

АНОМАЛЬНАЯ ДИФФУЗИЯ В МИКРОТРОНЕ И КРИТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА НА ГРАНИЦЕ ХАОСА

Б. В. Чириков

Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера
630090, Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 19 апреля 1996 г.

Представлены результаты численных экспериментов и теоретического анализа аномальной диффузии в критической структуре на границе хаос–порядок и хаос–хаос. В первом случае достаточно аккуратно измерен критический показатель $c_D \approx 1/3$, определяющий скорость аномальной диффузии $D \propto t^{c_D}$, и найден показатель корреляций $c_A \approx 1/2$, что полностью соответствует предсказанию резонансной теории критических явлений в динамических системах. Наиболее важным результатом является подтверждение основного положения этой теории о надкритичности локального параметра порядка в окрестности границы со стороны хаотической компоненты движения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Микротрон был первым циклическим ускорителем релятивистских частиц, изобретенным Векслером [1]. Динамика набора энергии в микротроне приближенно описывается простым отображением $x, p \rightarrow \bar{x}, \bar{p}$ на периоде вращения электрона в магнитном поле:

$$\bar{p} = p + K \sin x, \quad \bar{x} = x + \bar{p}. \quad (1)$$

Здесь x — фаза ускоряющего напряжения с амплитудой V_0 и частотой Ω , а канонически-сопряженное действие p и единственный параметр модели K связаны с энергией электрона E и максимальной ларморовской частотой ω_B посредством (в системе единиц $e = m = c = 1$) соотношений

$$|p| = \frac{2\pi E \Omega}{\omega_B}, \quad K = \frac{2\pi V_0 \Omega}{\omega_B}. \quad (2)$$

Динамика модели микротрона (1) изучалась в [1, 2] и многих других работах (см., например, [3]). Во всех этих работах основное внимание уделялось регулярному ускорению ($|p| \propto t$, где t — число итераций отображения (1)), которое соответствует (нейтрально) устойчивой динамике фазы x (незатухающие колебания). Подобный микротронный режим ускорения возможен лишь для специальных значений параметра $K = K_n \approx 2\pi n$, где $n \neq 0$ — любое целое число. Размер области устойчивости на фазовой плоскости xp весьма мал и быстро падает с n . Даже для основного микротронного режима $|n| = 1$ эта область занимает менее 1%. Что происходит для остальных начальных условий?

Как ни странно, этот вопрос был выяснен много позднее, когда модель Векслера (1) благодаря своей простоте стала одной из основных при изучении общих вопросов нелинейной динамики и хаоса (см., например, [4, 5]). Эта модель называется также

стандартным отображением, поскольку к нему приближенно сводятся и многие другие физические задачи.

Оказалось, что при $K > 1$ значительная часть фазовой плоскости соответствует неограниченной диффузии ($|p| \propto \sqrt{t}$), которая с ростом K захватывает практически всю плоскость. Микротрон превращается в «стохатрон» — термин, введенный в [6], где предлагалось осуществить диффузионное ускорение путем подачи шумового напряжения. Вместо этого достаточно было просто изменить начальные условия (слегка) и/или параметр K (в широких пределах) [7]. Насколько известно, ни одно из этих предложений так и не было осуществлено или хотя бы экспериментально опробовано. Однако в ином варианте (без микротронных режимов) динамический хаос использовался для предварительного нагрева плазмы в стеллараторе [8].

«Простая» модель (1) оказалась весьма богатой и интенсивно изучалась (и продолжает изучаться) как теоретически, так и в численных экспериментах. При этом выяснилось, что статистические свойства движения, и в частности диффузия, могут быть весьма необычными, или «аномальными» (см., например, [9]). Оказалось, что это связано с границей хаоса в фазовом пространстве, в окрестности которой образуется очень сложная иерархическая структура движения. Хотя сама структура исследована весьма подробно [9, 10], ее влияние на статистические свойства движения остается еще во многом неясным [9, 11]. Этой проблеме и посвящена данная статья.

2. ОСТРОВКИ УСТОЙЧИВОСТИ

Основные области регулярного ускорения на фазовой плоскости модели (1) («островки») образуются вокруг неподвижных точек (периодических решений) $p = 0 \bmod 2\pi$, $x = \pm x_0$, где

$$K \sin x_0 = 2\pi n, \quad K^2 = s^2 + (2\pi n)^2, \quad s = K \cos x_0, \quad -4 < s < 0, \quad (3)$$

и последние неравенства определяют область устойчивости неподвижных точек. В дальнейшем положим $s = -2$ (центр устойчивости). Для каждого значения $|n|$ имеется по два островка на ячейку фазовой плоскости $2\pi \times 2\pi$. Все островки подобны в безразмерных переменных

$$x_s = \frac{x - x_0}{x_b}, \quad K x_b \approx 0.99, \quad p_s = \frac{p}{p_b}, \quad K p_b \approx 2.49. \quad (4)$$

На рис. 1 показаны границы пяти островков для $n = 2, 20, 200, 2000, 20000$. Область регулярного движения лежит внутри границы, а относительная площадь островка A дается выражением

$$AK^2 \approx 0.17. \quad (5)$$

Надо заметить, что максимальная площадь $AK^2 \approx 0.19$ достигается для параметра устойчивости $s \approx -1.92$. Все соотношения подобия (3)–(5) получаются из теории [4, 9, 11], однако численные коэффициенты в них эмпирические. Граница островка устойчивости определяет переход хаос–порядок и является грубой, т. е. не разрушается при малом изменении единственного параметра модели K , который является также и параметром порядка. Это следует, в частности, из соотношений (3).

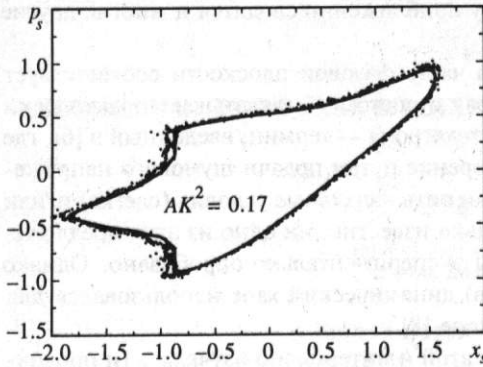


Рис. 1. Универсальная граница микро-
тронных областей в безразмерных перемен-
ных (4): $n = 2-20000$; время движения для
каждого n равно 3000 итераций отображе-
ния (1). Область внутри границы соответ-
ствует регулярному движению, а вне ее —
хаотическому. Вблизи неподвижной точки
 $x_s = p_s = 0$ частота малых колебаний
 $\omega_0 = \pi/2$, а на границе $\omega_b = 2\pi r_b$ (6)

Особенностью рассматриваемой модели является очень малый размер границы хаоса и области регулярного движения, которая тем не менее существенно изменяет статистические свойства хаотической компоненты. Это объясняется «застреванием» хаотической траектории внутри сложной критической структуры вдоль границы хаоса [9, 11]. Структура эта полностью определяется числом вращения на границе

$$r = r_b = 0.23889 \dots = [4, 5, 2, 1, 1, 1, 2, \dots], \quad (6)$$

которое также не зависит от n . Последнее выражение (6) дает представление r в виде цепной дроби (в скобках указаны последовательные элементы дроби). Поскольку число вращения $r = \omega/2\pi$ есть отношение частоты колебаний к частоте возмущения (2π), такое представление наиболее естественно выделяет основные нелинейные резонансы вблизи границы, которые и определяют критическую структуру. Эти резонансы соответствуют подходящим дробям $r_m = p_m/q_m \rightarrow r$, $m \rightarrow \infty$, причем каждый из знаменателей q_m равен периоду движения в своем резонансе.

Наглядное представление о критической структуре и описывающей ее ренормгруппе можно получить из спектра движения на границе, пример которого приведен на рис. 2а. Спектр $S(\nu)$ получен из радиальных колебаний $\rho(t)$ ($\rho^2 = x_s^2 + p_s^2$), перпендикулярных границе хаоса. Характерной особенностью спектра является нерегулярность основных пиков, отмеченных значениями m . Периоды соответствующих резонансов равны $q_m = 4, 17, 21, 38, 59, 97, 350, 447, \dots$, $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$. Такая картина типична для критической структуры и описывается хаотической ренормгруппой [9, 11]. Это означает, что изменение структуры движения при переходе от одного масштаба к другому носит нерегулярный характер и само описывается статистически (пунктирная прямая на рис. 2а). Нечетные резонансы ($m = 1, 3, 5, 7, \dots$) лежат в устойчивой области (внутри границы хаоса), тогда как четные охватывают границу, т.е. находятся в хаотической компоненте движения.

Для сравнения на рис. 2б показан специальный случай точного подобия [10] (неподвижная точка ренормгруппы), когда переход между масштабами является регулярным. Любопытно, что точное подобие включает в себя как регулярные, так и хаотические компоненты движения (траектории). Движение в обоих случаях почти периодическое (с дискретным спектром), конечная ширина пиков $\Delta\nu \sim 1/T$ определяется полным временем движения T .

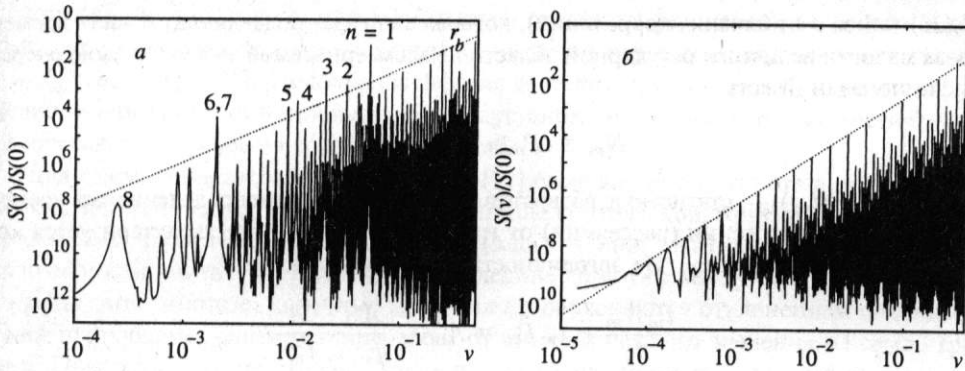


Рис. 2. Пример спектра движения на границе хаоса: частота $\nu \pmod{1}$, $S(\nu)/S(0)$ — относительный модуль фурье-амплитуды; полное время движения $T = 65536$ итераций. *а* — Статистическое подобие (хаотическая ренормгруппа) на грубой границе хаос–порядок: $n = 1$; $r_b = 0.23713 \dots$ (пик r_b), что несколько отличается от асимптотического значения (6). Цифры у кривой — порядковый номер m основных резонансов, а пунктирная прямая — теория (8). *б* — Точное подобие (неподвижная точка ренормгруппы) на негрубой границе хаос–хаос для специального $r_b = (3 - \sqrt{5})/2 = [2, 1, 1, 1, \dots]$ и $K = 0.9716 \dots$

3. КРИТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА И АНОМАЛЬНАЯ ДИФФУЗИЯ

Главный уровень критической структуры определяется последовательностью основных нелинейных резонансов, каждый из которых представляет собой цепочку q_m устойчивых областей вокруг траектории периода q_m , окруженных относительно толстым хаотическим слоем (подробное описание см., например, в [9–11]). Цепочка идет вдоль границы хаоса, а ее поперечный размер ρ_m и площадь A_m даются оценкой

$$A_m \sim \frac{A(K)}{q_m^2} \propto \rho_m \propto S_m, \tag{7}$$

где $A(K)$ — полная площадь островка (5), а $S_m = S(\nu_m)$ — амплитуда поперечных колебаний (изгибания) границы хаоса на частоте $\nu_m = q_m|r_b - r_m| \sim 1/q_m$. Отсюда глобальная форма спектра, показанная на рис. 2 пунктирной прямой:

$$S_m \sim \nu_m^2. \tag{8}$$

В случае ренормхаоса (рис. 2*а*) эта простая зависимость выражает, конечно, лишь среднее поведение структуры, на которое накладываются сильные флуктуации, характерные вообще для критических явлений.

Скорость диффузии определяется статистикой времен «застревания» t_m в соответствующем масштабе m . В среднем по времени или по начальным условиям (эргодичность) и в предположении статистической независимости различных застреваний имеем

$$\langle (\Delta p)^2 \rangle \approx \sum_m (\Delta p)_m^2 \approx K^2 \sum_m t_m^2 N_m + \frac{K^2}{2} C_0(K)t. \tag{9}$$

Здесь $N_m(t)$ — число попаданий траектории в масштаб m за полное время движения t , а последний член описывает обычную диффузию (с дополнительным коэффициентом

$C_0(K) \sim 1$ за счет близких корреляций), которая занимает подавляющую часть времени из-за малости величины регулярной области в рассматриваемой задаче. В свою очередь число попаданий есть

$$N_m = tP_m, \quad P_m \sim A/t_m^{c_P}, \quad (10)$$

где $P_m = P(t_m)$ — статистика возвратов Пуанкаре, т. е. распределение по времени задержки при отражении (рассеянии) от границы хаоса, которое характеризуется критическим показателем c_P . Из эргодичности движения следует

$$\frac{t_m N_m}{t} = t_m P_m = A_m \sim \frac{A}{q_m^2} \sim \frac{A}{t_m^{c_A}}. \quad (11)$$

Функция $A_m = A(t_m)$ играет роль корреляции застреваний, а из последней оценки (подобия) имеем $c_P = c_A + 1$. Отсюда асимптотическая средняя скорость диффузии есть

$$D(t) \equiv \frac{\langle (\Delta p)^2 \rangle}{t} \rightarrow K^2 \sum_m t_m A_m \sim AK^2 t_{max}^{1-c_A} \sim AK^2 (At)^{c_D}, \quad (12)$$

где критический показатель диффузии равен

$$c_D = \frac{1 - c_A}{1 + c_A}, \quad (13)$$

а максимальное время застревания t_{max} определяется из условия

$$N_m(t_{max}) \sim \frac{At}{t_{max}^{c_P}} \sim 1, \quad \left(\frac{t_{max}}{t} \right)^{c_P} \sim \frac{A}{t^{c_A}} \ll 1. \quad (14)$$

Сумма в (12) сводится приближенно к наибольшему слагаемому с $t_m = t_{max}$ вследствие того, что все величины критической структуры зависят от номера масштаба m экспоненциально (геометрическая прогрессия). Разумеется, это справедливо только при условии $c_A < 1$. В противном случае скорость диффузии не зависит от времени, т. е. является нормальной.

Теория критических показателей на границе хаоса оказалась далеко нетривиальной. Для их вычисления необходимо оценить зависимость $t_m(q_m)$. На первый взгляд, естественно принять, что $t_m \sim q_m$, т. е. время застревания (выхода) порядка характерного времени данного масштаба [12]. Однако из (7), (14) сразу видно, что в этом случае $c_A = 2$, а $c_P = 3$, и это совершенно несовместимо с надежно измеренным показателем $c_P \approx 1.5$ [9, 11, 13, 14]. Помимо такого количественного несоответствия получился бы и качественно другой результат для диффузии [11], которая была бы нормальной несмотря на застревания.

Такой качественный эффект особенно важен для оценки дальнейшего развития направления [12] в работах [15]. В этом подходе основное внимание сосредоточено на внутренних границах хаоса, которые также имеют иерархическую структуру («резонансы вокруг резонансов», см. также [16, 17]). Наиболее близкое к эмпирическому значение критического показателя, которое удалось получить таким путем, равно $c_P \approx 2$ [15], что все еще исключает аномальную диффузию. Между тем в [9] было показано, что при $c_P < 2$ вклад внутренних границ хаоса вообще не влияет на критические показатели.

Вместе с тем следует отметить, что масштаб $t_m \sim q_m$ имеет определенный физический смысл, не только динамический (период основного резонанса), но и статистический, определяющий скорость локальной диффузии перпендикулярно границе хаоса: $D_l \sim q_m^{-4}/q_m = q_m^{-5}$ [18]. Подобная диффузия действительно наблюдалась недавно [16], однако она ограничена и приводит лишь к установлению локального статистического равновесия без перехода в соседний масштаб.

Для разрешения этого противоречия в [11] была выдвинута гипотеза, что при точной критичности все $t_m = \infty$, т. е. все масштабы критической структуры динамически изолированы, разделены своими границами хаоса — инвариантными кривыми. Ввиду иерархичности критической структуры последние образуют всюду плотное множество. Согласно этой гипотезе, конечные значения t_m объясняются отклонением локального параметра порядка вблизи границы хаоса от его критического значения на самой границе. При этом с одной стороны границы структура становится подкритической, что обеспечивает регулярное движение для большинства начальных условий, тогда как с противоположной стороны возникает надкритичность с конечным временем застревания. В предположении линейной зависимости локального параметра порядка от расстояния до границы хаоса была получена оценка

$$t_m \sim q_m^{c_t}, \quad c_A = 2/c_t. \quad (15)$$

В зависимости от деталей критической структуры $c_t = 7$ [11] или $c_t = 4$ [9] и, соответственно, $c_A = 2/7$ или $c_A = 1/2$. Последнее значение представляется более точным (см. обсуждение в [9]).

В обоих случаях $c_A < 1$, что приводит к аномальной (ускоренной) диффузии ($c_D > 0$). Уже первые численные эксперименты [11] действительно подтвердили существование аномальной диффузии на границе хаоса и, следовательно, опровергли как первоначальное предположение $c_t = 1$ [12], так и его дальнейшее развитие [15]. Позднее такая диффузия исследовалась во многих работах (см., например, [17, 19, 20]).

Следует отметить, что аномальная диффузия вообще, как ускоренная ($c_D > 0$), так и замедленная ($c_D < 0$), изучалась и значительно раньше (см., например [21]). Здесь же нас интересует диффузия, связанная с конкретной критической структурой на границе хаоса.

4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Основная трудность эмпирического изучения аномальной диффузии в рассматриваемой модели вызвана большими флуктуациями. Последние объясняются, в свою очередь, тем, что основной вклад в диффузию вносит единственное (на данном отрезке времени) застревание с $t_m = t_{max}$. По этой же причине флуктуации растут со временем (рис. 3). Для их подавления применялось двойное усреднение: сначала усреднение $D(t)$ по $M = 40$ независимым траекториям, а затем еще и усреднение эмпирического критического показателя $c_D(t)$ по четырем также независимым группам траекторий.

Основные результаты численных экспериментов приведены на рис. 3 для $n = 1$, $K_1 = 6.5938 \dots$, $D_0 = C_0 K^2/2 \approx 39$; $n = 2$, $K_2 = 12.72 \dots$, $D_0 \approx 121$ и $n = 5$, $K_5 = 31.47 \dots$, $D_0 \approx 644$. Для сравнения показан также случай нормальной диффузии с $K_0 = 2\pi$. При этом устойчивая область полностью разрушается (см. (3)) и, несмотря

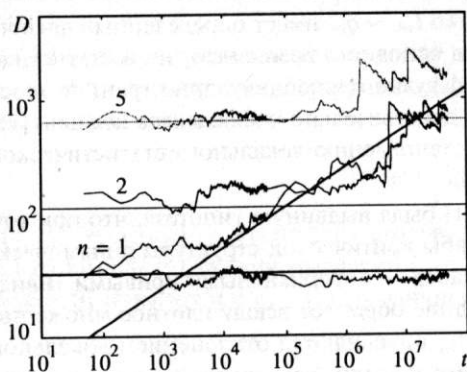


Рис. 3. Аномальная диффузия для модели (1) в микротронном режиме (3): ломаные линии — численные данные для $n = 1, 2, 5$ и контрольного счета $\bar{c} K = 2\pi$ (см. текст); горизонтальные прямые показывают (постоянную) скорость нормальной диффузии; наклонная прямая — зависимость (19) с теоретическим значением $c_D = 1/3$ и эмпирическим $b = 11$ (для $n = 1, M = 40$)

на незначительное изменение K ($K_1/K_0 - 1 \approx 0.05$), диффузия остается нормальной на всем протяжении счета $t \leq 5 \cdot 10^7$ итераций отображения (1).

Существование аномальной диффузии не вызывает сомнений. Сложнее обстоит дело с измерением критического показателя c_D из-за сильных флуктуаций, о которых уже говорилось выше. На рис. 3 ясно видны «скачки Леви» [21], связанные с застреванием траекторий на границе хаоса. Интересно, что эти скачки резко несимметричны по крутизне — особенность, механизм которой не вполне ясен. Выход на асимптотический режим аномальной диффузии происходит спустя некоторое время, тем большее, чем меньше размер островков. Асимптотическая зависимость $D(t)$ ($t > t_a$) подгонялась в двойном логарифмическом масштабе линейным выражением (см. (12)):

$$\ln D(t) = c_D \ln t + \ln B. \tag{16}$$

В результате получены следующие значения:

$$\begin{aligned} n = 1, \quad c_D = 0.29-0.37, \quad B = 4.4-1.3, \quad t_a = 5 \cdot 10^3-10^5, \\ n = 2, \quad c_D = 0.34-0.39, \quad B = 2.2-0.9, \quad t_a = 5 \cdot 10^4-5 \cdot 10^5. \end{aligned} \tag{17}$$

Минимальное значение t_a при подгонке определяется выходом на асимптотический режим, а максимальное ограничено сильными скачками $D(t)$ (см. рис. 3). Хотя аномальная диффузия ясно видна даже для $n = 5$, доступное время счета оказалось недостаточным для выхода на асимптотический режим, во всяком случае для аккуратного измерения c_D . Полученные для $n = 1, 2$ значения c_D (17) хорошо согласуются между собой и с теоретическим значением $c_D = 1/3$, которое и принято для прямой на рис. 3. Согласно (12), второй подгоночный параметр B можно представить в виде

$$B_n = b A_n K_n^2 (A_n M)^{c_D} \approx \frac{0.07 b M^{1/3}}{n^{2/3}}, \quad t^c \gtrsim f M A_n, \tag{18}$$

где A_n обозначает теперь суммарную площадь двух островков устойчивости для данного n , а b, f — некоторые постоянные. Зависимость от числа траекторий M связана с тем, что для аномальной диффузии достаточно застревания любой из них, если только выполнено последнее неравенство (18). В противном случае $t_m \sim t$ и $c_D \approx c_A \approx 1/2$. При этом в неравенство входит именно t , а не Mt , поскольку траектории независимы. Последнее выражение для B_n в (18) получено с учетом (5) и принятого значения $c_D = 1/3$.

Для $M = 40$ из данных (17) находим $b \approx 11$ ($n = 1$, $B \approx 2.8$) и $b \approx 10$ ($n = 2$, $B \approx 1.5$). Окончательно рассматриваемая аномальная диффузия описывается выражением

$$D_a(t) \approx 0.76 (Mt/n^2)^{1/3}, \quad (19)$$

которое и представлено на рис. 3 наклонной прямой для $n = 1$.

Сравним теперь полученные результаты с известными данными. Прежде всего, в работе [22] приведено несколько большее теоретическое значение $c_D = 1/2$, что объясняется упрощенным предположением $t_{max} \sim t$ (ср. (14)), принятым в [22] вслед за [9, 11]. Такое предположение справедливо лишь в случае нарушения неравенства (18), в частности, при очень большом M и малом t (см. ниже).

В численных экспериментах аномальная диффузия на границе хаоса наблюдалась, по-видимому, впервые в работе [23] как раз для рассматриваемой модели с $n = 1$. Однако скорость диффузии приведена лишь для максимального времени счета $t = 10^8$. По непонятной причине авторы [23] не смогли обнаружить аномальную диффузию для $n = 2$, хотя при $t = 10^8$ ее скорость такая же, как и для $n = 1$, и все еще значительно превышает нормальную скорость: $D/D_0 \approx 7.3$ (см. (19) для $M = 64$ и рис. 3). Для $n = 1$ найденное в [23] отношение $D/D_0 \approx 27$ удовлетворительно согласуется со средним $D/D_0 \approx 36$ (19) с учетом больших флуктуаций, также отмеченных в [23].

В [20] приведены данные по аномальной диффузии в той же модели, но на очень коротком промежутке времени $t \leq 2000$ и для несколько иного значения $K = 6.9115$, при котором площадь устойчивой области уменьшается в пять раз. Критический показатель принят равным $c_D = 1/3$, однако точность этого значения неизвестна, главным образом, из-за малого t . При максимальном времени счета $D \approx 160$, тогда как теоретическое значение (19) с учетом меньшей площади островков (см. (18)) составляет $D \approx 60$. Разница связана, по-видимому, не столько с флуктуациями, сколько с изменением формы островков устойчивости и, соответственно, числа вращения на границе хаоса. Интересно отметить, что в этих работах использовалось огромное число траекторий $M = 10^5$ для вычисления функции распределения при аномальной диффузии (см. также [17]). Поэтому косвенно эти результаты подтверждают также странную на первый взгляд зависимость средней скорости диффузии от M (19). Без этого фактора скорость упала бы почти в 50 раз! Более подробный анализ данных [20], проверенных дополнительными численными экспериментами, показывает, что при $t \sim 100$ имеет место переход от $c_D \approx 0.5$ к $c_D \approx 0.3$, связанный, по-видимому, с нарушением неравенства (18). Отсюда можно оценить постоянную $f \sim 0.05$.

Ближкие результаты получены и для другой модели (в непрерывном времени) [17] с $M = 3600$ и максимальным $t \sim 10^5$ (в сравнимых единицах). В частности, критический показатель $c_D \approx 0.38 \approx 1/3$ остается примерно тем же несмотря на совершенно иную глобальную структуру движения. Это дополнительно подтверждает универсальность критической структуры на границе хаоса. Отметим, что в этой модели уменьшение c_D со временем в районе $t \sim 10^4$ видно еще более ясно (см. рис. 7 в [20]) и соответствует примерно тому же значению f при $A \sim 1$.

Таким образом, существование аномальной диффузии вследствие критической структуры на границе хаоса можно считать твердо установленным. Однако как объяснение самого факта аномальной диффузии ($c_D > 0$), так и приближенное вычисление критических показателей возможно пока только в резонансной теории критической структуры хаоса с дополнительной гипотезой о динамическом разделении мас-

штабов [9, 11]. Эта важная гипотеза может быть дополнительно проверена, по крайней мере качественно, на другой модели с границей хаос-хаос.

5. СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДВИЖЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ ХАОС-ХАОС

В отличие от более известной и грубой границы хаос-порядок, которая сохраняется в относительно широком диапазоне изменения параметра порядка (K в рассматриваемой модели), граница хаос-хаос является негрубой, т. е. разрушается при любом отклонении от критического значения $K = 0.9716 \dots$ [10]. На рис. 4 показан фазовый портрет модели (1) в этом случае. Критические инвариантные кривые, отмеченные стрелками, являются абсолютными барьерами для движения, однако хаотические траектории подходят к ним с обеих сторон сколь угодно близко. Так как теперь локальный параметр порядка является надкритичным с двух сторон границы, его убывание при приближении к границе становится по крайней мере квадратичным, и значит, надкритичность резко уменьшается, а время застревания быстро растет. Это приводит в свою очередь к уменьшению критического показателя корреляций $c_A \rightarrow 0$ и увеличению показателя аномальной диффузии до его предельного значения: $c_D \rightarrow 1$. Первое подтверждение такой структуры границы хаос-хаос было получено уже в работе [11] путем измерения статистики возвратов Пуанкаре (10): критический показатель $c_P = 1 + c_A \approx 0.975 \pm 0.013$ действительно оказался очень близким к своему предельному значению.

На рис. 5 представлены результаты измерения аномальной диффузии в этом случае. Средняя скорость диффузии по x определяется как

$$D_x(t) = \frac{\langle (\Delta x)^2 \rangle}{t} \approx Bt^{c_D}, \quad \Delta x = \sum_t [p(t) - p_r]. \quad (20)$$

Здесь резонансное значение импульса $p_r = p_1 = 0$ при диффузии на целом резонансе (под нижней границей на рис. 4) и $p_r = p_2 = \pi$ при диффузии на полуцелом резонансе (между двумя границами).

В данном случае отображение (1) представляет другую физическую модель — движение частицы в поле многих волн, а переменные x, p являются декартовыми с неограниченным изменением координаты x . Именно такого рода модель исследовалась в [17]

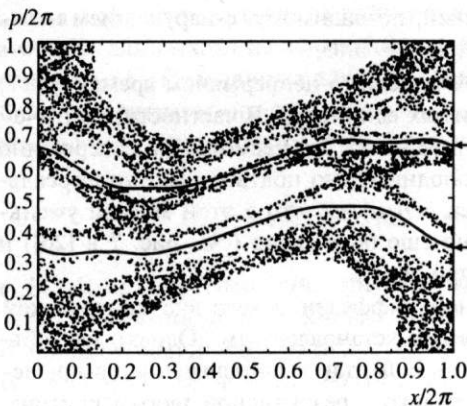


Рис. 4. Фазовый портрет модели (1) при критическом значении $K = 0.9716 \dots$. Стрелками показаны две границы хаос-хаос, разделяющие хаотические компоненты, движение в каждой из которых представлено одной траекторией на $t = 10^7$ итераций с шагом $\Delta t = 2000$ и 5000

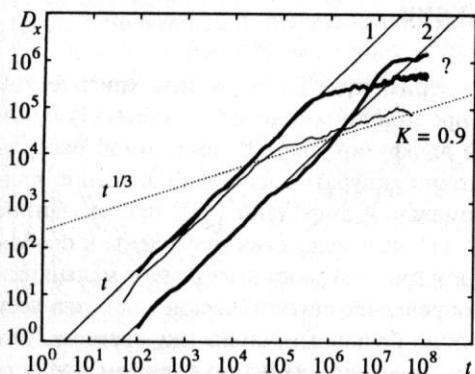


Рис. 5. Аномальная диффузия на границе хаос-хаос: модель (1) с критическим значением $K = 0.9716\dots$, усреднение по $M = 100$ независимым траекториям. Толстые кривые соответствуют диффузии с предельной скоростью $D(t) \propto t$ (крутые прямые) для целого (1) и полуцелого (2) резонансов. Для сравнения показана также диффузия при подкритическом значении $K = 0.9$ (тонкая кривая); пунктирная прямая соответствует $c_D = 1/3$ для диффузии на границе хаос-порядок

в случае всего двух волн. Такой случай является простейшим с физической точки зрения, однако оказывается значительно более сложным для численных экспериментов и теоретического анализа.

Из рис. 5 видно, что показатель диффузии $c_D \approx 1$ действительно резко возрастает и близок к своему предельному значению. Если бы траектории застревают вблизи границы хаоса на все время движения t , то коэффициент в (20) был бы $B_i \approx (2\pi r_i)^2$, где $r_1 = (3 - \sqrt{5})/2 \approx 0.382$ — число вращения на нижней границе хаоса, а $r_2 = 0.5 - r_1$. Отсюда $B_1 \approx 5.8$ и $B_2 \approx 0.55$. На самом деле из данных на рис. 5 следует $B_1 \approx 0.35$, $B_2 \approx 0.023$, т. е. приблизительно в 20 раз меньше. По-видимому, это связано в основном с относительно небольшим размером собственно критической структуры ($A \sim 0.1$, ср. параметр f того же порядка в неравенстве (18)). С другой стороны, эта площадь все же значительно больше, чем в модели микротрона, что и является, по-видимому, главной причиной существенного уменьшения флуктуаций (ср. рис. 3 и 5). В любом случае малое значение коэффициента B показывает, что имеет место именно диффузия, а не регулярное движение по x , хотя для обоих механизмов $x \propto t$. Это подтверждается также непосредственным наблюдением за траекториями. В частности, такое «квазирегулярное» движение по x идет в обе стороны! При $c_P \approx 1$ и $c_A \approx 0$ неравенство (18) нарушается уже для $M \gtrsim 1/f \sim 10$ и скорость диффузии не зависит от M . В обоих случаях $c_D \approx (1 - c_A)/(1 + c_A) \approx 1 - c_A \approx 1$.

Таким образом, предельная диффузия на границе хаос-хаос действительно подтверждает гипотезу надкритичности, что представляется весьма важным для дальнейшего развития теории критических явлений в динамических системах. Однако остается совершенно неясной природа устойчивой (не зависящей от начальных условий для траекторий) аномалии при больших $t \gtrsim 10^6$, которая особенно четко проявляется для случая 1 на рис. 5. Следы такой аномалии были отмечены уже в [11] по более быстрому спаду функции распределения возвратов Пуанкаре $P(t)$ при $t \gtrsim 10^5$. Эта аномалия также оказалась устойчивой и не связанной с малой статистикой, как предполагалось в [11].

Внешне аномалия на рис. 5 выглядит так, как будто бы значение параметра $K = 0.9716\dots$ остается еще подкритическим (ср. случай $K = 0.9$) или застревания переходят по какой-то причине с основной границы хаос-хаос на одну из внутренних границ хаос-порядок. Однако, с другой стороны, никаких аномалий в спектре движения на границе хаос-хаос не наблюдается (рис. 2). В целом весь этот вопрос требует отдельного специального исследования.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведена большая серия численных экспериментов по изучению критической структуры на границе хаос–порядок (рис. 1) в простой динамической системе (1) путем наблюдения весьма своеобразной аномальной диффузии (рис. 3), вызванной особенностями этой структуры. В частности, достаточно аккуратно измерено значение критического показателя $c_D \approx 1/3$ в законе аномальной диффузии (12), предсказанное резонансной теорией критических явлений [9, 11]. Исследования проведены в особом (микротронном) режиме (3) модели (1), в котором граница хаоса имеет очень малый размер (рис. 1), но несмотря на это полностью определяет статистические свойства всей хаотической компоненты движения на достаточно большом промежутке времени. Это подчеркивает важность критических явлений в динамике, особенно с учетом грубости (структурной устойчивости) границы хаос–порядок.

Одной из основных целей исследования была проверка основополагающей гипотезы теории о надкритичности локального параметра порядка в окрестности границы со стороны хаотической компоненты. Полученное эмпирическое значение c_D и вытекающее из него значение критического показателя корреляций на границе хаоса $c_A \approx 1/2$ (13) полностью подтверждают эту гипотезу. Ввиду ее важности для всей теории была проведена дополнительная проверка с другим (критическим) значением параметра порядка $K = 0.9716 \dots$, при котором в системе возникает (негрубая) граница хаос–хаос с качественно иной структурой (рис. 1, 2, 4). Предсказываемое теорией резкое возрастание $c_D \rightarrow 1$ и уменьшение $c_A \rightarrow 0$ действительно подтвердилось (рис. 5). Вместе с тем была обнаружена устойчивая аномалия (отмеченная еще в [11]), которая в настоящее время изучается. Интересно отметить, что в этом случае скорость (однородной) диффузии достигает предельной: $|\Delta x| \propto t$, т. е. движение похоже на свободное, но идет с меньшей скоростью и при том в обе стороны!

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 95-01-010047).

Литература

1. В. И. Векслер, ДАН СССР **43**, 346 (1944).
2. А. А. Коломенский, ЖТФ **30**, 1347 (1960).
3. С. П. Капица, В. Н. Мелехин, *Микротрон*, Наука, Москва (1969).
4. В. V. Chirikov, Phys. Rep. **52**, 263 (1979).
5. Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику*, Наука, Москва (1988).
A. Lichtenberg and M. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer (1992).
6. Э. Л. Бурштейн, В. И. Векслер, А. А. Коломенский, в кн. *Некоторые вопросы теории циклических ускорителей*, Изд-во АН СССР, Москва (1955), с. 3.
7. Г. М. Заславский, Б. В. Чириков, УФН **105**, 3 (1971).
8. В. Н. Бочаров, В. И. Волосов, А. В. Комин и др., ЖТФ **40**, 1334 (1970).
9. В. V. Chirikov, Chaos, Solitons and Fractals **1**, 79 (1991).
10. R. MacKay, Physica D **7**, 283 (1983).
11. В. V. Chirikov and D. L. Shepelyansky, Physica D **13**, 395 (1984).
12. J. Hanson, J. Carry, and J. Meiss, J. Stat. Phys. **39**, 327 (1985).

13. Б. В. Чириков, Д. Л. Шепелянский, *Труды IX Междуна. конф. по нелинейным колебаниям (Киев, 1981)*, Наук. думка, Киев (1984), т. 2, с. 420.
14. C. Karney, *Physica D* **8**, 360 (1983).
15. J. Meiss and E. Ott, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2741 (1985); *Physica D* **20**, 387 (1986).
16. S. Ruffo and D. L. Shepelyansky, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3300 (1996).
17. G. M. Zaslavsky and S. S. Abdullaev, *Phys. Rev. E* **51**, 3901 (1995).
18. B. V. Chirikov, *Lect. Not. Phys.* **179**, 29 (1983).
19. H. Mori, H. Hata, T. Horita, and T. Kobayashi, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **99**, 1 (1989).
20. R. Ishizaki, H. Hata, T. Horita, and H. Mori, *Prog. Theor. Phys.* **84**, 179 (1990); **85**, 1013 (1991).
21. P. Levy, *Théorie de l'Addition des Variables Eleatoires*, Gauthier-Villiers, Paris (1937). T. Geisel, J. Nierwetberg, and A. Zacherl, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 616 (1985). R. Pasmarter, *Fluid. Dynam. Res.* **3**, 320 (1988). Г. М. Заславский, М. Ю. Захаров, А. И. Нейштадт и др., *ЖЭТФ* **96**, 1563 (1989). R. Voss, *Physica D* **38**, 362 (1989).
22. B. V. Chirikov, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **413**, 145 (1987).
23. C. Karney, A. Rechester, and R. White, *Physica D* **4**, 425 (1982).