ЖЭТФ, 1996, том 109, вып. 4, стр. 1146–1158

ПОПРАВКИ К СВЕРХТОНКОЙ СТРУКТУРЕ И ЛЭМБ-СДВИГУ ДЕЙТЕРИЯ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ СТРУКТУРОЙ ЯДРА

*А. И. Мильштейн, С. С. Петросян *, И. Б. Хриплович*

Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера
Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 24 августа 1995 г.

Низкоэнергетическая теорема для комптоновского рассеяния вперед обобщена на случай произвольного спина мишени. Полученный результат использован для вычисления соответствующего вклада в сверхтонкую структуру дейтерия. В этом случае поправки за счет структуры ядра являются весьма существенными из-за большого размера дейтрона. Найденные в работе поправки устраняют расхождение между теоретическим и экспериментальным значениями сверхтонкого расщепления в дейтерии. Явное аналитическое выражение получено также для вклада поляризуемости дейтрона в лэмбовский сдвиг.

1. ВВЕДЕНИЕ

Сверхтонкое расщепление в основном состоянии дейтерия измерено с высокой точностью. Наиболее точный экспериментальный результат для него был получен с помощью атомного дейтериевого мазера и составляет [1]

$$\nu_{exp} = 327\,384.352\,522\,2(17) \text{ кГц}. \tag{1}$$

Теоретическое предсказание, учитывающее высшие квантовоэлектродинамические поправки, дает

$$\nu_{QED} = 327\,339.27(7) \text{ кГц}. \tag{2}$$

Последнее число было получено с помощью теоретического результата для сверхтонкого расщепления в водороде [2]

$$1\,420\,451.95(14) \text{ кГц},$$

который не учитывает структуру протона и отдачу. Было также использовано отношение констант сверхтонкого расщепления в водороде и дейтерии из [3], равное 4.339 387 6(8), которое учитывает отношение ядерных магнитных моментов и эффект приведенной массы в $|\psi(0)|^2$.

В настоящей работе расхождение[1)]

$$\nu_{exp} - \nu_{QED} = 45 \text{ кГц} \tag{3}$$

---

*Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск, Россия.

1) Это расхождение реально известно с конца сороковых годов, задолго до мазерного эксперимента [1], обладающего рекордной точностью. Ссылки на более ранние измерения приведены в [1].

устраняется с помощью учета конечных размеров дейтрона. Очевидно, что такой эффект гораздо больше в дейтерии, чем в водороде. Один из вкладов структуры ядра в сверхтонкое расщепление в дейтерии был получен довольно давно в [4] с помощью неких интуитивных аргументов, а затем обсужден более детально в [5–7]. Мы рассматриваем эффекты конечного размера дейтрона систематическим образом. Воспроизведен не только старый результат, но получены также новые поправки, в том числе возникающие за счет электрического и магнитного формфакторов дейтрона.

Для вычисления части поправок к сверхтонкой структуре дейтерия мы обобщили низкоэнергетическую теорему для комптоновского рассеяния на мишени с произвольным спином.

Еще один вопрос, рассмотренный в настоящей работе — влияние поляризуемости дейтерия на лэмбовский сдвиг. Тот факт, что соответствующая поправка сравнима с достигнутой экспериментальной точностью, был указан в [8, 9], где эффект был рассчитан в приближении прямоугольной ямы для ядерного потенциала. Эта поправка была вычислена также в [10] для сепарабельных потенциалов. В настоящей работе мы получили в приближении нулевого радиуса замкнутый аналитический результат для вклада поляризуемости дейтрона в лэмбовский сдвиг.

2. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ КОМПТОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ ВПЕРЕД НА МИШЕНИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СПИНОМ

Согласно хорошо известной низкоэнергетической теореме для комптоновского рассеяния на адроне со спином 1/2 [11, 12], амплитуда процесса описывается полюсной фейнмановской диаграммой. Нас интересует здесь не томсоновская амплитуда, имеющая нулевой порядок по частоте фотона ω, а следующий член разложения по ω, зависящий от спина. Этот результат также может быть легко получен непосредственно в нерелятивистском приближении [13]. В этом приближении электромагнитная вершина может быть выписана сразу для произвольного спина $\mathbf{s}$:

$$\frac{e}{2m_p}\left\{\frac{Z}{A}(2\mathbf{p}+\mathbf{k})+\frac{\mu}{s}i[\mathbf{sk}]\right\}. \tag{4}$$

Здесь Z — заряд адрона, а g-фактор связан с соответствующим магнитным моментом μ (измеряемым в ядерных магнетонах $e/2m_p$) соотношением

$$g=\mu/s.$$

В случае рассеяния вперед, когда адрон покоится ($\mathbf{p}=0$), а начальный и конечный фотоны имеют физические поперечные поляризации ($(\mathbf{ke})=(\mathbf{ke}')=0$), эти вершины сводятся к чисто спиновому взаимодействию. Нерелятивистская полюсная амплитуда, генерируемая этим взаимодействием, равна

$$M_1=M_{1mn}e'_m e_n=\left(\frac{e}{2m_p}\right)^2\omega g^2 i\left(\mathbf{s}[\mathbf{e}'\mathbf{e}]\right). \tag{5}$$

Однако это выражение неполно. Если мы используем его для рассеяния на протоне, то амплитуда не будет совпадать с хорошо известным результатом [11, 12], согласно которому для рассеяния вперед она должна быть пропорциональна $(g-2)^2$. Объяснение было дано в работе [13]: нерелятивистская полюсная амплитуда должна быть дополнена контактным членом, генерируемым спин-орбитальным взаимодействием, что восстанавливает согласие с классическим результатом [11, 12].

Этот контактный член может быть легко получен для произвольного спина (так же, как и нерелятивистский полюсной вклад (5)) следующим образом. Уравнение движения спина во внешнем электрическом поле $\mathbf{E}$ в низшем неисчезающем по v/c порядке может быть записано в виде

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{e}{2m_p}\left(g - \frac{Z}{A}\right)[\mathbf{s}[\mathbf{E}\mathbf{v}]]. \tag{6}$$

Здесь A — масса мишени в единицах m_p (в случае ядра, которым мы в основном интересуемся в этой работе, A — массовое число). Гамильтониан взаимодействия, приводящий к уравнению (6), очевидно, равен

$$H_s = -\frac{e}{2m_p}\left(g - \frac{Z}{A}\right)(\mathbf{s}[\mathbf{E}\mathbf{v}]). \tag{7}$$

Выражения (6), (7) — это на самом деле слегка видоизмененные формулы из книги [14]. После подстановки

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p} - Ze\mathbf{A}}{Am_p}$$

в гамильтониан (7), мы получаем следующее контактное взаимодействие:

$$V_c = \left(\frac{e}{2m_p}\right)^2 \frac{2Z}{A}\left(g - \frac{Z}{A}\right)(\mathbf{s}[\mathbf{E}\mathbf{A}]). \tag{8}$$

Оно приводит к дополнительному вкладу в амплитуду рассеяния:

$$M_2 = M_{2mn}e'_m e_n = \left(\frac{e}{2m_p}\right)^2 \omega\left(-4\frac{Z}{A}\right)\left(g - \frac{Z}{A}\right) i\,(\mathbf{s}[\mathbf{e}'\mathbf{e}]). \tag{9}$$

Сумма выражений (5) и (9) дает полную спиновую часть низкоэнергетической амплитуды рассеяния вперед:

$$M = \left(\frac{e}{2m_p}\right)^2 \omega\left(g - 2\frac{Z}{A}\right)^2 i\,(\mathbf{s}[\mathbf{e}'\mathbf{e}]). \tag{10}$$

Этот результат является обобщением низкоэнергетической теоремы, которым мы интересовались.

В частном случае протона ($s = 1/2$, $Z = A = 1$) эта формула сводится к результату работ [11, 12].

3. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА И СВЕРХТОНКАЯ СТРУКТУРА ДЕЙТЕРИЯ

Так как полученная низкоэнертетическая амплитуда зависит от спина ядра, то возникает дополнительный вклад в сверхтонкую структуру. Однако для того чтобы вычислить этот вклад, необходимо амплитуду модифицировать. Дело в том, что оба фотона, которыми обменивается электрон и ядро, не находятся на массовой поверхности. Т. е. здесь $\omega \neq |\mathbf{k}|$. Кроме того, виртуальные фотоны имеют дополнительные поляризации. Мы будем использовать калибровку $A_0 = 0$, в которой фотонный пропагатор равен

$$D_{im}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{d_{im}}{\omega^2 - \mathbf{k}^2}, \quad d_{im} = \delta_{im} - \frac{k_i k_m}{\omega^2}, \quad D_{00} = D_{0m} = 0. \tag{11}$$

Тогда, во-первых, вклад магнитного момента M_{1mn} в полюсную диаграмму заменяется на

$$\tilde{M}_{1mn} = \left(\frac{e}{2m_p}\right)^2 g^2 i\epsilon_{mnk} k_k (\mathbf{ks}) \frac{1}{\omega}, \tag{12}$$

а во-вторых, конвективный ток, пропорциональный $\pm\mathbf{k}$ для покоящегося ядра, дает сейчас ненулевой вклад в амплитуду рассеяния вперед, зависящую от спина:

$$M_{3mn} = -\left(\frac{e}{2m}\right)^2 2\frac{Z}{A} gi \left(k_m \epsilon_{nrs} k_r s_s - k_n \epsilon_{mrs} k_r s_s\right) \frac{1}{\omega}. \tag{13}$$

Сейчас мы можем записать амплитуду рассеяния электрона на ядре, зависящую от спина ядра и возникающую из-за двухфотонного обмена с дейтроном в промежуточном состоянии:

$$T_{el} = 4\pi\alpha i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d_{im} d_{jn}}{k^4} \frac{\gamma_i \left(\hat{l} - \hat{k} + m_e\right) \gamma_j}{k^2 - 2lk} \left(\tilde{M}_{1mn} + M_{2mn} + M_{3mn}\right). \tag{14}$$

Здесь $l_\mu = (m_e, 0, 0, 0)$ — импульс электрона. Структура $\gamma_i(\hat{l} - \hat{k} + m_e)\gamma_j$ сводится к $-i\omega\epsilon_{ijl}\sigma_l$, где $\boldsymbol{\sigma}$ — спин электрона. Мы будем вычислять фейнмановский интеграл с логарифмической точностью. Необходимо отметить два обстоятельства. Сингулярность при $\omega = 0$, возникающая от $1/\omega^2$ в проекционном операторе (11), должна пониматься в смысле главного значения. Далее, при вычислении встречается интеграл

$$\int_0 \frac{d|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|^2},$$

расходящийся степенным образом при $|\mathbf{k}| \to 0$. Для регуляризации этого интеграла необходимо ввести ненулевую скорость электрона v. Это приводит к хорошо известной кулоновской поправке $\pi\alpha/v$ от волновой функции, которую надо вычесть, так как она не имеет отношения к рассматриваемой нами задаче. Кроме того, мы отбрасываем нелогарифмические члены, возникающие при вычислении этого интеграла.

Окончательный результат удобно представить в следующем виде. Запишем зависящий от спина борновский вклад в электрон-ядерную амплитуду рассеяния:

$$T_0 = -\frac{2\pi\alpha}{3m_e m_p} g(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{s}). \tag{15}$$

Это — фурье-образ контактного сверхтонкого взаимодействия в низшем порядке, взятый с обратным знаком. Следовательно, отношение $\Delta_{el} = T_{el}/T_0$ есть не что иное, как относительная величина обсуждаемой поправки к сверхтонкой структуре. Результат для интеграла (14) может быть записан как

$$\Delta_{el} = \frac{3\alpha}{8\pi} \frac{m_e}{m_p} \ln \frac{\Lambda}{m_e} \frac{1}{g} \left(g^2 - 4g\frac{Z}{A} - 12\frac{Z^2}{A^2}\right). \tag{16}$$

При $s = 1/2$, $A = Z = 1$ он согласуется с соответствующими результатами [15, 16] для мюония (где эффективным параметром обрезания Λ служит масса мюона) и водорода (где интеграл обрезается на типичном адронном масштабе m_p).

В случае дейтерия ($s = 1$, $g = \mu_d = 0.857$, $A = 2$, $Z = 1$) нас интересует область интегрирования по передачам импульса k, ограниченная обратным радиусом дейтрона $\kappa = 45.7$ МэВ. В этом случае мы получаем следующий результат для относительной поправки в дейтерии:

$$\Delta_{el} = \frac{3\alpha}{8\pi}\frac{m_e}{m_p}\ln\frac{\kappa}{m_e}\left(\mu_d - 2 - \frac{3}{\mu_d}\right). \tag{17}$$

При больших передачах импульса, $k > \kappa$, амплитуда комптоновского рассеяния на дейтроне является когерентной суммой амплитуд на свободных протоне и нейтроне. Этот вклад в сверхтонкую структуру может быть также легко получен из приведенной выше формулы. Так как нуклоны находятся в дейтроне в триплетном состоянии, то можно сделать подстановку $\mathbf{s}/2$ для $\mathbf{s}_p$ и для $\mathbf{s}_n$. Обрезая логарифмический интеграл на обычном адронном масштабе $m_\rho = 770$ МэВ, находим

$$\Delta_{in} = \frac{3\alpha}{4\pi}\frac{m_e}{m_p}\ln\frac{m_p}{\kappa}\frac{1}{\mu_d}\left(\mu_p^2 - 2\mu_p - 3 + \mu_n^2\right). \tag{18}$$

Здесь $\mu_p = 2.79$ и $\mu_n = -1.91$ — магнитные моменты протона и нейтрона.

В заключение этого раздела отметим сильное численное сокращение между Δ_{el} и Δ_{in}.

4. ВКЛАД ВИРТУАЛЬНОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ ДЕЙТРОНА

Низкоэнергетическая комптоновская амплитуда, обсуждавшаяся выше, является линейным по ω (и по $|\mathbf{k}|^2/\omega$ для виртуальных фотонов) членом разложения полной амплитуды. Можно ожидать, однако, что для дейтерия с его малой энергией связи это приближение недостаточно даже для рассматриваемой нами атомной задачи. На самом деле, как мы увидим ниже, виртуальные возбуждения дейтрона весьма существенны для нашей задачи, они доминируют в обсуждаемом эффекте. Так как область больших передач импульса $k > \kappa$, была уже нами рассмотрена (см. формулу (18)), мы ограничимся снова областью $k < \kappa$. Все вычисления ниже выполнены для дейтрона в приближении нулевого радиуса, что позволило получить результаты в замкнутом аналитическом виде.

Начнем с рассмотрения переходов, обусловленных только спиновым взаимодействием. Соответствующая амплитуда рассеяния есть

$$M_{4mn} = -\left(\frac{e}{2m_p}\right)^2 \sum_n \left\{ \frac{\langle 0|[\mathbf{kS}]_m|n\rangle\langle n|[\mathbf{kS}^\dagger]_n|0\rangle}{\omega - E_n - I} - \frac{\langle 0|[\mathbf{kS}^\dagger]_n|n\rangle\langle n|[\mathbf{kS}]_m|0\rangle}{\omega + E_n + I} \right\}. \tag{19}$$

Здесь $I = \kappa^2/m_p$ — энергия связи дейтрона, $E_n = p^2/m_p$ — энергия промежуточного состояния $|n\rangle$ (все промежуточные состояния принадлежат непрерывному спектру) и

$$\mathbf{S} = \mu_p \boldsymbol{\sigma}_p e^{i\mathbf{kr}/2} + \mu_n \boldsymbol{\sigma}_n e^{-i\mathbf{kr}/2},$$

где $\boldsymbol{\sigma}_{p(n)}$ — протонный (нейтронный) спиновый оператор.

При вычислении этого вклада мы будем оставлять только члены, логарифмические по параметру $\epsilon = I/\kappa = \kappa/m_p \ll 1$. Логарифм возникает при интегрировании по k. Для того чтобы получить его, достаточно положить экспоненты в $\mathbf{S}$ равными единице. Оператор $\mathbf{S}$ может приводить только к $M1$-переходам. В приближении нулевого радиуса основное состояние дейтрона является чистым $^3S_1$, из которого $M1$-переход возможен только в S-состояния. Но из-за ортогональности радиальных волновых функций различных триплетных состояний возможные промежуточные состояния ограничиваются $^1S_0$.

Так как оператор полного спина $\mathbf{s} = (\boldsymbol{\sigma}_p + \boldsymbol{\sigma}_n)/2$ не приводит к переходу триплет–синглет, оператор $\mathbf{S}$ сводится здесь к

$$\mathbf{S} \to (\mu_p - \mu_n)\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_p - \boldsymbol{\sigma}_n).$$

Для нашей задачи о сверхтонкой структуре нужна антисимметричная часть тензора (19), которая линейна по спину дейтрона $\mathbf{s}$. Она имеет следующий вид:

$$M^1_{mn} = -\left(\frac{e}{2m_p}\right)^2 (\mu_p - \mu_n)^2 i\epsilon_{mnk}k_k(\mathbf{ks})\omega \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{|\langle ^1S_0, p|^3S_1\rangle|^2}{\omega^2 - (p^2+\kappa^2)^2/m_p^2}, \tag{20}$$

где $\langle ^1S_0, p|^3S_1\rangle$ — интеграл перекрытия волновой функции ψ_0 основного состояния в приближении нулевого радиуса,

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}}\frac{e^{-\kappa r}}{r}, \tag{21}$$

с синглетной функцией с импульсом p.

Соответствующий вклад в амплитуду рассеяния электрона на дейтроне

$$T^1_{in} = 4\pi\alpha i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d_{im}d_{jn}}{k^4}\frac{\gamma_i\left(\hat{l} - \hat{k} + m_e\right)\gamma_j}{k^2 - 2lk}M^1_{mn} \tag{22}$$

легко вычисляется с логарифмической точностью. Действительно, с этой точностью энергетический знаменатель в формуле (20) можно упростить до

$$\frac{1}{\omega^2 - \kappa^4/m_p^2}.$$

После этого интегрирование по $\mathbf{p}$ проводится с помощью соотношения полноты. Для относительной поправки к сверхтонкой структуре дейтерия находим

$$\Delta^1_{in} = \frac{3\alpha}{8\pi}\frac{m_e}{m_p}\ln\frac{m_p}{\kappa}\frac{(\mu_p - \mu_n)^2}{\mu_d}. \tag{23}$$

Рассмотрим, наконец, неупругий вклад, обусловленный комбинированным действием конвективного и спинового токов. Так как конвективный ток не зависит от спина, то все промежуточные состояния являются триплетными. Следовательно, здесь мы можем заменить оператор $\mathbf{S}$ на

$$\mathbf{S} \to \mathbf{s}\left(\mu_p e^{i\mathbf{kr}/2} + \mu_n e^{-i\mathbf{kr}/2}\right).$$

В соответствии с обычными правилами отбора, состояния $^3S_1$ не могут быть возбуждены из основного конвективным током. Но в приближении нулевого радиуса все состояния с $l \neq 0$ являются свободными. Это означает, что в качестве промежуточных состояний мы можем использовать плоские волны, собственные функции оператора импульса. Единственный матричный элемент, входящий в амплитуду, равен

$$\langle 0|e^{\pm i\mathbf{kr}/2}|\mathbf{p}\rangle = \frac{\sqrt{8\pi\kappa}}{(\mathbf{p} \pm \mathbf{k}/2)^2 + \kappa^2}. \tag{24}$$

Таким образом, сама амплитуда равна

$$M^2_{mn} = \left(\frac{e}{2m_p}\right)^2 2\kappa\omega \int \frac{d\mathbf{p}}{\pi^2} \left\{ \frac{\mu_p}{\left[(\mathbf{p}-\mathbf{k}/2)^2+\kappa^2\right]^2} + \frac{\mu_n}{\left[(\mathbf{p}-\mathbf{k}/2)^2+\kappa^2\right]\left[(\mathbf{p}+\mathbf{k}/2)^2+\kappa^2\right]} \right\} \times$$
$$\times \frac{(2p-k/2)_m i\epsilon_{nrs}k_r s_s - (2p-k/2)_n i\epsilon_{mrs}k_r s_s}{\omega^2 - (p^2+\kappa^2)^2/m_p^2}. \tag{25}$$

Интегралы, которые возникают при вычислении соответствующей части амплитуды рассеяния электрона на дейтроне,

$$T^2_{in} = 4\pi\alpha i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d_{im}d_{jn}}{k^4} \frac{\gamma_i\left(\hat{l} - \hat{k} + m_e\right)\gamma_j}{k^2 - 2lk} M^2_{mn}, \tag{26}$$

являются довольно сложными, даже если ограничиться членами, сингулярными по параметру $\epsilon = \kappa/m_p \ll 1$, а именно $1/\epsilon$ и $\ln\epsilon$. Для относительной поправки к сверхтонкой структуре в этом приближении находим

$$\Delta^2_{in} = \alpha\frac{m_e}{2\kappa}\frac{\mu_p - \mu_n}{\mu_d} - \frac{3\alpha}{\pi}\frac{m_e}{m_p}\ln\frac{m_p}{\kappa}\frac{\mu_p-\mu_n}{\mu_d}. \tag{27}$$

Одно из слагаемых в этой поправке,

$$-\alpha\frac{m_e}{2\kappa}\frac{\mu_n}{\mu_d},$$

было получено и обсуждалось в работах [4–7]. Однако новое слагаемое,

$$\alpha\frac{m_e}{2\kappa}\frac{\mu_p}{\mu_d},$$

оказывается численно больше.

5. ПОПРАВКИ ИЗ-ЗА КОНЕЧНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ЗАРЯДА И МАГНИТНОГО МОМЕНТА В ДЕЙТРОНЕ

В случае водорода эта проблема была рассмотрена много лет назад [17]. Очевидно, что для дейтерия эти поправки должны быть больше. В приближении нулевого радиуса задача может быть решена аналитически.

Начнем с рассмотрения амплитуды второго порядка рассеяния электрона на дейтроне, индуцированной зарядом и магнитным моментом дейтрона. Ядро будем рассматривать в статическом пределе. Распределение заряда и магнитного момента в ядре будем учитывать с помощью соответствующих формфакторов, F_{ch} и F_m. Для амплитуды получаем

$$V = -(4\pi\alpha)^2 \frac{\mu_d}{2m_p} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\, i[\mathbf{sq}] \frac{F_{ch}(\mathbf{q}^2)F_m(\mathbf{q}^2)}{\mathbf{q}^4} \frac{\gamma_0\left(\hat{l}+\hat{q}+m_e\right)\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\gamma}\left(\hat{l}+\hat{q}+m_e\right)\gamma_0}{(l+q)^2-m_e^2}. \tag{28}$$

Здесь снова $l_\mu = (m_e, 0, 0, 0)$, и $q_\mu = (0, \mathbf{q})$. Это выражение удобно преобразовать к виду

$$V = \frac{8m_e\alpha}{\pi} \int \frac{dq}{q^2} F_{ch}(q^2)F_m(q^2)T_0, \tag{29}$$

где T_0 — не зависящая от импульса магнитная борновская амплитуда (15).

Эффект, которым мы интересуемся, обращается в нуль, если заменить оба формфактора на единицу. Следовательно, соответствующая относительная поправка к борновской амплитуде T_0 и к сверхтонкой структуре равна

$$\Delta_f = \frac{8m_e\alpha}{\pi} \int \frac{dq}{q^2} \left[F_{ch}(q^2)F_m(q^2) - 1\right]. \tag{30}$$

В приближении нулевого радиуса оба формфактора дейтрона имеют простой вид:

$$F_{ch}(q^2) = F_m(q^2) = \langle 0|e^{i\mathbf{qr}/2}|0\rangle = \frac{4\kappa}{q} \operatorname{arctg} \frac{q}{4\kappa}. \tag{31}$$

Подставляя это выражение в формулу (30), получаем явное выражение для обсуждаемой поправки:

$$\Delta_f = -\alpha \frac{m_e}{3\kappa}(1 + 2\ln 2). \tag{32}$$

Необходимо подчеркнуть две связанные между собой особенности эффекта (характерные не только для дейтерия). Поправка имеет первый порядок (а не второй) по отношению размера ядра к боровскому радиусу ($m_e\alpha/\kappa$). Далее, вопреки возможным наивным ожиданиям, вклады электрического и магнитного формфакторов не являются аддитивными. Оба обстоятельства связаны с тем, что характерные импульсы, дающие главный вклад в интеграл (30), имеют ядерный, а не атомный масштаб.

6. СВЕРХТОНКОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ В ДЕЙТЕРИИ. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Наш окончательный результат для поправки к сверхтонкому расщеплению в дейтерии за счет структуры ядра, являющийся суммой поправок (17), (18), (23), (27), (32), составляет

$$\begin{aligned}\Delta = {}& \alpha \frac{m_e}{2\kappa} \left\{ \frac{\mu_p - \mu_n}{\mu_d} - \frac{2}{3}(1 + 2\ln 2) \right\} + \frac{3\alpha}{8\pi} \frac{m_e}{m_p} \ln \frac{m_p}{\kappa} \frac{(\mu_p - \mu_n)^2}{\mu_d} - \\ & - \frac{3\alpha}{\pi} \frac{m_e}{m_p} \ln \frac{m_p}{\kappa} \frac{\mu_p - \mu_n}{\mu_d} + \frac{3\alpha}{8\pi} \frac{m_e}{m_p} \ln \frac{\kappa}{m_e} \frac{1}{\mu_d}(\mu_d^2 - 2\mu_d - 3) + \\ & + \frac{3\alpha}{4\pi} \frac{m_e}{m_p} \ln \frac{m_p}{\kappa} \frac{1}{\mu_d}(\mu_d^2 - 2\mu_d - 3 + \mu_n^2).\end{aligned} \tag{33}$$

Численно эта поправка к сверхтонкой структуре дейтерия равна

$$\Delta\nu = 43 \text{ кГц}. \tag{34}$$

Это число нужно сравнить с имеющимся расхождением в 45 кГц (см. (3)). Принимая во внимание сделанные приближения, прежде всего грубую модель ядра (приближение нулевого радиуса), а также отбрасывание нелогарифмических вкладов, мы считаем согласие достаточно удовлетворительным. В частности, включение поправок за счет конечного эффективного радиуса взаимодействия r_0 в нормировку волновой функции основного состояния дейтрона (см. детали в следующем разделе) увеличило бы некоторые вклады.

Ясно, что обсуждаемые ядерные эффекты ответственны за основную часть расхождения между предсказаниями чистой КЭД и экспериментальным значением сверхтонкой структуры в дейтерии. Вычисление сверхтонких поправок, включающее аккуратное рассмотрение ядерных эффектов, может служить еще одной хорошей проверкой более детальных моделей структуры дейтрона.

7. ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬ ЯДРА И ЛЭМБОВСКИЙ СДВИГ В ДЕЙТЕРИИ

Вклад поляризуемости ядра в лэмбовский сдвиг в дейтерии был рассмотрен недавно в работах [8–10]. Здесь мы проведем аналитическое вычисление эффекта и получим результат в замкнутом виде. Используемое нами приближение нулевого радиуса применимо, когда область локализации волновой функции гораздо больше, чем область взаимодействия. Это же условие должно выполняться в случае, когда вместо реального взаимодействия используется грубое приближение потенциала в виде прямоугольной ямы, как это было сделано в работах [8, 9].

Эффект электрической поляризуемости, которым мы сейчас интересуемся, возникает от амплитуды рассеяния фотона на дейтроне, обусловленной только конвективными токами. Мы увидим, что в нашей задаче о вкладе поляризуемости ядра в лэмбовский сдвиг характерные значения 4-импульсов фотона таковы:

$$\omega, |\mathbf{k}| \leq I = \frac{\kappa^2}{m_p} \ll \kappa \sim |\mathbf{p}|. \tag{35}$$

Следовательно, мы можем пренебречь в комптоновской амплитуде зависимостью от $\mathbf{k}$. Так же, как в амплитуде M^2_{mn}, все промежуточные состояния в нашем случае имеют $l \neq 0$ и могут быть описаны плоскими волнами. Мы будем снова использовать матричный элемент (24), но при $\mathbf{k} = 0$. Наконец, в обсуждаемой задаче нас интересует скалярная часть амплитуды рассеяния, которая сводится к

$$-\left(\frac{e}{2m_p}\right)^2 \frac{4}{3}\delta_{mn}\kappa \int \frac{d\mathbf{p}}{\pi^2} \frac{p^2}{(p^2+\kappa^2)^2} \left\{ \frac{1}{\omega - (p^2+\kappa^2)/m_p} - \frac{1}{\omega + (p^2+\kappa^2)/m_p} \right\}.$$

Из выражения в фигурных скобках мы вычтем член

$$-2\frac{m_p}{p^2+\kappa^2},$$

который после интегрирования по $\mathbf{p}$ воспроизводит в сумме с томсоновской амплитудой для протона $-e^2/m_p$ правильную томсоновскую амплитуду для дейтрона $-e^2/2m_p$. Используя тождество

$$\frac{1}{\omega-u}-\frac{1}{\omega+u}+\frac{2}{u}=\frac{2\omega^2}{(\omega^2-u^2)u},$$

мы получаем следующее выражение для амплитуды рассеяния фотона на дейтроне:

$$M_{mn}^3=-\left(\frac{e}{2m_p}\right)^2\frac{8}{3}\delta_{mn}\kappa\omega^2 m_p\int\frac{d\mathbf{p}}{\pi^2}\frac{p^2}{(p^2+\kappa^2)^3\left\{\omega^2-(p^2+\kappa^2)^2/m_p^2\right\}}. \tag{36}$$

Ее вклад в амплитуду рассеяния электрона на дейтроне

$$T_{in}^3=4\pi\alpha i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d_{im}d_{jn}}{k^4}\frac{\gamma_i\left(\hat{l}-\hat{k}+m_e\right)\gamma_j}{k^2-2lk}M_{mn}^3 \tag{37}$$

может быть преобразован к виду

$$\begin{aligned}T_{in}^3&=\frac{32\pi^2\alpha^2\kappa}{3m_p}\int\frac{d\mathbf{p}}{\pi^2}\frac{p^2}{(p^2+\kappa^2)^3}\times\\&\times i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left\{\frac{1}{\omega(k^2-2lk)}+\frac{2\omega^3}{k^4(k^2-2lk)}\right\}\frac{1}{\omega^2-(p^2+\kappa^2)^2/m_p^2}.\end{aligned} \tag{38}$$

Первый член в скобках не содержит фотонных пропагаторов (ни $\propto 1/k^2$, ни $\propto 1/k^4$). Другими словами, он соответствует мгновенному кулоновскому взаимодействию. Второе слагаемое соответствует обмену трехмерно-поперечными квантами, т. е. магнитному взаимодействию конвективных токов.

По-видимому, наиболее удобная последовательность интегрирования выражения (38) такова: виковский поворот; переход в интегрировании по евклидовой ω к интегралу $(0,\infty)$; подстановка $\mathbf{k}\to\mathbf{k}\omega$; интегрирование по ω; интегрирование по $\mathbf{k}$ (при двух последних процедурах становится ясным, что характерные значения ω, $|\mathbf{k}|$, действительно, принадлежат указанному интервалу (35)); наконец, интегрирование по p. Удобным оказывается также следующее соотношение:

$$\int_0^1 dx(1-x)^{a-1}x^{b-1}\ln x=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\left[\psi(b)-\psi(a+b)\right],\quad \psi(b)=\frac{d}{db}\ln\Gamma(b).$$

Эффективный оператор электрон-дейтронного взаимодействия (равный $-T_{in}^3$) может быть окончательно записан в координатном представлении в виде

$$V_{le}=-\alpha m_e\alpha_d(0)5\left(\ln\frac{8I}{m_e}+\frac{1}{20}\right)\delta(\mathbf{r}). \tag{39}$$

Здесь $\alpha_d(0)$ — статическая электрическая поляризуемость дейтрона, определяемая, как обычно, соотношением

$$\alpha_d(\omega)=4\pi\alpha\frac{2}{3}\int\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{p^2+\kappa^2}{m_p}\frac{\langle 0|\mathbf{r}|n\rangle\langle n|\mathbf{r}|0\rangle}{(p^2+\kappa^2)^2/m_p^2-\omega^2}. \tag{40}$$

В матричных элементах, входящих в выражение (40), доминируют большие расстояния. В этой асимптотической области наивное (в приближении нулевого радиуса) выражение (21) для волновой функции основного состояния дейтрона следует дополнить поправочным фактором $(1 - r_0\kappa)^{-1/2}$, учитывающим конечный эффективный радиус взаимодействия r_0 (см. [14,18]). Таким образом, мы получаем следующий результат для статической электрической поляризуемости:

$$\alpha_d(0) = \frac{\alpha}{32(1 - r_0\kappa)} \frac{m_p}{\kappa^4} = 0.64 \text{ фм}^3. \tag{41}$$

Это число близко к экспериментальному [19]: 0.70(5) фм^3 (а также к значениям 0.613, 0.623, 0.625 фм^3, полученным в [10] для различных сепарабельных ядерных потенциалов, и к значению 0.635 фм^3, полученному в [8] для прямоугольного потенциала).

Окончательный результат (39) содержит два вклада различного физического происхождения. Доминирует кулоновское взаимодействие. Его вклад в численный множитель

$$-5\left(\ln\frac{8I}{m_e} + \frac{1}{20}\right)$$

в формуле (39) составляет

$$-4\left(\ln\frac{8I}{m_e} + \frac{5}{12}\right).$$

Соответствующий вклад магнитного взаимодействия равен

$$-\left(\ln\frac{8I}{m_e} - \frac{17}{12}\right).$$

Сдвиг уровня энергии основного состояния дейтерия, возникающий из-за взаимодействия (39), составляет -22.3 кГц. Кулоновский и магнитный вклады в него равны соответственно -19.7 и -2.6 кГц. Результаты близки к полученным в работах [8–10].

Естественно, что кулоновский вклад отрицательный: это обычная поправка второго порядка по электрон-ядерному статическому взаимодействию к основному состоянию системы, состоящей из покоящегося электрона и ядра в основном состоянии. Знак магнитного вклада не может быть фиксирован таким образом: на языке обычной нековариантной теории возмущений это поправка четвертого порядка, второго по фотон-электронному взаимодействию и второго по фотон-ядерному.

Еще один вклад в лэмбовский сдвиг в дейтерии, рассмотренный также ранее в [10], связан с магнитной поляризуемостью дейтрона. Он определяется скалярной частью амплитуды (19). Вычисления упрощаются благодаря следующим обстоятельствам. Во-первых, числитель d_{im} фотонного пропагатора сводится в этом случае к δ_{im}. Затем, интегрирование по $\mathbf{k}$ является сферически симметричным. Следовательно, в нашем случае скалярная часть амплитуды (19) может быть приведена к виду

$$M^4_{mn} = -4\pi\alpha \frac{(\mu_p - \mu_n)^2 \kappa(\kappa + \kappa_1)^2}{9m_p^3} \times$$
$$\times\, \delta_{mn}\mathbf{k}^2 \int \frac{d\mathbf{p}}{\pi^2} \frac{1}{(p^2 + \kappa^2)(p^2 + \kappa_1^2)\left[\omega^2 - (p^2 + \kappa^2)^2/m_p^2\right]}. \tag{42}$$

Мы использовали здесь явный вид волновой функции $^1S_0$ состояния в приближении нулевого радиуса:

$$\psi_s = \frac{\sin(pr+\delta)}{\sqrt{2}\,\pi r}, \tag{43}$$

где

$$\operatorname{ctg}\delta = \frac{\kappa_1}{p}, \quad \kappa_1 = 7.9 \text{ МэВ}.$$

Ее перекрытие с волновой функцией основного состояния в приближении нулевого радиуса (21) составляет

$$\langle {}^1S_0 | {}^3S_1 \rangle = \frac{\sqrt{8\pi\kappa}(\kappa+\kappa_1)}{(p^2+\kappa^2)\sqrt{p^2+\kappa_1^2}}. \tag{44}$$

Дальнейшие вычисления аналогичны тем, которые проводились при учете электрической поляризуемости; только последнее интегрирование по p проводилось численно для нелогарифмического вклада. Результирующий эффективный оператор электрон-дейтронного взаимодействия можно записать в виде

$$V_{im} = \alpha m_e \beta_d(0) \left(\ln\frac{8I}{m_e} - 1.24 \right) \delta(\mathbf{r}). \tag{45}$$

Здесь $\beta_d(0)$ — статическая магнитная поляризуемость дейтрона:

$$\beta_d(0) = \frac{\alpha(\mu_p-\mu_n)^2}{8m_p\kappa^2}\,\frac{1+\kappa_1/3\kappa}{1+\kappa_1/\kappa}. \tag{46}$$

Соответствующий вклад в лэмбовский сдвиг основного состояния дейтерия составляет 0.31 кГц, что очень близко к результату [10].

Мы благодарны М. И. Эйдесу, Г. Гротчу и М. И. Стрикману за полезные дискуссии. Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке программы «Университеты России» (грант № 94-6.7-2053).

Примечание при корректуре, 9 января 1996 г. Недавно, когда эта статья уже находилась в печати, нам стала известна работа J. Martorell, D. W. L. Sprung, and D. C. Zheng, Phys. Rev. C **51**, 1127 (1995), в которой также получено в приближении нулевого радиуса аналитическое выражение для вклада электрической поляризуемости дейтрона в лэмбовский сдвиг. Наш соответствующий результат совпадает с найденным в указанной работе.

Литература

1. D. J. Wineland and N. F. Ramsey, Phys. Rev. A **5**, 821 (1972).
2. G. T. Bodwin and D. R. Yennie, Phys. Rev. D **37**, 498 (1988).

3. N. F. Ramsey, in *Quantum electrodynamic*, ed. by T. Kinoshita, World Scientific (1990).
4. A. Bohr, Phys. Rev. **73**, 1109 (1948).
5. F. E. Low, Phys. Rev. **77**, 361 (1950).
6. F. E. Low and E. E. Salpeter, Phys. Rev. **83**, 478 (1951).
7. D. A. Greenberg and H. M. Foley, Phys. Rev. **120**, 1684 (1960).
8. K. Pachucki, D. Leibfried, and T. W. Hänsch, Phys. Rev. A **48**, R1 (1993).
9. K. Pachucki, M. Weitz, and T. W. Hänsch, Phys. Rev. A **49**, 2255 (1994).
10. Yang Li and R. Rosenfelder, Phys. Lett. B **319**, 7 (1993); ibid, **333**, 564 (1994).
11. F. E. Low, Phys. Rev. **96**, 1428 (1954).
12. M. Gell-Mann and M. L. Goldberger, Phys. Rev. **96**, 1433 (1954).
13. А. И. Мильштейн, Сибирский физический журнал, № 1, 43 (1995).
14. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1980).
15. R. Arnowitt, Phys. Rev. **92**, 1002 (1953).
16. H. Grotch and D. R. Yennie, Rev. Mod. Phys. **41**, 350 (1969).
17. A. C. Zemach, Phys. Rev. **104**, 1771 (1956).
18. J. L. Friar and S. Fallieros, Phys. Rev. C **29**, 232 (1984).
19. N. L. Rodning, L. D. Knutson, W. G. Lynch, and H. B. Tsang, Phys. Rev. Lett. **49**, 909 (1982).