

Расчет динамической апертуры ускорителя заряженных частиц

Е.Б.Левичев

Институт ядерной физики им.Г.И.Будкера СО РАН
Новосибирск 630090, Россия

Аннотация

Лекция посвящена теоретическому изучению динамической апертуры циклических ускорителей, для которых основным нелинейным возмущением являются секступольные линзы, компенсирующие естественный хроматизм. Показано, что при этом область устойчивости ограничивается сильными резонансами, описываемыми двумя первыми порядками теории возмущений. На основе гармонического разложения возмущенного гамильтониана приводятся выражения, пригодные для всей области бетатронных частот. Наиболее компактно выражения записываются для специализированного источника синхротронного излучения, для которого возможна простая оценка основных гармоник возмущения исходя из фундаментальных параметров накопителя.

Секступольные резонансы высших порядков (≥ 3) непосредственно не определяют размера динамической апертуры, однако могут уменьшать ее, приводя к появлению области стохастического движения вблизи границы, задаваемой основным резонансом. Приближения высоких порядков рассчитываются при помощи теории возмущений Ли.

1 Введение

На сегодняшний день самым распространенным методом расчета динамической апертуры является численное решение уравнений движения частицы в нелинейных магнитных полях (трекинг) [1]. Имеется много доступных и удобных программ, позволяющих найти границу устойчивости с учетом нелинейности магнитного поля, отклонения частицы по энергии, связи бетатронных колебаний, искажения замкнутой орбиты и т.п. Кроме динамической апертуры трекинг позволяет моделировать фазовое движение частицы, определять зависимость частоты колебаний системы от амплитуды и т.д. [2].

Однако численному моделированию внутренне присущ серьезный недостаток: невозможность описания результатов с помощью аналитических выражений. Трекинг не позволяет устанавливать функциональные связи и определять влияние различных параметров системы на размер области устойчивости; отвечая на вопрос, *что* происходит, он не дает ответа, *почему* происходит так. Поэтому на основе трекинга трудно делать какие-то обобщающие выводы или предсказания с целью улучшения ситуации [3].

Все это заставляет искать способы теоретической оценки динамической апертуры ускорителя. Как известно, движение частицы в нелинейных полях ускорителя является типичным примером гамильтоновой системы, близкой к интегрируемым: нелинейности являются слабым возмущением линейного движения. Решение такой системы может быть получено только приближенно с учетом малости нелинейных поправок с применением какого-либо варианта теории возмущений. Обзор предлагавшихся методов можно найти в [4] или в [5]. Решение нелинейной задачи методами теории возмущений приводит к степенному ряду по начальной амплитуде колебаний частицы, являющейся параметром малости. Исследование этого ряда и позволяет найти границу устойчивого движения. К сожалению, коэффициенты ряда оказываются весьма сложными выражениями и становятся все более громоздкими по мере увеличения порядка приближения, затрудняя анализ решения.

Согласно классификации [8] доминирующие нелинейные поля в циклических ускорителях могут создаваться (а) секступолями, компенсирующими хроматизм, и (б) мультипольными ошибками поля основных элементов. В данной работе мы рассматриваем ускорители первой группы, к которым относятся источники синхротронного излучения, электронные и протонные синхротроны и электрон-позитронные коллайдеры. Во вторую группу входят большие протонные ускорители и коллайдеры со сверхпроводящими магнитами.

Ниже дается оценка динамической апертуры исходя из весьма простых предположений с учетом ограниченного числа резонансов низших порядков. Такой подход был использован ранее в [6] для резонансов первого порядка $\nu_x = m$ и $3\nu_x = m$ и дал хорошие результаты. Чтобы развить это описание на всю область бетатронных частот, оказывается достаточным включить в рассмотрение резонансы второго порядка приближения (в одномерном горизонтальном случае это $2\nu_x = m$ и $4\nu_x = m$). Для специализированного источника синхротронного излучения возможность простой оценки основных гармоник возмущения [9] позволяет получить выражения, связывающие размер апертуры с фундаментальными характеристиками ускорителя.

Резонансы высших порядков не определяют непосредственно область устойчивости, однако, являясь при больших амплитудах колебаний вблизи границы апертуры, могут уменьшать последнюю за счет перекрытия стохастических слоев.

Демонстрируемый подход кажется достаточно универсальным в том смысле, что он пригоден (при определенных, но вполне разумных предположениях) для широкого круга ускорителей, где доминирующие нелинейные явления определяются хроматическими секступолями. Полученные аналитические результаты проверяются при помощи трекинга. Для наглядности и простоты изложения мы рассматриваем в основном горизонтальную апертуру, однако методика легко обобщается на случай двумерного движения включением в рассмотрение соответствующих гармоник, отвечающих за нелинейную связь колебаний (см., например, [12]). Эксперименты по нелинейной динамике, проведенные на накопителе ВЭПП-4М [10, 11], показывают весьма хорошее согласие с результатами аналитических оценок.

2 Гармоническое представление секступольного возмущения

Гамильтониан с секступольным возмущением, разложенным по азимутальным гармоникам, имеет вид [13]

$$\begin{aligned}
 H = & \nu_x J_x + \nu_z J_z \\
 & + (2J_x)^{3/2} \sum_m [3A_{1m} \cos(\phi_x - m\theta) + A_{3m} \cos(3\phi_x - m\theta)] \\
 & - 3(2J_x)^{1/2} 2J_z \sum_m [2B_{1m} \cos(\phi_x - m\theta) \\
 & + B_{+m} \cos(\phi_+ - m\theta) + B_{-m} \cos(\phi_- - m\theta)], \quad (1)
 \end{aligned}$$

где (J, ϕ) - сопряженные переменные "действие-фаза", θ - независимая переменная (азимутальный угол), ν - бетатронная частота, а амплитуды пяти типов фурье-гармоник возмущения записываются как ($j = 1, 3$)

$$\begin{aligned}
 A_{jm} &= \frac{1}{48\pi} \sum_k [(\beta_x^{3/2} k_2 l) \cos(j(\psi_x - \nu_x \theta) + m\theta)]_k, \\
 B_{1m} &= \frac{1}{48\pi} \sum_k [(\beta_x^{1/2} \beta_z k_2 l) \cos(\psi_x - \nu_x \theta + m\theta)]_k, \\
 B_{\pm m} &= \frac{1}{48\pi} \sum_k [(\beta_x^{1/2} \beta_z k_2 l) \cos(\psi_{\pm} - \nu_{\pm} \theta + m\theta)]_k, \quad (2)
 \end{aligned}$$

где $(k_2 l)_k$ - эффективная сила k -той секступольной линзы, а $\psi_{x,z}$ - набег бетатронной фазы. В последних выражениях предполагается, что секступольные линзы "тонкие", азимут наблюдения является точкой зеркальной симметрии как линейной оптики, так и размещения секступольных линз, кроме того, приняты следующие обозначения: $\psi_{\pm} = \psi_x \pm 2\psi_z$, и аналогично, для ϕ_{\pm} и ν_{\pm} .

Имея магнитную структуру ускорителя, можно вычислить все нужные гармоники возмущения согласно (2). Однако интересно попытаться связать величину гармоник с фундаментальными параметрами ускорителя. По крайней мере для специализированного источника СИ с малым эмиттансом и для основных (резонансных) гармоник такую связь можно найти. Рассмотрим источник СИ, состоящий из нескольких идентичных ячеек периодичности. Каждая ячейка включает достаточно компактный ахроматический поворот, где размещаются секступольные линзы, компенсирующие хроматизм, и бездисперсионные промежутки, предназначенные для расстановки сверхпроводящих пигглеров. Далее, если не оговорено специально, натуральный хроматизм ξ_x , ξ_z и бетатронная частота приводятся для одной ячейки. Сила секступольных линз определяется условием компенсации хроматизма:

$$4\pi\xi_x + \sum_k (k_2 l)_k \beta_{xk} \eta_k = 0, \quad 4\pi\xi_z + \sum_k (k_2 l)_k \beta_{zk} \eta_k = 0, \quad (3)$$

где $\eta(s)$ - горизонтальная дисперсионная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\eta''(s) + k_x(s)\eta = 1/\rho(s). \quad (4)$$

Предполагая, что гармоники, соответствующие ближайшим резонансам, оказывают наиболее сильное влияние на движение, мы начнем с гармоники A_{1M} при условии, что $\nu_x \approx M$. В этом случае $\nu_x - M \approx 0$, и выражение для A_{1M} (2) принимает вид (индекс M опускаем)

$$A_1 \approx \frac{1}{48\pi} \sum_k [(\beta_x^{3/2} k_2 l) \cos \psi_x]_k. \quad (5)$$

Чтобы упростить (5), рассмотрим известную функцию $H(s) = \gamma_x \eta^2 + 2\alpha_x \eta \eta' + \beta_x \eta'^2$, которая определяет горизонтальный эмиттанс пучка и имеет вид инварианта Куранта-Снайдера, где координата частицы заменена дисперсионной функцией. Из (4) следует, что вне поворотных магнитов $\eta(s)$, как координата, удовлетворяет уравнению свободных бетатронных колебаний, и, следовательно, вне магнитов $H = const$. Продолжая аналогию, мы можем применить к $\eta(s)$ преобразование Флюке [14]

$$\frac{\eta}{\sqrt{\beta_x}} = \sqrt{H_a} \cos \psi_x, \quad \eta' \sqrt{\beta_x} + \eta \frac{\alpha_x}{\sqrt{\beta_x}} = \sqrt{H_a} \sin \psi_x, \quad (6)$$

где ψ_x - набег бетатронной фазы. Теперь, подставив в (5) $(k_2 l)_k$, найденные из системы (3), и учитывая полученные выражения, что $\sqrt{\beta_x}/\eta = 1/\sqrt{H_a} \cos \psi_x$, получим

$$A_1 \approx -\frac{1}{12} \frac{\xi_x}{\sqrt{H_a}}. \quad (7)$$

При сделанных предположениях ($\nu_x \approx M$) это выражение точное и не зависит ни от расположения секступольных линз, компенсирующих хроматизм, ни от их сил. Легко видеть, что аналогичная формула получается для B_{1M} с заменой ξ_x на $-\xi_z$.

Для гармоник A_{3M} ($3\nu_x \approx M$) и $B_{\pm M}$ ($\nu_{\pm} \approx M$) такие же выражения могут быть получены при условии, что набег бетатронной фазы в месте размещения секступольных линз достаточно мал, что достаточно хорошо выполняется в случае магнитной структуры специализированного источника СИ.

Итак, простая оценка на величину рассмотренных основных гармоник A - и B -типа имеет вид

$$A \approx -\frac{1}{12} \frac{\xi_x}{\sqrt{H_a}}, \quad B \approx \frac{1}{12} \frac{\xi_z}{\sqrt{H_a}}. \quad (8)$$

Для конкретной магнитной структуры H_a пропорционально усредненной по поворотным магнитам величине $\langle H(s) \rangle$, которая определяет горизонтальный эмиттанс: $\epsilon_x \propto \langle H(s) \rangle$. Например, в случае структуры Часмана-Грина (ДВА) и выполнения условий минимизации эмиттанса [15] $H_a = 4 \langle H(s) \rangle$. В общем случае коэффициент пропорциональности учитывает поведение $\beta_x(s)$ внутри поворотных магнитов. Тем не менее, мы можем сказать, что величина доминирующих

гармоник зависит от фундаментальных характеристик ускорителя - натурального хроматизма и горизонтального эмиттанса - как

$$A \propto \frac{\xi_x}{\sqrt{\epsilon_x}}, \quad B \propto \frac{\xi_z}{\sqrt{\epsilon_x}}. \quad (9)$$

Для специализированного источника СИ СИБИРЬ-2 [16], где $\xi_x \approx \xi_z = -3.98$ и $H_a = 4.03$ см оценка согласно (8) приводит к $A = 0.165 \text{ cm}^{-1/2}$, $B = -0.165 \text{ cm}^{-1/2}$, в то время как точные вычисления дают:

$$\begin{aligned} A_{11} &= 0.165 \text{ cm}^{-1/2}, & B_{11} &= -0.167 \text{ cm}^{-1/2}, \\ A_{34} &= 0.177 \text{ cm}^{-1/2}, & B_{-1} &= -0.167 \text{ cm}^{-1/2}, \\ & & B_{+4} &= -0.103 \text{ cm}^{-1/2}, \end{aligned}$$

Видно, что согласие достаточно хорошее, за исключением B_{+4} (расхождение - 37%), для которой нужно учитывать набег бетатронной фазы между секступолями.

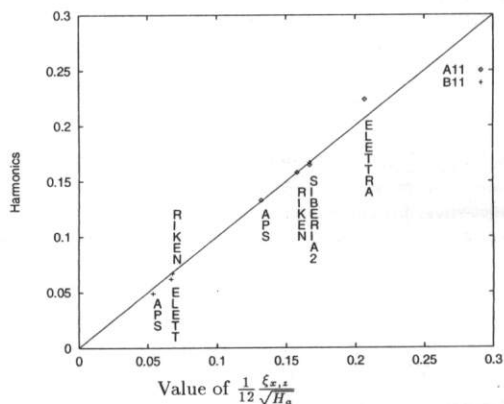


Рис. 1. Амплитуды гармоник для различных источников СИ. Линия соответствует аналитической оценке

На рис.1 показано соответствие между оценкой (8) и точными вычислениями величин гармоник для различных источников СИ, обладающих различным хроматизмом и эмиттансом.

Полученная оценка величины резонансных гармоник вполне соответствует интуитивному впечатлению, что проблемы, связанные с нелинейной динамикой (в частности, уменьшение динамической апертуры), должны накапливаться по мере уменьшения эмиттанса и увеличения натурального хроматизма. Интересен тот факт, что величина резонансных гармоник для рассматриваемого случая источника СИ с компактным ахроматическим поворотом не зависит (или зависит слабо) от расстановки и сил хроматических секступолей. Последнее легко проверяется при помощи численного моделирования.

3 Нерезонансная теория возмущений

Гамильтониан (1) состоит из линейной части, описывающей невозмущенное движение, и возмущения, вносимого полями секступольных линз. Возмущение может считаться малым, и параметром малости (неявным) в рассматриваемой задаче является амплитуда отклонения частицы $A_{x,z}$, связанная с переменной действия согласно $A_{x,z} = \sqrt{2J_{x,z}\beta_{x,z}}$. Для исследования гамильтониана (1)

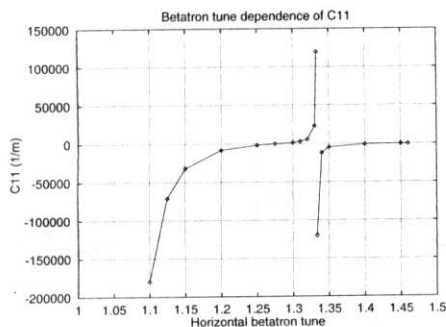


Рис. 2. Зависимость горизонтальной нелинейности от невозмущенной частоты

воспользуемся результатами работы [17], где для этого применяется теория канонических преобразований Ли. Подробное описание теории Ли, а также примеры ее использования для исследования нелинейной динамики циклических ускорителей можно найти в [18], [19], [20].

Целью применения упомянутой теории возмущений является переход каноническим образом от старых переменных (далее речь для простоты и краткости идет о горизонтальном движении, однако все сказанное легко обобщается на двумерный случай) (J_x, ϕ_x) к новым $(\bar{J}_x, \bar{\phi}_x)$, таким образом, чтобы задача, записанная в новых переменных, имела более простой вид, доступный для решения или, по крайней мере, для анализа. Теория Ли позволяет производить такой переход с помощью рекуррентных соотношений, на каждом шаге "отодвигая" неинтегрируемость во все более высокие порядки и одновременно исключая из решения секулярные (т.е. неограниченно растущие во времени) члены. Решение представляется степенным рядом по параметру малости с коэффициентами, имеющими знаменатели типа $n\nu_x - m$ (проблема малых знаменателей). В области сходимости ряда решения, т.е. когда невозмущенные бетатронные частоты далеки от резонансных значений, новый гамильтониан не зависит от циклических переменных (ϕ_x, θ) , являясь интегралом движения и позволяя записать другой интеграл движения, новую переменную действия как функцию старых канонических переменных $\bar{J}_x(J_x, \phi_x) = const$.

В первом порядке приближения возмущенная часть гамильтониана (1), будучи нечетной функцией циклических переменных, не имеет слагаемых, ведущих к секулярности: усреднение возмущения по (ϕ_x, θ) дает нуль, и, следовательно, "новый" гамильтониан $\bar{H}_1 = 0$.

Во втором порядке приближения это уже не так, и во избежание секулярности гамильтониан в новых переменных должен иметь вид

$$\bar{H}_2 = -18\bar{J}_x^2 \sum_m \left(\frac{3A_{1m}^2}{\nu_x - m} + \frac{A_{3m}^2}{3\nu_x - m} \right), \quad (10)$$

позволяя получить зависимость частоты колебаний от амплитуды согласно

$$\nu_x(\bar{J}_x) = \nu_0 + \frac{d\bar{H}_2}{d\bar{J}_x}. \quad (11)$$

Легко видеть, что эта зависимость имеет резонансный характер вблизи $\nu_x = m$ и $\nu_x = m/3$, где m - целое число (рис.2). Новая переменная действия, которая также является интегралом движения, может быть записана как функция старых канонических переменных с точностью до второго порядка в виде

$$\bar{J}_x = J_x + 3\sqrt{8}J_x^{3/2} \left[\cos\phi_x \sum_m \frac{A_{1m}}{\nu_x - m} + \cos 3\phi_x \sum_m \frac{A_{3m}}{3\nu_x - m} \right], \quad (12)$$

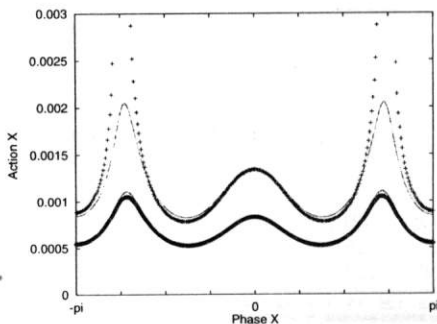


Рис. 3. Фазовые траектории: трекинг (крестики) и аналитика (линии)

где для удобства принято $\theta = 0$, а $\bar{J}_x = \text{const}$ находится из начальных условий при $\phi_x = 0$, $J_x = J_{x0}$. Численное решение (12) позволяет найти фазовые траектории системы $J_x(\phi_x)$ (рис.3); последняя устойчивая траектория и определяет размер динамической апертуры.

Для упрощения аналитической оценки отметим, что, поскольку коэффициенты (12) также содержат резонансные знаменатели, мы можем попробовать вычислить размер динамической апертуры, удерживая только основные гармоники, то есть те, для которых соответствующий знаменатель минимален. Возможность использования ограниченного числа основных гармоник для построения фазового портрета описываемой системы подробно рассматривалась в [9], и удовлетворительные результаты, полученные там, позволяют предположить правомерность такого подхода для оценки величины динамической апертуры.

Для примера рассмотрим случай, когда $\nu_x \approx 1$. Тогда (12) можно переписать в виде

$$J_x = J_x + F(\phi_x)J_x^{3/2},$$

$$F(\phi_x) = 2\sqrt{2}[3A_{11} \cos \phi_x + A_{33} \cos 3\phi_x]/\delta_{11}, \quad (13)$$

где введено обозначение для расстройки бетатронной частоты $\delta_{11} = \nu_x - 1$.

Обобщенные инварианты типа (12) неоднократно использовались ранее для исследования нелинейного движения (см., например, [21]). При этом граница области устойчивости соответствует таким начальным значениям ($x_0 = x(0)$, $x'_0 = 0$), при которых неявное уравнение (12) имеет нулевой или мнимый корень. Помня о том, что параметр малости $\varepsilon \propto J_x^{1/2}$, решать нелинейное уравнение можно методом последовательной линеаризации [22], однако мы, чтобы быстрее получить нужный ответ, воспользуемся следующим соображением. Будем искать границу области устойчивости как точку разрыва кривой $J_x(\phi_x)$: $dJ_x/d\phi_x = \infty$ и запишем полную производную (12) в виде

$$\frac{dJ_x}{d\phi_x} = \frac{\partial J_x}{\partial \phi_x} + \frac{\partial J_x}{\partial J_x} \frac{\partial J_x}{\partial \phi_x} = 0, \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial J_x}{\partial \phi_x} = -\frac{\partial J_x / \partial \phi_x}{\partial J_x / \partial J_x} = \infty, \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial J_x}{\partial J_x} = 0.$$

Применяя условие (14) к (13) и учитывая, что согласно (8) $A_{11} \approx A_{33} = A$ можно получить следующее выражение, описывающее границу динамической апертуры,

$$J_x^{1/2} = -\delta_{11}/[3\sqrt{2}A (3 \cos \phi_x + \cos 3\phi_x)]. \quad (14)$$

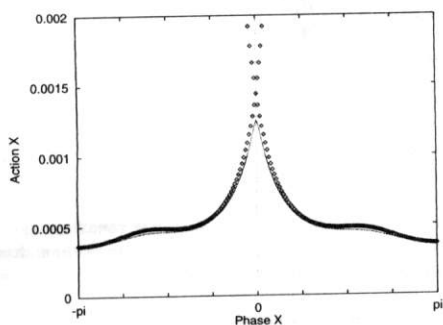


Рис. 4. Разрыв фазовой траектории и граница устойчивого движения вблизи резонанса $\nu_x = 1$

теперь мы должны найти такое значение фазовой переменной ϕ_x , при котором соответствующее граничное значение $J_x^{1/2}(\phi_x)$ минимально, а затем спроецировать его по траектории системы в точку $\phi_x = 0$, т.к. именно эта точка отвечает принятым начальным условиям ($x_0 = x(0)$, $x'_0 = 0$). В рассматриваемом случае разрыв фазовой траектории происходит при $\phi_x = 0, \pi$. Конкретная величина зависит от знака δ_{11}/A и выбирается так, чтобы $J_x^{1/2} > 0$. Например, при $\delta_{11}/A < 0$ $\phi_x = 0$. Фазовые траектории для этого случая показаны на рис.4, а размер динамической апертуры равен

$$A_x = \sqrt{2\beta_x J_x} = \frac{\delta_{11}\sqrt{\beta_x}}{12A}. \quad (15)$$

Используя нерезонансную теорию возмущений, можно найти размер динамической апертуры не только вблизи резонанса $\nu_x = 1$, но и в любой другой области бетатронных частот [17], и получаемое решение хорошо совпадает с результатами численного моделирования. Однако более важно, что результат (15) может быть получен в результате изучения соответствующего изолированного резонанса. Забегая вперед можно сказать, что это верно в случае произвольного выбора бетатронной частоты: горизонтальная динамическая апертура хорошо определяется четырьмя резонансами, описываемыми двумя первыми порядками теории возмущений: $\nu_x = m$, $4\nu_x = m$, $3\nu_x = m$ и $2\nu_x = m$.

4 Резонансная теория возмущений

4.1 Общие свойства секступольных резонансов

Свойства резонансов применительно к циклическим ускорителям достаточно хорошо изучены (см., например, [23] и литературу там). Общий вид гамильтониана, описывающего одномерный изолированный резонанс $n\nu = m$, записывается как

$$H_r = \delta I + \alpha(I) + f(I) \cos m\Phi, \quad (16)$$

где новые (резонансные) канонические переменные (I, Φ) связаны со старыми согласно $I = J$, $\Phi = \phi - \theta \cdot n/m$. Топология фазового пространства резонанса и остальные свойства резонанса определяются соотношением расстройки $\delta = \nu - n/m$, нелинейности $\alpha(I)$ и возмущения $f(I)$.

Предельная фазовая траектория резонанса (сепаратриса) делит движение на колебательное (устойчивое) и вращательное (неустойчивое). Особые неподвижные точки фазового пространства находятся из условий

$$\frac{\partial H_r}{\partial I} = 0, \quad \frac{\partial H_r}{\partial \Phi} = 0, \quad (17)$$

которые приводят к двум уравнениям

$$\begin{aligned} \sin m\Phi &= 0, \\ \delta + \alpha'(I) \pm f'(I) &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где штрих обозначает производную по I . Эллиптические неподвижные точки являются центрами, а гиперболические задают границу областей ("островков") устойчивого движения. Конкретный тип особой точки определяется с помощью изучения линеаризованного движения в непосредственной близости от особой точки.

Резонансное значение переменной действия I_r находится согласно

$$\nu_0 + \alpha'(I_r) = n/m, \quad (19)$$

а размер области резонанса по переменной действия ΔI равен (при $\Delta I \ll I_r$) [26]

$$\Delta I = \pm 2 \sqrt{\frac{f(I_r)}{\alpha''(I_r)}}. \quad (20)$$

Теперь, чтобы исследовать конкретный резонанс, нам нужно знать конкретные выражения для $\alpha(I)$ и $f(I)$. Однако, прежде чем перейти к детальному рассмотрению секступольных резонансов, сделаем несколько общих замечаний.

Некоторые параметры секступольных резонансов $n\nu_x = m$ для первых трех порядков приближения ($k = 1 \div 3$) приведены в таблице:

k	n	$\alpha(I)$	$f(I)$
1	1,3	-	$f_{kn} I^{3/2}$
2	2,4	$\alpha_2 I^2$	$f_{kn} I^2$
3	1,3,5	-	$f_{kn} I^{5/2}$

Видно, что k -тый порядок приближения добавляет новый (старший) резонанс с $n = k + 2$ к возмущению (множителем при $\cos m\Phi$) $f_{kn} I^{n/2}$. Что касается нелинейности $\alpha(I)$, то вклад в нее дают только четные порядки приближения: второй - $\alpha_2 I^2$, четвертый - $\alpha_4 I^4$ и т.д. Учитывая малость I и оставляя только главные значащие члены, гамильтониан резонанса $n\nu = m$ порядка приближения $k \geq 2$ можно записать в виде

$$H_r = \delta_{nm} I + (\alpha_2 I^2 + \dots) + f_{kn} I^{n/2} \cos m\Phi. \quad (21)$$

Согласно (19) резонансное значение переменной действия равно

$$I_r = \frac{\delta_{nm}}{2\alpha_2}, \quad (22)$$

а размер сепаратрисы резонанса по переменной действия (20)

$$\Delta I = \pm 2 \sqrt{\frac{f_{kn} I_r^{n/2}}{2\alpha_2}}. \quad (23)$$

Подставляя (22) в (23), можно записать отношение ширины сепаратрисы к резонансному действию в виде

$$\frac{\Delta I}{I_r} = c \cdot \delta_{nm}^{\frac{n}{4}-1}, \quad (24)$$

где $c = \sqrt{f_{kn}/(2\alpha_2)^{n/2}}$ - множитель, не зависящий от расстройки.

Поскольку координата неустойчивой особой точки $I_0 \approx I_r$, из (24) можно сделать важный вывод относительно влияния различных секступольных резонансов на устойчивость. Для $n > 4$, т.е. начиная с третьего порядка, при приближении к резонансу ($\delta_{nm} \rightarrow 0$) размер резонансной области уменьшается быстрее, чем I_0 (сепаратриса как бы "схлопывается"), и при выполнении точных условий $\nu = n/m$ такой резонанс не влияет на устойчивость нелинейного движения. При отдалении от резонанса положение неустойчивой точки I_0 и размер сепаратрисы увеличиваются, однако сепаратрисная траектория сверху и снизу (по переменной действия) окружена инвариантными траекториями. Устойчивость нарушается только в случае перекрытия стохастических слоев нескольких резонансов высокого порядка и разрушения инвариантных фазовых кривых. Подробнее это обсуждается ниже.

В противоположность этому для резонансов первого и второго порядка приближения ($n \leq 4$) описанное явление не имеет места. При выполнении точных резонансных условий движение является неустойчивым, что напрямую определяет границы динамической апертуры. Оценка размера динамической апертуры с помощью изучения таких резонансов (напомним, что таких резонансов в случае горизонтального движения четыре: $\nu_x = n/m$, $m = 1, 2, 3, 4$) является основным предметом этой главы. Для определенности диапазон бетатронных частот (напомним, что мы рассматриваем бетатронную частоту в пересчете на одну ячейку периодичности, т.е., фактически, набег фазы в единицах 2π) возьмем в пределах $1 \leq \nu_x \leq 1.5$.

4.2 Резонанс $\nu_x = 1$

При рассмотрении резонанса $\nu_x = m$, $m = 1$, который появляется в первом порядке возмущения, мы должны оставить в гамильтониане (1) только медленно меняющиеся члены, содержащие $\cos(\phi_x - \theta)$, усреднив остальные по "быстрой" фазе. Поскольку медленно меняющаяся часть при решении приведет к секулярности, теперь, в отличие от нерезонансного случая, "новый" гамильтониан в первом порядке равен не нулю, а самому возмущению

$$\bar{H}_1 = (2J_x)^{3/2} [3A_{11} \cos(\phi_x - \theta) + A_{33} \cos(3(\phi_x - \theta))]. \quad (25)$$

Для изучения свойств резонанса мы должны взять нелинейность $\alpha(J_x)$, определяемую согласно (11) и (10). Однако, т.к. мы исключили в первом порядке гармоники A_{11} и A_{33} , во всех выражениях в высших порядках их не будет, и нелинейность второго порядка принимает вид

$$\alpha(J_x) = \bar{H}_2 = -18J_x^2 \left[\sum_{m \neq 1} \frac{3A_{1m}^2}{\nu_x - m} + \sum_{m \neq 3} \frac{A_{3m}^2}{3\nu_x - m} \right]. \quad (26)$$

В этом случае оставшиеся в суммах слагаемые слева и справа от главных приблизительно равны по величине и противоположны по знаку, так, что в целом $\alpha(J_x) \approx 0$. Этот интересный факт связан с тем, что для рассматриваемого случая нелинейность не является внешней, а порождается самим возмущением. Таким образом, нелинейность для рассматриваемого изолированного резонанса оказывается пренебрежимо малой, и, после перехода в систему координат, связанную с резонансом $\nu_x = 1$, его гамильтониан записывается как

$$H_r = \delta_{11} I_x + (2I_x)^{3/2} (3A_{11} \cos \Phi_x + A_{33} \cos 3\Phi_x). \quad (27)$$

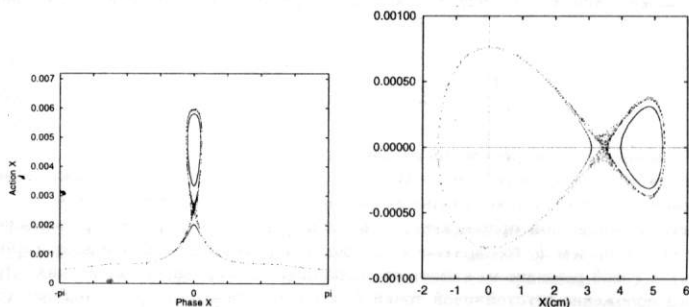


Рис. 5. Фазовые траектории вблизи резонанса $\nu_x = 1$

где расстояние от резонанса $\delta_{11} = \nu_x - 1$. Фазовые траектории резонанса (включая сепаратрису) схематически показаны на рис.5. Легко проверить, что положение неустойчивой особой точки по переменной действия согласно первому условию (17), определяющей одну из границ горизонтальной динамической апертуры (на рисунке - положительную), в точности совпадает с выражением (14), полученным ранее с помощью нерезонансной теории возмущений (при тех же предположениях относительно величин гармоник возмущения, т.е. $A_{11} \approx A_{33} = A$)

$$I_x^{1/2} = -\delta_{11}/[3\sqrt{2}A (3 \cos \Phi_x + \cos 3\Phi_x)]. \quad (28)$$

Положение по фазе, найденное согласно второму условию (17), также совпадает с полученным ранее $\Phi_x = 0, \pi$ в зависимости от знака δ_{11}/A . Таким образом, одна из границ горизонтальной динамической апертуры равна (при $\Phi_x = 0$)

$$A_{x1} = \sqrt{2\beta_x I_x} = \frac{\delta_{11}\sqrt{\beta_x}}{12A}. \quad (29)$$

Вторая точка, противоположная по знаку, может быть найдена из условия инвариантности гамильтониана H_r : $H_r(I_{x1}, \Phi_x = 0) = H_r(I_{x2}, \Phi_x = \pi)$. Решение получающегося кубического уравнения приводит к значению $A_{x2} = A_{x1}/2$. Т.е. горизонтальная динамическая апертура, определяемая резонансом $\nu_x = 1$, линейно зависит от расстояния до резонанса (если не учитывать зависимость величины гармоники A), и, т.к. в рассматриваемом приближении $A > 0$ (см. оценку (8)), слева от резонанса ее положительное значение в два раза больше отрицательного, а справа - наоборот. Аналогичные результаты были получены в [6].

Наиболее просто полученные выражения будут выглядеть для источника (СИ в центре ахроматического поворота, где оценка (8) приводит к $(\delta_{11}/A > 0)$

$$A_{x1} = -\frac{\delta_{11}\eta_0}{|\xi_x|}, \quad A_{x2} = \frac{A_{x1}}{2}, \quad (30)$$

где η_0 - значение дисперсионной функции в центре ахромата, а горизонтальный хроматизм в пересчете на одну ячейку периодичности ξ_x берется по модулю.

На рис.6 показана зависимость горизонтальной динамической апертуры от невозмущенной бетатронной частоты. Видно, что для резонанса $\nu_x = 1$ согласие между результатами трекинга и аналитической оценкой хорошее вплоть до $\nu_x \approx 1.17$. Отличие зависимости от прямой объясняется тем, что величина гармоники возмущения и бета-функций зависит (хотя и достаточно слабо, как видно из графика) от невозмущенной частоты $\nu_x(0)$.

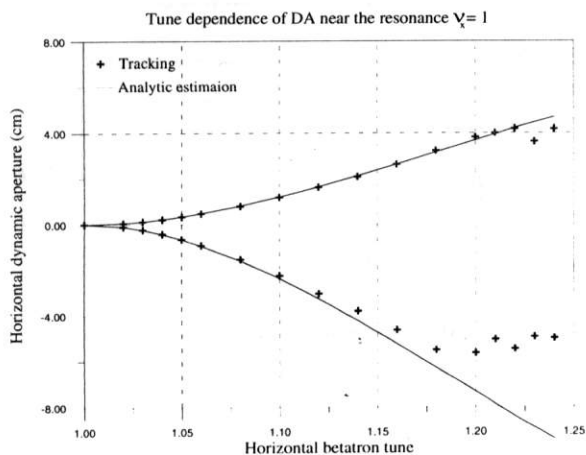


Рис. 6. Зависимость горизонтальной динамической апертуры от положения рабочей точки вблизи резонанса $\nu_x = 1$. Крестики - трекинг, линии - аналитическая оценка

Отличие аналитической оценки от трекинга в районе $\nu_x \sim 1.2$ вызвано резонансами высших порядков и объясняется ниже.

При $\nu_x \geq 1.25$ выражения для рассмотренного резонанса вообще перестают описывать поведение динамической апертуры, т.к. начиная с этого значения границы области устойчивости определяются резонансом $4\nu_x = 5$, который появляется во втором порядке приближения. Однако, прежде чем перейти к исследованию этого резонанса, рассмотрим резонанс $3\nu_x = 4$, который во многом аналогичен описанному выше резонансу $\nu_x = 1$.

4.3 Резонанс $3\nu_x = 4$

Следуя результатам предыдущего раздела, мы можем сразу же записать резонансный гамильтониан. Отличие заключается лишь в том, что вместо двух медленно меняющихся гармоник предыдущего случая (A_{11} и A_{33}) теперь останется только одна A_{34} . Усредняя быстро осциллирующие члены в (1) и оставляя единственное слагаемое, содержащее $\cos(3\phi_x - 4\theta)$, получим гамильтониан изолированного резонанса $3\nu_x = 4$

$$H_r = \delta_{34} I_x + (2I_x)^{3/2} A_{34} \cos 3\Phi_x, \quad (31)$$

где $\delta_{34} = \nu_x - 4/3$ - расстояние от резонанса. Инвариантные кривые этого резонанса показаны на рис.7. Так же, как в предыдущем случае, нелинейность (т.е. зависимость частоты колебаний от амплитуды) при переходе к резонансным переменным оказывается мала: вблизи рассматриваемого резонанса основной вклад в нелинейность, определяемую (11) и (10), дает член

$$\alpha_{34} = -18 I_x^2 \frac{A_{34}^2}{3\nu_x - 4}, \quad (32)$$

исчезающий при ликвидации секулярности в первом порядке решения.

Далее процедура поиска границы устойчивости аналогична предыдущему случаю, и результаты различаются только численным коэффициентом. Координаты неустойчивой особой точки на плоскости (I_x, Φ_x) для случая $\delta_{34}/A_{34} > 0$

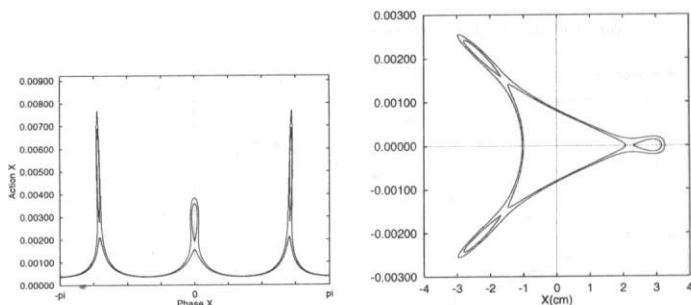


Рис. 7. Фазовые траектории вблизи резонанса $3\nu_x = 4$

$$\begin{aligned} \Phi_x &= \pi/3, 2\pi/3, \pi; \\ I_{x1}^{1/2} &= -\delta_{34}/(3\sqrt{2}A_{34}). \end{aligned} \quad (3)$$

Одна из границ области устойчивости $A_{x1} = \sqrt{2\beta_x I_{x1}}$, а вторая, находящаяся, как и ранее, интеграла движения H_r решением кубического уравнения, равна $A_{x2} = A_{x1}/2$.

Применяя оценку на величину гармоники A_{34} , горизонтальную апертуру в центре ахроматического поворота источника СИ запишем как

$$A_{x1} = -4 \frac{\delta_{34}\eta_0}{|\xi_x|}, \quad A_{x2} = \frac{A_{x1}}{2}, \quad (3)$$

где используются те же обозначения, что и в предыдущем разделе.

На рис.8 показан расчет динамической апертуры вблизи $\nu_x = 4/3$ по (33) в сравнении с результатами численного моделирования. Слева область применения полученных выражений ограничивается резонансом $4\nu_x = 5$, а справа - $2\nu_x = 3$.

4.4 Резонанс $4\nu_x = 5$

Резонанс $4\nu_x = l$ появляется во втором порядке решения. Его фазовые траектории приведены на рис.9. Поскольку в области частот вблизи этого резонанса секулярность в первом порядке приближения не возникает, резонансный гамильтониан имеет полный вид (16), включая и общее выражение для нелинейности

$$\begin{aligned} H_r &= \delta_{4l} I_x + \alpha(I_x) + f_4(I_x) \cos 4\Phi, \\ \alpha(I_x) &= -18I_x^2 \sum_m \left(\frac{3A_{2m}^2}{\nu_x - m} + \frac{A_{3m-m}^2}{3\nu_x - m} \right), \\ f(I_x) &= 18I_x^2 \sum_m \frac{A_{1m}A_{3l-m}}{(\nu_x - m)(3\nu_x - l + m)} (2\nu_x + 2m - l), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\delta_{4l} = \nu_x - l/4$. Принимая для нашего случая $l = 5$ и оставляя главные гармоники $A_{11} \approx A_{34} \approx$ выражения (35) можно упростить:

$$\begin{aligned} \alpha(I_x) &= -18A^2 I_x^2 \frac{10\delta_{45} - 1/2}{(\delta_{45} + 1/4)(3\delta_{45} - 1/4)}, \\ f(I_x) &= 18A^2 I_x^2 \frac{2\delta_{45} - 1/2}{(\delta_{45} + 1/4)(3\delta_{45} - 1/4)}. \end{aligned} \quad (3)$$

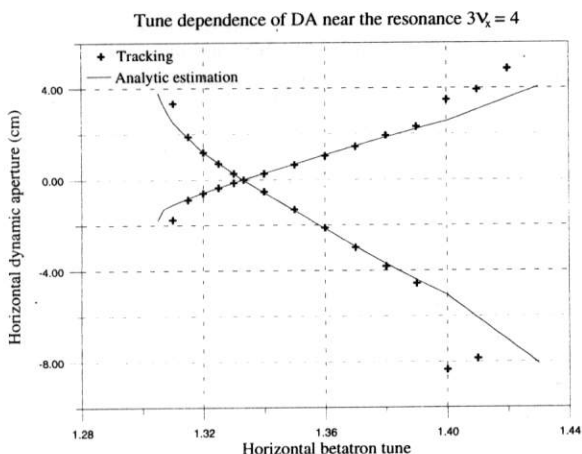


Рис. 8. Зависимость горизонтальной динамической апертуры от положения рабочей точки вблизи резонанса $3\nu_x = 4$. Крестики - трекинг, линии - аналитическая оценка

Изучение гамильтониана (35) показывает, что область действия резонанса $5/4 \leq \nu_x \leq 4/3$. Вне этой области все траектории рассматриваемого резонанса устойчивы, и границы динамической апертуры определяются другими резонансами ($\nu_x = 1$ и $3\nu_x = 4$). Если записать возмущение и нелинейность из (36) в виде $\alpha(I_x) = \alpha_2 I_x^2$, $f(I_x) = f_4 I_x^2$, то положение неустойчивой точки поворота по действию I_0 согласно (17) и граница устойчивой области I_1 находятся как

$$I_0 = \frac{\delta}{2(f_4 - \alpha_2)}, \quad I_1 = \frac{\delta}{2(f_4 + \alpha_2)} \left(\sqrt{\frac{2f_4}{f_4 - \alpha_2}} - 1 \right). \quad (37)$$

Заметим, что из-за симметрии потенциала возмущения для рассматриваемого резонанса величины области устойчивости слева и справа от нуля равны и после подстановки (36) в (37) запишутся в виде

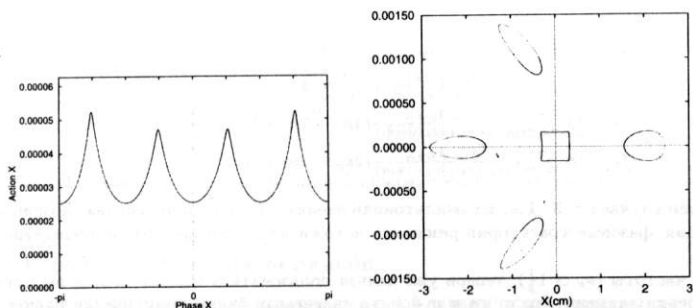


Рис. 9. Фазовые траектории вблизи резонанса $4\nu_x = 5$

$$A_x = \pm \frac{1}{12} \frac{\sqrt{\beta_x}}{A} F(\nu_x), \quad (38)$$

$$F(\nu_x) = [(\delta_{45} + 1/4)(3\delta_{45} - 1/4)(\sqrt{\frac{4\delta_{45}-1}{12\delta_{45}-1}} - 1)]^{1/2}.$$

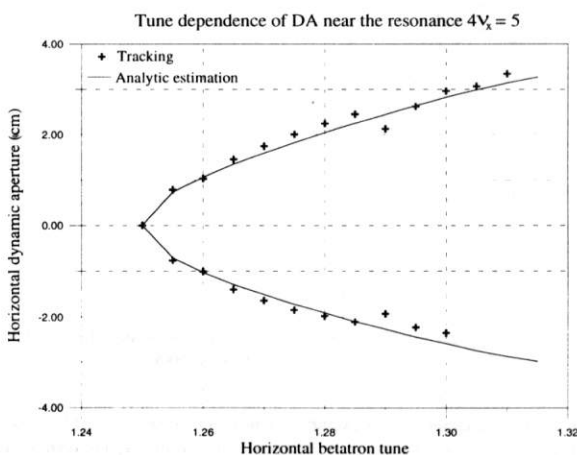


Рис. 10. Зависимость горизонтальной динамической апертуры от ν_x вблизи резонанса $4\nu_x = 5$. Крестики - трекинг, линии - аналитическая оценка

На рис.10 показана граница динамической апертуры вблизи резонанса $4\nu_x = 5$, рассчитанная согласно аналитической оценке, в сравнении с результатами численного моделирования.

4.5 Резонанс $2\nu_x = 3$

Второй порядок приближения позволяет получить выражение для гамильтониана резонанса $2\nu_x = l$. В отличие от предыдущего случая и аналогично резонансу $\nu_x = 1$ здесь снова нужно учитывать слагаемые с $\cos(2\nu_x - l\theta)$ и $\cos(4\nu_x - l\theta)$, оба из которых удовлетворяют резонансным условиям:

$$H_r = \delta_{2l} I_x + I_x^2 (\alpha_2 + f_2 \cos 2\Phi + f_4 \cos 4\Phi), \quad (39)$$

$$\alpha_2 = -18 \sum_m \left(\frac{3A_{1m}^2}{\nu_x - m} + \frac{A_{3m}^2}{3\nu_x - m} \right),$$

$$f_2 = 36 \sum_m \left(\frac{A_{1m} A_{3l+m}}{(\nu_x - m)(3\nu_x - l - m)} (4\nu_x - 2m + l) \right),$$

$$f_4 = 18 \sum_m \left(\frac{A_{1m} A_{3l+m}}{(\nu_x - m)(3\nu_x - l + m)} (2\nu_x - 2m + l) \right),$$

где $\delta = \nu_x - l/2$, в нашем случае $l = 3$. Т.к. в гамильтониан входят и вторая, и четвертая гармоники потенциала возмущения, фазовые траектории резонанса похожи на рассмотренные в предыдущем разделе.

Ввиду симметрии частоты ($\nu_x \approx 1\frac{1}{2}$), теперь уже нельзя пользоваться малым числом выделенных гармоник: в решении знаменатели n -го и $n+1$ -го слагаемых будут практически равны, и далее нужно работать с общим видом резонансного гамильтониана (40).

Рассматриваемый резонанс ограничивает движение при условии $|\alpha_2| < \max|f_2 \cos 2\Phi + f_4 \cos 4\Phi|$, иначе все его фазовые траектории оказываются устойчивыми. Исследование резонанса (40) с помощью условий (17) позволяет записать координаты неустойчивой точки поворота с помощью:

$$\cos 2\Phi_0 = -\frac{f_2}{4f_4}, \quad I_0 = -\delta_{23}/2(8\alpha_2 f_4 - 8f_4^2 - f_2^2). \quad (40)$$

Соответственно, величина переменной действия, соответствующая границе области устойчивости, равна

$$I_1 = \pm \frac{\delta_{23}}{2(f_2 + \alpha_2 + f_4)} \left(\frac{f_2 + 4f_4}{\sqrt{f_2^2 - 8f_4\alpha_2 + 8f_4^2}} \right). \quad (41)$$

Используя последнее выражение, несложно получить границу динамической апертуры A_x . Как и в предыдущем случае, она симметрична относительно начала координат.

Рис.11 показывает сводную картину горизонтальной динамической апертуры в диапазоне $\nu_x = \pm 1.5$ (в т.ч. вблизи резонанса $2\nu_x = 3$), полученную численным моделированием и аналитически.

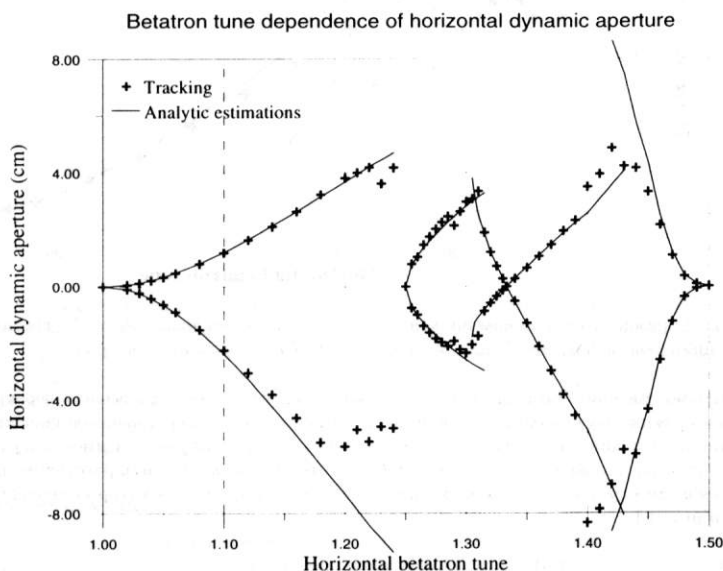


Рис. 11. Зависимость горизонтальной динамической апертуры от бетатронной частоты

4.6 Резонансы высших порядков

Результаты аналитической оценки горизонтальной динамической апертуры, приведенные на рис.11, показывают, что последняя может быть рассчитана исходя из приближения изолированного резонанса в широкой области бетатронных частот, если последовательно учитываются секступольные резонансы первого и второго порядков приближения $\nu_x = 1$, $4\nu_x = 5$, $3\nu_x = 2$ и $2\nu_x = 3$. При этом

сравнение с численным моделированием демонстрирует хорошее согласие практически во всей рассмотренной частотной области за исключением небольшого участка в районе $\nu_x \approx 1.18 \div 1.25$, где для отрицательной (большей) границы усматривается расхождение. Причина этого становится понятной из рис.12, где приведена зависимость резонансной переменной действия I_r от невозмущенной частоты ν_0 для резонансов 5, 6, 7 и 8 порядков: там, где эти резонансы подходят близко к границе устойчивости, определяемой резонансом $\nu_x = 1$ и перекрываются, образуется широкий слой стохастического движения, уменьшающий исходную область стабильного движения.

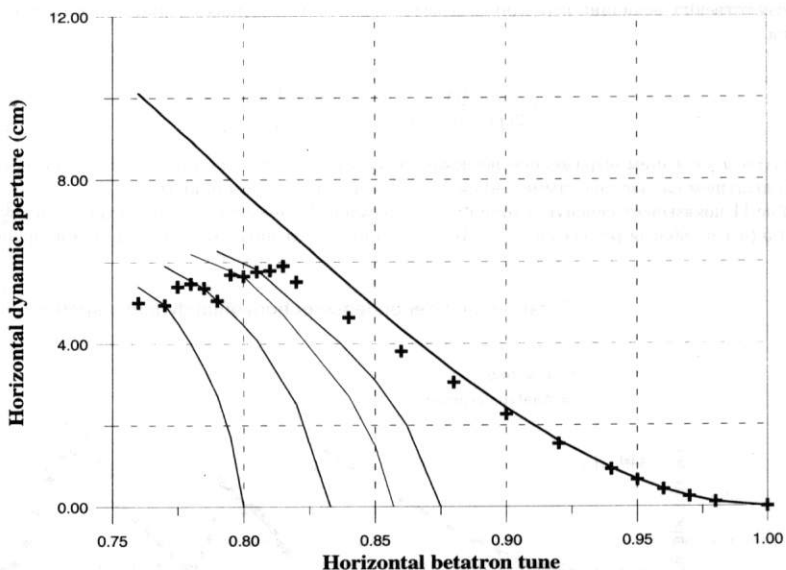


Рис. 12. Горизонтальная динамическая апертура вблизи резонанса $\nu_x = 1$ (трекинг и расчет). Также приведено положение I_r для резонансов 5, 6, 7 и 8 порядков (трекинг).

Согласно критерию Чирикова [24], стохастическая неустойчивость связана с перекрытием (касанием) сепаратрис двух соседних резонансов. В соответствии с (22) резонансное значение переменной действия растет линейно (если не принимать во внимание слабую зависимость α_2 от частоты) с увеличением расстройки δ_{nm} . Выражение (22) позволяет легко оценить расстояние по переменной действия δI между центрами соседних резонансов n/m и n'/m' , для которых выполняется условие $nm' - n'm = \pm 1$:

$$\delta I \approx \frac{1}{2m'm\alpha_2}.$$

Поскольку $I \propto x^2$, в пространстве координат расстояние по x между соседними резонансами уменьшается с ростом резонансного значения x_r (или с увеличением расстройки) как $\delta x \propto 1/x_r$, что мы и видим на рис.12: на больших амплитудах (т.е. вблизи границы устойчивости) относительно расстояние между центральными точками резонансов уменьшается. С другой стороны, согласно (23) по мере увеличения I_r (расстройки δ_{nm}) ширина сепаратрисы по действию увеличивается. Условие перекрытия записывается как

$$\Delta I_1 + \Delta I_2 \simeq \delta I_{12}, \quad (42)$$

где $\Delta I_{1,2}$ - размер сепаратрисы каждого из резонансов, а δI_{12} - расстояние между ними. К сожалению, чтобы использовать критерий перекрытия, нам необходимо знать силу f_n резонансов высоких порядков, что очень трудно из-за роста сложности соответствующих выражений по мере увеличения порядка приближения. Поэтому мы найдем эти значения, пользуясь результатами численного моделирования для резонансов $5\nu_x = 4$ и $6\nu_x = 5$. Рис.13 показывает конфигурацию фазового пространства для резонанса $5\nu_x = 4$ при разной величине расстройки $\delta_{nm} = -0.005 \div -0.03$. Из рисунка видно согласие с ранее полученными выражениями (22) и (23). При уменьшении расстройки уменьшаются как резонансное значение переменной действия I_r , так и ширина сепаратрисы резонанса ΔI . Причем последняя уменьшается

быстрее, так, что при точном резонансе $\delta_{nm} = 0$ ширина сепаратрисы также равна нулю, и резонанс как бы исчезает, не оказывая влияния на движение частицы. По мере увеличения расстройки δ_{nm} растут величина резонансного значения переменной действия и ширина сепаратрисы, однако, будучи окруженным инвариантными регулярными траекториями, резонанс не нарушает устойчивости движения, пока при достаточно большой амплитуде его сепаратриса не касается соседнего резонанса $6\nu_x = 5$, чьи траектории в этот момент оказываются практически полностью разрушенными и не могут быть показаны на рисунке.

Для проведения оценки перекрытия резонансов мы нашли с помощью трекинга значения возмущения и нелинейности для рабочей точки $\nu_x = 0.77$

$$\begin{aligned} \alpha'' &= 2\alpha_2 = 4 \text{ см}^{-1}; \\ f_5 &= 0.5 \text{ см}^{-3/2}; \\ f_6 &= 0.8 \text{ см}^{-5/2} \end{aligned}$$

и получили следующие величины, необходимые для критерия Чирикова ,

$$\begin{aligned} \Delta I_1 &= 1.7 \times 10^{-3} \text{ см} \quad (5\nu_x = 4); \\ \Delta I_2 &= 2.1 \times 10^{-3} \text{ см} \quad (6\nu_x = 5); \\ \delta_{12} &= 6 \times 10^{-3} \text{ см}. \end{aligned}$$

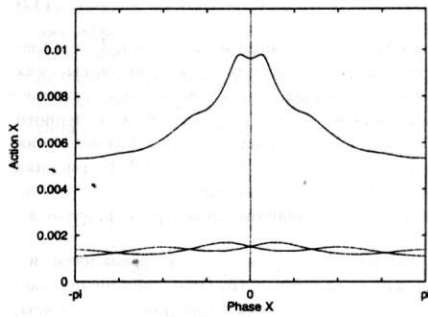
Видно, что расстояния между резонансами, которые согласно численному моделированию можно считать перекрывшимися, приблизительно в 1.5 раза больше полусуммы величин их сепаратрис. Однако, т.к. критерий, записанный в такой форме, достаточно грубый, совпадение можно считать удовлетворительным. Для уточнения критерия нужно учитывать, кроме ширины сепаратрисы невозмущенных резонансов, размер стохастических слоев, возникновение дополнительных (вторичных) резонансов на границе двух основных, искажение инвариантных кривых более мощным резонансом (в нашем случае $\nu_x = 1$) и т.д. [25].

4.7 Двумерная динамическая апертюра

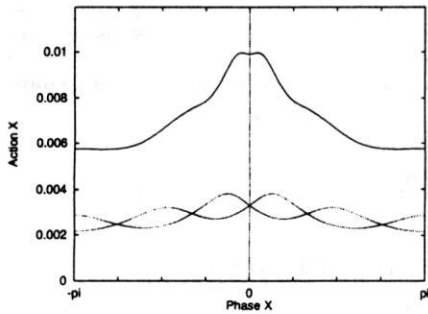
Поскольку расчет двумерной динамической апертюры в общем случае достаточно трудоемок, мы ограничимся примером целого секступольного резонанса $\nu_x = m$. Как и ранее, для определенности положим $m = 1$, оставим в исходном гамильтониане (1) медленно меняющиеся слагаемые и перейдем обычным образом к резонансным переменным (I_x, Φ_x)

$$H_r = \delta_{11} I_x + \nu_x J_z + (2I_x)^{3/2} [3A_{11} \cos(\Phi_x) + A_{33} \cos(3\Phi_x)] - 12(2J_x)^{1/2} J_z B_{11} \cos(\Phi_x). \quad (43)$$

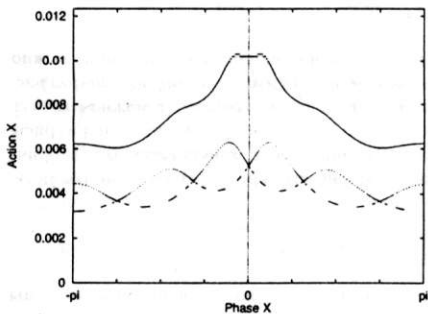
Т.к. H_r не зависит от циклической переменной ϕ_x , переменная J_z является интегралом движения. Однако теперь вид фазовых траекторий и координаты особых точек для горизонтального движения зависят от амплитуды вертикального движения: динамическая апертюра становится двумерной.



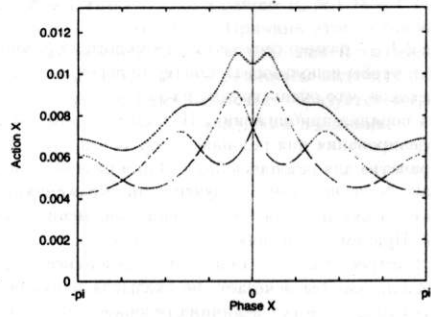
$\nu_x = 1.205$



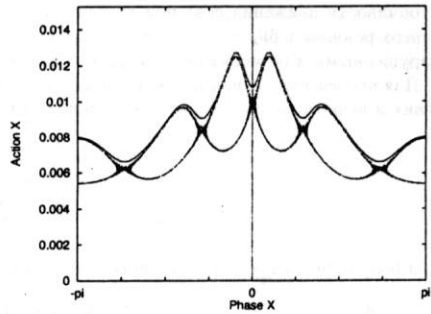
$\nu_x = 1.210$



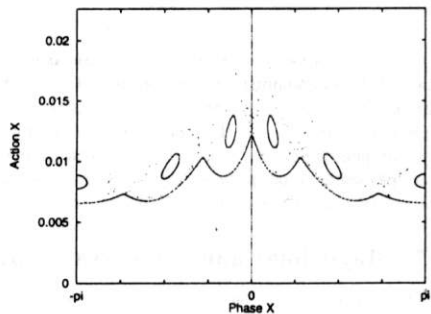
$\nu_x = 1.215$



$\nu_x = 1.220$



$\nu_x = 1.225$



$\nu_x = 1.230$

Рис. 13. Фазовое пространство вблизи резонанса $5\nu_x = 4$ для разных бетатронных частот

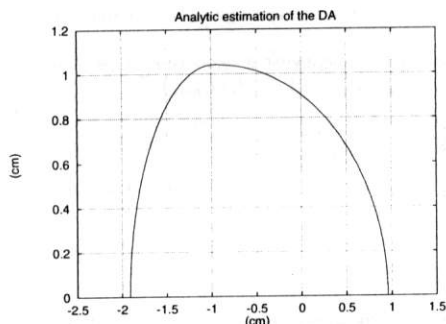


Рис. 14. Расчетная двумерная динамическая апертура

Расчет ее несложен, хотя увеличение числа параметров системы приводит к увеличению числа вариантов положения особых точек на фазовой плоскости. Вводя разумные ограничения, следующие из (8)

$$\begin{aligned} A_{11} &\approx A_{33} = A, \\ B_{11} &= B, \quad A \cdot B < 0, \end{aligned} \quad (44)$$

можно существенно уменьшить количество вариантов и получить, что ограничение апертуры определяется неустойчивой особой точкой с координатой по переменной действия

$$\begin{aligned} I_{r1}^{1/2} &= -\frac{1}{24\sqrt{2}} \frac{\delta_{11}}{A} G(J_z), \\ G(J_z) &= (1 + 576ABJ_z/\delta_{11}^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (45)$$

т.е. видно, что увеличение амплитуды вертикального движения приводит к уменьшению горизонтальной апертуры. "Обратная" точка I_{r2} , ограничивающая движение, определяется сепаратрисой резонанса и находится, как и ранее, из условия $H_r(I_{r1}) = H_r(I_{r2})$. Решение получающегося кубического уравнения дает значение

$$I_{r2}^{1/2} = -2I_{r1}^{1/2} - \frac{1}{8\sqrt{2}} \frac{\delta_{11}}{A}. \quad (46)$$

Аналогичные результаты с использованием гамильтониана в переменных (x, p_x) были получены [6].

Двумерная динамическая апертура, рассчитанная согласно (45) и (46), показана на рис.14. Характерные ее точки получаются из следующих соображений.

Максимальное отрицательное значение $(I_{r1}^{1/2})_{max} = -\frac{1}{12\sqrt{2}} \frac{\delta_{11}}{A}$ получается при $J_z = 0$ в (45) и, естественно, равно выражению (29), полученному в одномерном случае. Максимальное значение "обратной" (положительной) точки при $J_z = 0$ получается из (46) и также соответствует одномерному случаю: $(I_{r2}^{1/2})_{max} = -\frac{1}{2}(I_{r1}^{1/2})_{max}$.

Величина вертикальной динамической апертуры при $I_x = 0$ получается из выражения (46) (заметим, что (45) не может быть равным нулю): $(J_z^{1/2})_0 = \frac{\sqrt{3}}{48} \frac{\delta_{11}}{\sqrt{|AB|}}$. Максимальная вертикальная апертура соответствует случаю, когда $|I_{x1}| = |I_{x2}|$ и определяется как $(J_z^{1/2})_{max} = \frac{1}{24} \frac{\delta_{11}}{\sqrt{|AB|}}$. Максимальной вертикальной апертуре соответствует горизонтальная координата $I_x^{1/2} = 1/2(I_x^{1/2})_{max}$.

Отношение максимальной вертикальной апертуры к апертуре при $I_x = 0$ равно соответственно $A_{zmax}/A_{z0} = 2/\sqrt{3}$.

Уравнения, описывающие поведение двумерной апертуры в окрестности резонанса $\nu_x = 1$, целом удобно записать в координатах $U = (I_x/I_{xmax})^{1/2}$ и $V = (I_z/I_{zmax})^{1/2}$:

$$V^2 = \begin{cases} (2U - 1)^2 - 1 & x = x_{1max} \div x_{1max}/2, \\ (U + 1)^2 - 1 & x = x_{1max}/2 \div x_{2max}. \end{cases}$$

Используя оценку (8), можно получить следующее отношение максимальных вертикальной и горизонтальной апертур в виде

$$(I_{zmax}/I_{xmax})^{1/2} \simeq \frac{3}{4}(\xi_x/\xi_z)^{1/2}, \quad (47)$$

т.е. видно, что для получения большой вертикальной апертуры уменьшение вертикального хроматизма весьма желательно.

5 Некоторые аспекты увеличения динамической апертуры

Несмотря на то, что динамическая апертура ускорителя, где определяющими нелинейностями являются секступольные линзы, может быть вычислена аналитически, выработка общих и абсолютных рекомендаций по увеличению динамической апертуры достаточно затруднительна. Анализ обобщенного резонансного гамильтониана показывает, что "управление" нелинейными явлениями возможно при помощи подбора трех параметров системы: бетатронной частоты, величины зависимости частоты колебаний от амплитуды (собственно, нелинейности) и возмущающей силы.

Что касается выбора бетатронной частоты для получения большой динамической апертуры, то тривиальный вывод, это держаться достаточно далеко от основных резонансов, рассмотренных выше. Более того, рис.12 показывает, что горизонтальная апертура максимальна на границе раздел двух соседних резонансов: $\nu_x \sim 1.2, 1.3, 1.4$. Особенно это касается области $\nu_x \simeq 1.40 \div 1.43$ между резонансами $3\nu_x = 4$ и $2\nu_x = 3$.

Регулировка величины возмущающей силы связана с расстановкой секступольных линз. Раскрытие динамической апертуры при помощи секступольных линз традиционно связывается с подавлением следующих нелинейных эффектов [8]: искажения переменной действия во втором порядке при помощи "функционального возмущения" (см.(12) для горизонтального движения), смещения бетатронной частоты от амплитуды, возмущающей силы основных нелинейных резонансов или комбинаций каких-либо из перечисленных методов. Однако зачастую для подавления всех перечисленных эффектов достаточно решить более простую задачу, сводящуюся к ликвидации соответствующих гармоник потенциала возмущения. Вопрос о влиянии отброшенных гармоник рассмотрим, исходя из следующих соображений. Заметим, что в решения, получающиеся методами теории возмущений (выражения для производящей функции, поправки к обобщенному инварианту действия (12) гамильтониана в новых переменных (10) или зависимости частоты колебаний от амплитуды), гармоника входят в виде сумм [30]

$$S = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{K_m}{k_x \nu_x + k_z \nu_z - m}, \quad (48)$$

где K_m зависит от исходных азимутальных гармоник потенциала возмущения. Рассмотрим арифметические свойства этой суммы. Для этого введем величину резонансной расстройки $\delta = k_x \nu_x - k_z \nu_z - m_{k_x, k_z}$, выделим основное слагаемое и перейдем к суммированию от 1 до $+\infty$:

$$S = \frac{K_0}{\delta} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{K_{m_0-m}}{1+\delta/m} - \frac{K_{m_0+m}}{1-\delta/m} \right), \quad (49)$$

где K_0 и $m_0 = m_{k_x, k_z}$ - амплитуда и номер главного слагаемого суммы. Учитывая малость δ/m (49) можно представить в виде

$$S \approx \frac{K_0}{\delta} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} ((K_{m_0+m} - K_{m_0-m}) \sum_{n=0}^{\infty} (\delta/m)^{2n} + (K_{m_0+m} + K_{m_0-m}) \sum_{n=0}^{\infty} (\delta/m)^{2n+1}). \quad (50)$$

Так как исходный спектр K_m достаточно симметричен относительно основной гармоники, для оценки мы можем принять $K_{m_0+m} - K_{m_0-m} \approx 0$ и $K_{m_0+m} + K_{m_0-m} \sim 2K_0$, и, положив $K_0 = 1$ (нам интересен относительный вклад в сумму отброшенных гармоник), запишем

$$S \sim \frac{1}{\delta} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{m} \left(\frac{\delta}{m} + \frac{\delta^3}{m^3} + \frac{\delta^5}{m^5} + \dots \right). \quad (51)$$

Вводя дзета-функцию Римана $\zeta(m)$ [31], окончательно получим

$$S \sim \frac{1}{\delta} - 2\delta (\zeta(2) + \delta^2 \zeta(4) + \delta^4 \zeta(6) + \dots). \quad (52)$$

Напомним, что $\zeta(2) = \pi^2/6 \approx 1.645$, $\zeta(4) = \pi^4/90 \approx 1.082$, $\zeta(6) = \pi^6/945 \approx 1.017$. В полученном выражении первое слагаемое определяет вклад в сумму (48) основной гармоники, а следующие - поправку, вносимую отброшенными. Отношение этой поправки к основной гармонике в первом порядке по δ

$$\Delta S/S \sim -2\delta^2 \zeta(2) \approx -3.3\delta^2. \quad (53)$$

Учитывая для горизонтального движения два основных резонанса первого порядка приближения $\nu_x = 1$ и $3\nu_x = 4$, из оценки (53) можно легко получить, что в диапазоне $\nu_x = 1 \div 1\frac{1}{3}$, ошибка за счет отброшенных гармоник не превышает 10%. Наихудшая ситуация складывается вблизи $\nu_x = 1.5$, где ошибка максимальна ($\sim 90\%$). Именно поэтому, как было указано ранее, в этой области бетатронных частот приходится пользоваться суммами гармоник. Однако ошибка квадратична по δ и быстро уменьшается при отдалении от $\nu_x = 1.5$.

Сложность увеличения динамической апертуры при помощи расстановки секступольных линз заключается в том, что приходится одновременно контролировать несколько гармоник, отвечающих за горизонтальное и вертикальное движения. Например, при $\nu_x \approx 1$, где n -целое, горизонтальная апертура определяется гармониками A_{11} и A_{33} , а вертикальная - гармоникой B_{11} (см. предыдущий раздел). Вблизи резонанса связи апертура по z в сильной степени зависит от коэффициента $B_{\pm m}$, а по x определяется соответствующей горизонтальной гармоникой. При этом важно, уменьшая одну из гармоник, по крайней мере не увеличить (а лучше, уменьшить) другие. Между тем, это возможно не всегда.

Рассмотрим функции, определяющие фазовую зависимость амплитуд гармоник (2) ($j = 1, 3$),

$$\begin{aligned} C_{jm} &= \cos(j(\psi_x - \nu_x \theta) + m\theta)]_k, \\ C_{\pm m} &= \cos(\psi_{\pm} - \nu_{\pm} \theta + m\theta)]_k, \end{aligned} \quad (54)$$

где использованы обозначения, введенные ранее, а m определяется ближайшим резонансом. По смыслу (54) похожи на введенные в [13] "функции возмущения" (только без множителей, зависящих от β_x, β_z) и являются структурными функциями в том смысле, что зависят только от магнитной структуры кольца. Важность этих функций для нелинейной динамики циклических ускорителей неоднократно указывалась в литературе (см. [27, 28]). Например, секступольные линзы, поставленные там, где C -функция равна нулю, не дают вклада в соответствующую резонансную гармонику. В настоящее время существуют компьютерные программы, оптимизирующие расстановку секступольных линз с учетом компенсации хроматизма и минимизации основных резонансов [29].

Прежде всего, отметим, что если набег бетатронной фазы между секступольями мал (как это предполагалось ранее при оценке величин основных гармоник), т.е. $C_{jm} \approx C_{\pm m} \approx 1$, то динамическая апертура в соответствии с (8) не зависит (или зависит слабо) от сил и расстановки секступольных линз. Подобная ситуация часто встречается в современных источниках СИ, где секступольные

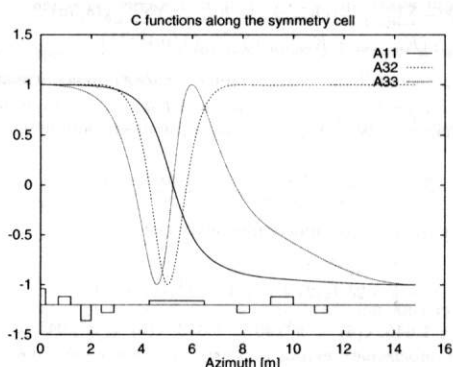


Рис. 15. Функции C_{11} , C_{32} , C_{33}

линзы, компенсирующие хроматизм, ставятся внутри компактного ахроматического поворота. В данном случае оптимизация динамической апертуры в присутствии только хроматических секступолей сводится к поиску структур с малым хроматизмом ξ_x, ξ_z и большой величиной функции $H(s)$ в ахроматическом повороте. Для горизонтального движения это требование входит в противоречие с условием минимизации эмиттанса (минимизация среднего по поворотным магнитам значения функции $H(s)$), которое приводит к жестким структурам с большим ξ_x . Для вертикального же движения более "слабая" оптика и, следовательно, умеренное значение ξ_z вполне возможны.

Возможность оптимизации основных гармоник рассмотрим на примере разработки ячейки периодичности магнитной структуры с большой динамической апертурой. Ячейка обладает зеркальной симметрией и содержит в начале и в центре прямолинейные промежутки, где могут размещаться секступольные линзы и где $\beta_x(s)$, $\beta_z(s)$ и $\eta(s)$ могут принимать произвольные значения. Т.к. горизонтальная апертура определяется гармониками A_{1m} и A_{3m} , то прежде всего нужно создать условия, когда уменьшение гармоники A_{1m} не приводит к увеличению A_{3m} , и наоборот. В случае зеркальной симметрии выражение $\psi(s) - \nu\theta$, стоящее в аргументе косинуса (54), равно нулю в начале и середине ячейки. Соответственно, косинусная часть в выражениях (2) превращается в $\cos(m \cdot \theta)$, где m определяется резонансными условиями ($\nu_x = m_1$ и $3\nu_x = m_3$ соответственно). Напомним, что под $\nu_{x,z}$ мы везде, где не оговаривается специально, подразумеваем набег бетатронной фазы на ячейку периодичности, деленный на 2π .

Если четность m_1 и m_3 одинакова, C_{1m_1} и C_{3m_3} находятся в фазе в начале и в середине ячейки периодичности, и секступольные линзы, поставленные в этих местах, уменьшают обе гармоники одновременно. В противном случае уменьшение одной из них будет связано с увеличением другой (рис.15).

Запишем бетатронную частоту в виде целой и дробной частей $\nu_x = m_x + \{\nu_x\}$, где дробная часть $|\{\nu_x\}| < 0.5$. Для определенности примем $m_x = m_1 = 1$. Тогда $3\nu_x = m_3 + 3\{\nu_x\} = 3 + 3\{\nu_x\}$, и условие сфазированности двух гармоник в центре ячейки приводит к $3|\{\nu_x\}| < 0.5$ или $|\{\nu_x\}| < 0.167$. Аналогично для резонансов связи легко получить условие на целую часть набега фазы по вертикали в виде $|\{\nu_z\}| < 0.241$. Выполнение обоих условий одновременно приводит к сфазированности всех пяти типов гармоник. Однако зачастую достаточно более слабых требований для увеличения двумерной динамической апертуры. Если частота горизонтальных бетатронных колебаний близка к целому резонансу, то вертикальная апертура определяется гармоникой B_{1m} , для которой фазовый множитель совпадает с A_{1m} , и условие $|\{\nu_x\}| < 0.167$ позволяет минимизировать все три значащих гармоники A_1 , A_3 и B_1 независимо от выбора вертикальной частоты. При этом требуется две пары секступольных линз (в начале и в середине ячейки) согласно четырем уравнениям на компенсацию хроматизма и гармоник:

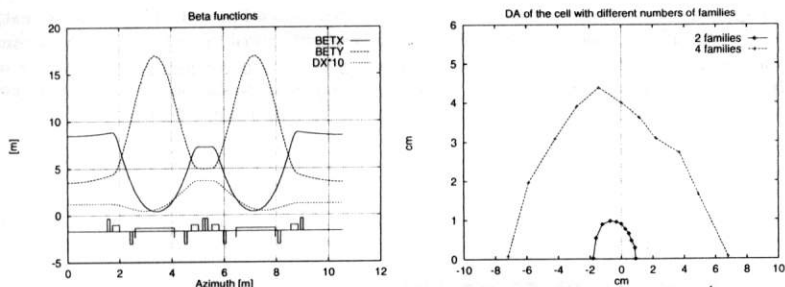


рис. 16. Бета-функции (слева) и динамическая апертура (справа) ячейки с/без коррекции гармоник

$$\begin{aligned}
 (k_2l)_1\beta_{x1}\eta_1 + (k_2l)_2\beta_{x2}\eta_2 + (k_2l)_3\beta_{x3}\eta_3 + (k_2l)_4\beta_{x4}\eta_4 &= 4\pi\xi_x, \\
 (k_2l)_1\beta_{z1}\eta_1 + (k_2l)_2\beta_{z2}\eta_2 + (k_2l)_3\beta_{z3}\eta_3 + (k_2l)_4\beta_{z4}\eta_4 &= 4\pi\xi_z, \\
 (k_2l)_1\beta_{x1}^{3/2} + (k_2l)_2\beta_{x2}^{3/2} - (k_2l)_3\beta_{x3}^{3/2} - (k_2l)_4\beta_{x4}^{3/2} &= 0 \\
 (k_2l)_1\beta_{x1}^{1/2}\beta_{z1} + (k_2l)_2\beta_{x2}^{1/2}\beta_{z2} - (k_2l)_3\beta_{x3}^{1/2}\beta_{z3} - (k_2l)_4\beta_{x4}^{1/2}\beta_{z4} &= 0,
 \end{aligned} \tag{55}$$

откуда легко находятся интегральные силы 4-х секступольных линз $(k_2l)_i$. В последних выражениях мы приняли в соответствии с выбором частоты $|\{\nu_x\}| < 0.167 \cos(m_1\theta) \simeq \cos(m_3\theta) \simeq \pm 1$, причем знак "+" относится к началу ячейки, а "-" - к ее центру. Очевидно, что учесть отличный от нуля набег бетатронной фазы так же несложно.

Пример ячейки, сконструированной согласно приведенным выше правилам и состоящей из двух линз и двух поворотных магнитов, показан на рис.16. Здесь же приведена динамическая апертура и без коррекции гармоник. Двумерная динамическая апертура без коррекции гармоник (т.е. определяемая резонансом $\nu_x = 1$) с хорошей точностью совпадает с оцененной выше аналитически и приведенной на рис.14.

Параметры магнитных элементов и характеристики ячейки приведены в таблице.

Длина ячейки	L (m)	10.5
Бетатронные частоты	ν_x	0.89
	ν_z	0.27
Натуральный хроматизм	ξ_x	1.73
	ξ_z	1.16
Радиус магнита	ρ (m)	5.73

На энергии 2.5 ГэВ (24 ячейки) эмиттанс ускорителя равен $\epsilon = 9$ нм·рад, а коэффициент уплотнения орбит $\alpha = 0.001$. Две пары секступольных линз ($S_{x1,2}$ и $S_{z1,2}$) компенсируют хроматизм и одновременно занимают значащие гармоники A_{11} , A_{33} и B_{11} . Динамическая апертура для этого случая и когда используются только две секступольные линзы (т.е. без коррекции гармоник) показана на рис.16. Величины гармоник для обоих случаев приведены ниже:

Гармоника	До коррекции	После коррекции
A_{11} ($m^{-1/2}$)	-1.32	0.099
A_{33} ($m^{-1/2}$)	-1.39	-0.056
B_{11} ($m^{-1/2}$)	0.85	-0.014

Частным случаем приведенной ячейки периодичности (если обеспечить зануление дисперсион-

ной функции в промежутках) является известная структура Часманна-Грин (double bend achromat). Удовлетворяя описанным условиям, эта структура позволяет управлять гармониками при помощи т.н. "гармонических" секстипольных линз, размещаемых в бездисперсионных промежутках и не влияющих на хроматизм. Последнее, как было показано, не является необходимым, и оптимизация динамической апертуры может проводиться и при ненулевой дисперсионной функции.

Литература

- [1] F.C.Iselin. Algorithms for tracking of charged particles in circular accelerators.- Lectures Notes in Physics 247, Springer, Berlin, 1985.
- [2] F.Willeke. Analysis of particle tracking data.- CERN 90-04, 1990, pp.156-183.
- [3] D.R.Douglas. Tracking codes in accelerators: types and limitations.- Particle Accelerators, 1986, v.19, pp.119-123.
- [4] G.Guignard. Overview of Methods to Define Conditions for Bounded Motion.- CERN 88-04, 29 July 1988, p.17.
- [5] W.Scandale. Dynamic aperture.- CERN SL/94-24(AP), 1994.
- [6] R.Nagaoka et al. Nonlinear dynamics with sextupoles in low-emittance light source storage rings.- NIM A302 (1991) 9-26.
- [7] G.E.O.Giacaglia. Perturbation methods in non-linear systems.- Springer-Verlag, 1972.
- [8] F.Willike. Summary of working group on compensation schemes.- CERN 88-04, p.164, 1988.
- [9] E.Levichev and V.Sajaev. Nonlinear phase space study in a low-emittance light sources using harmonic approximation.- Particle Accelerators, 1996 (in printing).
- [10] V.Kiselev, E.Levichev, V.Sajaev, V.Smaliuk. Nonlinear beam dynamics study at VEPP-4M.- BINP Preprint 96-67, 1996.
- [11] V.Kiselev, E.Levichev, V.Sajaev, V.Smaliuk. Dynamic aperture study at VEPP-4M.- BINP Preprint 96-71, 1996.
- [12] S.Ohnuma, R.L.Gluckstern. Width of nonlinear difference resonances.- Trans.on Nucl.Sci., Vol. NS-32, No.5, 1985, p.2261.
- [13] T.L.Collins.- Fermilab Internal Report 84/114(1984).
- [14] E.D.Courant and H.S.Snyder, Ann.Phys.3, 1 (1958).
- [15] M.Sommer. Optimization of the emittance of electrons (positrons) storage rings, Preprint LURE, LAL/RT/83-15 (1983).
- [16] V.N.Korchuganov. Status of SIBERIA-2 dedicated SR source.- NIM A359, No 1/2, pp.21-27 (1995).
- [17] E.Levichev and V.Sajaev. Nonlinear dynamics study of the SIBERIA-2 electron storage ring.- AIP Conf.Proc.344, 1995, pp.160-169.
- [18] J.R.Cary, Phys.Reports 79, No.2 (1981) 129-159.
- [19] L.Michelotti. Moser-like transformations using the Lie transform.- Particle Accelerators 16 (1985) 233-252.
- [20] A.J.Dragt and J.M.Finn, J.Math.Phys. 17 (1976) 2215.

- [21] J.Hagel. Invariants of betatron motion and dynamic aperture; an analytical approach.- CERN/LEP-TH/86-22, 1986.
- [22] G.Guignard. Overview of methods to define conditions for bounded motion.- CERN 88-04, 1988, p.17.
- [23] E.J.N.Wilson. Nonlinear resonances. - CERN 87-03, 1987, p.41.
- [24] Б.В.Чириков. Атомная энергия, 1959, т.6, с.630.
- [25] B.V.Chirikov. An universal instability of many-dimensional oscillator systems.- Phys.Rev 52 (1979).
- [26] R.D.Ruth. Single particle dynamics and nonlinear resonances in circular accelerators.- SLAC-PUB-3836 (1985).
- [27] E.A.Crosbie. Improvement of the dynamic aperture in Chasman-Green lattice design light source storage ring. - IEEE CH2387-9/87, p.443, 1987.
- [28] N.Merminga, K.-Y.Ng. Analytical expressions for the smear due to nonlinear multipoles. - IEEE CH2669-0/89, p.1286, 1989.
- [29] M.Hara et al. Study of chromaticity correction in low emittance storage ring. -
- [30] Е.Б.Левичев и В.В.Сажаев. Приближение потенциала секступольного возмущения малым числом азимутальных гармоник. - Препринт ИЯФ 95-58, 1995.
- [31] H.V.Dwight. Tables of integrals and other mathematical data. - The Macmillan Co., N.Y., 1961.