный результат в виде системы уравнений на искомые неизвестные:

$$\begin{aligned}
\kappa &= -R\mathcal{J}_0,\\
-\kappa x + \frac{d\cos\alpha_0}{R} &= R\mathcal{J}_c,\\
\frac{d\sin\alpha_0}{R} &= -R\mathcal{J}_s,\\
x\frac{d\cos\alpha_0}{R} &= \frac{R}{2}\mathcal{J}_2.
\end{aligned}$$

Решение этой системы уравнений тривиально, и мы предоставляем его читателю. •

4. Магнитостатика

В качестве дальнейших примеров применения метода изображений рассмотрим несколько магнитостатических задач (используется гауссовская система единиц).

[6] Вопрос о практическом измерении этого распределения выходит за рамки настоящей статьи, но для современной электроники это не составляет сколько бы значимой проблемы.

[7] Вот они для тех, кому это может пригодиться:

$$\int_0^{\pi}\frac{d\alpha}{(1-2x\cos\alpha+x^2)^2} = \pi\frac{1+x^2}{(1-x^2)^3}, \quad \int_0^{\pi}\frac{\cos\alpha\,d\alpha}{(1-2x\cos\alpha+x^2)^2} = \pi\frac{2x}{(1-x^2)^3},$$

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos^2\alpha\,d\alpha}{(1-2x\cos\alpha+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}\frac{1+4x^2-x^4}{(1-x^2)^3}, \quad \int_0^{\pi}\frac{\cos 2\alpha\,d\alpha}{(1-2x\cos\alpha+x^2)^2} = \pi\frac{3x^2-x^4}{(1-x^2)^3},$$

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos\alpha\cos 2\alpha\,d\alpha}{(1-2x\cos\alpha+x^2)^2} = \pi\frac{x(1+2x^2-x^4)}{(1-x^2)^3}.$$

Задача 9. Верхнее полупространство — магнетик с магнитной проницаемостью μ_1, нижнее — с проницаемостью μ_2. На оси z на расстояниях $\pm a$ от границы раздела параллельно ей расположены линейные проводники с токами $I_\pm$, а вдоль самой границы раздела ($z = 0$) — еще один линейный проводник с током I_o. Все проводники параллельны оси y. Найти силу, действующую на единицу длины проводника с током I_+ (задача 5.15 из [1]).

Решение. Найдем сначала магнитное поле от тока I_o. В i-том полупространстве этот ток создает азимутальное поле $H_\alpha^{(i)}$ (введена полярная система координат ρ и α в плоскости (x, z), перпендикулярной всем токам):

$$H_\alpha^{(i)} = k^{(i)}\frac{2I_o}{c\rho}.$$

Из непрерывности нормальной компоненты вектора магнитной индукции B_n получаем, что $\mu_1 k^{(1)} = \mu_2 k^{(2)}$, а теорема Стокса о циркуляции вектора магнитного поля дает (на контуре в виде окружности произвольного радиуса ρ с центром на оси тока I_o):

$$\frac{2I_o}{c\rho}(\pi\rho k^{(1)} + \pi\rho k^{(2)}) = \frac{4\pi}{c}I_o.$$

Следовательно, $k^{(1)} + k^{(2)} = 2$ и поэтому

$$k^{(1)} = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \qquad k^{(2)} = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Поэтому индукция магнитного поля, создаваемого током I_o, всюду равна

$$B_\alpha = \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\frac{2I_o}{c\rho},$$

и магнитное поле тока I_o в месте нахождения тока I_+ имеет только x-компоненту:

$$H_x^{(o)} = \frac{4\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\frac{2I_o}{2ca}.$$

Найдем теперь поле тока I_+, используя его векторный потенциал $\vec{A}$ ($\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$). Он имеет в данном случае только y-компоненту. Опыт предыдущих задач подсказывает, что векторный потенциал следует искать в следующем виде (токи изображений удобнее обозначать как $k^{(i)}I_+$):

$$\begin{aligned}
A_y^{(1)} &= \overbrace{-2\mu_1 I_+ \ln\rho_+}^{\text{ток}} \overbrace{-2\mu_1 k^{(1)} I_+ \ln\rho_-}^{\text{“изображение”}} - C_1,\\
A_y^{(2)} &= -2\mu_2 I_+ \ln\rho_+ - 2\mu_2 k^{(2)} I_+ \ln\rho_+ - C_2,
\end{aligned}$$

где физический смысл величин $\rho_\pm = \sqrt{x^2 + (z \mp a)^2}$ очевиден. Естественно, что поля токов “изображений” описывают поля “индуцированных” поверхностных токов на границе раздела сред и мы вновь воспользовались правилом размещения изображений (см. решение задачи 5).

Граничные условия при $z = 0$ — непрерывность самого векторного потенциала и непрерывность тангенциальной компоненты магнитного поля $[\vec{n}\vec{H}]$ ($\vec{n}$ — вектор нормали к границе, направленный вдоль z), в которую на границе входит только $H_x = \frac{1}{\mu}\frac{\partial A_y}{\partial z}$ — дают уравнения на неизвестные константы $k^{(i)}$ и C_i:

$$A_y^{(1)}\Big|_{z=0} = A_y^{(2)}\Big|_{z=0} \implies \mu_1(1 + k^{(1)}) = \mu_2(1 + k^{(2)}), \quad C_1 = C_2 \equiv C;$$

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_y^{(1)}}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_y^{(2)}}{\partial z}\Big|_{z=0} \implies 1 - k^{(1)} = 1 + k^{(2)}.$$

Решая систему для $k^{(1)}$ и $k^{(2)}$, получим

$$k^{(1)} = -k^{(2)} = -\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Итак, поле тока I_+ описывается потенциалом вида

$$A_y^{(1)} = -2\mu_1 I_+ \ln\rho_+ + 2\mu_1 \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2} I_+ \ln\rho_- + C,$$
$$A_y^{(2)} = -\frac{4\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2} I_+ \ln\rho_+ + C,$$

так что поле от самого тока I_+ в месте его нахождения определяется только его изображением, размещенным в нижнем полупространстве, и имеет только x-компоненту, равную

$$H_x^{(+)} = \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\frac{2I_+}{2ca}.$$

Поле от тока I_- в месте нахождения тока I_+, как ясно из предыдущего рассмотрения, определяется им самим и его изображением, расположенным там же. Следовательно, воспользовавшись решением для тока I_+, сразу получаем, что

$$H_x^{(-)} = \frac{2\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\frac{2I_-}{2ca}$$

и, таким образом, сила, действующая на единицу длины провода I_+, будет направлена по z и равна

$$\mathcal{F}_z = \frac{1}{c} I_+ H_y^{\Sigma} = \frac{1}{\mu_1+\mu_2}\left((\mu_2-\mu_1)I_+ + 4\mu_2 I_o + 2\mu_2 I_-\right)\frac{I_+}{c^2 a}. \quad \bullet$$

Задача 10. Прямолинейный провод с током I расположен параллельно оси бесконечного кругового цилиндра радиуса R и магнитной проницаемости μ_1 (среда 1) на расстоянии $L_I > R$ в среде 2 с магнитной проницаемостью μ_2. Найти векторный потенциал поля во всем пространстве и силу, действующую на единицу длины провода (задача 288 [2]).

Решение. Пусть ось цилиндра и ток направлены вдоль оси z, которая определяет связанную с ней цилиндрическую систему координат (ρ, α, z). Векторный потенциал $\vec{A}$ будет иметь только z-компоненту, зависящую от ρ и α. Действуя совершенно аналогично задаче 5, сразу будем искать потенциал поля вне цилиндра как суперпозицию трех слагаемых: вклад тока I, вклад тока изображения $k^{(2)}I$, размещенного внутри цилиндра на расстоянии $L_i = R^2/L_I$ от его оси, и тока $k^{(3)}I$, обеспечивающего "электронейтральность" цилиндра и "текущего" в противоположном направлении вдоль его оси. Поле же внутри цилиндра складывается из вкладов собственно тока I и его изображения, размещенного там же (опять правило размещения изображений!), т. е. поле определяется просто неким эффективным током $k^{(1)}I$. Таким образом, записываем:

$$A_z^{(1)} = -\underbrace{\mu_1\frac{2k^{(1)}I}{c}\ln\rho_I}_{\text{ток+"изображение"}} + C_1,$$
$$A_z^{(2)} = \underbrace{-\mu_2\frac{2I}{c}\ln\rho_I}_{\text{ток}} \underbrace{-\mu_2\frac{2k^{(2)}I}{c}\ln\rho_i}_{\text{"изображение"}} + \underbrace{\mu_2\frac{2k^{(3)}I}{c}\ln\rho}_{\text{"электронейтральность"}} + C_2.$$

При этом, как ранее, $\rho_{I,i} = \sqrt{\rho^2 + L_{I,i}^2 - 2\rho I_{I,i}\cos\alpha}$ — расстояния до точки поля от тока и его изображения. Ясно, что при $\rho = R$ эти расстояния $\tilde{\rho}_{I,i}$ связаны соотношением $\tilde{\rho}_I R = \tilde{\rho}_i L_I$. "Сшивка" на поверхности цилиндра (т. е. для произвольных α при $\rho = R$) потенциалов и тангенциальных компонент магнитного поля приводит к следующим уравнениям:

$$\mu_1 k^{(1)} = \mu_2(1+k^{(2)}),$$
$$C_1 = -\mu_2\frac{2I}{c}\left(k^{(2)}\ln\frac{R}{L_I} - k^{(3)}\ln R\right) + C_2,$$
$$k^{(1)} = 1 + k^{(2)}\frac{L_I^2}{R^2} - k^{(3)}\frac{R^2+L_L^2}{R^2},$$
$$k^{(1)} = 1 + k^{(2)} - 2k^{(3)}.$$

Решая эту систему уравнений для $k^{(i)}$ и C_i, получим следующий результат:

$$
\begin{aligned}
k^{(1)} &= \frac{2\mu_2}{\mu_1+\mu_2}, \quad k^{(2)} = k^{(3)} = \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2},\\
C_1 &= C_2 + \mu_2\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\frac{2I}{c}\ln R.
\end{aligned}
$$

Видна полная аналогия этих ответов с результатами задачи 6, что, впрочем, и можно было ожидать. Для определения силы, действующей на ток I, нужно найти магнитное поле $\vec{H}$ в месте расположения самого тока. Ясно, что вклад в это поле дают только 2-е и 3-е слагаемые из $A_z^{(2)}$ и оно может иметь только компоненты H_ρ и H_α. Таким образом, вычисляя поле в месте нахождения тока I, находим:

$$
\begin{aligned}
H_\rho &= \frac{1}{\mu_2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z^{(2)}}{\partial\alpha}\bigg|_{\rho=R,\ \alpha=0} \propto \sin\alpha\big|_{\alpha=0} = 0,\\
H_\alpha &= \frac{1}{\mu_2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z^{(2)}}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=R,\ \alpha=0} = \cdots = \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\frac{R^2}{L_I^2-R^2}\frac{2I}{c}.
\end{aligned}
$$

Следовательно, на единицу длины проводника с током I будет действовать только радиальная погонная сила $\mathcal{F}_\rho$, равная

$$
\mathcal{F}_\rho = -\frac{1}{c}IH_\alpha = -\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\frac{R^2}{L_I^2}\frac{L_I}{L_I^2-R^2}\frac{2I^2}{c^2}.
$$

Задача 11. Прямолинейный провод с током I расположен параллельно оси бесконечного кругового цилиндра радиуса R и магнитной проницаемости μ_1 (среда 1) внутри него на расстоянии $L_I < R$. Цилиндр находится в среде 2 с магнитной проницаемостью μ_2. Найти векторный потенциал поля во всем пространстве и силу, действующую на единицу длины провода (задача 289 [2]).

Решение. Учитывая все предыдущее изложение, ограничимся практически только минимально необходимыми выкладками и комментариями. Итак, векторный потенциал поля будем искать в виде:

$$
\begin{aligned}
A_z^{(1)} &= \underbrace{-\mu_1\frac{2I}{c}\ln\rho_I}_{\text{ток}} \underbrace{-\mu_1\frac{2k^{(1)}I}{c}\ln\rho_i}_{\text{"изображение"}} + C_1,\\
A_z^{(2)} &= \underbrace{-\ \mu_2\frac{2k^{(2)}I}{c}\ln\rho_I}_{\text{ток+"изображение"}} + \underbrace{\mu_2\frac{2k^{(3)}I}{c}\ln\rho}_{\text{"электронейтральность"}} + C_2.
\end{aligned}
$$

Непрерывность потенциала и тангенциальной компоненты поля $\vec{H}$ на поверхности цилиндра дают следующую систему:

$$
\begin{aligned}
\mu_2 k^{(2)} &= \mu_1(1+k^{(1)}),\\
C_1 &= -\mu_1\frac{2I}{c}k^{(1)}\ln\frac{R}{L_I} + \mu_2\frac{2I}{c}k^{(3)}\ln R + C_2,\\
k^{(2)} &= 1 + k^{(1)}\frac{L_I^2}{R^2} + k^{(3)}\frac{R^2+L_I^2}{R^2},\\
k^{(2)} &= 1 + k^{(1)} - 2k^{(3)},
\end{aligned}
$$

решая которую, получаем:

$$
\begin{aligned}
k^{(1)} &= -k^{(3)} = -\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}, \quad k^{(2)} = \frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2},\\
C_1 &= C_2 + \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\frac{2I}{c}\left(\mu_2\ln R - \mu_1\ln\frac{L_I}{R}\right).
\end{aligned}
$$

в полной аналогии с результатами задачи 7. Наконец, вычисляя поле в месте нахождения тока I, получим, что на него действует только радиальная погонная сила, равная

$$\mathcal{F}_\rho = -\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\frac{L_I}{R^2-L_I^2}\frac{2I^2}{c^2},$$

что и требовалось определить.

Отметим, что сила, действующая на ток, находящийся в вакууме вне цилиндрического магнетика (задача 10 при $\mu_1=\mu$ и $\mu_2=1$) в R^2/L_I^2 раз меньше силы, действующей на такой же ток, расположенный в цилиндрической полости внутри магнетика (задача 11 при $\mu_1=1$ и $\mu_2=\mu$). •

5. Метод изображений и общий подход

За рамками настоящей статьи осталось множество других ситуаций, в которых метод изображений является мощным средством для нахождения решений, и может возникнуть впечатление о его всесильности. Увы, это не так! Область возможного использования метода вполне определенна и попытка его применения, например, в задаче о заряде вблизи диэлектрического шара или внутри него (сферический аналог задач 6, 7) оказывается безрезультатной. Причину такого "провала" метода лучше всего объяснить, рассмотрев "классические" решения сначала задачи 7, а потом и ее сферического аналога. Итак.

Решение задачи 7 (общий подход). Запишем общее решение уравнения Лапласа для обеих областей (внутри и вне цилиндра) во введенной ранее полярной системе координат. Сразу учтем, что в каждой из областей решение не должно иметь особенностей (внутри — при $\rho\to 0$, а вне — при $\rho\to\infty$). Поэтому для потенциала имеем:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\text{in}}(\rho) &= -\frac{2\kappa}{\varepsilon_1}\ln\rho_\kappa + \frac{1}{\varepsilon_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathcal{A}_n}{n}\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^n\cos n\alpha + \mathcal{C}_1,\\
\varphi_{\text{out}}(\rho) &= \frac{1}{\varepsilon_2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathcal{B}_n}{n}\Big(\frac{R}{\rho}\Big)^n\cos n\alpha + \frac{\mathcal{C}}{\varepsilon_2}\ln\rho + \mathcal{C}_1.
\end{aligned}$$

Структура этих выражений "на пальцах" почти очевидна. Внутри цилиндра записан потенциал поля самой нити, к которому добавлено общее нерасходящееся решение уравнения Лапласа с неизвестными коэффициентами $\mathcal{A}_n$. Вне цилиндра к потенциалу самой нити добавлены общее нерасходящееся решение с неизвестными коэффициентами $\mathcal{B}_n$ и входящий в него "типичный" для цилиндрической геометрии $\ln\rho$ с также неизвестным коэффициентом $\mathcal{C}$. "Сошьем" на поверхности цилиндра потенциалы и нормальные компоненты вектора электрической индукции. Учтем при этом, что функцию $\ln\rho_\kappa$ при $\rho=R$ можно разложить в ряд в соответствии с формулой:

$$\begin{aligned}
\ln\rho_\kappa\big|_{\rho=R} &= \ln\sqrt{R^2+L^2-2RL\cos\alpha} = \ln R + \frac{1}{2}\ln\Big(1-2\frac{L}{R}\cos\alpha+\frac{L^2}{R^2}\Big) =\\
&= \ln R - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Big(\frac{L}{R}\Big)^n\cos n\alpha,
\end{aligned}$$

т. к. $L/R<1$. Аналогичное разложение нужно использовать и при вычислении нормальной компоненты вектора $\vec{D}_{\text{in}}$, куда входит радиальная производная от потенциала:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\rho}\ln\rho_\kappa\Big|_{\rho=R} &= \frac{\partial}{\partial\rho}\ln\sqrt{\rho^2-2\rho L\cos\alpha+L^2}\Big|_{\rho=R} =\\
&= \frac{\partial}{\partial\rho}\Big[\ln\rho+\frac{1}{2}\ln\Big(1-2\frac{L}{\rho}\cos\alpha+\frac{L^2}{\rho^2}\Big)\Big]\Big|_{\rho=R} =\\
&= \frac{\partial}{\partial\rho}\Big[\ln\rho-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Big(\frac{L}{\rho}\Big)^n\cos\alpha\Big]\Big|_{\rho=R} =\\
&= \frac{1}{R}\Big[1+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{L}{R}\Big)^n\cos\alpha\Big].
\end{aligned}$$

Тогда получаем:

$$-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\mathcal{A}_n + \mathcal{B}_n = 2\kappa\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\left(\frac{L}{R}\right)^n,$$

$$\mathcal{A}_n + \mathcal{B}_n = 2\kappa\left(\frac{L}{R}\right)^n,$$

откуда

$$\mathcal{A}_n = 2\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\left(\frac{L}{R}\right)^n\kappa,$$

$$\mathcal{B}_n = \frac{4\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\left(\frac{L}{R}\right)^n\kappa.$$

Подставляя найденные коэффициенты в выражение для φ_{in} и преобразовывая их должным образом, найдем, что

$$\varphi_{\text{in}} = -\frac{2\kappa}{\varepsilon_1}\ln\rho_\kappa + \frac{2\kappa}{\varepsilon_1}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{L}{R}\frac{\rho}{R}\right)^n\cos n\alpha + \mathcal{C}_1.$$

Прибавляя и отнимая $\dfrac{2\kappa}{\varepsilon_1}\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\ln\dfrac{R^2}{L}$, получим

$$\varphi_{\text{in}} = -\frac{2\kappa}{\varepsilon_1}\ln\rho_\kappa - \frac{2\kappa}{\varepsilon_1}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\underbrace{\left[\ln\frac{R^2}{L} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\rho}{R^2/L}\right)^n\cos n\alpha\right]}_{\ln\rho_i} +$$

$$+\underbrace{\frac{2\kappa}{\varepsilon_1}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\ln\frac{R^2}{L} + \mathcal{C}_1}_{\tilde{\mathcal{C}}_1} = -\frac{2\kappa}{\varepsilon_1}\ln\rho_\kappa - \frac{2\kappa}{\varepsilon_1}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\ln\rho_i + \tilde{\mathcal{C}}_1,$$

что и должно было получиться для φ_{in}. Для φ_{out} аналогично:

$$\varphi_{\text{out}}(\rho) = \frac{1}{\varepsilon_2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\kappa}{n}\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\left(\frac{L}{R}\frac{R}{\rho}\right)^n\cos n\alpha - \frac{2\kappa}{\varepsilon_2}\ln\rho + \mathcal{C}_2.$$

Прибавим и отнимем $\dfrac{2\kappa}{\varepsilon_2}\dfrac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\ln\rho$. Тогда

$$\varphi_{\text{out}} = -\frac{2\kappa}{\varepsilon_2}\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\underbrace{\left[\ln\rho - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{L}{\rho}\right)^n\cos n\alpha\right]}_{\ln\rho_\kappa} +$$

$$+\frac{2\kappa}{\varepsilon_2}\left(\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} - 1\right)\ln\rho + \mathcal{C}_2 = -\frac{2\kappa}{\varepsilon_2}\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\ln\rho_\kappa - \frac{2\kappa}{\varepsilon_2}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\ln\rho + \mathcal{C}_2,$$

что и следовало ожидать.

Теперь видно, почему "сработал" метод изображений: ряды, появляющиеся при общем подходе решения задачи, "собираются" в функции $\ln\rho_\kappa$ и $\ln\rho_i$, описывающие расстояния от соответствующих нитей — основной и изображения. Это, к сожалению, не получается в сферическом аналоге задачи, рассмотрением которой мы и завершим эту статью.

Задача 12. Внутри шара радиуса R с диэлектрической проницаемостью ε_1 на расстоянии L от его центра расположен точечный заряд Q. Шар находится в среде с диэлектрической проницаемостью ε_2. Определить потенциал электрического поля во всем пространстве (задача 158 [2]).

Решение. Запишем общее решение уравнения Лапласа для обеих областей (внутри и вне шара) в сферической системе координат (r, α, θ), ось которой направлена по прямой центр шара — заряд. В силу азимутальной симметрии задачи по углу α решение не будет зависеть от него. Кроме того, сразу учтем, что в каждой из областей решение не должно иметь особенностей (внутри — при $r \to 0$, а вне — при $r \to \infty$). Поэтому для потенциала имеем:

$$\varphi_{\text{in}} = \frac{Q}{\varepsilon_1 r_Q} + \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n r^n P_n(\cos\theta) + \mathcal{C}_1,$$

$$\varphi_{\text{out}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_n}{r^n} P_n(\cos\theta) + \mathcal{C}_2,$$

где $P_n(\cos\theta)$ — соответствующий полином Лежандра. Как и в предыдущем решении, структура этих выражений ясна: внутри шара к потенциалу поля самого заряда добавлено общее нерасходящееся решение уравнения Лапласа с неизвестными коэффициентами $\mathcal{A}_n$, а потенциал вне шара включает только нерасходящееся общее решение с неизвестными коэффициентами $\mathcal{B}_n$. "Сошьем" на поверхности шара потенциалы и нормальные компоненты вектора электрической индукции, учитывая при этом (при $L/R < 1$):

$$\left.\frac{1}{r_Q}\right|_{r=R} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + L^2 - 2RL\cos\theta}} = \frac{1}{R}\left(1 - 2\frac{L}{R}\cos\theta + \frac{L^2}{R^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{L}{R}\right)^n P_n(\cos\theta),$$

а входящая в нормальную компоненту вектора $\vec{D}$ радиальная производная потенциала на поверхности шара равна в этом случае

$$\left.\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r_Q}\right)\right|_{r=R} = \left.\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{L}{r}\right)^n P_n(\cos\theta)\right]\right|_{r=R} = -\frac{1}{R^2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{L}{R}\right)^n P_n(\cos\theta).$$

Тогда, приравнивая коэффициенты при полиномах Лежандра с одинаковым номером, получаем:

$$\mathcal{A}_n R^n + \frac{Q}{\varepsilon_1}\left(\frac{L}{R}\right)^n = \frac{\mathcal{B}_n}{R^{n+1}},$$

$$\varepsilon_1 n \mathcal{A}_n R^{n-1} - Q\frac{(n+1)L^n}{R^{n+2}} = -\varepsilon_2\frac{(n+1)\mathcal{B}_n}{R^{n+2}}.$$

Решив эту систему, найдем все коэффициенты $\mathcal{A}_n$ и $\mathcal{B}_n$:

$$\mathcal{A}_n = \frac{(n+1)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1[\varepsilon_1 n + \varepsilon_2(n+1)]}\frac{Q}{R}\left(\frac{L}{R}\right)^n \frac{1}{R^n},$$

$$\mathcal{B}_n = \frac{(2n+1)L^n}{\varepsilon_1 n + \varepsilon_2(n+1)}Q.$$

Из этих формул видно, что коэффициенты рядов, входящих в $\varphi_{\text{in,out}}$ таковы, что эти выражения не собираются в конструкции, соответствующие конечному числу зарядов и изображений, как это получилось в цилиндрическом случае. •

В заключение одному из авторов (Ю. И. Э.) хочется выразить искреннюю признательность коллективу преподавателей электродинамики на физическом факультете Новосибирского государственного университета, многолетнее сотрудничество с которыми стимулировало осознание им глубины предмета.

Литература

1. *Меледин Г. В., Эйдельман Ю. И., Росляков Г. В.* Задачи по электродинамике частиц и полей. Новосибирск, НГУ, 1986.
2. *Батыгин В. В., Топтыгин И. Н.* Сборник задач по электродинамике. М., Наука, 1970.
3. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. М., Наука, 1966.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М., Наука, 1982.
5. *Черепанов В. В.* Датчик положения пучка. ПТЭ, 4, 1976.

METHOD OF IMAGES FOR ELECTRO- AND MAGNETOSTATIC PROBLEMS

V. V. Bazhanova, Yu. I. Eidelman

Method of images is used to solve some non-traditional problems of the electro- and magnetostatics.

RELAXATION OF THE POLARIZATION UNDER STRONG MAGNETIC NOISE

I. B. Khriplovich
Budker Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk 630090, Russia

We consider the damping of polarization under magnetic noise of arbitrary strength.

The equation which describes the precession of polarization vector $\vec{P}$ in a magnetic field is well-known:

$$\dot{P}_i = \epsilon_{ijk} P_j \omega_k(t). \tag{1}$$

Here P_i and $\omega_k(t)$ are cartesian coordinates of the polarization and precession frequency, respectively.

We will assume that the function $\vec{\omega}(t)$ has the form of random pulses with a characteristic duration τ much smaller than interval between them, and of typical amplitude ω. Moreover, at first we will consider the case of a "weak" noise when the typical phase shift at the kicks is small:

$$\phi = \omega\tau \ll 1.$$

In other words, we assume that the random magnetic field corresponds to instantaneous kicks with the correlation function

$$< \omega_k(t_1)\omega_l(t_2) >= \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta(t_1 - t_2)\eta; \quad \eta = \omega^2\tau = \phi^2/\tau. \tag{2}$$

One should mention that this problem is in fact a specific case of a more general one of a rotational Brownian motion of an asymmetric top. That general problem which includes also external random torque and friction has been considered in Ref. [1]. We believe, however, that the approach presented here still deserves discussion since it allows one to elucidate the applicability of usually made approximations. On the other hand, it is easily generalized to the case of strong noise when one cannot restrict to the pair correlation approximation.

The formal solution of (1) can be presented as follows:

$$P_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n\, \epsilon_{ik_1i_1}\omega_{k_1}(t_1)\epsilon_{i_1k_2i_2}\omega_{k_2}(t_2)\ldots\epsilon_{i_{n-1}k_ni_n}\omega_{k_n}(t_n)P_{i_n}(0) \tag{3}$$

which can be easily checked by direct substitution.

Let us average this "solution" over the fluctuations of ω. It can be seen that under the assumption (2) a nonvanishing contribution to the sum in rhs of (3) originates from pair correlators of close neighbors only, i.e., of $\omega(t_1)$ with $\omega(t_2)$, $\omega(t_3)$ with $\omega(t_4)$, and so on. Indeed, when pairing for instance $\omega(t_1)$ with $\omega(t_3)$ in (3), one fixes not only $t_3 = t_1$, but $t_2 = t_1$ as well. However, one δ-function in the correlator cannot compensate for two vanishing intervals of integration over time, so this contribution vanishes. After this observation the average value $< P_i(t) >$ can be found from series (3) directly. But we are going to do it by a trick which will be convenient in a more general case of a "strong" noise.

Let us formally sum series (3) into an integral equation:

$$P_i(t) = P_i(0) - \int_0^t dt_1\, \epsilon_{ikj}\omega_k(t_1)P_j(0) + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2\, \epsilon_{ikj}\omega_k(t_1)\epsilon_{jlm}\omega_l(t_2)P_m(t_2). \tag{4}$$

When averaging over the fluctuations, the term linear in ω vanishes, and according to the above prescription of pairing the fluctuating fields, the equation becomes

$$< P_i(t) >= P_i(0) + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2\, \epsilon_{ikj}\epsilon_{jlm} < \omega_k(t_1)\omega_l(t_2) >< P_m(t_2) > . \tag{5}$$

This is so-called Bourret's integral equation. Its applicability limits are discussed in Ref. [2], but under our assumption (2) it is evidently true.

We consider expression (2) as a limit of symmetric correlation function with a finite correlation interval. So, when substituting (2) into (5), we integrate δ-function according to

$$\int_0^t \delta(t-t')\,dt' = \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Then (5) reduces to

$$< P_i(t) >= P_i(0) - \frac{\eta}{3}\int_0^t dt_1 < P_i(t_1) > \tag{7}$$

with the obvious solution

$$< P_i(t) >= P_i(0)\exp(-\frac{1}{3}\eta t). \tag{8}$$

Certainly, this result, the exponential damping of polarization under Gaussian magnetic noise, is well-known.

However, it is straightforward to generalize the trick applied beyond the pair correlation function approximation. We will assume for the phase shifts ϕ at random kicks the Gaussian distribution with the mean square value σ:

$$W(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{\phi^2}{2\sigma^2}). \tag{9}$$

Therefore all odd powers of the phase shifts vanish at the averaging, and for their even powers we get

$$< \phi^{2n} >= \sigma^{2n}(2n-1)!! \tag{10}$$

Clearly, the restriction to the pair correlation function corresponds to the assumption $\sigma \ll 1$, or to the case of a "weak" noise.

Now, let $\vec{\nu}$ be the unit vector of the magnetic field (or ω) at a given kick. Then the correlator of the order $2n$ contains the structure

$$\epsilon_{ijk}\nu_j\epsilon_{klm}\nu_l \ldots \epsilon_{rst}\nu_s = (-)^n(\delta_{it} - \nu_i\nu_t) \tag{11}$$

which being averaged over the directions of $\vec{\nu}$ reduces to

$$\frac{2}{3}(-)^n\delta_{it}. \tag{12}$$

In this way we arrive at the following expression for the correlation function of the order $2n$:

$$\frac{2}{3\tau}(-)^n\sigma^{2n}(2n-1)!!\,\delta_{it}\delta(t_1-t_2)\ldots\delta(t_{2n-1}-t_{2n}) \tag{13}$$

where the characteristic time τ is introduced by dimensional reasons. The same line of reasoning as for the weak noise demonstrates that due to the instantaneous nature of the kicks, we should restrict again to the correlation functions of the kicks at successive time moments only. In this case as well each δ-function integration brings the factor 1/2. Thus we come to the same integral equation (7), the only difference being in the decrement. Now it is

$$\begin{aligned} \zeta &= -\frac{2}{3\tau}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n(2n-1)!!\,\sigma^{2n}}{2^{2n-1}} \\ &= \frac{4}{3\tau}\sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx\,x^2\exp(-2x^2/\sigma^2)}{1+x^2} \\ &= \frac{4}{3\tau}\left[1-\sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}}\exp(2/\sigma^2)(1-\mathrm{erf}(\sqrt{2/\sigma^2}))\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

We have introduced here the error function

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z dt \exp(-t^2). \tag{15}$$

In the weak-noise limit $\sigma \ll 1$ this decrement reduces naturally to the previous result $\sigma^2/3\tau$. The strong-noise limit, $\sigma \gg 1$, gives the decrement $\zeta = 4/3\tau$. Naturally, for a strong noise the relaxation time $1/\zeta$ coincides (up to a numerical factor which is in fact a matter of convention) with the characteristic time τ.

The same result (14) for strong noise was obtained earlier by V. V. Sokolov by the functional integral method [3].

Acknowledgements

I am grateful to I. V. Kolokolov, V. V. Sokolov and G. K. Tartakovsky for useful discussions. I am grateful also to G. W. Ford for attracting my attention to Refs. [1, 2]. I highly appreciate the kind hospitality extended to me at the Institute for Nuclear Theory, University of Washington, where this work has been done.

References

1. *G. W. Ford.* Phys. Reports. 1981, **77C**, p. 249.
2. *N. G. Van Kampen.* Phys. Reports. 1976, **24C**, p. 173.
3. *V. V. Sokolov.* Private communication.

ЗАТУХАНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ МАГНИТНОГО ШУМА

И. Б. Хриплович

Затухание поляризации под действием магнитного шума рассмотрено без предположения о слабости шума, т. е. вне рамок приближения парных корреляторов.

SEMICLASSICAL SCATTERING OF A DIRAC PARTICLE

M. V. Mostovoy
Budker Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk 630090, Russia

The differential cross-section of scattering of a Dirac particle by a central potential is calculated in the semiclassical approximation. It is compared with the differential cross-section of a spinless particle.

We consider semiclassical scattering by a central potential of a particle obeying the Dirac equation and compare it with that of a spinless particle by the same potential. In the classical limit the cross-sections should coincide since spin enters the Hamiltonian only with $\hbar$. The well-known case of Coulomb scattering seems to be a counter example to this statement: the Mott formula for the differential cross-section of the Dirac particle [1] differs from the classical expression by a factor $(1-v^2\sin^2\theta/2)$, where v is the velocity of the particle (we have put $c=1$) and θ is the scattering angle. In particular, this factor suppresses backward scattering of ultrarelativistic Dirac particle. In fact, the example is somewhat misleading, because the condition justifying the validity of the Born approximation (in which the Mott formula was obtained) $Ze^2/\hbar v \ll 1$, is opposite to a classical criterion [2]. However, the suppression of the cross-section of an ultrarelativistic Dirac particle at $\theta=\pi$ by $1-v^2=1/\gamma^2$ is a phenomenon taking place for *any* central potential which is a time-component of a 4-vector. It is a consequence of the conservation of the total angular momentum projection onto the motion direction which makes the backward scattering possible only if the particle helicity changes sign. This property holds also in the classical limit, even if for a spinless particle there is a trajectory which leads to the scattering on $\theta=\pi$. (In the case of repulsion an impact parameter of the trajectory is equal to zero. However, for the validity of the semiclassical approximation the impact parameter should be large as compared to the de Broglie wave length of a particle. Therefore, in what follows we assume the potential to be attractive.) The existence of such a trajectory in the case of spinless particle is known to result in a special kind of angular dependence of the cross-section, called *the glory scattering* [1, 3]. The specific feature of such scattering is a maximum of the cross-section at $\theta=\pi$. Below we shall show how spin effects can turn the maximum to zero.

To this end consider the trajectories of particles in an external field, defined by a vector-potential $A_\mu(x)$, which emerge from the Dirac and Klein-Gordon equations in the classical limit. The classical action (divided by $\hbar$) is identified, as usual, with the phase of a rapidly oscillating semiclassical wave function [3]. The phase may be found perturbatively, as a series in powers of the classical parameter λ/a, where λ is the de Broglie wave length of the particle and a is the characteristic length of the potential. This series may also be regarded as a series in powers of $\hbar$. The part of the action of a Dirac particle that is independent of $\hbar$ is also independent of spin and therefore coincides with the action of a Klein-Gordon particle ($S_D^{(0)}=S_{KG}^{(0)}$). It satisfies the Hamilton-Jacobi equation

$$-\frac{\partial S_D^{(0)}}{\partial t}=A_0(x)+\sqrt{(\vec{\nabla}S^{(0)}-e\vec{A}(x))^2+m^2}. \tag{1}$$

We shall assume the external field to be time-independent, whereby

$$-\partial S_D^{(0)}/\partial t=E\,.$$

The term proportional to $\hbar$ in the action of the spinless particle is absent, while the first order correction $S_D^{(1)}$ to the action of a Dirac particle satisfies the equation[1]

$$\frac{dS_D^{(1)}}{d\tau}=\frac{\hbar e}{2m}\left(\vec{H}+\frac{[\vec{E}\times\vec{u}]}{(1+u^0)}\right)\vec{\zeta} \tag{2}$$

[1] This correction can be interpreted as the Berry phase arising because a spinor which describes the positive frequency solution in the external field changes along the trajectory [5].

where $u_\mu = (p_\mu^{(0)} - eA_\mu)/m$ is the velocity four-vector, $p_\mu^{(0)} = -\partial_\mu S_D^{(0)}$ is the momentum of the particle, $d\tau = u^0\,dt$ is an interval along the trajectory defined by Eq. (1), and $\vec{\zeta}$ is the three-vector of polarization of the particle.

Equation (2) can be easily verified by noting that the equation describing the spin motion,

$$\frac{d\vec{\zeta}}{d\tau} = \frac{\hbar e}{m}\left[\vec{\zeta} \times \left(\vec{H} + \frac{[\vec{E} \times \vec{u}]}{(1+u^0)}\right)\right], \tag{3}$$

which is obtained when the correction $S_D^{(1)}$ to the classical action is taken into account, coincides with the spin equation of motion at zero anomalous magnetic moment [6, 7].

In what follows we assume that

$$eA^{(0)} = U(r) \text{ and } \vec{A} = 0\,,$$

i. e. the magnetic field is equal to zero and the electric field equals

$$e\vec{E} = -U'(r)\,\frac{\vec{r}}{r}\,,$$

which allows us to rewrite (2) as follows

$$\frac{dS_D^{(1)}}{d\tau} = -\frac{\hbar U'(r)}{2mr}\,\frac{(\vec{L}\cdot\vec{\zeta})}{(E - U(r) + m)}\,, \tag{4}$$

where $\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$ is the orbital angular momentum. Thus for motion in a central potential, $S_D^{(1)}$ can be interpreted as a correction to the action arising from the spin-orbit interaction with the Hamiltonian

$$H_{LS} = -\frac{dS_D^{(1)}}{dt} = \frac{\hbar U'(r)}{2r(E - U(r))}\,\frac{(\vec{L}\cdot\vec{\zeta})}{(E - U(r) + m)}\,. \tag{5}$$

The trajectory obtained in leading order of the classical expansion is confined to the plane orthogonal to the vector $\vec{L}$, which is an integral of motion. If the spin of the incident particle is directed along or opposite to the vector $\vec{L}$, it does not change its direction during the scattering. The spin-orbit interaction changes the phase of the wave function by $\mp\psi$, depending on whether the spin is parallel or antiparallel to $\vec{L}$. The phase ψ is equal to the total change of $S_D^{(1)}$ along the trajectory:

$$\psi = L\int_{r_0}^{\infty} dr\,\frac{U'(r)}{rp_r(E - U(r) + m)}\,. \tag{6}$$

Here p_r is the radial component of the momentum and r_0 is the minimal distance between the particle and the scattering center.

If an incident particle has a definite helicity, its spin will rotate during the scattering. Representing the particle wave function as a superposition of those corresponding to the spin directed along and opposite to $\vec{L}$, we find that the angle of the spin rotation is equal to 2ψ. The angle can also be obtained directly from (3).

It is useful to extract from ψ a part which does not vanish in the ultrarelativistic limit. To this end let us introduce an angle α between the radius-vector $\vec{r}$ describing position of the particle and the vector of its momentum:

$$\sin\alpha = \frac{L/r}{\sqrt{p_r^2 + L^2/r^2}}\,. \tag{7}$$

Differentiating (7) with respect to r and using the equations of radial and angular motion following from Eq. (1) we get

$$\frac{LU'(r)}{rp_r(E - U(r) + m)} = \frac{d\alpha}{dr} + \frac{L}{p_r r^2} - \frac{mLU'(r)}{rp_r((E - U(r))^2 - m^2)}\,. \tag{8}$$

We use this equation in (6) taking into account that $\alpha(r_0) - \alpha(\infty) = \pi/2$, and that in the case of attraction

$$L\int_{r_0}^{\infty}\frac{dr}{p_r r^2} = \frac{\pi + \theta}{2}\,, \tag{9}$$

where θ is a scattering angle, so that the expression for ψ can be written in the form,

$$\psi = \frac{\theta}{2} - \delta \,, \tag{10}$$

$$\delta = mL \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{rp_r} \frac{U'(r)}{((E - U(r))^2 - m^2)} \,. \tag{11}$$

For an attractive potential, the particle trajectory can wind several times about a scattering center. In this case the scattering angle θ in equations (9) and (10) is replaced by an angle γ, by which the particle velocity rotates during the scattering. It is related to the scattering angle by

$$\theta = |2\pi n - \gamma| \,,$$

where n is the number of windings of the trajectory. Since δ is proportional to the particle mass it vanishes in the ultrarelativistic limit. Thus, the angle of spin rotation in this limit is equal to γ, which corresponds to helicity conservation.

If we neglect a small change in trajectory of a Dirac particle due to the spin-orbit interaction, its scattering amplitude $\hat{f}_D(\theta)$ differs from the amplitude of scattering of a Klein-Gordon particle $f_{KG}(\theta)$ only by the rotation of spin,

$$\hat{f}_D(\theta) = f_{KG}(\theta) \exp\left(-i\psi\, (\vec{\nu} \cdot \hat{\vec{\sigma}})\right), \tag{12}$$

where $\vec{\nu}$ is a unit vector directed along $[\vec{p}_i \times \vec{p}_f]$, where $\vec{p}_i$ and $\vec{p}_f$ are the initial and final momenta of the particle.

The scattering amplitude of a Dirac particle is usually represented as a sum of spin-dependent and spin-independent terms [2]:

$$\hat{f}_D(\theta) = A(\theta) + B(\theta)\, (\vec{\nu} \cdot \hat{\vec{\sigma}}) \tag{13}$$

Then for A and B we have

$$A(\theta) = f_{KG}(\theta) \cos\psi \,,$$
$$B(\theta) = -f_{KG}(\theta) \sin\psi \,. \tag{14}$$

The differential cross-section summed over spin projections in the final state,

$$\frac{d\sigma_D}{do} = |A|^2 + |B|^2 = \frac{d\sigma_{KG}}{do} \,, \tag{15}$$

is equal to the classical differential cross-section for scattering of a spinless particle (at angles not too close to 0 or π).

If there are several trajectories leading to scattering by the same angle, the amplitude is the sum of contributions of all the trajectories. Their interference results in oscillations of the differential cross-section as a function of scattering angle with a typical period $\sim 2\pi\hbar/\Delta L$, where ΔL is the difference between the orbital momenta of the trajectories. The spin-orbit interaction changes the relative phases of the contributions and therefore the interference pattern for Dirac and Klein-Gordon particles will be different. They will be discussed in detail below for scattering at angles close to π. A detector which does not have angular resolution high enough to observe the rapid oscillations will measure an averaged cross-section, which is equal to the sum of the classical cross-sections of a spinless particle. In this case no difference between the scattering of Dirac and Klein-Gordon particles will be seen.

We consider now the effect of the spin-orbit interaction on the trajectory of the Dirac particle having a definite helicity in the initial state. This interaction conserves the total angular momentum. If in leading order of the expansion in $\hbar$ the ultrarelativistic particle scatters at $\theta = \pi$, then the change of the spin projection onto the direction of the initial momentum by unity should be compensated by the corresponding change of the orbital momentum projection on this direction. This means that during the scattering the particle acquires a momentum perpendicular to the classical scattering plane and equal to $\hbar/\rho$, the impact parameter ρ being approximately the same before and after the scattering. Thus, due to the spin-orbit interaction the scattering angle of the particle becomes equal to $\pi - \hbar/L$, where L is the orbital momentum of the particle. In this case the quantum uncertainty in the scattering angle

$\Delta p_\perp/p \gg \hbar/(\rho p)$ is larger than the deviation of the scattering angle from π. Therefore, our earlier arguments which assumed that a particle moves along the classical trajectory and which led to (12) need to be modified.

The semiclassical formula for the differential cross-section for angles close to π can be obtained from the general expression of the scattering amplitude through the phase shifts, which for the spinless particle is [4],

$$f_{KG}(\theta) = \frac{\hbar}{2i|\vec{p}|}\sum_l (2l+1)P_l(\cos\theta)(\exp(2i\delta_l)-1)\,. \tag{16}$$

At $\theta' = \pi - \theta \ll 1$ the Legendre polynomials can be approximated by the Bessel functions,

$$P_l(\cos\theta) \approx (-1)^l J_0\left(\left(l+\frac{1}{2}\right)\theta'\right). \tag{17}$$

Moreover, in the semiclassical case the sum over momenta transforms to the integral, whose main contribution comes from the neighbourhood of $L_0 = \hbar l_0$, the angular momentum of the classical trajectory leading to the scattering by $\theta = \pi$. In this region one can substitute for the semiclassical phase shift

$$\delta_l = \frac{1}{\hbar}\left(\int_{r_0}^{\infty}(p_r(r) - |\vec{p}|)\,dr - |\vec{p}|r_0\right) + \frac{\pi}{2}(l+\frac{1}{2}),$$

its expansion in powers of $l' = l - l_0$

$$2\delta_l = 2\delta_{l_0} - \pi l' - \beta l'^2, \tag{18}$$

where $\beta = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d\theta}{dl}\right)_{l=l_0}$. One finds [1, 3],

$$f_{KG}(\theta) = \frac{L_0}{i|\vec{p}|}\exp(2i\delta_{l_0} + i\pi l_0)\int dl\, J_0(l\theta')\exp(-i\beta l'^2). \tag{19}$$

For $\theta' \ll \sqrt{\beta}$ the Bessel function can be taken out of the integral and Eq. (19) transforms into

$$\frac{d\sigma_{KG}}{do} = CJ_0^2(l_0\theta'), \quad C = \frac{\pi L_0^2}{\beta\vec{p}^2}\,. \tag{20}$$

The same method can be used to obtain the differential cross-section of a Dirac particle for scattering by angles close to π. The functions A and B, defined by (13), are expressed through the phase shifts as follows [2],

$$\begin{aligned} A &= \frac{\hbar}{2i|\vec{p}|}\sum_l[(l+1)(\exp(2i\delta_{-l-1})-1) + l(\exp(2i\delta_l)-1)]P_l(\cos\theta), \\ B &= \frac{\hbar}{2|\vec{p}|}\sum_l[\exp(2i\delta_{-l-1}) - \exp(2i\delta_l)]P_l(\cos\theta), \end{aligned} \tag{21}$$

where δ_l denotes a scattering phase in a state with a total angular momentum $j = l - 1/2$, while δ_{-l-1} is a scattering phase for $j = l + 1/2$. In the ultrarelativistic limit δ_{+l} and δ_{-l} are related as follows [2]:

$$\exp(2i\delta_{-l}) = \exp(2i\delta_l). \tag{22}$$

Using this relation for $\theta' \ll \sqrt{\beta}$ we get:

$$\begin{aligned} |B|^2 &= CJ_1^2(l_0\theta'), \\ |A|^2 &= \frac{\theta'^2}{4}|B|^2. \end{aligned} \tag{23}$$

If the particle energy is not very large compared to its mass, the angle 2δ between the spin and velocity vectors after scattering is, in general, not small. The expressions for A and B could be obtained in this case by noting that in the classical limit the phase shifts δ_{-l} and δ_l correspond to the scattering with spin directed along $\vec{L}$ and opposite to $\vec{L}$. Using (10) we find a relation generalizing (22),

$$\exp(2i\delta_{-l} - i\delta) = \exp(2i\delta_l + i\delta), \tag{24}$$

so that,

$$\begin{aligned} |A|^2 &= C\sin^2\delta J_0^2(l_0\theta'), \\ |B|^2 &= C\cos^2\delta J_1^2(l_0\theta'). \end{aligned} \tag{25}$$

We can now compare the cross-sections of Dirac and Klein-Gordon particles at θ close to π. For $1/l_0 \ll \theta' \ll 1$ one can approximate the Bessel functions in formulae (20), (23) and (25) by their asymptotic expressions

$$J_n(l_0\theta') \approx \sqrt{\frac{2}{\pi l_0\theta'}}\cos\left(l_0\theta' - (2n+1)\frac{\pi}{4}\right).$$

Thus, the semiclassical differential cross-sections are rapidly oscillating functions of the scattering angle. The oscillations are due to interference of contributions from the two trajectories, for which the velocity vector rotates during the scattering by the angles $(\pi - \theta')$ and $-(\pi + \theta')$. For $\theta' \ll 1$ the values of orbital angular momenta for these trajectories are close to L_0. The averaged differential cross-sections of Klein-Gordon and Dirac particles are equal to the sum of classical cross-sections,

$$\overline{\frac{d\sigma_D}{do}} = \overline{\frac{d\sigma_{KG}}{do}} = \frac{2}{\vec{p}^2}\frac{L_0}{\theta}\frac{dL_0}{d\theta'}. \tag{26}$$

The spin-orbit interaction changes the relative phase of the contributions from these trajectories, which results in a shift of the interference pattern. For $1/l_0 \ll \theta' \ll 1$ the peaks of the differential cross-section of a Dirac particle are shifted with respect to those of a Klein-Gordon particle by $\pi/2l_0$. At $\theta = \pi$ the differential cross-section of a spinless particle has a maximum which corresponds to a constructive interference of the contributions. The spin of an ultrarelativistic Dirac particle which scatters backward rotates either by π or by $-\pi$, depending on the trajectory, so that a relative angle is equal to 2π. The rotation of a spin-$\frac{1}{2}$ particle by 2π changes a sign of its wave function. Therefore, in this case the interference is destructive and the cross-section at $\theta = \pi$ is zero.

Acknowledgements

The author is deeply grateful to I. B. Khriplovich for proposing the problem as well as for interesting discussions and many valuable comments on the text of the manuscript.

References

1. *N. F. Mott and H. S. W. Massey.* The theory of atomic collisions. Oxford, Clarendon Press, 1965.
2. *V. B. Berestetsky, E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevsky.* Quantum electrodynamics. Pergamon Press, 1982.
3. *K. W. Ford and J. A. Wheeler.* Ann. Phys. N. Y., 1959, **7**, p. 259.
4. *L. D. Landau and E. M. Lifshitz.* Quantum mechanics. Pergamon Press, 1958.
5. *H. Mathur.* Phys. Rev. Lett. 1991, **67**, p. 3325.
6. *J. Frenkel.* Z. Phys. 1926, **37**, p. 243.
7. *V. Bargmann, L. Michel and V. Telegdi.* Phys. Rev. Lett. 1959, **2**, p. 435.

КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ РАССЕЯНИЕ ДИРАКОВСКОЙ ЧАСТИЦЫ

М. В. Мостовой

Дифференциальное сечение рассеяния дираковской частицы на сферически-симметричном потенциале, вычисленное в квазиклассическом приближении, сравнивается с дифференциальным сечением рассеяния бесспиновой частицы.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ВЫВОД НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ КОМПТОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ

А. И. Мильштейн
Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера и
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, 630090

Низкоэнергетическая теорема для рассеяния фотона на частице со спином 1/2 и аномальным магнитным моментом получена, исходя из разложения по v/c гамильтониана частицы во внешнем поле и обычной квантовомеханической теории возмущений.

Сорок лет назад в работах Лоу [1], Гелл-Манна и Голдбергера [2] было показано, что при рассеянии фотона низкой энергии на частице со спином 1/2 амплитуда имеет вид

$$T_{fi} = T_{fi}^{(0)} + T_{fi}^{(1)}, \tag{1}$$

где $T_{fi}^{(0)}$ не зависит от частоты фотона ω и совпадает с томпсоновской амплитудой, а $T_{fi}^{(1)} \sim \omega$ и определяется только величиной аномального магнитного момента частицы. В настоящей заметке мы дадим интерпретацию этого факта на языке эффективного гамильтониана, полученного с помощью нерелятивистского разложения.

Рассмотрим частицу со спином 1/2, массой m, зарядом e и аномальным магнитным моментом μ' во внешнем электромагнитном поле с векторным потенциалом $\vec{A}$ $(A^{(0)} = 0,\ \vec{\nabla}\vec{A} = 0)$. Она описывается волновым уравнением (см., например, [3])

$$\left[\gamma^0\, i\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\gamma}(-i\vec{\nabla} - e\vec{A}) - m - \frac{\mu'}{2}\sigma^{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right]\psi(\vec{r}, t) = 0\,. \tag{2}$$

Здесь $F^{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля, $\sigma^{\mu\nu} = i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]/2$, $\sigma^{\mu\nu}F^{\mu\nu}/2 = -\vec{\Sigma}\vec{\mathcal{H}} + i\vec{\alpha}\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{H}}$ — электрическое и магнитное поля ($\vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$, $\vec{\mathcal{H}} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$), γ^μ — матрицы Дирака. Мы используем систему единиц $\hbar = c = 1$. Представим дираковский спинор в виде

$$\psi(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \phi(\vec{r}, t) \\ \chi(\vec{r}, t) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-imt} \tag{3}$$

Подставим (3) в (2) и выразим малые компоненты χ через ϕ. В результате получим уравнение Шредингера на двухкомпонентный спинор ϕ с гамильтонианом, содержащим взаимодействие с электромагнитным полем. Для того, чтобы этот гамильтониан описывал амплитуду рассеяния фотона с учетом членов $\sim\omega$, необходимо удержать в нем члены $\sim A^2/m$ и $\sim \omega A^2/m^2$, которые дают вклад в амплитуду рассеяния в первом порядке теории возмущений, а также члены $\sim \omega A/m$, которые дают вклад в амплитуду рассеяния во втором порядке теории возмущений. При этом надо иметь в виду, что $\mathcal{E} \sim \mathcal{H} \sim \omega A$, импульс конечной частицы $\sim\omega$. Кроме того, разница энергий начального и промежуточного состояний при вычислении второго порядка теории возмущений равна $\pm\omega$ ($+\omega$, если сначала поглощается начальный фотон, а потом излучается конечный, и $-\omega$ для обратного порядка поглощения и излучения фотонов). С нужной точностью для малых компонент χ находим:

$$\chi(\vec{r}, t) = \frac{1}{2m}\left[\vec{\sigma}(-i\vec{\nabla} - e\vec{A}) - i(\mu' + e/2m)\,\vec{\sigma}\vec{\mathcal{E}}\right]\phi(\vec{r}, t)\,. \tag{4}$$

Для гамильтониана H находим:

$$H = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} - \mu\vec{\sigma}\vec{\mathcal{H}} + \frac{1}{m}\left(\mu' + \frac{e}{4m}\right)\left[(\vec{p} - e\vec{A})\times\vec{\mathcal{E}}\right]\vec{\sigma}, \tag{5}$$

где $\vec{p} = -i\vec{\nabla}$, $\mu = \mu' + e/2m$ — полный магнитный момент частицы. Заметим, что член $\vec{p}\times\vec{\mathcal{E}}$ в (5) не дает вклад в амплитуду рассеяния фотона $\sim\omega$, т. к. он имеет порядок $\omega^2 A/m^2$ вместо $\omega A/m$.

Мы сохранили его для того, чтобы была видна калибровочная инвариантность гамильтониана. Последний член в (5) соответствует оператору спин-орбитального взаимодействия в атомах. Заметим, что в этом операторе "нормальный" магнитный момент $e/2m$ входит с дополнительным множителем $1/2$ (томасовская половинка) по сравнению с аномальным магнитным моментом μ'. Векторный потенциал электромагнитного поля представим в виде

$$\vec{A} = \vec{e}_i e^{-i\omega t + i\vec{k}_i\vec{r}} + \vec{e}^{\,*}_f e^{i\omega t - i\vec{k}_f\vec{r}}, \tag{6}$$

где $\vec{e}_i$ ($\vec{e}_f$) и $\vec{k}_i$ ($\vec{k}_f$) соответственно вектор поляризации и импульс начального (конечного) фотона. Для нахождения амплитуды рассеяния фотона используем теперь обычную теорию возмущений. Оператор

$$H^{(1)} = \frac{(e\vec{A})^2}{2m} - \frac{e}{m}\left(\mu' + \frac{e}{4m}\right)[\vec{A} \times \vec{\mathcal{E}}]\vec{\sigma} \tag{7}$$

дает вклад в первом порядке теории возмущений:

$$T^{(a)}_{if} = -\frac{e^2}{m}\vec{e}_i\vec{e}^{\,*}_f + \frac{2ie\omega}{m}(\mu' + \frac{e}{4m})\,\vec{\sigma}\,(\vec{e}^{\,*}_f \times \vec{e}_i)\,. \tag{8}$$

Первый член в этой формуле есть томпсоновская амплитуда. Оператор

$$H^{(2)} = -\frac{e\vec{p}\vec{A}}{m} - \mu\vec{\sigma}\vec{\mathcal{H}} \tag{9}$$

дает вклад во втором порядке теории возмущений. Учитывая, что начальный импульс частицы равен нулю, а конечный импульс равен $\vec{k}_i - \vec{k}_f$, а также указанное выше значение энергий промежуточных состояний, находим вклад оператора $H^{(2)}$ в амплитуду рассеяния:

$$T^{(b)}_{if} = +\frac{ie\mu}{m\omega}\left[(\vec{k}_f\vec{e}_i)(\vec{\sigma}, \vec{k}_f \times \vec{e}^{\,*}_f) - (\vec{k}_i\vec{e}^{\,*}_f)(\vec{\sigma}, \vec{k}_i \times \vec{e}_i)\right] + \\ + \frac{i\mu^2}{\omega}[(\vec{\sigma}, \vec{k}_i \times \vec{e}_i)(\vec{\sigma}, \vec{k}_f \times \vec{e}^{\,*}_f) - (\vec{\sigma}, \vec{k}_f \times \vec{e}^{\,*}_f)(\vec{\sigma}, \vec{k}_i \times \vec{e}_i)]\,. \tag{10}$$

Используя известную формулу для произведения матриц Паули, второй член в (10) можно переписать в виде

$$\frac{2i\mu^2}{\omega}\vec{\sigma}\,[(\vec{k}_i \times \vec{e}_i) \times (\vec{k}_f \times \vec{e}^{\,*}_f)]\,. \tag{11}$$

Подставляя это представление в (10) и складывая с (8), находим полное выражение для амплитуды рассеяния, совпадающее с результатом работ [1, 2]:

$$T_{if} = -\frac{e^2}{m}\vec{e}_i\vec{e}^{\,*}_f + \frac{ie\mu}{m\omega}\left[(\vec{k}_f\vec{e}_i)(\vec{\sigma}, \vec{k}_f \times \vec{e}^{\,*}_f) - (\vec{k}_i\vec{e}^{\,*}_f)(\vec{\sigma}, \vec{k}_i \times \vec{e}_i)\right] + \\ + \frac{2i\mu^2}{\omega}\vec{\sigma}\,[(\vec{k}_i \times \vec{e}_i) \times (\vec{k}_f \times \vec{e}^{\,*}_f)] + \frac{2ie\omega}{m}(\mu - e/4m)\,\vec{\sigma}\,(\vec{e}^{\,*}_f \times \vec{e}_i)\,. \tag{12}$$

При рассеянии на нулевой угол амплитуда $T^{(1)}_{if}$ пропорциональна аномальному магнитному моменту, а при рассеянии на ненулевой угол это не так. Если заряд равен нулю (например, у нейтрона), то томпсоновская амплитуда равна нулю, а $T^{(1)}_{if}$ отлична от нуля.

Литература

1. *Low F. E.* Phys. Rev. 1954, **96**, p. 1428.
2. *Gell-Mann M. and Goldberger M. L.* Phys. Rev. 1954, **96**, p. 1433.
3. *Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Квантовая электродинамика. М., Наука, 1980.

SIMPLE DERIVATION OF THE LOW-ENERGY THEOREM FOR COMPTON SCATTERING

A. I. Milstein

The low-energy theorem for photon scattering by a spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment is derived in the framework of the ordinary quantum mechanical perturbation theory using the Hamiltonian expansion in v/c.