

Влияние эффектов встречи на динамику частиц

Д.В. Пестриков

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера
СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

1 Введение

Светимость установки с встречными пучками определяется как скорость счета событий при единичном сечении реакции. Чем больше светимость, тем больше производительность установки. Если ϱ_1 и ϱ_2 – плотности сталкивающихся сгустков, то при единичном сечении реакции количество событий в единичном столкновении пары сгустков с релятивистскими энергиями частиц определяется интегралом

$$\Delta N = 2c \int d^2 r_{\perp} ds dt \varrho_1(\mathbf{r}_{\perp}, s - ct) \varrho_2(\mathbf{r}_{\perp}, s + ct).$$

Если сгустки сталкиваются с частотой $f_b = n_b f_0$ (f_0 – частота обращения, n_b – число сгустков в пучке), то скорость счета (светимость) равна

$$\mathcal{L} = \Delta N f_b = f_b 2c \int d^2 r_{\perp} ds dt \varrho_1(\mathbf{r}_{\perp}, s - ct) \varrho_2(\mathbf{r}_{\perp}, s + ct). \quad (1.1)$$

Наиболее простые выражения для светимости получаются для лобовых столкновений сгустков с круглым поперечным сечением. Если, например, плотности сгустков гауссовы:

$$\varrho_{1,2}(\mathbf{r}, t) = \frac{N_{1,2}}{(2\pi)^{3/2} \sigma^2(s) \sigma_s} \exp\left(-\frac{x^2 + z^2}{2\sigma^2(s)} - \frac{(s \pm ct)^2}{2\sigma_s^2}\right). \quad (1.2)$$

то после простого интегрирования в (1.1) приходим к выражению

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{du e^{-u^2}}{1 + \zeta^2 u^2}, \quad \mathcal{L}_0 = f_b \frac{N_1 N_2}{4\pi \beta \epsilon} \quad \zeta = \frac{\sigma_s}{\beta}. \quad (1.3)$$

Здесь принято, что $\beta_x(s) = \beta_z(s) = \beta(s)$, а также учтено, что вблизи места встречи $\sigma^2(s) = \beta(s)\epsilon$, (ϵ – эмиттанс пучка) и

$$\beta(s) = \beta + \frac{s^2}{\beta},$$

β – значение β -функции в центре места встречи. Из (1.3) видно, что светимость столкновений коротких пучков ($\sigma_s \ll \beta$) просто равна \mathcal{L}_0 . Эта величина тем больше, чем

Больше числа частиц в пучках, чем меньше их эмиттансы и чем лучше они фокусируются на место встречи. При увеличении длины сгустка значение светимости уменьшается. Поскольку

$$\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}_0 \sqrt{\pi} / \zeta = f_b \frac{N_1 N_2}{4\pi \epsilon (\sigma_s / \sqrt{\pi})}, \quad \zeta \gg 1,$$

для увеличения светимости выгодно уменьшать β -функцию в месте встречи при условии, что и длины пучков могут быть уменьшены.

Уже при запуске первых установок с встречными пучками было обнаружено (см., например, в [1, 2] и ссылки в этих работах), что одно из основных ограничений светимости связано с возмущениями движения частиц электромагнитными полями встречного сгустка в месте встречи. По принятой в отечественной литературе терминологии этот многоплановый круг явлений сокращенно называют эффектами встречи. Они выражаются в появлении неустойчивости колебаний индивидуальных частиц либо сгустков в целом. Характер таких неустойчивостей в значительной степени определяется нелинейностью полей сгустков и периодичностью испытываемых частицами возмущений. Поэтому большинство ограничений светимости связано с такими изменениями геометрии фазового пространства частиц, когда значительное число их заметное время проводит вне центральной части сгустка.

В этой лекции мы обсудим лишь некоторые из таких ограничений.

2 Поле встречного сгустка

Для упрощения расчетов мы примем, что пучки содержат сгустки круглого сечения, которые движутся в идентичных кольцах (геометрия таких столкновений схематически изображена на Рис.1). Энергию частиц считаем ультррелятивистской ($\mathcal{E} = \gamma M c^2$, $\gamma \gg 1$). Поперечное электрическое поле сгустка, движущегося вдоль

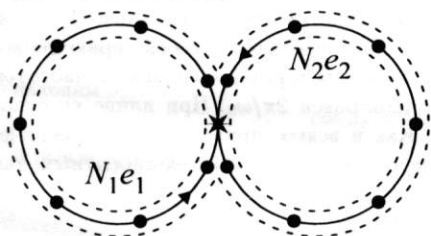


Рис. 1. К задаче о неустойчивости встречных пучков. Раз в период обращения сгустки с зарядами $N_1 e_1$ и $N_2 e_2$ сталкиваются в месте встречи, а затем разведятся по своим кольцам

равновесной орбиты со скоростью $\mathbf{v}_2 = \{0, -c, 0\}$ и имеющего плотность

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{N}{2\pi\sigma^2} \rho(s+ct) \exp\left(-\frac{x^2+z^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2.4)$$

с ультррелятивистской точностью определяется выражением

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}}{r} E, \quad E = \frac{2N e_2}{\sigma^2 r} \rho(s+ct) \int_0^r dr r e^{-r^2/2\sigma^2}. \quad (2.5)$$

После простого интегрирования получаем:

$$E = 2Ne_2\rho(s + ct) \frac{1 - \exp[-r^2/(2\sigma^2)]}{r^2} \mathbf{r}. \quad (2.6)$$

С той же точностью магнитное поле сгустка равно

$$\mathbf{H} = [\mathbf{v}_2 \times \mathbf{E}]/c. \quad (2.7)$$

Сила, действующая на частицы встречного сгустка, движущегося со скоростью $\mathbf{v}_1 =$

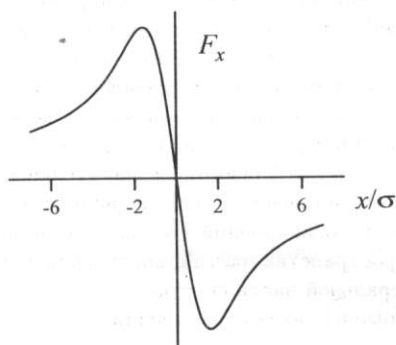


Рис. 2. Зависимость (радиальной) силы возмущающей встречный пучок, от поперечного смещения частицы. Плотности распределения поперечных координат во встречном сгустке гауссова

$\{0, c, 0\}$ и равна

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{1,2} &= e_1 (\mathbf{E} + [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{H}]/c^2), \\ &\simeq 2e_1 \mathbf{E} = 4Ne_1 e_2 \rho(s + ct) \frac{1 - \exp[-r^2/(2\sigma^2)]}{r^2} \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Она линейна вблизи центра сгустка, однако при увеличении расстояния от центра она сначала проходит максимум, а затем уменьшается пропорционально $1/r$ (см. также на Рис.2). Как функция времени эта сила представляет собой серию периодических, коротких толчков. Если сгустки движутся в разных кольцах с частотой обращения ω_0 каждый, то период этих толчков равен $2\pi/\omega_0$. При длине сгустка σ_s длительность толчков есть $\delta t = \sigma/(2c)$. Как и всякое другое, такое периодическое возмущение приводит к резонансным неустойчивостям как некогерентных, так и когерентных колебаний пучка.

3 Неустойчивость линейных колебаний частиц

Хотя по своей природе взаимодействие встречных пучков является самосогласованным (изменения параметров данного сгустка зависит от того, как его поля меняют параметры партнера), значительный класс ограничений можно проследить, исследуя изменения движения отдельных частиц в заданном поле встречного сгустка. В таком случае говорят о расчетах в приближении слабо-сильного сгустка¹.

¹В зарубежной литературе используется термин weak-strong bunch approximation

Рассмотрим в таком приближении вопрос о устойчивости линейных колебаний частиц. Для простоты, считаем, что сталкиваются, например, электронный и позитронный сгустки, а их длины малы по сравнению с значением β -функции в месте встречи. В этом случае сила, действующая на частицу из сгустка 1 в месте встречи, получается линеаризацией выражения (2.8) по поперечным отклонениям

$$\mathbf{F}_{1,2} \simeq -\Gamma_1 \delta_T(s+ct) \frac{2Ne^2}{\sigma^2}, \quad (3.9)$$

где $\delta_T(s)$ - периодическая δ -функция. Таким образом, проходя место встречи, частица испытывает удар согласно

$$\frac{dp_z}{ds} = -z \frac{2N_2 e^2}{c\sigma^2} \delta_T(s+ct). \quad (3.10)$$

Изменение же p_z описывается матрицей перехода

$$\mathbf{M}_{bb}(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{4\pi\xi}{\beta} & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

где

$$\xi = \frac{N_2 e_1 e_2}{4\pi p c \epsilon} \quad (3.12)$$

- так называемый параметр пространственного заряда сталкивающихся пучков. Принимая, что преобразование отклонений частиц между местами встречи задается матрицей

$$\mathbf{M}_B = \begin{bmatrix} \cos \mu_0 & \beta \sin \mu_0 \\ -\frac{\sin \mu_0}{\beta} & \cos \mu_0 \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

после перемножения матриц

$$\mathbf{M}_t = \mathbf{M}_{bb}(\xi/2) \mathbf{M}_B \mathbf{M}_{bb}(\xi/2)$$

находим

$$\cos \mu_z = \cos \mu_{z0} - 2\pi \xi_z \sin \mu_{z0}, \quad (3.14)$$

и новые β -функции

$$\beta_z = \beta_{z0} \frac{\sin \mu_{z0}}{\sin \mu_z}. \quad (3.15)$$

Здесь $\mu_0 = 2\pi\nu_{z0}$, а $\mu = 2\pi\nu_z$, ν_z - новое значение частоты вертикальных бетатронных колебаний. Если величина ξ мала ($\xi \ll 1$), разложением правых частей в (3.14) и (3.15) в ряды по степеням ξ в линейном приближении получим

$$\Delta\nu_z \simeq 2\xi_z, \quad \frac{\Delta\beta_z}{\beta_{z0}} \simeq -2\pi\xi_z \cot \mu_{z0}. \quad (3.16)$$

Колебания устойчивы при условии, что $|\cos \mu_z| \leq 1$, или

$$\xi_z \leq \xi_{th} = \frac{1}{2\pi} \cot \left(\frac{\pi\nu_{z0}}{2} \right), \quad 0 \leq \nu_{z0} \leq 1/2. \quad (3.17)$$

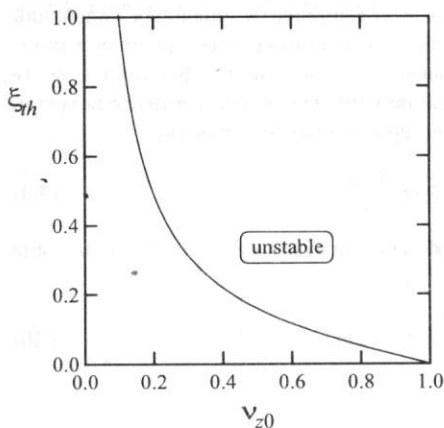


Рис. 3. Область устойчивости линейных бетатронных колебаний (ниже граничной кривой); два места встречи

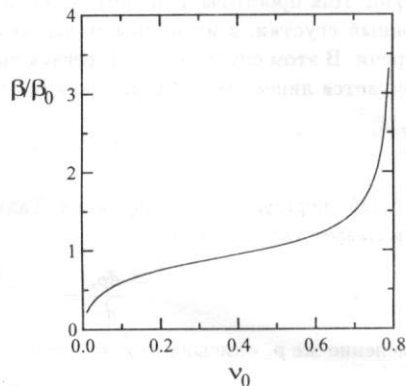


Рис. 4. Зависимость β -функции от частоты невозмущенных бетатронных колебаний; два места встречи; $\xi = 0.05$

Последнее уравнение определяет уравнение границы области устойчивости колебаний $[\xi_{th}(\nu_{z0})]$. Как видно из Рис.3, для противоположно заряженных частиц ширина области устойчивости существенно увеличивается, когда частота бетатронных колебаний расположена выше резонансных значений $\nu_{z0} = 1/2, 1, \dots$. Такая форма границы области устойчивости связана с тем, что для противоположно заряженных частиц взаимодействие пучков в месте встречи усиливает фокусировку ($\Delta\nu_z = \xi > 0$). При этом истинное резонансное условие $\nu_{z0} + \Delta\nu_z = n/2$ выполняется в областях $\nu_{z0} < n/2$. Сразу над резонансом (см. на Рис.1) величина β -функции оказывается существенно **меньше** невозмущенного значения β_0 . Поскольку светимость пропорциональна $1/\beta$, в таких областях частот можно ожидать увеличения светимости установки. Наоборот, при приближении к резонансу **снизу**, β -функции неограниченно нарастают. Эти особенности границы области устойчивости и зависимости β -функций от частоты указывают как на более предпочтительное положение частот бетатронных колебаний частиц чуть выше резонансных значений $n/2$.²

Для плоских пучков $\sigma_x \neq \sigma_z$ величины параметра пространственного заряда для вертикальных и горизонтальных колебаний определяются формулами

$$\xi_z = \frac{N e^2 \beta_z}{2 \pi r c \sigma_z (\sigma_x + \sigma_z)}, \quad (3.18)$$

$$\xi_x = \frac{N e^2 \beta_x}{2 \pi r c \sigma_x (\sigma_x + \sigma_z)}. \quad (3.19)$$

²Для одноименно заряженных частиц $\Delta\nu = -\xi$. Поэтому указанные особенности поведения границы области устойчивости, β -функции и светимости приходятся на частоты, ниже резонансных.

Условие устойчивости колебаний ($\xi \leq \xi_{th}$) ограничивает светимость установки. Например, для столкновений одинаковых сгустков с круглым поперечным сечением на пороге неустойчивости пишем

$$\xi_{th} = \frac{Ne^2}{4\pi\rho c\epsilon} \rightarrow \epsilon \geq \frac{Ne^2}{4\pi\rho c\xi_{th}}.$$

Подстановка такого значения ϵ в выражения для \mathcal{L}_0 в (1.3) дает

$$\mathcal{L}_0 \leq \mathcal{L}_{th} = f_b \frac{N\gamma\xi_{th}}{\beta r_0}, \quad r_0 = \frac{e^2}{Mc^2}. \quad (3.20)$$

Такая формула широко используется при проектировании установок с встречными пучками. При этом в качестве ξ_{th} подставляется некоторое "среднемировое" достижимое значение.

4 Flip-flop эффект

Расчеты в линейном приближении по отклонениям частиц от равновесия хотя и дают ограниченное описание неустойчивости, но зато из-за своей простоты позволяют продвинуться в понимании характера некоторых ограничений, связанных с взаимодействием встречных пучков. В частности, удается проследить влияние самосоглаованности взаимодействия на неустойчивость [3].

В этом разделе мы продолжим вычисления зависимостей β -функций сталкивающихся пучков. Как было установлено в предыдущем разделе, для каждого из сгустков изменение β -функции за счет эффектов встречи описывается уравнением (3.15). Мы его перепишем в виде (поскольку имеются в виду столкновения противоположно заряженных частиц, индексы 1 и 2 заменены на \pm)

$$\beta_{\pm} = \beta_{0\pm} \frac{\sin \mu_{0\pm}}{\sin \mu_{\pm}}. \quad (4.21)$$

Проведем вычисления для случая, когда на орбите имеется два места встречи. Тогда $\nu = \pi\nu$, а условие устойчивости колебаний записывается в виде

$$\xi_{\pm} \leq \xi_{th} = \frac{1}{2\pi} \cot\left(\frac{\pi\nu_{0\pm}}{2}\right), \quad 0 \leq \nu_{0\pm} \leq 1. \quad (4.22)$$

Определив

$$x = \frac{\beta_{0+}}{\beta_+}, \quad y = \frac{\beta_{0-}}{\beta_-},$$

пишем

$$x = \frac{\sin(\mu_+)}{\sin(\mu_{0+})}, \quad y = \frac{\sin(\mu_-)}{\sin(\mu_{0-})}, \quad (4.23)$$

также

$$\xi_+ = y \frac{N_- e^2}{4\pi(\rho c)_+ \epsilon_-} = y \xi_+^{(0)}, \quad \xi_- = x \xi_-^{(0)},$$

где

$$\xi_{\pm}^{(0)} = \frac{N_{\mp} e^2}{4\pi(\rho c)_{\pm} \epsilon_{\mp}}. \quad (4.24)$$

При этом величины эмиттансов ϵ_{\pm} считаются заданными.

Из уравнений (4.23) и (3.14) находим

$$\begin{aligned} x^2 &= 1 - B_+^2 y^2 + 2B_+ y \cot(\mu_{0+}), & B_{\pm} &= 2\pi \xi_{\pm}^{(0)}, \\ y^2 &= 1 - B_-^2 x^2 + 2B_- x \cot(\mu_{0-}), \end{aligned} \quad (4.25)$$

Эта система уравнений показывает, что β -функции сталкивающихся пучков не являются независимыми.

Поскольку уравнения (4.25) довольно сложны для прямых вычислений, ниже мы рассмотрим простой случай, когда невозмущенные параметры сталкивающихся пучков равны (т.н. случай симметричных столкновений):

$$B_+ = B_- = B, \quad \mu_{0+} = \mu_{0-} = \mu_0.$$

При этом уравнения (4.25) принимают вид

$$\begin{aligned} x^2 &= 1 - B^2 y^2 + 2B y \cot(\mu_0), \\ y^2 &= 1 - B^2 x^2 + 2B x \cot(\mu_0). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Функциям Флоке сгустка соответствуют корни этого уравнения, удовлетворяющие условию устойчивости колебаний

$$0 \leq x \leq \frac{\cot(\mu_0/2)}{B}, \quad 0 \leq y \leq \frac{\cot(\mu_0/2)}{B}. \quad (4.27)$$

Вычитанием уравнений в (4.26)

$$(x - y) \left[(1 - B^2)(x + y) + 2B \cot \mu_0 \right] = 0$$

убеждаемся, что корни уравнения (4.26) могут соответствовать как симметричным ($x = y$), так и несимметричным ($x \neq y$) решениям. Для симметричных решений находим

$$x = y = \frac{B \cos(\mu_0) + \sqrt{B^2 + \sin^2(\mu_0)}}{(1 + B^2) \sin(\mu_0)}. \quad (4.28)$$

Они существуют для всех μ_0 (см. на Рис.5), что связано с самосогласованностью взаимодействия.

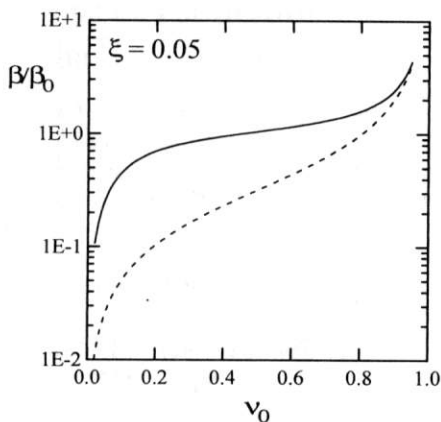


Рис. 5. Зависимость самосогласованных β -функций от частот невозмущенных колебаний. Случай симметричных решений. Пунктирная кривая показывает предел по устойчивости колебаний $\beta/\beta_0 = B \tan(\mu_0/2)$

Несимметричные решения возможны только в таких областях, где

$$A = -\frac{2B \cot(\mu_0)}{1 - B^2} > 0. \quad (4.29)$$

Соответствующие корни определяются выражениями

$$y = \frac{1}{2} \left[A + \sqrt{\frac{A^2(B^2 - 3) + 4}{1 + B^2}} \right], \quad x = \frac{1}{2} \left[A - \sqrt{\frac{A^2(B^2 - 3) + 4}{1 + B^2}} \right]. \quad (4.30)$$

Поскольку $y \geq x$, найденные решения соответствуют такой геометрии сталкивающихся пучков, когда их взаимодействие приводит к увеличению радиуса одного из сгустков и соответствующему уменьшению радиуса второго (см. на Рис.6). Этот эффект действительно наблюдался в накопителях. Причем опыт показывает, что несимметричное состояние не является устойчивым. Без видимых причин сгустки могут "обменяться" размерами. Такое явление получило название flip-flop эффект. В реалистической области параметров ($B < 1$) устойчивые flip-flop решения находятся в сравнительно узкой полосе частот невозмущенных бетатронных колебаний (Рис.7). В области же $\cos(\mu_0) > 0$ flip-flop решения появляются только в том случае, когда параметр ξ нереалистично велик (см. Рис.6, правый рисунок). Следует, однако, помнить, что в модели с линейными силами могут быть только параметрические резонансы. Вместе с тем, модель позволяет ожидать, что при учете нелинейной зависимости полей встречных сгустков от координат частиц, сгустки могут оказаться неустойчивыми относительно flip-flop расщепления вблизи нижних границ полос нелинейных резонансов встречных пучков. На это указывают как наблюдения, так и результаты численного моделирования (см., например, в [4]).

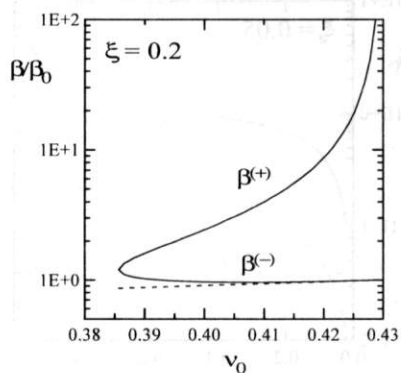
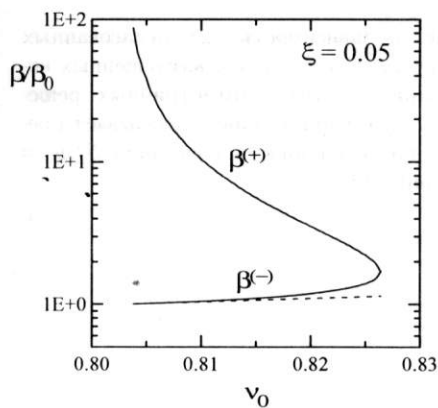


Рис. 6. Зависимости β -функций от частоты невозмущенных колебаний. Flip-flop решения. Пунктирная линия показывает границу области устойчивости $\beta/\beta_0 = B \tan(\mu_0/2)$

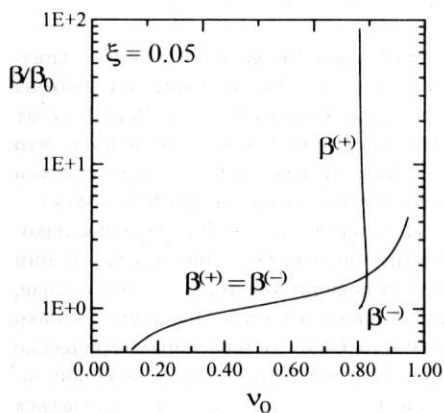


Рис. 7. Зависимости самосогласованных (симметричных и flip-flop) β -функций от частоты невозмущенных бетатронных колебаний; $\xi = 0.05$, два места встречи

5 Эффекты нелинейности полей встречных сгустков

Наиболее существенные ограничения светимости из-за эффектов встречи связаны нелинейными зависимостями полей встречных пучков от координат частиц (см., например, в [1]). Такая нелинейность приводит, с одной стороны, к зависимости частот колебаний от амплитуд, а с другой – к возбуждению различного рода нелинейных резонансов.

Хотя в общем случае полное описание нелинейных эффектов встречи является очень сложной задачей, характер основных явлений можно проиллюстрировать вычислениями в рамках слабо-сильного приближения и используя для отклоняющей силы более или менее простые модели. Например, правильные асимптотики силы дает выражение

$$\mathbf{F} = -N e^2 \delta_T(ct) \frac{\mathbf{r}_\perp}{d^2 + r_\perp^2}. \quad (5.31)$$

ему соответствуют следующие распределения плотности в сильном сгустке

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{N \delta(s + ct)}{\pi d^2 [1 + (r_\perp^2/d)^2]} \quad (5.32)$$

выражение для параметра пространственного заряда

$$\xi = \frac{N e^2}{2\pi p c \epsilon}, \quad d^2 = \beta \epsilon. \quad (5.33)$$

При этом уравнения движения получаются с помощью гамильтониана

$$\mathcal{H} = \nu_z J_z + U, \quad U = 8\pi \xi \epsilon \delta_T(\theta + \omega_0 t) \ln \frac{d^2 + r_\perp^2}{d^2}. \quad (5.34)$$

Если дисперсия фокусировки в месте встречи равна нулю (что типично), то невозмущенные бетатронные колебания описываются выражениями

$$x = \sqrt{J_x \beta_x(\theta)} \cos[\psi_x + \chi_x(\theta)], \quad z = \sqrt{J_z \beta_z(\theta)} \cos[\psi_z + \chi_z(\theta)], \quad (5.35)$$

$$\frac{d\chi_{x,z}}{d\theta} + \nu_{x,z} = \frac{R_0}{\beta_{x,z}(\theta)}, \quad I_{x,z} = \frac{p J_{x,z}}{2}.$$

Определив $d^2(\theta) = \beta_x z(\theta) \epsilon_{x,z}$, из (5.34) находим, что для круглых пучков ($\beta_x(\theta) = \beta_z(\theta)$), чему в нашей модели также соответствует $\epsilon_x = \epsilon_z$) добавка в гамильтониан из-за эффектов встречи зависит от значения β -функции в месте встречи только через модуляцию фаз бетатронных колебаний. В первом приближении метода усреднения значения сдвигов частот, например, вертикальных колебаний для синхронных частиц следующим образом зависят от амплитуд

$$\Delta \nu_z(J_x, J_z) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta d\psi_x d\psi_z}{(2\pi)^3} \frac{\partial U}{\partial J_z} = \xi \begin{cases} 1, & J_z \ll \epsilon, \\ \sqrt{1 + J_x/\epsilon}, & J_x \ll \epsilon, \\ \frac{2}{1 + J_z/\epsilon + \sqrt{1 + J_z/\epsilon}}, & J_x \ll \epsilon. \end{cases} \quad (5.36)$$

Из этих выражений следует, что в результате возмущения рабочая точка густка в плоскости частот бетатронных колебаний превращается в пятно³. Поскольку частоты распределены в диапазоне $0 \leq \nu - \nu_0 \leq \xi$, такое пятно имеет четко очерченные границы (Рис.8).

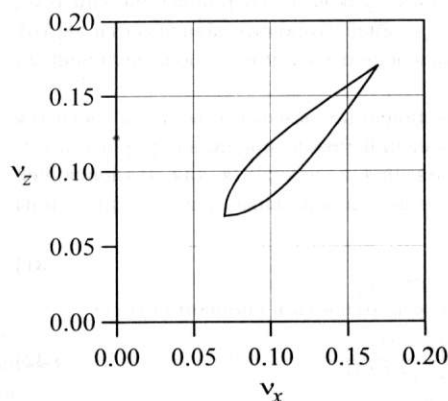


Рис. 8. Пример распределения частот бетатронных колебаний за счет взаимодействия встречных пучков. Поперечное сечение пучков круглое, $\xi = 0.1$

Другим важным следствием нелинейности полей встречных пучков является возможность возбуждения нелинейных резонансов. Для бетатронных колебаний синхронных частиц общее условие резонанса имеет вид

$$m_x \nu_x + m_z \nu_z = n, \quad (5.37)$$

где m_x , m_z и n - целые числа. Поскольку частоты частиц в густке зависят от амплитуд, работают лишь те резонансы, которые попадают внутрь пятна. При этом уравнение резонанса преобразует прямые линии в плоскости частот бетатронных колебаний в некоторые кривые в плоскости амплитуд таких колебаний. Например условие одномерного резонанса $\nu_z = n/m$ превращается в уравнение линии в плоскости (J_x, J_z) :

$$\Delta \nu_z(J_x, J_z) = \frac{n}{m} - \nu_{z0} \geq 0. \quad (5.38)$$

Для противоположно заряженных частиц сдвиги частот $\Delta \nu$ положительны. Это означает, что условие резонанса (5.38) выполняется для частот $\nu_{z0} \leq n/m$.

В первом приближении метода усреднения мощности этих резонансов равны величинам гармоник U по фазам колебаний и азимуту

$$U = \sum_{m,n} U_{m,n} e^{im\psi - in\theta}. \quad (5.39)$$

При соосном столкновении густков U является четной функцией поперечных координат. В таком случае ряд в (5.39) содержит лишь четные гармоники фаз бетатронных

³В зарубежной литературе используется термин footprint.

колебаний ($m = 2k$). Разведение же сгустков в месте встречи добавляет в U нечетные гармоники, расширяя число возможных резонансов. Уравнения первого приближения получаются отбором в (5.39) медленных слагаемых. При заданных m и n и малой расстройке от резонанса $\delta_{m,n} = (n/m) - \nu_{z0}$ в (5.39) помимо $U_{m,n}$ могут оказаться медленными кратные гармоники $U_{lm,lk}$, где l - целые числа. Если длины сгустков невелики, то спектры полей встречных сгустков содержат значительное количество азимутальных гармоник. Это обстоятельство, вообще говоря, важно при вычислении мощностей резонансов встречных пучков. Для одномерного резонанса вертикальных колебаний ($J_x = 0$) и для лобовых столкновений сгустков имеем $U_{2k+1,n} = 0$,

$$|U_{2k,n}| = \frac{2\xi\epsilon}{k} \cdot \left[\frac{J_z/\epsilon}{2 + J_z/\epsilon + 2\sqrt{1 + J_z/\epsilon}} \right]^k. \quad (5.40)$$

Из этого выражения видно, что в центральной области пучка ($J_z \leq \epsilon$) мощности резонансов экспоненциально быстро убывают при увеличении k . Наоборот, в периферической области ($J_z \gg m^2\epsilon$) это убывание становится лишь гиперболическим:

$$|U_{2k,n}| \sim \frac{\xi\epsilon}{k}, \quad J_z \gg (2k)^2\epsilon.$$

Поэтому если частота ν_0 не приближена к резонансам $\nu_0 = 1/2$, $\nu_0 = 1/3$ или $\nu_0 = 1/4$, то наиболее сильные возмущения испытывают колебания частиц, находящихся в хвостах распределений по амплитудам колебаний. Это также указывает на предпочтительность приближения частот бетатронных колебаний сверху к целому или параметрическому резонансам, так как при этом повышается порядок младшего "работающего" резонанса.

Вблизи изолированного резонанса $\nu_z = n/m$ после перехода к медленным переменным

$$J_z, \quad w = \psi_z - \frac{n}{m}\theta + \arg(U_{m,n})$$

геометрия фазовой плоскости описывается гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + 2|U_{m,n}| \cos(mw), \quad \mathcal{H}_0 = \delta_{mn}J_z + 4\xi\epsilon \ln \left[1 + \sqrt{1 + J_z/\epsilon} \right]. \quad (5.41)$$

Поскольку на больших амплитудах ($J_z \gg m^2\epsilon$) поведение $\mathcal{H} \sim \delta_{mn}J_z$ не зависит от фазовой переменной w , колебания устойчивы по J_z даже для нулевых отстрок от резонанса (δ_{mn}). Так как \mathcal{H} является интегралом движения, уравнения фазовых траекторий имеют вид $\mathcal{H}(J_z, w) = C$. Среди фазовых траекторий всегда есть финитные и инфинитные по w . Соответствующие уравнения движения

$$J'_z = 2m|U_{m,n}| \sin(mw), \quad w' = \delta_{mn} + \Delta\nu_z(J_z) + 2\frac{\partial|U_{m,n}|}{\partial J_z} \cos(mw) \quad (5.42)$$

помимо прямого вычисления фазовых траекторий и законов движения позволяют найти точки равновесия:

$$\begin{aligned} J'_z = 0 &\rightarrow mw_s^{(k)} = \pi k, \quad k = 0, 1, \dots, 2m-1, \\ w' = 0 &= \delta_{mn} + \Delta\nu(J_{zs}) + 2\frac{d|U_{m,n}|}{dJ_z} \cos(mw_s^{(k)}). \end{aligned} \quad (5.43)$$

Точки $w_s^{(k)}$ через одну соответствуют точкам устойчивого и неустойчивого равновесия. Точки устойчивого равновесия определяют центры сепаратрис, а точки неустойчивого равновесия – их седловые точки. Для резонанса $\nu_z = n/m$ всего имеется m сепаратрис. Поскольку набег фазы равновесной частицы за оборот равен $2\pi n/m$, точки устойчивого равновесия определяют стационарные орбиты, замыкающиеся через m оборотов. Частицы, попадающие внутрь сепаратрисы, совершают в ней устойчивые колебания, что приводит к уменьшению плотности ядра сгустка. Соответствующее уменьшение светимости тем больше, чем дальше сепаратриса от центра сгустка и чем больше накоплено в ней частиц.

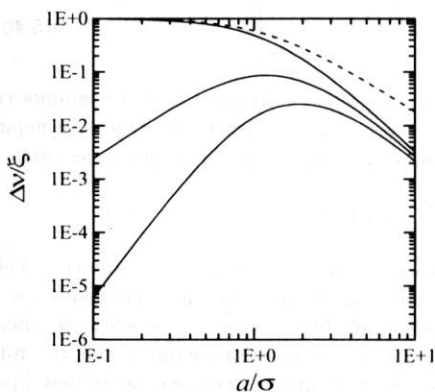


Рис. 9. Вклады гармоник в мгновенный сдвиг частоты. Пунктирная линия дает вклад нерезонансной гармоники; сплошные – сверху вниз $m/2 = k = 1, 2, 3$

Положение центров сепаратрис определяется условием резонанса (5.13) [$w'(J_{zs}, w_s) = 0$]. Как видно из Рис.9, за исключением случая параметрического резонанса, основной вклад в мгновенный сдвиг частоты дает нерезонансное слагаемое ($\Delta\nu_z(J_z)$ из (5.36)). Значение J_{zs} определяется особенно простым выражением в непосредственной близости резонанса ($\xi \gg |\delta_{mn}|$), когда

$$J_{zs} \simeq \epsilon \frac{2\xi}{|\delta_{mn}|} \gg \epsilon. \quad (5.11)$$

Размеры сепаратрис можно вычислить, например, построением гамильтонианов $\mathcal{H}_{\pm} = \mathcal{H}_0 \pm 2|U_{m,n}|$. Как можно видеть из Рис.10, положение сепаратрисы определяется уравнением $\mathcal{H}(J_z, w) = (\mathcal{H}_-)_\text{max}$. Сепаратрисы попадают в область малых амплитуд колебаний вблизи нижней границы резонансной полосы ($\delta_{mn} \simeq -\xi$; Рис.10). Размеры таких сепаратрис и глубина биений амплитуд при этом невелика. Наоборот, вблизи верхней границы ($|\delta_{mn}| \ll \xi$) сепаратрисы образуются вне пучка, а размеры их велики. Опасность образования таких сепаратрис заключается в том, что они могут заселяться за счет рассеяния частиц и, при сравнимости размера сепаратрисы с динамической апертурой машины, ограничивать время жизни пучка.

Возможность описания колебаний захваченных частиц в приближении изолированного резонанса по крайней мере предполагает, что размеры сепаратрис в пространстве частот велики по сравнению с расстояниями между резонансами. Поскольку в условие резонанса (5.38) фактически входит лишь дробная часть ν , минимальное

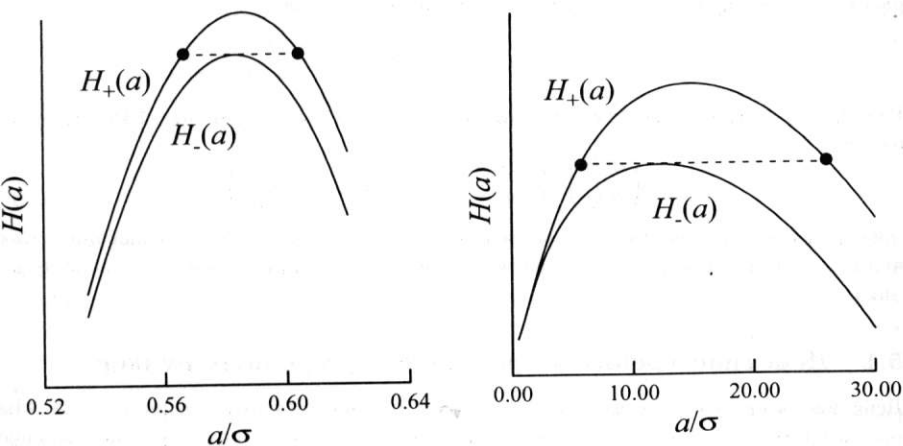


Рис. 10. Зависимости гамильтонианов \mathcal{H}_{\pm} от амплитуд колебаний ($\sqrt{J_z/\epsilon}$). Резонанс $\nu = n/8$ ($k = 4$); левый рисунок $\delta = -0.01\xi$, правый - $\delta = -0.8\xi$. Жирные точки отмечают границы сепаратрис

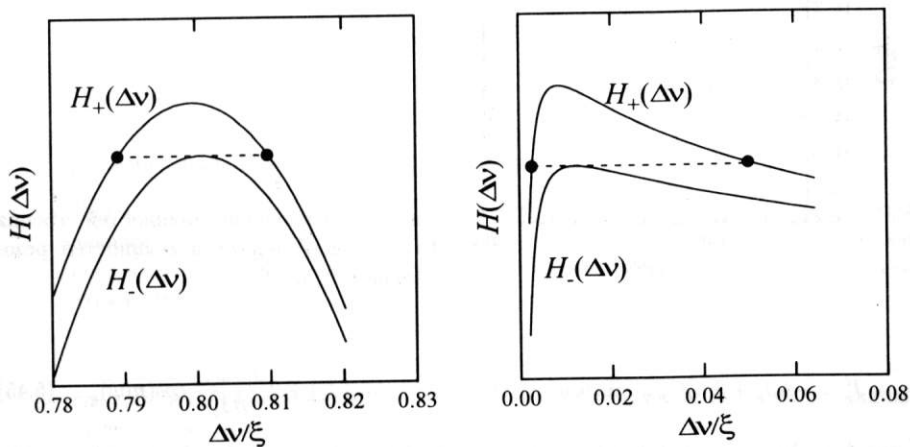


Рис. 11. К оценке размера сепаратрисы в пространстве частот колебаний. Кривые дают зависимости гамильтонианов \mathcal{H}_{\pm} от сдвига частоты $\Delta\nu(J_z)$. Резонанс $\nu = n/8$ ($k = 4$); левый рисунок $\delta = -0.01\xi$, правый - $\delta = -0.8\xi$. Жирные точки отмечают границы сепаратрисы

расстояние между соседними резонансами оценивается как

$$\delta_{m,n} - \delta_{m+1,n} \simeq \frac{\nu}{m}.$$

Размер сепаратрисы оценивается либо вычислением частоты малых фазовых колебаний

$$\nu_c = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial J_z^2} \right)_s \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial w^2} \right)_s = -2m^2 |U_{m,n}| \left(\frac{\partial \Delta \nu}{\partial J_z} \right)_s,$$

либо пересчетом размера сепаратрисы из пространства амплитуд колебаний. Как видно из Рис.11, для резонансов высокого порядка эта ширина, вообще говоря, невелика.

5.1 Действие трения на резонансы встречных пучков

Действие резонансов высокого порядка может подавляться охлаждением пучка. Мы рассмотрим случай электрон-позитронных накопителей, когда такое охлаждение обеспечивается за счет потерь энергии частиц на синхротронное излучение. С учетом трения уравнения движения (5.42) заменяются на

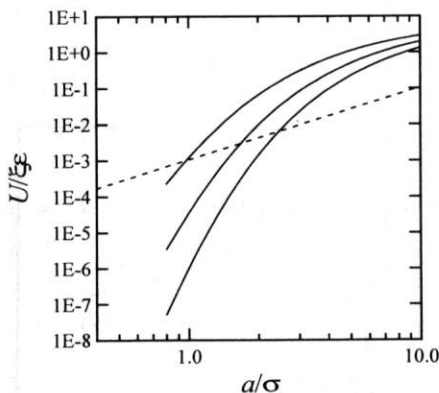


Рис. 12. Сравнение мощностей трения (пунктирная линия) и мощностей резонансов $k = 5, 7, 9$

$$J'_z = -\Lambda J_z + 2m |U_{m,n}| \sin(mw), \quad w' = \delta_{mn} + \Delta \nu_z(J_z) + 2 \frac{\partial |U_{m,n}|}{\partial J_z} \cos(mw), \quad (5.45)$$

где $\Lambda = \lambda/\omega_0$ - декремент затухания колебаний, выраженный в единицах частоты обращения. Теперь положение стационарных точек $w_s^{(k)}$ определяется уравнением

$$\sin(mw_s) = \frac{\Lambda J_{zs}}{2m |U_{m,n}(J_{zs})|}. \quad (5.46)$$

Стационарных точек нет, если $|\sin(mw_s)| > 1$. В таком случае трение подавляет резонанс. Поскольку мощности резонансов ($|mU_{m,n}(J_{zs})|$) убывают при увеличении

m , в электрон-позитронных машинах резонансы высокого порядка не наблюдаются (например, Рис.12). Наоборот, в установках с адронными встречными пучками без охлаждения обычно наблюдаются резонансы эффектов встречи очень высокого порядка. Предельные значения ξ в существующих e^+e^- и адронных коллайдерах отличаются больше чем на порядок.

5.2 Моделирование

Как мы видели, даже уравнения первого приближения метода усреднения, описывающие влияние нелинейностей полей встречных сгустков, довольно сложны. Их сложность увеличивается еще больше, если мы захотим описывать многомерные колебания (скажем, резонансы связи). По этой причине многие результаты особенно в приближении слабого и сильного пучков уже давно получают, используя компьютерное моделирование эффектов встречи.

В простейшем случае при таком моделировании учитываются по крайней мере следующие элементы.

- Транспортировка координат пробных частиц между местами встречи с помощью матриц вида

$$M_{\text{arc}} = \begin{bmatrix} \cos \mu & \beta \sin \mu \\ -\sin \mu / \beta & \cos \mu \end{bmatrix};$$

- Удар в месте встречи описывается матрицей (например, в нашей модели)

$$M_{\text{ВВ}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{4\pi\xi}{\beta} \cdot \frac{1}{1 + \frac{r_{\perp}^2}{d^2}} & 1 \end{bmatrix},$$

μ – набег фазы колебаний между местами встречи;

- Для электрон-позитронных машин добавляется также преобразование, учитывающее трение и раскачку колебаний квантовыми флуктуациями синхротронного излучения. Если место встречи одно, то такое преобразование записывается в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = e^{-\Lambda/2} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\text{in}} + \sqrt{1 - e^{-\Lambda}} \begin{pmatrix} r_x \\ r_{x'} \end{pmatrix},$$

где $r_x(t)$ и $r_{x'}(t)$ независимые ($\langle r_x(t)r_{x'}(t) \rangle = 0$) гауссовы датчики случайных чисел такие, что $\langle r_x^2 \rangle = \langle r_{x'}^2 \rangle = 1$.

Моделируется либо поведение ансамбля независимых частиц, либо, если включено трение и пучок достигает равновесия в отсутствие эффектов встречи, то моделируется поведение вообще одной частицы. В последнем случае начальное положение частицы в фазовом пространстве довольно быстро забывается. Поэтому в качестве начальных условий выбирают начало координат ($x = 0, x' = 0$).

Результат такого моделирования приведен, например, на Рис.13. Видно образование мощного резонанса вблизи $\nu = 1/3$. Благодаря конечному размеру сепаратрис

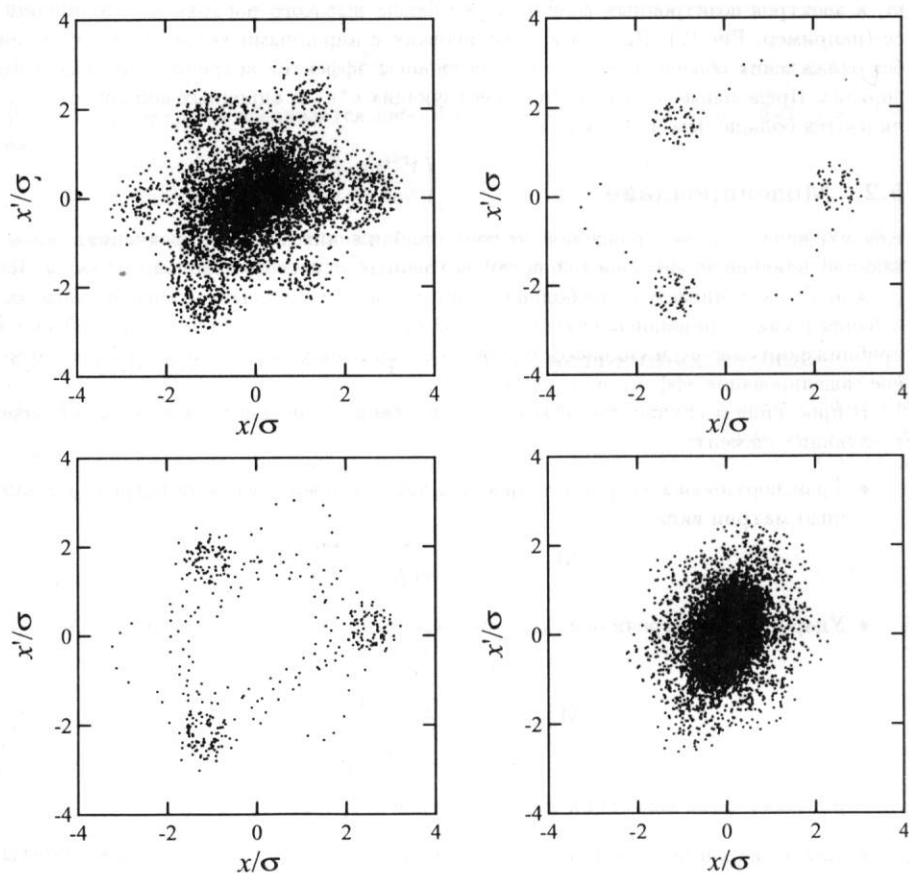


Рис. 13. Фазовые портреты пучка вблизи резонанса $\nu = 2/6$ (верхние и левый нижний рисунки). Правый нижний рисунок представляет то же для $\nu = 0.12$. Короткие пучки с круглым поперечным сечением, одно место встречи, время счета 30 времен затухания; $\xi = 0.1$

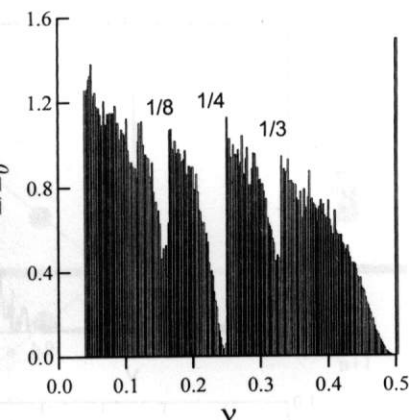


Рис. 14. Пример зависимости светимости от частоты невозмущенных бетатронных колебаний частицы. Электрон-позитронные сгустки с круглым поперечным сечением, одно место встречи, время затухания бетатронных колебаний 1000 оборотов, $\xi = 0.1$, L_0 — значение светимости без учета эффектов встречи

время жизни частицы в заданной сепаратрисе конечно. Частицы, выбитые из данной паратрисы, продолжают затухать к центру сгустка либо захватываются другой паратрисой. Так или иначе время, проведенное частицами вне ядра сгустка, увеличивается, что приводит к уменьшению светимости установки. Такое уменьшение особенно заметно вблизи мощных резонансов (Рис.14).

При удалении от мощных резонансов ($\nu = 1/2, 1/3, 1/4$) модуляция плотности частиц по фазам колебаний

$$\Delta N_m = \int_0^\infty dJ \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} f(J, \psi) \exp(-im\psi)$$

может оказаться менее заметной. Однако фурье-анализ зависимостей $\Delta N(\psi)$ указывает на существование заметных величин гармоник ΔN_m (когерентных сигналов) даже в нерезонансных областях (Рис.15).

Обычной целью такого моделирования является вычисление предельно допустимого значения ξ . При этом величина порога существенно зависит от подробностей места особенностей движения частиц в проектируемой машине. В качестве критерия достижения порога часто выбираются либо начало роста эффективных размеров сгустка, либо начало ухудшения его времени жизни. В частности, в таких расчетах важную роль играет учет различного рода модуляций энергии взаимодействия сгустков.

Паразитные места встречи

В машинах с большим количеством сгустков после (лобового) столкновения в основном месте встречи возможны также столкновения в так называемых паразитных местах встречи (ПМВ), удаленных от основного места встречи на расстояния, кратные половине расстояния между сгустками. В таких местах β -функции уже велики, потому возмущения полями встречного сгустка усиливаются. Обычно желательно

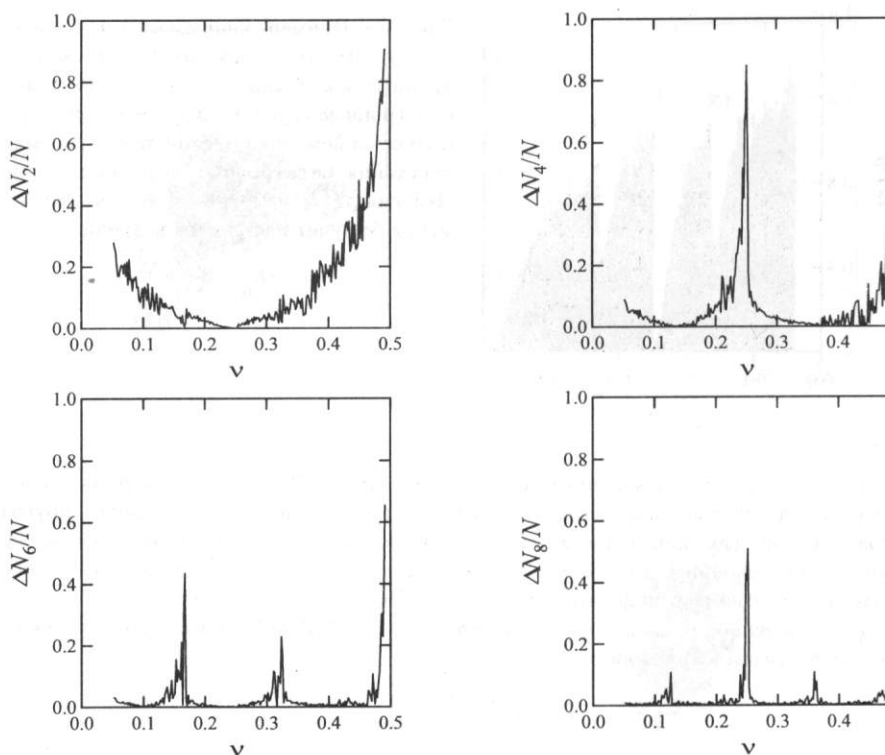


Рис. 15. Зависимости амплитуд 2, 4, 6 и 8 гармоник фазовой плотности (ΔN_m) частоты невозмущенных бетатронных колебаний. Короткие пучки с круговым поперечным сечением, одно место встречи, время счета 10 времен затухания; $\xi = 0.1$

развести пучки до первого ПМВ. Если тем не менее сгустки не разделены в ПМВ экранами (см. Рис.16), то появляется необходимость оценки влияния взаимодействия пучков в ПМВ на устойчивость колебаний частиц.

Вклад взаимодействия в паразитных местах встречи качественно можно оценить по величинам соответствующих сдвигов частот. Если, например, пучки разделены в месте встречи в горизонтальной плоскости на расстояние d , то после простого вычисления легко получить

$$\Delta\nu_x = -\frac{NZe^2(\beta_x)P}{2\pi pcd^2},$$

$$\Delta\nu_z = \frac{NZe^2(\beta_z)P}{2\pi pcd^2},$$
(6.4)

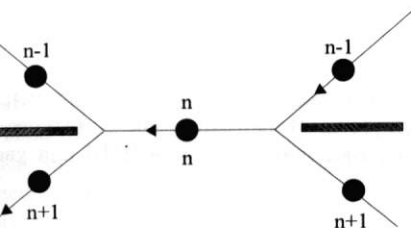


Рис. 16. Схема разведения пучков после прохождения основного места встречи. Стрелки показывают направление движения одного из пучков

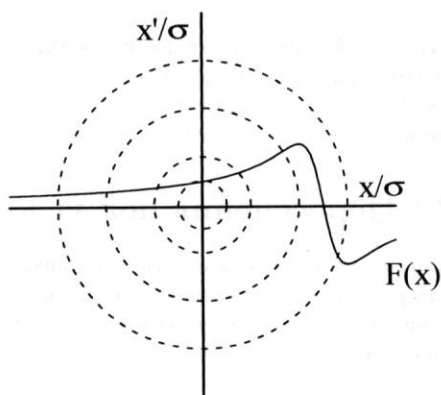


Рис. 17. Схематическое изображение фазовых траекторий (пунктир) и отклоняющей силы в паразитном месте встречи

Здесь $(\beta_{x,z})_P$ - значения β -функций в ПМВ. Обычно величина разведения d измеряется в единицах σ (σ_x для разведения в горизонтальной плоскости). Определив $M = d/\sigma_{xP}$ используя $\sigma_x^2 = \beta_x \epsilon_x$, получим

$$\Delta\nu_x = -\frac{NZe^2}{2\pi\rho c\epsilon_x M^2} \approx -\frac{\xi_x}{M^2},$$

$$\Delta\nu_z \approx \frac{(\beta_z)_P \xi_x}{(\beta_x)_P M^2}. \quad (6.48)$$

Из этих формул видно, что в типичном случае, когда $M \gg 1$, сдвиги частот за счет столкновений сгустков в ПМВ малы по сравнению с вкладом основного места встречи, исключая случаи, когда

$$\frac{(\beta_z)_P}{(\beta_x)_P} \sim M^2.$$

Если первое паразитное место встречи расположено раньше первых квадрупольей, то $\beta(s) = \beta + s^2/\beta$, а последнее соотношение выполняется, когда в основном месте встречи $\beta_x \sim \beta_z M$.

Взаимодействие пучков в ПМВ искажает распределение частот в сгустках, а также увеличивает количество действующих на частицы резонансов. Как видно из Рис.17, при разведении сгустков на несколько σ нелинейность полей в ПМВ, вообще, невелика для центральных частиц сгустка. Периферические же частицы ($\sqrt{J_x(\beta_x)_P} \geq d$), наоборот, оказываются в существенно нелинейных полях. Как мы

уже видели, размеры сепаратрис в таких случаях оказываются особенно велики, что может ограничивать время жизни пучка. При проектировании машин класса С-7 или В-фабрик ($\beta \approx 1$ см, $\mathcal{E} = 2 \div 7$ ГэВ) принято считать, что безопасным является разведение в первом ПМВ на $5 \div 6\sigma$.

7. Пересечения под углом

Помимо схем с лобовыми столкновениями сгустков, уже давно обсуждается схемы, в которых сгустки сталкиваются под некоторым углом. В настоящее время интерес к таким установкам связывается с упрощением разведения сгустков в ПМВ при увеличении чисел сгустков в пучках.

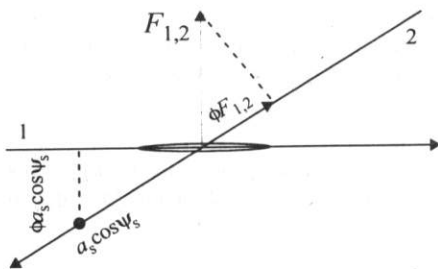


Рис. 18. К задаче о эффектах встречи при пересечении под углом. Угол пересечения 2ϕ . Появляется проекция отклоняющей силы на направление движения частицы встречного сгустка. Поскольку синхротронные колебания частицы имеют проекцию на поперечную скорость сильного сгустка, поперечный удар модулируется синхротронными колебаниями, что приводит к возбуждению синхробетатронных резонансов

Для определенности рассмотрим случай, когда пересечение осуществляется в горизонтальной плоскости. Угол пересечения 2ϕ (см. на Рис.18). Поскольку продольные размеры сгустков в такой установке проектируются на радиальное направление, эффективность будет определяться не естественным радиальным размером сгустка, а эффективным радиальным размером

$$\sigma_x \rightarrow \sigma_{eff} = \sqrt{\sigma_x^2 + \phi^2 \sigma_s^2}. \quad (7.4)$$

При этом

$$\mathcal{L} = f_b \frac{N_1 N_2}{4\pi \sigma_x \sigma_{eff}} = \frac{\mathcal{L}_0}{1 + \phi^2 / \phi_{cr}^2}, \quad (7.5)$$

где $\phi_{cr} = \sigma_x / \sigma_s \ll 1$ – критический угол пересечения. Таким образом, угол пересечения не может быть очень большим.

Пусть $\delta p_x(x)$ – изменение радиального импульса частицы, имеющей радиальное отклонение x , при лобовом столкновении. Тогда, при пересечении под углом 2ϕ , изменение радиального импульса частицы с тем же радиальным отклонением и с амплитудой синхротронных колебаний a_s будет равно $\delta p_x(x + \phi a_s \cos \psi_s)$. С другой стороны, поскольку поля релятивистского сгустка направлены поперек его средней скорости, частица, проходя место встречи под углом, получит продольный удар

$$\frac{\delta(\Delta p)}{p} = \phi \delta p_x(x + \phi a_s \cos \psi_s). \quad (7.5)$$

совместное действие таких периодических возмущений приводит к возбуждению синхробетатронных резонансов

$$m_x \nu_x + m_s \nu_s = n. \quad (7.52)$$

для вертикальных колебаний, соответственно, пишем

$$\delta z' = \frac{\delta p_z(z, x + \phi a_s \cos \psi_s)}{p}. \quad (7.53)$$

Поэтому возможны также резонансы $m_x \nu_x + m_s \nu_s = n$ либо резонансы более общего вида $m_x \nu_x + m_z \nu_z + m_s \nu_s = n$. Сдвиги частот и мощности резонансов в таких условиях зависят от амплитуд бетатронных и синхротронных колебаний частицы. В целом, мощности синхробетатронных резонансов увеличиваются при увеличении критического угла пересечения.

Впервые ограничения за счет синхробетатронных резонансов при пересечении под углом наблюдались на установке DORIS в DESY (ФРГ) [5]. В этой установке пересечение осуществлялось в вертикальной плоскости, а поскольку в e^+e^- -машинах вертикальный размер существенно меньше радиального, критический угол был особенно мал. В настоящее время применение схем с пересечением под углом в горизонтальной плоскости широко обсуждается для электрон-позитронных фабрик.

Существуют и другие источники возбуждения синхробетатронных резонансов встречных пучков. Это — дисперсия в месте встречи, а также различного рода хроматизмы фокусировки. В частности, в так называемых схемах с монохроматизацией пучков дисперсионная функция по одному из направлений принципиально не задана. Ограничения светимости за счет таких источников резонансов каждый раз требуют отдельного исследования.

Протяженные сгустки

В тех случаях, когда длины сталкивающихся сгустков сравнимы с величинами β -функций в месте встречи, возмущение полями встречного сгустка уже нельзя описать в приближении тонких линз. В этой области параметров существуют обширные интервалы фаз бетатронных колебаний, когда частица пересекает встречный сгусток под углом. С одной стороны, это приводит к уменьшению мощностей резонансов, с другой — к возбуждению синхробетатронных колебаний частиц. Результаты таких возмущений различны для пучков с плоским и круглым поперечными сечениями.

Простейшие эффекты можно проследить на примере вычисления линейных сдвигов частот. Изменение, например, вертикальной компоненты импульса частицы, проходящей сгусток с поперечным сечением $\sigma_x \times \sigma_z$, равно

$$\frac{dp_z}{dt} = -\frac{4N_2 e^2}{\sigma_z(\sigma_z + \sigma_x)} \rho(2ct)z. \quad (8.54)$$

В первом порядке метода усреднения пишем

$$\begin{aligned} \Delta\nu_z &= -\int_0^\Pi \frac{ds}{2\pi c} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_z}{2\pi} \frac{\partial z}{\partial I_z} \frac{dp_z}{dt} \\ &= \frac{N_2 e^2}{2\pi p c} \int_0^\Pi ds \frac{2\beta_z(s)\rho(2s)}{\sigma_z(s)[\sigma_x(s) + \sigma_z(s)]}. \end{aligned} \quad (8)$$

Если $\beta_x(s) = \beta_z(s) = \beta(s)$, то пишем

$$\frac{\beta_z(s)}{\sigma_z(s)[\sigma_x(s) + \sigma_z(s)]} = \frac{\beta(s)}{\beta(s)[\sqrt{\epsilon_z} + \sqrt{\epsilon_x}]\sqrt{\epsilon_z}} = \frac{1}{[\sqrt{\epsilon_z} + \sqrt{\epsilon_x}]\sqrt{\epsilon_z}}.$$

Для такой фокусировки пучков соотношение (8.55) переходит в следующее

$$\begin{aligned} \Delta\nu_z &= \frac{N_2 Z e^2}{2\pi p c [\sqrt{\epsilon_z} + \sqrt{\epsilon_x}]\sqrt{\epsilon_z}} 2 \int_0^{\Pi/2} ds \lambda(2s) \\ &= \frac{N_2 Z e^2}{2\pi p c [\sqrt{\epsilon_z} + \sqrt{\epsilon_x}]\sqrt{\epsilon_z}} = \xi_z. \end{aligned} \quad (8)$$

Если к тому же вертикальный и радиальный эмиттансы сгустка равны ($\epsilon_x = \epsilon_z = \epsilon$) он будет иметь в месте встречи круглое сечение. При этом сдвиги частот вертикальных и радиальных колебаний равны

$$\Delta\nu_x = \Delta\nu_z = \xi = \frac{N_2 Z e^2}{4\pi p c \epsilon}. \quad (8)$$

В обоих случаях сдвиги частоты бетатронных колебаний не зависят от длины встречного сгустка. Если бы мы повторили вычисления для частицы, совершающей синхротронные колебания, то мы так же нашли бы, что сдвиги частот, определяемые уравнениями (8.56) и (8.57), не зависят от амплитуд этих колебаний. Таким образом в случае пучков с круглым поперечным сечением учет длины пучка и синхротронных колебаний частиц не добавляет размерности резонансов в пространстве амплитуд колебаний.

Для пучков с плоским поперечным сечением ($\sigma_x \gg \sigma_z$ и $\beta_x \gg \beta_z$) более типична область параметров, где $\sigma_s \simeq \beta_z \ll \beta_x$, и потому

$$\begin{aligned} \Delta\nu_z &= \frac{N_2 Z e^2 \beta_z}{2\pi p c \sigma_z \sigma_x} 2 \int_0^{\Pi/2} ds \lambda(2s) \sqrt{1 + \frac{s^2}{\beta_z}} \\ &\simeq \frac{N_2 Z e^2 \beta_z}{2\pi p c \sigma_z \sigma_x} 2 \int_{-\infty}^{\infty} ds \lambda(2s) \sqrt{1 + \frac{s^2}{\beta_z}} = \xi_z(\sigma_s). \end{aligned} \quad (8)$$

В последнем случае сдвиг частоты вертикальных бетатронных колебаний существенно увеличивается в области $\sigma_s \gg \beta_z$ (Рис.19). Аналогичное увеличение $\Delta\nu_z$ имеет место и при увеличении амплитуды синхротронных колебаний частицы.

Таким образом, области частот, где возможна резонансная раскачка бетатронных (и синхробетатронных) колебаний, для плоских пучков является более широкой.

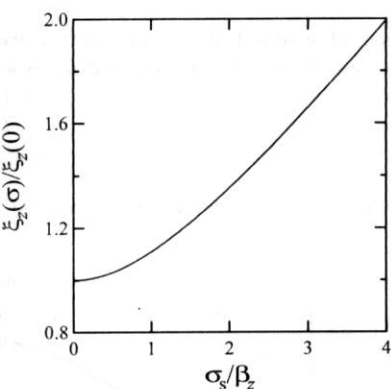


Рис. 19. Зависимость параметра пространственного заряда вертикальных колебаний от длины сгустка

Перейдем к обсуждению резонансных возмущений. Для сгустков с идентичными β -функциями и круглым сечением (в действительности требуется лишь $\beta_z(s) = \beta_x(s)$) зависимости мощностей резонансов от амплитуд бетатронных колебаний и от амплитуд синхротронных колебаний, а также от длины встречного сгустка факторизуются:

$$U_{m,n} = \xi V_b(J_x, J_z) Y_{q,m_s}(a_s, \zeta), \quad 2q = |m_x + m_z|, \quad \zeta = \frac{\sigma_s}{\beta}. \quad (8.59)$$

Действительно, потенциал взаимодействия с полем такого сгустка зависит от поперечных координат в комбинациях

$$U = \rho(s + ct) V \left(\frac{x^2 + z^2}{\sigma_{\perp}^2(s)} \right).$$

Записывая

$$\frac{x^2 + z^2}{\sigma_{\perp}^2(s)} = \frac{\beta_+(\theta) [J_x \cos^2(\psi_x + \chi_x(\theta)) + J_z \cos^2(\psi_z + \chi_z(\theta))]}{\beta_-(\theta) \epsilon_-},$$

где $\beta_{\pm}(\theta)$ - β -функции встречных сгустков, найдем, что при $\beta_+(\theta) = \beta_-(\theta)$, аргумент V зависит от β -функций лишь через фазы бетатронных колебаний. Поэтому

$$V = \sum_{m_x, m_z} V_{m_{\perp}} \exp[i m_x \chi_x + i m_z \chi_z], \quad (8.60)$$

а значит вблизи резонанса ($m_x \nu_x + m_z \nu_z + m_s \nu_s \simeq n$) имеем

$$U_{m,n} = V_{m_{\perp}}(J_x, J_z) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} [\rho(2\theta + \varphi \cos \psi_s)]_{m_s} e^{2iq\mu_{\perp}(\theta)}. \quad (8.61)$$

Здесь $\varphi = a_s/R_0$ - безразмерная амплитуда синхротронных колебаний, $2q = m_x + m_z$, а

$$\mu(\theta) = \int^{\theta} \frac{d\theta' R_0}{\beta(\theta')},$$

$2\pi R_0$ - периметр орбиты. Ввиду быстрой сходимости в (8.61) интеграла по θ , пределы интегрирования можно заменить бесконечными. В результате мы приходим к соотношению (8.59), в котором

$$Y_{q,m_s}(\varphi, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{2\pi} [\rho(2\theta + \varphi \cos \psi_s)]_{m_s} e^{2iq\mu_{\perp}(\theta)}. \quad (8.62)$$

Как видно из этого уравнения, при любых значениях аргументов выполняется усло-

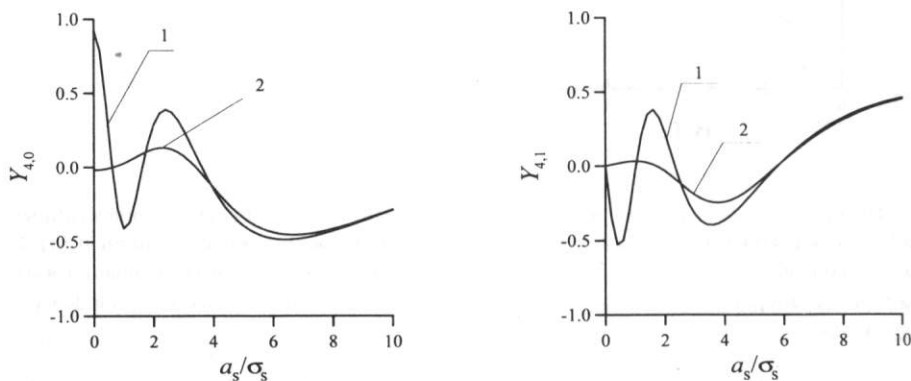


Рис. 20. Зависимости мощностей бетатронного ($\nu_b = 1/4$) и первых синхробетатронных ($8\nu_b \pm \nu_s = 2k$) резонансов от амплитуды синхротронных колебаний; 1: $\zeta = 0.1$, 2: $\zeta = 1$

вие $|Y_{q,m_s}| \leq 1$. Поэтому мощности резонансов из-за эффектов встречи протяженных пучков с круглым сечением **не превышают** мощностей резонансов коротких пучков. Более того, изучение зависимостей Y от амплитуд синхротронных колебаний (Рис.20) показывает, что в области $\sigma_s \simeq \beta$ мощности бетатронных и синхробетатронных резонансов встречных пучков существенно подавлены для частиц с небольшими амплитудами синхротронных колебаний ($a_s \leq \sigma_s$). Для частиц в хвостах продольного распределения мощности резонансов длинных и коротких сгустков практически совпадают. Подавление резонансов при столкновении протяженных пучков получило название эффекта усреднения [6].

Аналогичное подавление резонансов вертикальных колебаний центральных частиц в области $\sigma_s \simeq \beta_z$ имеет место и для плоских пучков. Однако, в отличие от случая пучков круглого сечения, мощности резонансов в таких пучках растут с увеличением амплитуд синхротронных колебаний частиц.

9 Когерентные колебания

Помимо flip-flop расщепления, самосогласованное взаимодействие встречных пучков может приводить к неустойчивости их когерентных колебаний [7]. Это также многоплановый круг явлений, детальное описание которого потребовало бы отдельных

ций. Здесь мы рассмотрим лишь простейшие коллективные эффекты встречных пучков. Разбросами частот бетатронных колебаний из-за разброса энергий частиц и нелинейности фокусировки пренебрежем.

Если сгустки совершают, скажем, вертикальные когерентные колебания с дипольным моментом $d_2(t)$, так что

$$\varrho(\mathbf{r}, t) = \frac{N}{2\pi\sigma^2} \rho(s + ct) \exp\left(-\frac{x^2 + (z - d_2(t))^2}{2\sigma^2}\right), \quad (9.63)$$

возмущающие поля определяются уравнениями (2.5) и (2.7), в которых аргумент должен быть заменен на $z - d_2(t)$. При этом для вертикальной проекции силы, действующей на встречный сгусток, вместо (2.8) получим ($r^2 = x^2 + (z - d_2)^2$)

$$F_z = 4N\epsilon_1\epsilon_2\rho(s + ct) \frac{1 - \exp[-r^2/(2\sigma^2)]}{r^2} (z - d_2(t)). \quad (9.64)$$

Подставив это выражение в уравнения движения частиц, в линейном приближении ($\ll \sigma$) получим:

$$z''_{a1} + \nu_z^2 z_{a1} = \text{sgn}(\epsilon_1\epsilon_2) 4\Pi\xi\nu_z(z_{a1} - d_2)\rho(2R_0\theta + s_a). \quad (9.65)$$

Аналогично, если дипольные колебания совершает сгусток (1), уравнение для частиц второго сгустка ($s_a(t) = -ct + s_a$) записывается в виде

$$z''_{a2} + \nu_z^2 z_{a2} = \text{sgn}(\epsilon_1\epsilon_2) 4\Pi\xi\nu_z(z_{a2} - d_1)\rho(2R_0\theta - s_a). \quad (9.66)$$

Для простоты, положено $\rho(s) = \rho(-s)$.

Решения уравнений (9.65) и (9.66) могут быть выражены через интегралы от дипольных моментов d_1 и d_2 . Сами уравнения для d_1 и d_2 получаются суммированием уравнений (9.65) либо (9.66):

$$d_{1,2} = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^N (z_a)_{1,2} \rho(s_a)$$

имеют вид

$$\begin{aligned} d_1'' + \nu_z^2 d_1 &= \text{sgn}(\epsilon_1\epsilon_2) 2\xi\nu_z(d_1 - d_2)K(\theta), \\ d_2'' + \nu_z^2 d_2 &= -\text{sgn}(\epsilon_1\epsilon_2) 2\xi\nu_z(d_1 - d_2)K(\theta), \\ K(\theta) &= 2\Pi \int_{-\infty}^{\infty} ds \rho(s + ct)\rho(s - ct). \end{aligned} \quad (9.67)$$

Понимая, что $K(\theta)$ является периодической функцией θ с периодом 2π , пишем

$$K = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n e^{-in\theta}, \quad K_n = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} K(\theta) e^{in\theta}. \quad (9.68)$$

Распределение гармоник K_n по номерам зависит от ширины линейных плотностей пучков в сталкивающихся сгустках. Если, например,

$$\rho(s) = \frac{\exp[-s^2/(2\sigma_s^2)]}{\sqrt{2\pi}\sigma_s},$$

то вычисление интеграла в (9.67) даёт

$$K(\theta) = 2\Pi \frac{\exp[-(ct)^2/\sigma_s^2]}{2\pi\sigma_s} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-u^2} = 2\pi \frac{\exp[-(\theta)^2/\sigma_\phi^2]}{\sqrt{\pi}\sigma_\phi}, \quad \sigma_\phi = \sigma_s/R_0.$$

Для сгустков с длинами $\sigma_s \ll R_0$ имеем

$$K_n = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi}\sigma_\phi} \exp\left(-\frac{\theta^2}{\sigma_\phi^2} + in\theta\right) \simeq \exp[-(n\sigma_\phi)^2/4].$$

Поэтому для не очень высоких номеров гармоник ($n \ll R_0/\sigma_s$) амплитуды K_n отличаются от единицы ($K_n \simeq 1$). Подстановка этих выражений в (9.67) даёт

$$\begin{aligned} d_1'' + \nu_z^2 d_1 &= \text{sgn}(e_1 e_2) 2\xi \nu_z (d_1 - d_2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\theta}, \\ d_2'' + \nu_z^2 d_2 &= -\text{sgn}(e_1 e_2) 2\xi \nu_z (d_1 - d_2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\theta}. \end{aligned} \quad (9.)$$

Для нахождения собственных частот когерентных колебаний заметим, что уравнения (9.69) разделяют два вида решений. Так называемая σ -мода описывается суммой X $d_1 + d_2$, удовлетворяющей уравнению

$$X'' + \nu_z^2 X = 0. \quad (9.)$$

Её собственные частоты ($X \propto e^{-i\nu\theta}$) равны $\nu = \pm \nu_z$ и не зависят от взаимодействия пучков.

Напротив, собственные частоты так называемой π -моды, которая описывается разностью $b = d_1 - d_2$, существенно определяются взаимодействием пучков:

$$b'' + \nu_z^2 b = \text{sgn}(e_1 e_2) 4\xi \nu_z b \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\theta}. \quad (9.)$$

Решение уравнения (9.71) ищем в виде

$$b = \exp(-i\nu\theta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\theta}. \quad (9.)$$

Подстановка этого выражения в (9.71) даёт коэффициенты b_n

$$b_n = \text{sgn}(e_1 e_2) \xi \frac{4\nu_z}{\nu_z^2 - (\nu - n)^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \quad (9.)$$

и дисперсионное уравнение, определяющее собственные частоты колебаний:

$$1 = \text{sgn}(e_1 e_2) \xi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4\nu_z}{\nu_z^2 - (\nu - n)^2}. \quad (9.)$$

Вычисление ряда в (9.74) позволяет преобразовать это уравнение к виду

$$\cos 2\pi\nu = \cos 2\pi\nu_z + 4\pi \text{sgn}(e_1 e_2) \xi \sin 2\pi\nu_z. \quad (9.)$$

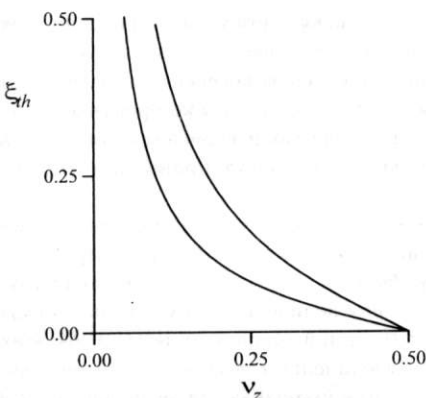


Рис. 21. Граница области устойчивости некогерентных (верхняя линия) и когерентных (нижняя линия) колебаний встречных пучков. Колебания неустойчивы выше граничной кривой. При увеличении ν_z кривые повторяются с периодом $1/2$

При этом требование $|\cos 2\pi\nu| \leq 1$ определяет границу области устойчивости в плоскости (ξ, ν_z) (см. на Рис.21). Если величина ξ мала, так что рабочая точка (ν_z) не близка к границе области устойчивости, уравнение (9.75) позволяет вычислить когерентный сдвиг частоты ($\nu = \nu_z + \delta\nu$, $|\delta\nu| \ll \nu_z$). Поскольку при этом

$$\cos 2\pi\nu \simeq \cos 2\pi\nu_z - 2\pi\delta\nu \sin 2\pi\nu_z,$$

из (9.75) получаем

$$\delta\nu \simeq -2\text{sgn}(e_1 e_2)\xi. \quad (9.76)$$

Отметим, что это значение вдвое больше сдвига частоты некогерентных колебаний.

Решение дисперсионного уравнения особенно упрощается, если ν_z близко к какому-либо из резонансных значений ($\nu_z = k$ или $\nu_z = k + 1/2$). Пусть, например, $\nu_z \simeq k$. Тогда, отбирая в (9.74) резонансные слагаемые ($n = k$ и $n = -k$), пишем:

$$1 = \text{sgn}(e_1 e_2) 4\xi \nu_z \frac{1}{2\nu_z} \left(\frac{1}{\Delta - \nu} + \frac{1}{\Delta + \nu} \right), \quad \Delta = \nu_z - k,$$

или

$$1 = -\frac{4\Delta \text{sgn}(e_1 e_2)\xi}{\nu^2 - \Delta^2}. \quad (9.77)$$

Отсюда получаем

$$\nu = \pm \sqrt{\Delta^2 - 4\Delta \text{sgn}(e_1 e_2)\xi}. \quad (9.78)$$

При $\text{sgn}(e_1 e_2) < 0$ (электрон-позитронные либо протон-антипротонные встречные пучки) неустойчивые решения возможны внутри полосы

$$-4\xi \leq \Delta \leq 0. \quad (9.79)$$

Величина инкремента колебаний максимальна в центре полосы неустойчивости ($\Delta = -2\xi$), где

$$\text{Im}\nu_{\max} = 2\xi. \quad (9.80)$$

Вне этой запрещенной полосы когерентные колебания пучков не нарастают. Развитие неустойчивых дипольных колебаний ограничивается нелинейностью полей встречных сгустков (см., например, в [8]). Однако предельные значения амплитуд когерентных колебаний при этом велики. По этой причине рабочая точка накопителя (ν_z, ν_x) , вообще говоря, не должна попадать в полосы (9.79) под целыми и полуце-

лыми резонансами. Нелинейность полей приводит также к возбуждению нелинейных дипольных когерентных колебаний, если рабочая точка по частотам приближается к резонансным значениям. Мощности нелинейных резонансов когерентных колебаний как и мощности некогерентных резонансов, малы, если амплитуды когерентных колебаний не превышают размеров пучков. По этой причине такие колебания могут быть важны лишь сразу после инжекции сгустков, когда они могут привести к захвату сгустка на одну из паразитных орбит.

Более полные представления о характере спектров когерентных колебаний встречных пучков можно получить, решая уравнения Власова (см., например, в [9]). При этом оказывается, что неустойчивыми могут быть не только дипольные, но и мультипольные колебания встречных пучков. Как и для нелинейных резонансов, полосы неустойчивости колебаний лежат ниже ($e_1 e_2 < 0$) линий машинных резонансов, а их ширины лишь степенным образом убывают с увеличением номеров мультипольности (m_x, m_z, m_s). Мощности когерентных резонансов уменьшаются, если поперечные размеры сталкивающихся сгустков не равны. В области flip-flop неустойчивости это делает более предпочтительными конфигурации с неравными β -функциями и эмиттантами пучков. Для коротких сгустков $\sigma_s \ll \beta$ затухание Ландау не подавляет неустойчивости, по крайней мере нескольких первых мод. Для протяженных сгустков ($\sigma_s \approx \beta$) мощности когерентных резонансов подавляются за счет обсуждавшегося эффекта усреднения тем сильнее, чем выше номера мультипольности колебаний. При этом, поскольку эффект усреднения не влияет на сдвиги частот некогерентных колебаний, когерентные резонансы протяженных пучков высокого порядка могут подавляться затуханием Ландау из-за нелинейности полей в основном месте встречи.

Я благодарен Н.С. Диканскому, И.Н. Иванову и А.Н. Лебедеву за многочисленные обсуждения и комментарии, способствовавшие написанию этой лекции.

Список литературы

- [1] Я.С. Дербенев. Взаимодействие пучков заряженных частиц. Дис. на соиск. учен. степ. канд. ф.-м. наук. 107 с, Новосибирск, 1968.
- [2] С.И. Мишнев. Исследование электромагнитного взаимодействия встречных пучков. Дис. на соиск. учен. степ. канд. ф.-м. наук. 144 с, ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1975.
- [3] К. Hirata. Phys. Rev. D **37**, 1307, 1988.
- [4] M. Furman. In Proc. of the 3rd Advanced ICFA Beam Dynamics Workshop On Beam-Beam Effects in Circular Colliders. p. 52, Novosibirsk, 1989.
- [5] A. Piwinski. IEEE Trans. on Nucl. Sci. NS-24, p. 1408, 1977.
- [6] S. Krishnagopal, R. Siemann. Phys. Rev. D **41**, 2312, 1990.
- [7] В.И. Балбеков, А.А. Коломенский. ЖТФ, **37**, стр. 2021, 1967.
- [8] N. Dikansky, D. Pestrikov. Nonlinear Coherent Beam-Beam Oscillations in the Rigid Bunch Model. Preprint INP 90-14, Novosibirsk 1990.
- [9] N. Dikansky and D. Pestrikov, Part. Acc. **12**, p. 27, (1982). См. также те же авторы. Физика интенсивных пучков в накопителях. СО Наука, 1989.