

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ
ИНТЕНСИВНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ
В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

© 1996 г. В. В. Анциферов, В. Р. Кирейтов, В. К. Мезенцев, Г. И. Смирнов, Ю. С. Чесноков

Институт ядерной физики Сибирского отделения РАН, 630090 Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 15.06.95 г.

Исследованы нелинейные эффекты многократного рассеяния интенсивного излучения в случайно-неоднородных средах. Получено семейство солитонных решений нелинейного уравнения Шредингера, автомодельно описывающих эволюцию рассеиваемых импульсов электромагнитного излучения, и найдены асимптотики решений. Установлена возможность резкого сжатия импульсов при распространении в рассеивающих дисперсных средах, интерпретируемого как волновой коллапс. Представлены результаты численного моделирования процессов самовоздействия интенсивного излучения при его распространении в нелинейных дисперсных средах.

1. Начальный период развития общей теории многократного рассеяния электромагнитных волн на крупномасштабных неоднородностях был связан с использованием метода функции Грина, разработанного ранее для решения задач квантовой электродинамики. Для описания многократного рассеяния были применены полученные с помощью диаграммной техники Фейнмана [1] уравнения Дайсона для среднего поля [2] и уравнение Бете–Солпитера для функции корреляции [3]. Детальный обзор работ этого периода дан в [4], где основное внимание было уделено исследованиям применений геометрического приближения в задачах о распространении волн в случайно-неоднородных средах.

Среди методов геометрической оптики наиболее приспособленным к ситуации рассеяния в случайно-неоднородных средах оказался метод параболического уравнения (метод линейного уравнения Шредингера), впервые примененный Леонтовичем [5] для решения нестатистической задачи о распространении радиоволн над земной поверхностью. В 1964 г. Черновым [6] и Долиным [7] этот метод был впервые использован для описания распространения волн в случайно-неоднородных средах (объемная статистическая задача). Далее исследуется остававшаяся до последнего времени открытой проблема нелинейного отклика дисперсной среды на рассеиваемое излучение высокой интенсивности.

2. Распространение коротких импульсов сильного излучения в случайно-неоднородных средах (например, в атмосфере) может сопровождаться нелинейно-волновыми эффектами самовоздействия, обусловленными зависимостью показателя преломления среды n от амплитуды электромаг-

нитной волны E . Для сред с кубической нелинейностью эта зависимость имеет вид

$$n = n_0 + n_2|E|^2. \quad (1)$$

Выражение (1) справедливо не только в случае изотропных сред, но и для сред с анизотропией, не нарушающей аксиальную симметрию задачи.

Механизмами кубической нелинейности среды могут служить, к примеру, эффект Керра или эффект электрострикции. Для воздуха при нормальных условиях эффект электрострикции проявляется примерно на два порядка сильнее, чем эффект Керра [8]. При радиолокации нелинейность такого рода может также создаваться помехами искусственного происхождения. Эффективный показатель преломления дисперсных сред аппроксимируется зависимостью от амплитуды импульса E типа (1) в условиях многократного рассеяния.

Эволюция импульсов в нелинейной среде с учетом дисперсии групповой скорости v описывается нелинейным уравнением Шредингера для амплитуды излучения [9, 10]

$$(\partial_z - i\theta\partial_\tau^2)E = i\omega n_2|E|^2E/2c, \quad (2)$$

$$\tau = t - z/v, \quad \theta = -k(d^2n_0/d\omega^2)/2n_0,$$

где $k = \omega n_0/c$ – амплитуда волнового вектора, ω – частота излучения. Общее решение уравнения (2) методом обратной задачи было найдено Захаровым и Шабатом [10].

Стационарную форму импульса можно найти, положив в (2)

$$E = A(\tau')\exp[i(\xi z + \tau'/2\theta v)], \quad \tau' = \tau - z/v. \quad (3)$$

Как известно [10], односолитонное решение уравнения (3), соответствующее импульсу стационарной формы, при $\theta, n_2 > 0$ имеет вид

$$A = A_0 \operatorname{sech}(\tau'/\tilde{\tau}). \quad (4)$$

Длительность $\tilde{\tau}$ и амплитуда A_0 солитона связаны соотношением

$$2\xi = \theta/\tilde{\tau}^2 = \omega n_2 A_0^2 / 2c. \quad (5)$$

Поэтому путем измерений указанных параметров солитона можно получать информацию о характеристиках рассеивающей среды.

С учетом нелинейной восприимчивости среды более высокого порядка по интенсивности излучения, описываемой добавкой $n_4|E|^4$ к показателю преломления (1), эволюция импульса определяется обобщенным нелинейным уравнением Шредингера, которое в безразмерных переменных имеет вид

$$(i\partial_{z_1} + \partial_{\tau_1}^2 + a|\psi|^2 + b|\psi|^4)\psi = 0; \quad (6)$$

$$z_1 = \omega z / 2c, \quad \tau_1 = \tau(d^2 n_0 / d\omega^2)^{-1/2};$$

$$\psi \sim E; \quad b = a^2 n_4 / n_2.$$

Стационарную форму импульса можно найти, положив

$$\psi = e^{i\lambda z_1} f(\tau_1). \quad (7)$$

Проинтегрировав полученное из (6) уравнение

$$\partial_{\tau_1}^2 f = (\lambda^2 - af^2 - bf^4)f, \quad (8)$$

получим его односолитонное решение

$$f = \left[\frac{a}{4\lambda^2} + \frac{\sqrt{B}}{\lambda} \operatorname{ch}(2\lambda(\tau_1 - \tau_0)) \right]^{-1/2}; \quad (9)$$

$$B = \frac{a^2}{16\lambda^2} + \frac{b}{3}.$$

В частности, при $b \rightarrow 0$ из (9) следует решение (4).

3. Для фокусирующей сильно нелинейной среды рассмотрим неодномерное обобщение уравнения (2) в безразмерном виде

$$i\psi_{z_1} + \Delta_d \psi + |\psi|^\sigma \psi = 0, \quad (10)$$

где Δ_d — d -мерный лапласиан. В частности, это уравнение при

$$d = 1, \quad \Delta_1 \sim \partial_t^2 \quad (11)$$

описывает распространение светового импульса с плоским фронтом; при

$$d = 2, \quad \Delta_2 \sim \partial_x^2 + \partial_y^2 \quad (12)$$

— стационарную самофокусировку светового пучка; при

$$d = 3, \quad z \sim t, \quad \Delta_3 \sim \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \quad (13)$$

— нестационарную фокусировку.

Далее будем использовать факт сохранения в рамках модели (10) следующих интегралов:

$$N = \int |\psi|^2 ds, \quad (14)$$

т.е. полной энергии волнового пакета, и

$$H = \int \left(|\nabla_s \psi|^2 - \frac{2}{\sigma+2} |\psi|^{\sigma+2} \right) ds \quad (15)$$

— гамильтониана уравнения (10). Через s обозначен радиус-вектор в операторе Δ_d . Отметим также, что уравнение (10) инвариантно относительно масштабных преобразований

$$\psi(s', z'_1) = \lambda^{-2/\sigma} \psi(s, z_1), \quad s' = \lambda s, \quad z'_1 = z_1, \quad (16)$$

а также относительно преобразования Галилея

$$\psi' = \psi \exp[i(\mathbf{q}s - q^2 z_1)], \quad (17)$$

$$s' = s + 2\mathbf{q}z_1, \quad z'_1 = z_1,$$

где λ, q — произвольные параметры.

Определим интеграл

$$I = \int s^2 |\psi|^2 ds \quad (18)$$

как среднее значение квадрата размера волнового пакета. В одномерном случае ($s \sim t$) параметр I имеет смысл среднего квадрата длительности импульса. После вычисления производной

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z_1^2} = 8 \left[H - \frac{2}{\sigma+2} \left(\frac{\sigma d}{4} - 1 \right) \int |\psi|^{\sigma+2} ds \right]. \quad (19)$$

При выполнении условия $\sigma d \geq 4$ имеем оценку $\partial^2 I / \partial z_1^2 \leq 8H$, откуда получаем после двукратного интегрирования

$$I \leq 8H z_1^2 + C z_1 + C_1. \quad (20)$$

При $H < 0$ условие (20) является достаточным для того, чтобы величина I обратилась в нуль за конечное "время", поскольку парабола в правой части неравенства (20) ограничивает I сверху. Обращение среднеквадратичного размера волнового пакета в нуль отвечает процессу волнового коллапса. При этом случай $d = 1, s \sim t$ соответствует взрывной компрессии импульсов излучения.

В так называемом критическом случае, когда $\sigma d = 4$, соотношение (20) обращается в равенство. Ниже этот случай, весьма важный для практических приложений, рассматривается детально. Качественно отличающийся от него случай сверхкритического коллапса анализируется в работе [11]. Условие (20) при $H < 0$ с учетом (14) означает, что уменьшение I до нуля при сохранении пол-

ной энергии приводит к возникновению особенности при $s = 0$.

Определяющую роль на заключительной стадии коллапса в критическом случае играют солитонные решения вида

$$\psi(s, z_1) = R(s, \lambda) e^{i\lambda^2 z_1}, \quad (21)$$

где функция $R(s, \lambda)$ удовлетворяет задаче

$$(-\lambda^2 + \Delta_d + R^\sigma)R = 0, \quad R_s|_{s=0} = R|_{s=0} = 0. \quad (22)$$

К примеру, для одномерного случая имеет место солитонное решение

$$R_0(s, \lambda) = \lambda^{\sigma/2} [\sqrt{3}/\text{ch}(2\lambda s)]^{1/2} \quad (23)$$

С квантово-механической точки зрения решения типа (23) представляют собой собственные функции основного состояния нелинейной задачи (22). В интересующем нас критическом случае солитонные решения, соответствующие основному состоянию, неустойчивы даже относительно возмущений, сохраняющих симметрию. Необходимым условием коллапса является неравенство

$$N \geq N_c \equiv \int R_0^2 ds, \quad (24)$$

так как возмущение солитонного решения, удовлетворяющее (24), приводит к уменьшению гамильтониана ($H < 0$) по сравнению с его величиной для невозмущенного солитона в критическом случае ($H = 0$) и, следовательно, к волновому коллапсу.

В критическом случае уравнение (10) инвариантно относительно дополнительной группы преобразований

$$z_1' = \beta - \frac{1}{\alpha^2 z_1}, \quad s' = \frac{s}{\alpha z_1}, \quad (25)$$

$$\psi'(s', z_1) = (\alpha t)^{d/2} \psi(s, z_1) \exp\left(-\frac{is^2}{4z_1}\right),$$

где α, β – произвольные константы. Согласно (25), солитонное решение типа (21) генерирует семейство решений

$$\begin{aligned} \psi(s, z_1) = & [\alpha(z_0 - z_1)]^{-d/2} R_0\left(\frac{s}{\alpha(z_0 - z_1)}, \lambda\right) \times \\ & \times \exp\left[i\left(\varphi_0 - \frac{s^2/4 + \lambda^2/\alpha^2}{z_0 - z_1}\right)\right], \end{aligned} \quad (26)$$

которое описывает автомодельно эволюционирующий (с сохранением формы) волновой пакет. Результатом этой эволюции является коллапс – возникновение особенности при $z_1 = z_0$.

Хотя решение (26) формально описывает появление сингулярности, оно неустойчиво и поэто-

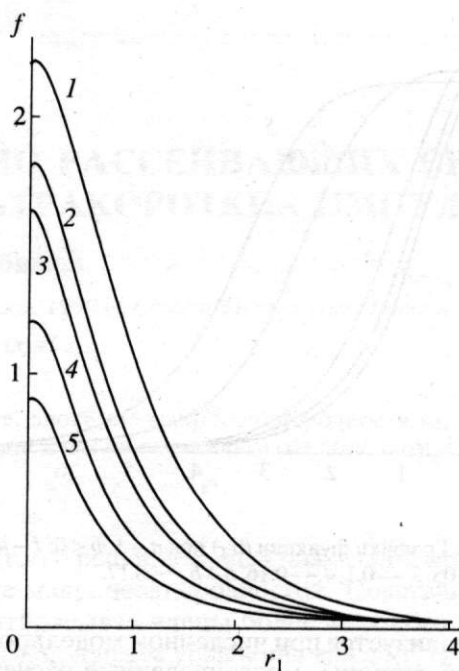


Рис. 1. Графики функции $f(r_1)$ при $a, b > 0$: 1 – $b = 0$, 2 – 0.5, 3 – 1, 4 – 5, 5 – 20.

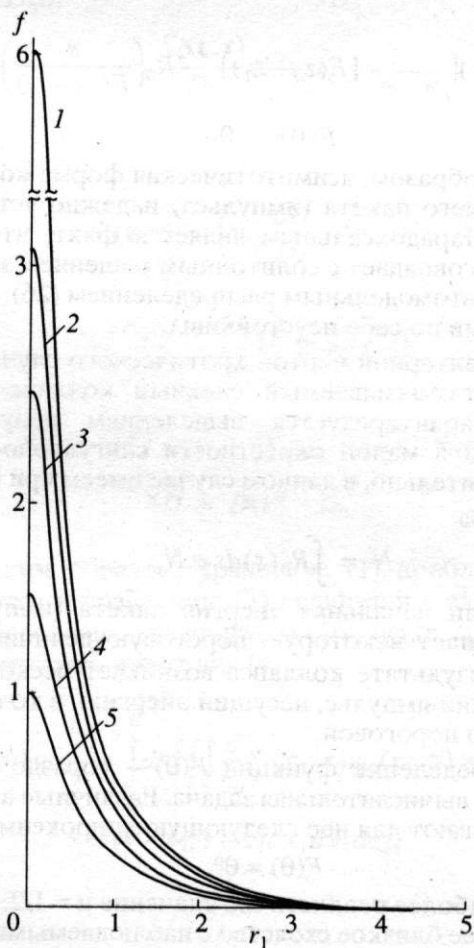


Рис. 2. Графики функции $f(r_1)$ при $a = -1, b > 0$; 1 – $b = 0$, 2 – 0.5, 3 – 1, 4 – 5, 5 – 20.

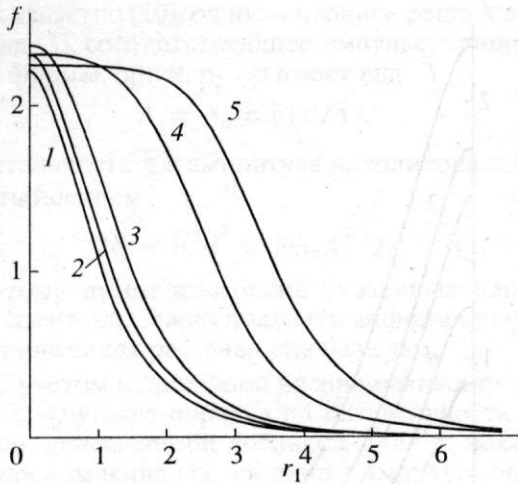


Рис. 3. Графики функции $f(r_1)$ при $a = 1, b < 0$; 1 — $b = 0$, 2 — -0.05 , 3 — -0.1 , 4 — -0.16 , 5 — $b = -0.17$.

му не реализуется при численном моделировании. С другой стороны, многочисленные расчеты показывают, что заключительная стадия коллапса хорошо описывается асимптотическим выражением

$$|\Psi(s, z_1)| \xrightarrow{z_1 \rightarrow z_0} [F(z_0 - z_1)]^{-d/2} R_0 \left(\frac{s}{F(z_0 - z_1)} \right); \quad (27)$$

$$F(0) = 0.$$

Таким образом, асимптотическая форма коллапсирующего пакета (импульса) надежно установлена. Парадоксальным является факт, что эта форма совпадает с солитонным решением задачи (22) и автомодельным распределением (26), которые сами по себе неустойчивы.

Характерной чертой критического случая является так называемый "сильный" коллапс, который характеризуется выделением ненулевой энергии в малой окрестности сингулярности ϵ . Действительно, в данном случае имеем при $|s| < \epsilon$, $z_1 \rightarrow z_0$

$$N = \int R_0^2(s) ds \equiv N_c, \quad (28)$$

т.е. если начальная энергия пакета (импульса) превышает некоторую пороговую величину N_c , то в результате коллапса возникает бесконечно короткий импульс, несущий энергию, в точности равную пороговой.

Определение функции $F(\theta)$ — гораздо более тонкая вычислительная задача. Различные авторы предлагают для нее следующую аппроксимацию:

$$F(\theta) = \theta^\mu, \quad (29)$$

где наиболее реалистично значение $\mu = 1/2$. Однако более близкое сходство с наблюдаемыми зависимостями дают функции типа

$$F(\theta) = \theta^{1/2} / (-\ln \theta)^\gamma, \quad \gamma = \text{const.} \quad (30)$$

4. Для аксиально симметричного волнового пучка в квазистационарных условиях солитонное решение обобщенного уравнения Шредингера

$$[i\partial_{z_1} + r_1^{-1}\partial_{r_1}(r_1\partial_{r_1}) + a|\psi|^2 + b|\psi|^4]\psi = 0 \quad (31)$$

определяется путем интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения

$$r_1^{-1}\partial_{r_1}(r_1\partial_{r_1}f) - \lambda^2 f + af^3 + bf^5 = 0; \quad (32)$$

$$f(r_1) = \psi e^{i\lambda^2 z_1}; \quad r_1 = r\omega/2c.$$

Положив $|a|^2 = \lambda^2 = 1$, так что $b = n_4/n_2^2$, приводим это уравнение к однопараметрическому виду. Поскольку в отличие от (6) аналитически оно не решается, был выполнен его численный анализ, результаты которого представлены на рис. 1–3. Для получения решений уравнения (32), описывающих контура радиального распределения солитонных волновых пучков, использовался метод Рунге–Кутты. В частности, было показано, что при $b < -0.17$ односолитонные режимы распространения радиально симметричных пучков невозможны.

Сопоставление результатов численного анализа радиального распределения интенсивности пучков сильного излучения с результатами соответствующих измерений позволит получать информацию о дисперсных системах в условиях многократного рассеяния.

Авторы благодарны Е.А. Кузнецову за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Feynman R.P. // Phys. Rev. 1949. V. 76. P. 749–759.
2. Dyson F. // Phys. Rev. 1949. V. 75. P. 1736–1755.
3. Salpeter E.E., Bethe H.A. // Phys. Rev. 1951. V. 84. P. 1232–1242.
4. Барабаненков Ю.Н., Кравцов Ю.А., Рытов С.М., Татарский В.И. // УФН. 1970. Т. 102. С. 3–42.
5. Леонтович М.А. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1944. Т. 8. С. 16–22.
6. Чернов Л.А. // III Всесоюз. симп. по дифракции волн. Тбилиси, 1964. Рефераты докл. М.: Наука, 1964. С. 224.
7. Долин Л.С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1964. Т. 7. С. 559–562.
8. Зуев В.Е., Землянов А.А., Копытин Ю.Д. Нелинейная оптика атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1989.
9. Мезенцев В.К., Смирнов Г.И. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. С. 347–354.
10. Захаров В.Е., Шабат А.Б. // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 118–134.
11. Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. // ЖЭТФ. 1986. Т. 91. С. 1310–1324.