

# Head-Tail неустойчивости

Д.В. Пестриков

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера  
СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

## Введение

При движении в вакуумной камере ускорителя или накопителя пучки заряженных частиц наводятся на окружающих их электродах электрические и магнитные поля. Возмущение движения частиц наведенными полями может, в частности, вызывать неустойчивости коллективных (или, как еще говорят, когерентных) колебаний пучка.

В 1969 г. на накопителях заряженных частиц было обнаружено заметное число неустойчивостей поперечных когерентных колебаний сгустков, инкременты которых либо зависели от частот бетатронных колебаний частиц. Это обстоятельство указывало на то, что вызывающие такие неустойчивости наведенные поля затухают заметно быстрее периода следования сгустков. Поскольку в старых машинах пучок обычно состоял из одного сгустка, такие неустойчивости когерентных колебаний получили название однооборотных.

В 1969 г. К. Пеллегрини и М. Сэндс [1, 2] объявили о новом механизме неустойчивости поперечных когерентных колебаний, обязанном взаимодействию частиц сгустков посредством быстро затухающих наведенных полей. Инкременты новой неустойчивости слабо зависели от частот бетатронных колебаний, но были пропорциональны квадрату параметру фокусировки машины ( $dv_b/d \ln p \neq 0$ ,  $p = \gamma M v$  — импульс частиц).

Механизм неустойчивости можно пояснить на следующем простом примере. По-ложим, что в начальный момент частицы 1 и 2 занимают крайние продольные положения на своих фазовых траекториях синхротронных колебаний, а наведенные ими поля затухают намного быстрее периода следования сгустков. Если частица 1 находится впереди, то из-за запаздывания наведенных полей она возмущает колебания частицы 2, тогда как частица 2 не возмущает колебаний частицы 1. Примем, что наведенная (бетатронные) колебания частицы 2, пропорциональна (вертикальному) отклонению частицы 1 [ $F_{1,2} \propto z_1 w(s_1 - s_2)$ , см. также Рис.1]. Через половину периода синхротронных колебаний частицы 1 и 2 займут в сгустке такие положения, когда частица 2 окажется впереди частицы 1 и соответственно начнет раскачивать колебания с силой  $F_{2,1} \propto z_2 w(s_2 - s_1)$ . Таким образом, из-за запаздывания полей колебания головных частиц сгустка будут раскачивать колебания частиц, расположенных в хвосте сгустка, а синхротронные колебания частиц замыкают обратную связь колебаний отдельных частей сгустка. При определенных условиях это может

приводить к неустойчивости когерентных колебаний пучка. По предложению авторов (К. Пеллегрини и М. Сэндс) такая неустойчивость получила название head-tail эффекта, или head-tail неустойчивости.

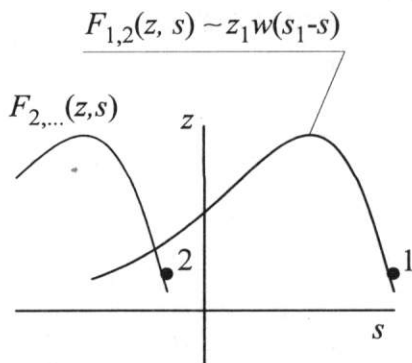


Рис. 1. К задаче о взаимодействии частиц с густкой посредством наведенных в окружающих электродах полей

Последующие исследования показали, что неустойчивость, предсказанная К. Пеллегрини и М. Сэндсом, специфична для случаев, когда когерентные колебания рождаются за много периодов синхротронных колебаний частиц. В тех же случаях, когда темп роста амплитуд когерентных колебаний сравним с частотой синхротронных колебаний, характер head-tail неустойчивости существенно меняется. В частности, она становится гораздо менее чувствительна к величине хроматизма фокусировки.

В этой лекции мы обсудим особенности head-tail неустойчивости одиночного густка. Энергии частиц ( $\mathcal{E}$ ) предполагаются релятивистскими ( $\gamma = \mathcal{E}/Mc^2 \gg 1$ ).

## 2 Общие уравнения

Ниже нам понадобится описание хотя и широкого, но все же ограниченного круга явлений, связанных с развитием синхробетатронных колебаний густка. Потому мы сразу примем ряд предположений, которые позволят существенно упростить необходимые вычисления. Прежде всего, мы примем, что взаимодействие частиц пучка осуществляется низкодобротной системой электродов, а поперечные размеры густка малы по сравнению с поперечными расстояниями от пучка до этих электродов. По этой причине мы ограничимся изучением устойчивости мод, в которых бетатронные когерентные колебания дипольны. Пусть, для определенности, это будут моды, в которых густок совершает вертикальные когерентные колебания. Тогда колебания отдельных частиц густка описываются формулами

$$\begin{aligned} z &= a_z \cos \psi_z & p_z &= p \frac{dz}{ds}, & \dot{\psi}_z &= \omega_z, \\ s &= ct + R_0 \phi, & \phi &= \varphi \cos \psi_s, & \frac{\Delta p}{p} &= -\frac{v_s}{\alpha_p} \varphi \sin \psi_s, \end{aligned} \quad (2)$$

$$I_z = \frac{p\nu_z a_z^2}{2R_0}, \quad \alpha_p = \frac{1}{\gamma^2} - \alpha.$$

Здесь  $p = \gamma M v$  - импульс синхронной частицы ( $v \simeq c$ ),  $\Delta p$  - отклонение импульса частицы от  $p$ ,  $2\pi R_0$  - периметр орбиты,  $\alpha$  - коэффициент уплотнения орбит (напомним, что величина  $\gamma_{tr} = 1/\sqrt{\alpha}$  определяет критическую энергию машины).

Поскольку частоты колебаний частиц зависят от их энергии

$$\omega_z = \omega_{zs} + \frac{d\omega_z}{dp} \Delta p,$$

фаза бетатронных колебаний частицы  $\psi_z$  модулируется ее синхротронными колебаниями

$$\psi_z = \int dt \omega_z = \psi_{zs} + \int dt \frac{d\omega_z}{d\omega_0} \dot{\phi} = \psi_{zs} + \frac{d\omega_z}{d\omega_0} \phi. \quad (2.2)$$

Ниже, после выделения слагаемого  $\phi(d\omega_z/d\omega_0)$ , мы не будем делать различия между  $\psi_{zs}$  и  $\psi_z$ . Поскольку

$$\frac{d\omega_z}{d\omega_0} = \nu_z + \frac{d\nu_z}{d \ln \omega_0} = \nu_z + \frac{1}{\alpha_p} \cdot \frac{d\nu_z}{d \ln p},$$

для частиц с энергией, превышающей критическую энергию накопителя ( $\alpha_p < 0$ ), и при естественном хроматизме фокусировки ( $d\nu_{\perp} d \ln p < 0$ ), величина  $d\nu_{\perp} / d \ln \omega_0$  положительна.

Коль скоро нас будет интересовать коллективное поведение пучков, разумно воспользоваться для их описания заданием функции распределения в фазовом пространстве частиц  $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ . Если коллективные процессы самые быстрые, то функция распределения является интегралом движения

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (2.3)$$

Такое уравнение называется уравнением Власова. Для его решения в (2.3) во всяком случае следует подставить уравнения движения частиц. Считая, что невозмущенные колебания частиц описываются гамильтонианом  $H_0$ , а возмущения силой  $\mathbf{F}$ , пишем

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}. \quad (2.4)$$

Вспоминая, что выражение

$$[H_0; f] = \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}$$

определяет скобку Пуассона  $[H_0; f]$ , мы можем переписать уравнение (2.3) в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [H_0; f] + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (2.5)$$

Формулы (2.1) определяют каноническое преобразование от переменных  $(p_z, z; \Delta p, R_0\phi)$  к переменным действие-фаза  $(I_z, \psi_z; I_s, \psi_s)$  невозмущенных колебаний. Последние оказываются более удобными для исследования решений уравнения (2.5) в интересующих нас случаях. Записывая  $f = f(\mathbf{I}, \boldsymbol{\psi}, t)$  и учитывая, что

$$[H_0; f] = \omega \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\psi}},$$

а

$$\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\psi}} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{I}} \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial p_\alpha},$$

перепишем (2.5) в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\psi}} + \frac{d\mathbf{I}}{dt} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{I}} = 0, \quad (2.6)$$

где

$$\frac{d\psi_\alpha}{dt} = \omega_\alpha + \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{F}, \quad \frac{dI_\alpha}{dt} = \frac{\partial I_\alpha}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{F}. \quad (2.7)$$

В частности, если возмущающая сила направлена вдоль вертикальной оси  $z$ , то

$$\frac{d\psi_s}{dt} = \omega_s, \quad \frac{d\psi_z}{dt} = \omega_z + \frac{\partial \psi_z}{\partial p_z} F_z,$$

$$\frac{dI_s}{dt} = 0, \quad \frac{dI_z}{dt} = \frac{\partial I_z}{\partial p_z} F_z.$$

С такими уравнениями движения мы уже встречались в лекции о нелинейных колебаниях. Подстановка их в (2.6) позволяет переписать уравнение Власова в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \omega_s \frac{\partial f}{\partial \psi_s} + \left( \omega_z + \frac{\partial \psi_z}{\partial p_z} F_z \right) \frac{\partial f}{\partial \psi_z} + \frac{\partial I_z}{\partial p_z} F_z \frac{\partial f}{\partial I_z} = 0. \quad (2.8)$$

Известно крайне мало случаев, когда подобное уравнение, особенно с силами, зависящими от положений частиц в пучке, может быть решено точно. В случае, когда нас интересует устойчивость пучка по отношению к возбуждению в нем малых когерентных колебаний, в этом, к счастью, нет необходимости. Коль скоро начальные амплитуды колебаний пучка произвольно малы, то малы и вызываемые ими возмущения. По этой причине задача может решаться по теории возмущений. В нулевом приближении мы принимаем, что пучок вообще не совершает когерентных колебаний. Этому соответствует функция распределения, которая не зависит от всех фаз колебаний частиц и времени (в нашем случае  $f_0 = f_0(I_z, I_s)$ ). Мы также будем пользоваться предположением о том, что  $f_0$  факторизуется  $f_0 = F(I_z)\rho(\varphi)$ . Функцию распределения  $f_0$  будем называть стационарной.

Для того чтобы функция распределения описывала когерентные колебания пучка, у нее должны быть зависящие от времени гармоники фаз колебаний:

$$f = f_0(I_z, I_s) + \sum_{m_z, m_s} f_{m_z, m_s}(I_z, I_s) \exp(im_z \psi_z + im_s \psi_s - i\omega t). \quad (2.9)$$

Пример, вертикальный дипольный момент пучка определяется интегралом

$$\langle z \rangle = \int dI_z \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_z}{2\pi} a_z \cos \psi_z f = \int dI_z a_z(I_z) \frac{f_1 + f_{-1}}{2}. \quad (2.10)$$

При решении задач о коллективной устойчивости пучка обычно полагают, что  $f_0 \gg |f_{\pm 1}|$  и, соответственно, линеаризуют уравнения вида (2.8) по малым отклонениям, пропорциональным  $f_m$ .

Теперь для того, чтобы двигаться дальше, нам нужно найти поля, которые пучок наводит в окружающих его электродах. Для типичных проблем ускорительной физики такая задача может быть решена разве лишь численно. Такое затруднение обходится введением в теорию понятия импеданса связи пучка с окружающими электродами. Для этого заметим, что в гладкой, идеально проводящей камере накопительное поле пучка стационарно в его системе покоя. Такое поле вызывает лишь сдвиги частот частиц и когерентных колебаний. Неустойчивости пучка вызывают рассеяние его полей при прохождении различных препятствий в вакуумной камере либо **конечную проводимость** окружающих пучков электродов. Соответствующие поля возбуждаются зарядами и токами изображений пучка в элементах вакуумной камеры. Поскольку поперечные размеры пучков ( $\sigma_{\perp}$ ) малы по сравнению с характерными поперечными размерами в таких элементах ( $l_{\perp} \gg \sigma_{\perp}$ ), возможно разложение наведенных полей по степеням отношений ( $z/l_{\perp}$ ). При этом поперечные поля появляются при смещении центра пучка относительно (**электромагнитных**) центров элементов вакуумной камеры. Азимутальная протяженность таких полей обычно близка к азимутальной протяженности рассматриваемого элемента. Поэтому первое слагаемое разложения  $F_z$  по степеням  $z$  записывают в виде

$$F_z(z, \theta, t) \propto \delta_T(\theta) \int_{-\infty}^t dt' Z_{\perp}(t-t') d(\theta - \omega_0 t', t'), \quad d(\theta, t) = \langle z \rangle, \quad (2.11)$$

где  $\theta = -$  азимутальное положение интересующего нас элемента камеры,  $\delta_T(\theta)$  - периодическая  $\delta$ -функция. В первом приближении метода усреднения уравнения движения содержат среднее значение  $F_z$  по азимуту

$$\overline{F}_z(t) \propto \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^t dt' Z_{\perp}(t-t') d(-ct', t).$$

Переходя в этом уравнении к **фурье-гармоникам**

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega) e^{-i\omega t},$$

также учитывая, что  $d(\theta, t) \propto e^{-i\omega t}$ , получим ( $m_z = \pm 1$ )

$$\overline{F}_z(\omega) = \frac{Nc^2\omega_0}{\Pi} \int_{-\infty}^{\infty} dn Z_{\perp}(\omega + n\omega_0) \int d\Gamma' e^{in(\phi' - \phi)} a'_z \cos\left(\psi'_z + \frac{d\omega_z}{d\omega_0} \phi'\right) f_{\omega}. \quad (2.12)$$

При получении этого уравнения учтено соотношение (2.2), обезразмерена переменная интегрирования, а посредством  $d\Gamma$  обозначен элемент фазового объема. Введенная таким образом функция  $Z_{\perp}(\omega)$  называется поперечным импедансом связи пучка с окружающими электродами. Аналогичная величина, часто используемая для описания

продольных наведенных полей

$$\overline{E_{\parallel}(\omega)} = -\frac{Ne^2\omega_0}{\Pi} \int_{-\infty}^{\infty} dn Z_{\parallel}(\omega + n\omega_0) \int d\Gamma_{\parallel} e^{in(\phi' - \phi)} f_{\omega}, \quad (2.13)$$

называется продольным импедансом связи пучка. Как это часто бывает в задачах с ВЧ-колебаниями поля, величины продольного и поперечного импедансов связи вообще зависят от положения замкнутой орбиты в камере накопителя. Хотя обычно такая зависимость и слабая, она приводит к следующему соотношению между продольным и поперечным импедансами

$$Z_{\perp}(\omega) = \frac{ic}{\omega} \left( \frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} Z_{\parallel}(z, z', \omega) \Big|_{z, z'=0} \right). \quad (2.14)$$

Для камеры с поперечным сечением, близким к круговому, оценка производных по порядку величины дает

$$Z_{\perp}(\omega) \simeq \frac{c}{l_{\perp}^2} \frac{iZ_{\parallel}(\omega)}{\omega}. \quad (2.15)$$

Как уже говорилось, нас интересует решение уравнения (2.8) после его линеаризации по амплитудам когерентных колебаний  $f_m$  и усреднения по периоду обращения. При выписывании такого уравнения следует учесть, что в силу уравнения (2.12) слагаемое

$$\frac{\partial \psi_z}{\partial p_z} F_z \frac{\partial f}{\partial \psi_z}$$

является величиной второго порядка по взаимодействию с наведенными полями. Поэтому линеаризованное уравнение Власова для гармоник  $f_m e^{-i\omega t}$  записывается в виде ( $\omega_m = m_z \omega_z + m_s \omega_s$ )

$$(\omega - \omega_m) f_m = -i \left( \frac{\partial I_z}{\partial p_z} \overline{F_z(\omega)} \right)_m \frac{\partial f_0}{\partial I_z}. \quad (2.16)$$

В силу канонической сопряженности пар  $p_z, z$  и  $I_z, \psi_z$  имеем

$$\frac{\partial I_z}{\partial p_z} = \frac{\partial z}{\partial \psi_z}.$$

Поэтому

$$\left( \frac{\partial I_z}{\partial p_z} \overline{F_z(\omega)} \right)_{m_z} = im_z \overline{F_z(\omega)} \sqrt{\frac{R_0 I_z}{2p\nu_z}} \exp \left( i \frac{d\omega_z}{d\omega_0} \phi \right).$$

Подстановка этого соотношения в (2.16) указывает, что зависимости функций  $f_m$  от амплитуд поперечных колебаний определяются соотношениями

$$f_m = \chi_m \frac{\sqrt{I_z} \partial F_0 / \partial I_z}{\omega - \omega_m}. \quad (2.17)$$

Теперь заметим, что при заданном значении гармоники  $m_z$  (скажем,  $m_z = 1$ ) правая часть в (2.12) содержит вклады гармоник  $m_z = 1$  и  $m_z = -1$ . Согласно (2.17) вклад гармоники  $m_z = 1$  пропорционален  $\Omega_m / (\omega - \omega_{1,s})$ , а  $m_z = -1$  —  $\Omega_m / (\omega - \omega_{1,s} + 2\omega_z)$ ,

где  $\Omega_m$  - величина когерентного сдвига частоты. Хотя величина  $\Omega_1$  заранее неизвестна, можно определенно сказать, что взаимодействие частиц с наведенными полями будет мало лишь в том случае, когда по крайней мере  $|\Omega_m| \ll \omega_z$ . Однако в этом случае мы можем пренебречь в уравнении (2.16) связью бетатронных гармоник  $f$ . Тогда подстановка (2.17) в (2.16) и (2.12) приводит к следующей системе связанных уравнений для  $\chi_m$

$$\chi_{m_s} = \rho(\varphi) \sum_{m'_s=-\infty}^{\infty} D(\omega - \omega_z - m'_s \omega_s) \int_0^{\infty} d\varphi' \varphi' K_{m_s, m'_s}(\varphi, \varphi') \chi_{m'_s}(\varphi'). \quad (2.18)$$

Здесь

$$K_{m_s, m'_s}(\varphi, \varphi') = \int_{-\infty}^{\infty} dn \Omega_m(\omega + n\omega_0) J_{m_s}(n_1 \varphi) J_{m'_s}(n_1 \varphi'), \quad n_1 = n + m_z \frac{d\omega_z}{d\omega_0}, \quad (2.19)$$

$$\Omega_m(\omega) = -m_z \frac{Ne^2 \omega_0}{4\pi p v_z} Z_{\perp}(\omega), \quad (2.20)$$

а

$$D(\omega - \omega_m) = - \int_0^{\infty} \frac{I_z \partial F_0 / \partial I_z}{\omega - \omega_m} d\omega, \quad \text{Im} \omega > 0. \quad (2.21)$$

### 3 Head-Tail эффект

Изучим сначала поведение решений уравнений (2.18) в условиях, когда величины когерентных сдвигов частот мод  $(\omega - \omega_m)$  малы по сравнению с частотой синхротронных колебаний. В такой области параметров при решении уравнений (2.18) можно также пренебречь связью мод с отличающимися  $m_s$ , а уравнения для отдельных мод  $\chi_{m_s}$  записать в виде

$$\chi_{m_s} = \rho(\varphi) D(\omega - \omega_m) \int_{-\infty}^{\infty} dn \Omega_m(n\omega_0 + \omega_m) J_{m_s}(n_1 \varphi) \int_0^{\infty} d\varphi' \varphi' J_{m_s}(n_1 \varphi') \chi_{m_s}(\varphi'). \quad (3.1)$$

В таком уравнении функция  $D(\omega)$  фактически является собственным значением. Поэтому, обозначив

$$\frac{1}{\Delta\omega_m} = D(\omega - \omega_m) = - \int_0^{\infty} \frac{I_z \partial F_0 / \partial I_z}{\omega - m_z \omega_z(I_z) - m_s \omega_s} d\omega, \quad (3.2)$$

мы вместо (3.1) получим два уравнения. Одно - дисперсионное уравнение (3.2). Оно определяет (комплексные) частоты собственных колебаний пучка с учетом разброса частот бетатронных колебаний. Решение другого

$$\Delta\omega_m \chi_{m_s} = \rho(\varphi) \int_{-\infty}^{\infty} dn \Omega_m(n\omega_0 + \omega_m) J_{m_s}(n_1 \varphi) \int_0^{\infty} d\varphi' \varphi' J_{m_s}(n_1 \varphi') \chi_{m_s}(\varphi') \quad (3.3)$$

позволяет вычислить собственные частоты мод монохроматического пучка ( $\Delta\omega_m$ ). Интуитивно ясно, что из-за интерференции наведенных полей действие разброса частот будет способствовать подавлению неустойчивости. Поэтому ниже мы сосредоточим наше внимание на определении условий устойчивости монохроматического пучка.

1. Поскольку уравнение (3.3) является весьма сложным интегральным уравнением, то для упрощения вычислений, а также для иллюстрации методов вычисления собственных частот и декрементов колебаний воспользуемся моделью, в которой функция  $\Omega_m(\omega)$  определяется выражением

$$\Omega_m(\omega) = \Omega_m \frac{i\omega_0}{\pi[\omega + i0]}. \quad (3.4)$$

Оно соответствует скачкообразному нарастанию наведенного поля после прохождения частицей системы электродов. Поэтому модель будет давать реалистические предсказания лишь в том случае, когда длина сгустка ( $\sigma_s$ ) велика по сравнению с длиной нарастания поля. Вместе с тем, по предположению, наведенные поля должны исчезать к приходу следующего сгустка. В нашей модели это означает, что длина сгустка должна быть существенно меньше межсгусткового расстояния в пучке.

Физический смысл параметра  $\Omega_m$  устанавливается вычислением в модели когерентного сдвига частоты пучка нулевой длины. Подставив в (3.3)  $\rho(\varphi) = \delta(\varphi^2/2)$  и учитывая, что  $J_m(0) = \delta_{m,0}$ , получим  $\chi_{m_s \neq 0} = 0$  и  $\Delta\omega_{m_z, m_s=0} = \Omega_m$ . Таким образом, величина  $\Omega_m$  в формуле (3.4) равна когерентному сдвигу частоты бетатронной моды ( $m_s = 0$ ) для пучка нулевой длины. Пользуясь формулами (2.20) и (2.15), можно выразить  $\Omega_m$  через импедансы связи. Например, для камеры с круговым поперечным сечением имеем

$$\Omega_m = -m_z \frac{Nc^2\omega_0^2}{2pv} \frac{R_0^2}{2\nu_z l_1^2} Z_{||}(\omega). \quad (3.5)$$

Отсюда следует, что  $\Omega_m$  является действительным числом, если импеданс связи чисто резистивный ( $Z_{||}(\omega) = Z_0$ ). Поскольку для пассивных систем  $Z_0 > 0$ , из (3.5) следует, что знак  $\Omega_m$  противоположен знаку  $m_z$  ( $m_z \Omega_m < 0$ ).

Вычисление собственных чисел уравнения (3.3) для пучков конечной длины требует привлечения приближенных методов решения интегральных уравнений. Получим сначала решение для синхробетатронных мод ( $m_s \neq 0$ ). В таком случае уравнение (3.3) записывается в виде

$$\Delta\omega_m \chi_m = \rho(\varphi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{\pi} \frac{i\Omega_m}{n - m_z \mu} J_{m_s}(n\varphi) \int_0^{\infty} d\varphi' \varphi' J_{m_s}(n\varphi') \chi_m(\varphi'), \quad (3.6)$$

$\mu = d\nu_z/d\ln\omega_0$  - хроматизм кольца. Кроме того, ввиду малого значения частоты синхротронных колебаний в (3.6) в выражениях  $m_z\omega_z + m_s\omega_s$  опущены слагаемые  $m_s\omega_s$ . Если величина хроматизма не велика ( $\mu\varphi_b \ll 1$ ,  $\varphi_b = \sigma_s/R_0$ ), то уравнение (3.6) можно существенно упростить. Действительно, с помощью формулы

$$\int \frac{dx(\dots)}{x + i0} = \int \frac{dx(\dots)}{x} - i\pi \int dx(\dots)\delta(x)$$

перепишем (3.6) в виде

$$\begin{aligned} \chi_m = & \frac{i\Omega_m \rho(\varphi)}{\pi \Delta\omega_m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn J_{m_s}(n\varphi)}{n - \mu} \int_0^{\infty} d\varphi' \varphi' J_{m_s}(n\varphi') \chi_m(\varphi') \\ & - \Omega_m \rho(\varphi) J_{m_s}(\mu\varphi) \int_0^{\infty} d\varphi' \varphi' J_{m_s}(\mu\varphi'). \end{aligned} \quad (3.7)$$



Здесь символ  $\int$  означает вычисление интеграла в смысле главного значения. В области  $\varphi_b|\mu| \ll 1$  второе слагаемое в правой части этого уравнения пропорционально  $(\mu\varphi_b)^{|m_s+1|} \ll 1$ . Для вычисления спектра колебаний в первом приближении по  $\varphi_b|\mu|$  вкладом этого слагаемого можно пренебречь. Разложение же первого слагаемого в ряд по степеням  $\varphi_b\mu$  приводит к уравнению<sup>1</sup>

$$\Delta\omega_m\chi_m = \rho(\varphi) \frac{i\Omega_m m_z \mu}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn J_{m_s}(n\varphi)}{n^2} \int_0^{\infty} d\varphi' \varphi' J_{m_s}(n\varphi') \chi_m(\varphi'). \quad (3.8)$$

Обозначив

$$\Delta\omega_m = 2\Lambda_m i\Omega_m m_z \varphi_b \mu / \pi, \quad w_m = \chi_m \sqrt{\varphi/\rho},$$

перепишем (3.8) в виде

$$\Lambda_m w_m = \int_0^{\infty} d\varphi' K(\varphi, \varphi') w_m(\varphi'), \quad (3.9)$$

$$K(\varphi, \varphi') = \sqrt{\varphi\varphi' \rho(\varphi)\rho(\varphi')} \int_0^{\infty} \frac{dn}{\varphi_b n^2} J_{m_s}(n\varphi) J_{m_s}(n\varphi').$$

Ядро полученного уравнения помимо симметрии по  $\varphi$  и  $\varphi'$  является положительно определенным. Это означает, что для произвольных действительных функций  $w(\varphi)$  интегралы

$$J(w) = \int_0^{\infty} d\varphi d\varphi' w(\varphi) K(\varphi, \varphi') w(\varphi')$$

положительны. Относительно интегральных уравнений с такими ядрами известно, что все их собственные числа положительны, а функционал  $J(w)$  достигает максимального значения, равного соответствующему собственному числу, если  $w(\varphi)$  совпадает с одной из собственных функций

$$\Lambda_0 = \max\{J[w]\} = \lim_{w \rightarrow w_0} J[w], \quad (3.10)$$

$$\int_0^{\infty} d\varphi w^2(\varphi) = 1.$$

Это утверждение позволяет проводить вычисление собственных функций и частот не решая непосредственно уравнение (3.9). В качестве иллюстрации проведем расчет декрементов основного состояния для случая, когда

$$\rho(\varphi) = 2 \frac{\exp[-\varphi^2/(\varphi_b^2)]}{\varphi_b^2} \quad (3.11)$$

и, соответственно,

$$K(u, u') = 2 \exp\left(-\frac{u^2 + u'^2}{2}\right) \sqrt{uu'} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2} J_{m_s}(xu) J_{m_s}(xu').$$

<sup>1</sup>Для синхробетатронных мод ( $m_s \neq 0$ ) такое разложение законно, поскольку оно не приводит к расходимости интегралов по частотам.

Согласно общим теоремам анализа собственная функция основного состояния  $n$  должна иметь корни везде, исключая точку  $\varphi = 0$ . С учетом этого обстоятельства из явного выражения для  $K(u, u')$  мы выберем пробную функцию  $w$  в виде ( $m = |m_s|$ )

$$w_m = A_m u^{m+1/2} e^{-\beta u^2/2}, \quad A_m^2 = \frac{2\beta^{m+1}}{m!}. \quad (3.12)$$

Параметр  $\beta$  выбирается так, чтобы интеграл  $J(w)$  достигал максимального значения. Прямое вычисление интегралов дает

$$\begin{aligned} J &= 2A_m^2 \int_0^\infty \frac{dx}{x^2} \left( \int_0^\infty du u^{m+1} J_m(xu) \exp \left[ -\frac{u^2}{2}(1+\beta) \right] \right)^2 \\ &= \frac{2A_m^2}{(1+\beta)^{2m+2}} \int_0^\infty dx x^{2m-2} \exp \left( -\frac{x^2}{1+\beta} \right) \\ &= \frac{2\beta^{m+1}}{(1+\beta)^{m+5/2}} \frac{\Gamma(m-1/2)}{m!}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Функция  $J(\beta)$  имеет максимум при  $\beta = 2(m+1)/3$ . Подстановка этого значения в (3.12) и (3.13) приводит к выражениям

$$w_m = A_m u^{m+1/2} e^{-(m+1)u^2/3}, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_m &\geq [\Lambda_m]_{\min} \\ [\Lambda_m]_{\min} &= \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma(m-1/2)}{m!} \frac{(m+1)^{m+1}}{(m+5/2)^{m+5/2}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Верхняя граница  $\Lambda_m$  определяется суммой собственных чисел уравнения (3.9):

$$\Lambda_\Sigma = 2 \int_0^\infty du u^2 e^{-u^2} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2} J_m^2(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi} [4m^2 - 1]}. \quad (3.16)$$

Сравнение верхней и нижней границ для  $\Lambda_m$  (Рис.2) показывает, что точность таких расчетов вполне удовлетворительна для первых синхротронных мод. При больших  $m_s$ , как это видно из (Рис.2), числа  $\Lambda_m$  уменьшаются согласно

$$\Lambda_m \simeq \frac{1}{(m_s + 1)^3}.$$

Декременты ( $\delta = -\text{Im}\omega$ ) синхротронных мод короткого сгустка оцениваются выражениями:

$$\delta_m = -2\Lambda_m \text{Re}(m_z \Omega_m) \varphi_b \mu / \pi, \quad |m_s| \neq 0, \quad (3.17)$$

$$[\Lambda_m]_{\min} \leq \Lambda_m \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2}{4m^2 - 1}.$$

Подставив в последнее выражение  $\Omega_m$  из (3.5), получим

$$\delta_m = \Lambda_m \frac{N e^2 \omega_0^2 Z_0 \beta_z l_b}{2\pi p v} \frac{d\nu_z}{2I_1^2 d \ln \omega_0}, \quad \beta_z \simeq \frac{R_0}{\nu_z}. \quad (3.18)$$

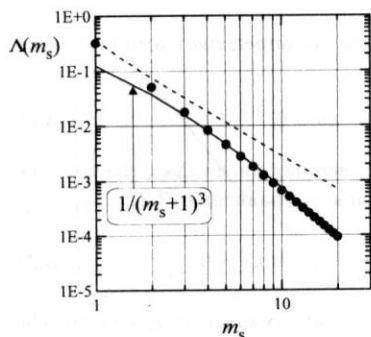


Рис. 2. Зависимости нижней  $((\Lambda_m)_{min};$  жирные точки) и верхней  $((\Lambda_m)_{max};$  пунктир) границ относительного инкремента head-tail неустойчивости  $(\Lambda_m)$  от номера мультипольности синхротронных колебаний  $(m_s)$

Замена  $R_0/\nu_z$  на  $\beta_z$  проведена не случайно. Такой результат сохраняется и при более общем рассмотрении. Зависимость декремента head-tail неустойчивости от  $\beta$ -функции в месте расположения электродов описывает тот факт, что эта неустойчивость связана с возбуждением полей продольным движением сгустка.

Величина  $\delta_m$  в (3.17) будет положительна, и, следовательно, синхробетатронные моды будут устойчивы, если  $\text{Re}(m_z \Omega_m) \mu < 0$ .

Для вычисления декремента бетатронной моды удобно воспользоваться следующими соображениями. Поскольку

$$\sum_{m_s=-\infty}^{\infty} J_{m_s}^2(x) = 1,$$

легко видеть, что сумма декрементов бетатронной моды и всех синхробетатронных мод уравнения (3.6) равна нулю:

$$\sum_{m_s=-\infty}^{\infty} \delta_{m_s} = \Omega_m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{n - m_z \mu} = 0. \quad (3.19)$$

Поэтому пишем

$$\delta_{m_z, 0} = - \sum_{m_s \neq 0} \delta_{m_z, m_s}. \quad (3.20)$$

Таким образом, рассмотренная неустойчивость носит глобальный характер: при любом знаке хроматизма машины неустойчивы либо бетатронные, либо синхробетатронные когерентные колебания пучка. Подавление неустойчивых мод может осуществляться охлаждением пучка, либо разбросами частот колебаний частиц (затухание Ландау), либо с помощью пассивных или активных широкополосных демпфирующих систем.

2. Опишем, как определяются условия устойчивости пучка за счет затухания Ландау. В сгруппированном пучке требуемые разбросы частот обеспечиваются нелинейностью бетатронных, или синхротронных колебаний. Мы рассмотрим случай, когда синхротронные колебания линейны, а нелинейность вертикальных колебаний обусловлена кубической нелинейностью фокусировки. При этом частоты вертикальных

колебаний зависят от амплитуд следующим образом ( $I_x$  определяет амплитуду радиальных колебаний)

$$\omega_z(I_z, I_x) = \omega_{z0} + aI_z - bI_x, \quad ab > 0. \quad (3.21)$$

После решения уравнения (3.3) и определения собственных чисел  $\Delta\omega_m$  частоты колебаний должны вычисляться решением дисперсионного уравнения (3.2):

$$\frac{1}{\Delta\omega_m} = - \int_0^\infty \frac{I_z \partial F_0(I_z, I_x) / \partial I_z}{\omega - m_z \omega_z(I_z, I_x) - m_s \omega_s}, \quad \text{Im} \omega > 0. \quad (3.22)$$

В действительности нас интересуют не столько корни такого уравнения, сколько условия устойчивости, когда эти корни не попадают в верхнюю полуплоскость комплексной переменной  $\omega$ . Такая задача решается построением границы области устойчивости. Для этого замечаем, что (3.22) осуществляет преобразование плоскости  $\omega$  в плоскость комплексной переменной  $\Delta\omega_m$ . Поэтому уравнение граничной кривой получается устремлением в (3.22) переменной  $\omega$  к действительной оси ( $\omega \rightarrow \omega + i0$ ). Положение области устойчивости относительно граничной кривой должно, конечно, определяться дополнительно (например, построением кривой с заданным  $\text{Im} \omega > 0$ ).

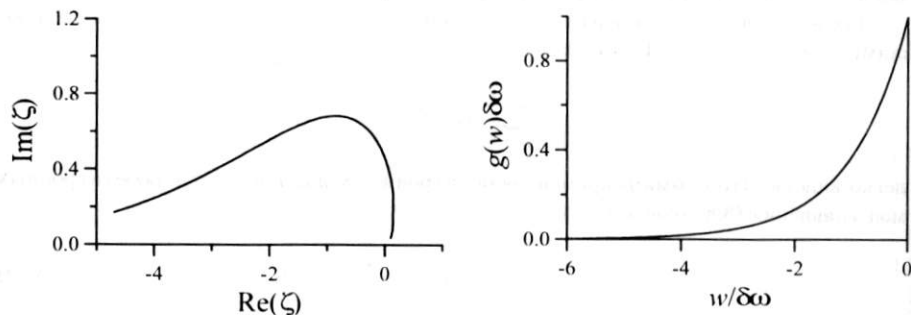


Рис. 3. Граница области устойчивости дипольных вертикальных когерентных колебаний (левый рисунок) и соответствующее распределение частот в пучке (правый). Колебания устойчивы ниже граничной кривой. Разброс частот вносится окуполом таким, что  $\delta_x \gg \delta_z$  ( $\delta_x = bI_{x0}$ ,  $\delta_z = aI_{z0}$ ); в данном случае  $\zeta = \Omega_m / \delta\omega$ , а  $\delta\omega = \delta_x$  разброс частот в пучке

Приведем несколько примеров характерных границ областей устойчивости для экспоненциального распределения действий в пучке

$$F_0 = \frac{1}{I_{z0} I_{x0}} \exp\left(-\frac{I_z}{I_{z0}} - \frac{I_x}{I_{x0}}\right).$$

В таком случае уравнение граничной кривой записывается в виде

$$\frac{1}{\Delta\omega_m(u)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw g(w)}{u - w + i0}, \quad (3.23)$$

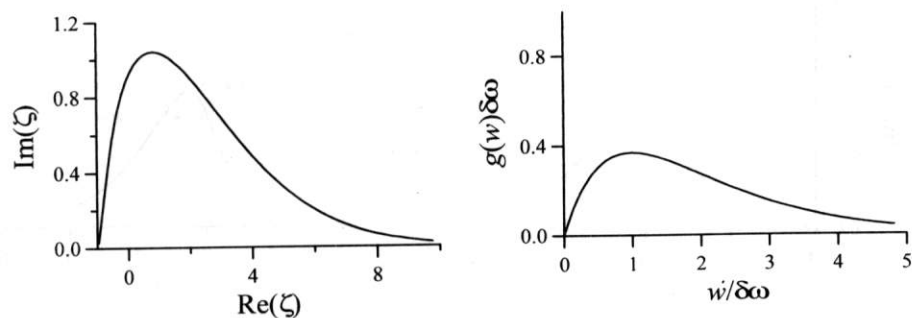


Рис. 4. Граница области устойчивости дипольных вертикальных когерентных колебаний (левый рисунок) и соответствующее распределение частот в пучке (правый). Колебания устойчивы ниже граничной кривой. Разброс частот вносится окуполом таким, что  $\delta_x \ll \delta_z$ ; в данном случае  $\zeta = \Omega_m / \delta\omega$ , а  $\delta\omega = \delta_z$

где

$$g(w) = \int_0^\infty dz z dx e^{-x-z} \delta(u - \delta_x x - \delta_z z), \quad (3.24)$$

распределение частот в сгустке,  $u = \omega - m_z \omega_{z0} - m_s \omega_s$ , а величины  $\delta_x = bI_{x0}$  и  $\delta_z = aI_{z0}$  определяют разброс частот вертикальных колебаний. Из рисунков 3 - 5 видно, что помимо ограничения величины инкрементов требование устойчивости колебаний ограничивает также допустимую величину когерентного сдвига частоты ( $\text{Re}\Delta\omega_m$ ). Видно также, что симметризация распределения частот в пучке приводит к симметризации формы границы области устойчивости.

## 4 Связь синхробетатронных мод

1. Другой вид head-tail неустойчивости может вызываться связью синхробетатронных мод пучка (Р. Кохаупт 1980 [3]). Ясно, что такие неустойчивости будут проявляться лишь при достаточно больших токах, когда величины когерентных сдвигов частот отдельных синхробетатронных мод сравниваются или превышают частоту синхротронных колебаний. В таких условиях мы уже не можем пренебрегать в уравнении (2.18) связью мод с отличающимися  $m_s$ . Поскольку такая система уравнений не может быть решена в общем виде, ниже мы рассмотрим модель, в которой

$$\rho(\varphi) = \delta(\varphi_0^2 - \varphi^2), \quad \Omega_m(n) = \frac{i\Omega_m}{\pi(n + i\Delta)}, \quad (4.1)$$

а хроматичность фокусировки равна нулю ( $dv_z/d\omega_0 = 0$ ). Влиянием разброса частот временно пренебрежем ( $d\omega_z/dI_z = 0$ ).

Поскольку в рассматриваемой модели

$$\chi_m(\varphi) = C_m \delta(\varphi_0^2 - \varphi^2), \quad (4.2)$$

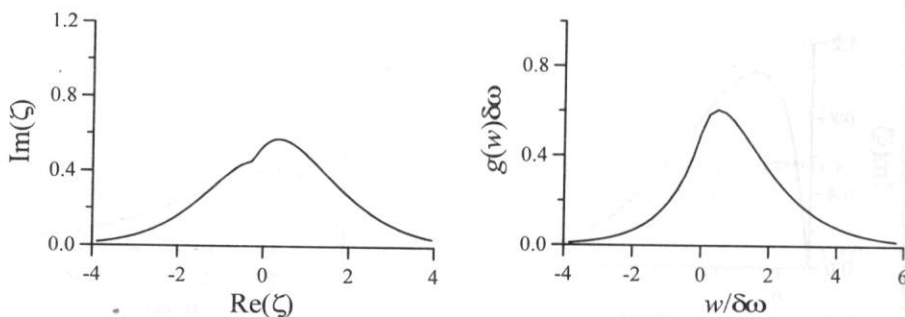


Рис. 5. Граница области устойчивости дипольных вертикальных когерентных колебаний (левый рисунок) и соответствующее распределение частот в пучке (правый). Колебания устойчивы ниже граничной кривой. Разброс частот вносится окуполом таким, что  $\delta_x = \delta_z = \delta$ ; в данном случае  $\zeta = \Omega_m / \delta\omega$ , а  $\delta\omega = 2\delta$

интегральные уравнения (2.18) заменяются бесконечной системой алгебраических уравнений для амплитуд  $C_m$

$$(\Delta\omega_m - m_s\omega_s)C_m = \frac{i\Omega_m}{\pi} \sum_{m'_s=-\infty}^{\infty} C_{m'_s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{n+i\Delta} J_{m_s}(n\varphi_0) J_{m'_s}(n\varphi_0). \quad (4.3)$$

Вводя обозначения

$$x = \frac{\Delta\omega_m}{\omega_s}, \quad w = \frac{\Omega_m}{\omega_s},$$

мы перепишем эту систему в виде

$$(x - m_s)C_m = \frac{iw}{\pi} \sum_{m'_s=-\infty}^{\infty} C_{m'_s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{n+i\Delta} J_{m_s}(n) J_{m'_s}(n). \quad (4.4)$$

Хотя дисперсионное уравнение системы (4.4) может быть найдено точно (см, например, Приложение А), полезно начать изучение особенностей решений этой системы в области  $|w| < 1$ . Мы ожидаем, что неустойчивость колебаний связана с сближением частот синхробетатронных мод. В рассматриваемой модели, в области  $0 \leq w \leq 1$  это может происходить из-за приближения частоты бетатронной моды ( $\omega \approx \omega_z + \Omega_m$ ) к частоте первой синхробетатронной моды ( $\omega \approx \omega_z + \omega_s$ ). Предполагая, что это сближение может быть учтено по теории возмущений, перепишем систему (4.4), оставив в ней лишь те слагаемые, которые описывают связь этих мод

$$\begin{aligned} xC_0 &= \frac{iw}{\pi} \left[ C_0 \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{J_0^2(n)}{n+i\Delta} + C_1 \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{J_0(n)J_1(n)}{n+i\Delta} \right], \\ (x-1)C_1 &= \frac{iw}{\pi} \left[ C_0 \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{J_0(n)J_1(n)}{n+i\Delta} + C_1 \int_{-\infty}^{\infty} dn \frac{J_1^2(n)}{n+i\Delta} \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Учитывая теперь, что

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{n + i\Delta} = \mathcal{P} \frac{1}{n} - i\pi\delta(n),$$

а также, что  $J_0(n)$  является четной, а  $J_1(n)$  - нечетной функцией, мы можем переписать уравнения (4.5) в виде

$$(x - w)C_0 = i \frac{4w}{\pi^2} C_1, \quad (4.6)$$

$$(x - 1)C_1 = i \frac{4w}{\pi^2} C_0.$$

В последние уравнения подставлено численное значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{n} J_0(n) J_1(n) = \frac{4}{\pi}.$$

Согласно уравнениям (4.6), частоты связанных мод определяются уравнением

$$(x - w)(x - 1) = -\frac{16w^2}{\pi^4}, \quad (4.7)$$

с корнями

$$x_{1,2} = \frac{1 + w}{2} \pm \sqrt{\frac{(1 - w)^2}{4} - \frac{16w^2}{\pi^4}}. \quad (4.8)$$

Обе моды устойчивы при выполнении условия

$$(1 - w)^2 - \frac{64w^2}{\pi^4} \geq 0. \quad (4.9)$$

Знаку равенства соответствует порог неустойчивости. Поскольку факт появления неустойчивых мод не зависит от знака  $w$ , пороговое соотношение можно записать в виде

$$|w| \leq w_{th}, \quad w_{th} = \frac{1}{1 + 8/\pi^2} \approx 0.552. \quad (4.10)$$

Выше этого порога частоты связанных мод совпадают (см. на Рис.6), а одна из мод колебаний становится неустойчивой. Условие устойчивости вообще не зависит от знака  $\Omega_m$  - при  $\Omega_m < 0$  неустойчивы моды бетатронная и (-1)-я синхробетатронная.

2. Если  $\Delta_1$  и  $\Delta_0$  - сдвиги частот связанных мод, то неустойчивы моды, для которых выполняется "условие суммового резонанса"

$$\omega_s \approx \Delta_1 + \Delta_0.$$

По этой причине для демпфирования неустойчивости необходимо демпфирование обеих связанных мод. Пусть, например,  $\lambda_0$  - декремент бетатронной, а  $\lambda_1$  - синхробетатронной моды. Тогда уравнение (4.7) принимает вид

$$(x - w + i\lambda_0)(x - 1 + i\lambda_1) = -\frac{16w^2}{\pi^4}. \quad (4.11)$$

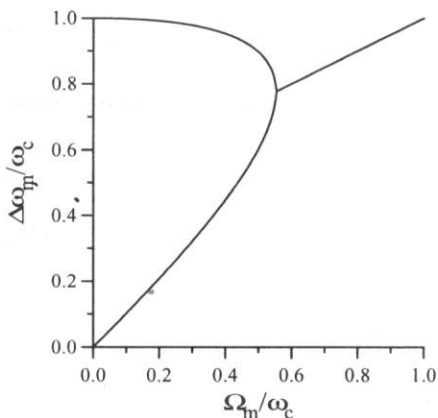


Рис. 6. Зависимости когерентных сдвигов частоты бетатронной и первых синхробетатронных мод от тока пучка ( $\Omega_m$ )

Такое уравнение имеет корни

$$x_{1,2} = \frac{1+w-i\Lambda_+}{2} \pm \sqrt{\frac{(1-w-i\Lambda_-)^2}{4} - \frac{16w^2}{\pi^4}}, \quad (4.12)$$

где  $\Lambda_{\pm} = \lambda_1 \pm \lambda_0$ . Соответственно, декременты колебаний определяются выражениями

$$-\text{Im}x = \frac{\Lambda_+}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \sqrt{X^2 + \frac{\Lambda_-^2(1-w)^2}{4}} - X \right]}, \quad (4.13)$$

$$X = \frac{(1-w)^2 - \Lambda_-^2}{4} - \frac{16w^2}{\pi^4}.$$

Как видно из этих выражений, наиболее простым является случай, когда декременты бетатронной и синхробетатронной мод равны ( $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda$ ). При этом, вместо (4.12) пишем

$$x_{1,2} = \frac{1+w}{2} - i\lambda \pm \sqrt{\frac{(1-w)^2}{4} - \frac{16w^2}{\pi^4}},$$

а пороговый ток определяется равенством

$$\lambda^2 = \frac{(1-w)^2}{4} - \frac{16w^2}{\pi^4}.$$

При произвольных величинах  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$ , но положительном  $\Lambda_+$  оба декремента положительны при выполнении условия

$$\frac{\Lambda_+}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \sqrt{X^2 + \frac{\Lambda_-^2(1-w)^2}{4}} - X \right]}.$$



Возведя обе части этого неравенства в квадрат и проводя несложные преобразования

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda_+^2}{4} + \frac{X}{2} &\geq \frac{1}{2} \sqrt{X^2 + \frac{\Lambda_-^2(1-w)^2}{4}}, \\ \left(\frac{\Lambda_+^2}{4} + \frac{X}{2}\right)^2 - \frac{X^2}{4} &\geq \frac{\Lambda_-^2(1-w)^2}{16}, \\ \Lambda_+^2 \left(\frac{\Lambda_+^2}{4} + X\right) &\geq \frac{\Lambda_-^2(1-w)^2}{4}, \\ \Lambda_+^2 \left(\frac{(1-w)^2}{4} + \lambda_0\lambda_1 - \frac{16w^2}{\pi^4}\right) &\geq \frac{\Lambda_-^2(1-w)^2}{4}, \end{aligned}$$

получим

$$(1-w)^2 \frac{\lambda_0\lambda_1}{\Lambda_+^2} + \lambda_0\lambda_1 - \frac{16w^2}{\pi^4} \geq 0. \quad (4.14)$$

Если один из декрементов равен нулю ( $\lambda_0\lambda_1 = 0$ ), это условие всегда нарушено. Поэтому, как уже говорилось, для стабилизации неустойчивости связанных мод необходимо демпфирование обеих мод. При выполнении условия (4.14) бетатронная и первая синхробетатронная моды затухают. Это, однако, только отодвигает порог неустойчивости, который теперь будет определяться присоединением к моде второй синхробетатронной моды. Повышение порога устойчивости новой конфигурации, в свою очередь, требует демпфирования этой моды.

3. В заключение этого раздела обсудим влияние затухания Ландау на устойчивость связанных синхробетатронных мод. В используемой здесь модели и для дипольных поперечных колебаний оно описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} C_0[1 - wD(x)] &= \frac{4iw}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{2k+1}M_{2k+1}}{(2k+1)^2}, \\ C_{2k+1} &= \frac{4iw}{\pi^2} \frac{C_0D(x)}{(2k+1)^2} + \frac{4iw}{\pi^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{C_{2p}M_{2p}}{(2k+1)^2 - 4p^2}, \\ C_{2p} &= \frac{4iw}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{2k+1}M_{2k+1}}{(2k+1)^2 - 4p^2}, \\ C_{-2k-1} &= -C_{2k+1}, \quad C_{-2p} = C_{2p}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где  $M_p = D(x-p) + D(x+p)$ . Эти уравнения, однако, не могут быть решены так же легко, как те, что описывали спектры колебаний в отсутствие разброса частот. По этой причине ниже мы перейдем к изучению решений приближенных уравнений, которые получаются обрывом системы (4.15) на некотором  $m_s = M$ . В последнем случае уравнения (4.15) заменяются следующими

$$\sum_{m'_s=0}^M Q_{m_s, m'_s}(x) C_{m'_s} = 0,$$

а дисперсионное уравнение записывается в виде

$$\Phi(x) = \det(\mathbf{Q}(x)) = 0. \quad (4.16)$$

Условие устойчивости мод, описываемых этим уравнением, может быть получено с помощью так называемого критерия Найквиста. Этот критерий основан на вычислении набега фазы  $\Phi(x)$  при изменении  $x$  вдоль (и слегка выше) действительной оси. Если функция распределения пучка является несингулярной функцией  $I$ , то  $F$  и  $\Phi$  — также несингулярные функции в верхней полуплоскости комплексной переменной  $x$ . По этой причине, а также поскольку

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Phi(x) = 1,$$

число корней дисперсионного уравнения в верхней полуплоскости  $x$  равно упомянутому набегу фазы  $\Phi$ , деленному на  $2\pi$ . Функция  $\Phi(x)$  отображает действительную ось  $x$  в некоторую замкнутую кривую в плоскости комплексной переменной  $\Phi$  (так называемый годограф  $\Phi$ ). Критерий Найквиста утверждает, что моды устойчивы, если годограф  $\Phi$  не охватывает начало координат.

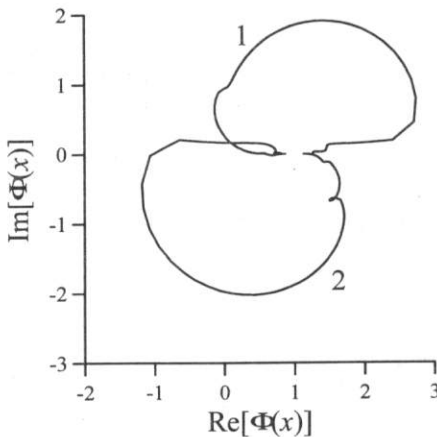


Рис. 7. Годограф  $\Phi(x)$  для дисперсионного уравнения (4.16). Годограф 1 соответствует следующим параметрам:  $\omega_s = 3 \times \delta\omega_z$ ,  $\Omega_m = 1.7 \times \delta\omega_z$ . Он не охватывает начало координат. В этом случае колебания устойчивы. Годограф 2 соответствует неустойчивым колебаниям. Он вычислен для  $\omega_s = 3 \times \delta\omega_z$ ,  $\Omega_m = -1.7 \times \delta\omega_z$ .

Для упрощения вычислений мы рассмотрим один из наиболее простых случаев, когда  $\omega_z$  линейно изменяется с  $I$  ( $\omega_z = \omega_{z0} + \kappa I$ ,  $\kappa = \partial\omega_z/\partial I_z$ ), а  $f_0$  является показательной функцией ( $f_0 = \exp(-I/I_0)/I_0$ ). При этом

$$\begin{aligned} D(x) &= \int_0^\infty du \frac{ue^{-u}}{x - zu + i\Delta}, \quad z = \frac{\delta\omega_z}{\omega_s}, \quad \delta\omega_z = \kappa I_0, \\ &= ve^{-v}[\text{Ei}(v) - i\pi\theta(v)] - 1, \quad v = x/z, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где  $\text{Ei}(x)$  — так называемая интегральная показательная функция

$$\text{Ei}(x) = - \int_{-x}^\infty dt \frac{e^{-t}}{t},$$

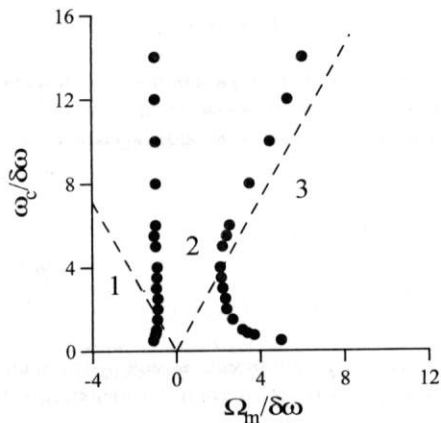


Рис. 8. Граница области устойчивости связанных синхробетатронных мод (точки), вычисленная с учетом разброса частот бетатронных колебаний ( $\omega_z = \omega_{z0} + I_z(\partial\omega_z/\partial I_z)$ ). Сплошная линия представляет границу области устойчивости, определяемую условием (4.10). Колебания неустойчивы в областях 1 и 3

а

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 1, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Два таких годографа приведены в качестве примера на Рис.7. Как видно, годограф 1, соответствующий положительному когерентному сдвигу частоты, не окружает начала координат, что соответствует устойчивым модам. Численное значение  $w$  в этом случае не противоречит порогу в (4.10). В противоположность этому, годограф 2 на Рис.7, вычисленный для такого же по величине но отрицательного  $w$ , соответствует неустойчивым колебаниям. Несимметрия поведения мод для положительных и отрицательных  $\Omega_m$  обязана действию разброса частот из-за нелинейности бетатронных колебаний. Напомним, что аналогичное поведение имеет граница области устойчивости несвязанных синхробетатронных мод.

Изучение поведения годографов при изменении  $\Omega_m$  и  $\omega_s$  позволяет построить границу области устойчивости, соответствующую дисперсионному уравнению (4.16). Как уже говорилось, она несимметрична относительно оси  $\Omega_m = 0$  (Рис.8)<sup>2</sup>. Кроме того, ширина полосы, в которой колебания затухают, увеличивается (при  $\Omega_m > 0$ ) в областях, где  $\omega_s \gg \delta\omega_z$  либо  $\omega_s \ll \delta\omega_z$ . Для высоких частот синхротронных колебаний условие устойчивости асимптотически приближается к определяемому (4.10). Увеличение ширины области устойчивости при малых частотах синхротронных колебаний согласуется с аналогичным поведением границы области устойчивости бетатронных колебаний. Однако очень сильное уменьшение частоты синхротронных колебаний ( $\omega_s \ll \delta\omega_z$ ) может поменять характер развития неустойчивости таким

<sup>2</sup>Форма границы области устойчивости симметризуется при симметризации функции распределения частот в пучке. Рассмотренному здесь случаю соответствует распределение частот

$$g(\omega) = - \int_0^\infty dI_z I_z \frac{\partial F_0}{\partial I_z} \delta(\omega - m_z \omega_z - \kappa I_z),$$

которое несимметрично относительно  $\omega = m_z \omega_z$  для экспоненциального распределения  $F_0$ .

образом, что поведение отдельных мод становится малосущественным. Этот случай будет рассмотрен подробнее в следующем разделе.

Причину неустойчивости бетатронной и первой синхробетатронной мод в области  $\omega_s \gg \delta\omega_z$  и  $-1 < w < 0$  иллюстрируют следующие простые вычисления. Если предположить  $|\Omega_m| \gg \delta\omega_z$ , собственные частоты задачи определяются уравнением, аналогичным уравнению (4.7)

$$\begin{aligned} 1 &= wD(x) - \frac{16w^2}{\pi^4} D(x)[D(x+1) + D(x-1)], \\ &= w_{eff}D(x), \quad w_{eff} = w \left( 1 - \frac{16w}{\pi^4} [D(x+1) + D(x-1)] \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

В силу принятого предположения можно ожидать, что инкременты мод будут малы по сравнению с величинами когерентных сдвигов частоты. В таких условиях для  $F$  можно использовать следующее приближенное выражение.

$$D(x) \simeq \frac{1}{x} - i\pi\Lambda(x), \quad \Lambda(x) = \frac{x e^{-x/z}}{z} \theta(x).$$

Корни (4.18) пишем в виде  $x = x_0 + i\delta$ , где когерентные сдвиги частот  $x_0$  определяются с помощью невозмущенного дисперсионного уравнения

$$1 - \frac{w}{x_0} + \frac{32w^2}{\pi^4} \frac{1}{x_0^2 - 1} = 0.$$

Если  $w$  отрицательно, мы должны вычислять инкременты решений с  $x_0 < 0$ , что в первом порядке теории возмущений дает

$$\delta = -\frac{16|w|}{\pi^4 z} \frac{x_0(1+x_0) \exp\left(-\frac{1+x_0}{z}\right)}{1 + \frac{16|w|}{\pi^4} \frac{x_0^2}{(1-x_0^2)^2}}. \quad (4.19)$$

Последнее выражение всегда положительно, что соответствует неустойчивым колебаниям. Мы, однако, должны отметить, что ниже порога, определяемого (4.10), а также при условии, что  $z \ll 1$  и  $|w| \gg 1$ , полученные инкременты неустойчивых мод экспоненциально малы. По этой причине можно ожидать, что положение левой границы области устойчивости будет весьма чувствительно к проявлению дополнительных механизмов демпфирования колебаний, которые не учитывались в нашем упрощенном расчете. Отметим также, что при изменении знака нелинейности магнитного поля  $\kappa$  область устойчивости отражается относительно оси  $\omega_s$ . При этом более широкой становится область устойчивости для  $\Omega_m < 0$ .

## 5 Быстрые однооборотные неустойчивости

1. Перейдем к описанию случая, когда  $|\Omega_m| \gg \omega_s$ . В этих условиях неустойчивость в пучке развивается настолько быстро, что за время нарастания колебаний частицы

не успевают заметно сместиться по фазам  $\phi$ . Развитие быстрых однооборотных неустойчивостей обладает целым рядом особенностей. Наиболее важной является отсутствие спектра нормальных колебаний. Физически этот факт заранее очевиден. Отсутствие перемешивания частиц в пучке за время развития неустойчивости приводит к разрыванию обратной связи колебаний головной и хвостовой частей пучка. По этой причине колебания головных частиц никак не связаны с колебаниями хвостовых, что обуславливает отсутствие спектра собственных мод сгустка.

Первоначально быстрые однооборотные неустойчивости обсуждались в связи с транспортировкой интенсивных пучков в линейных ускорителях (так называемый эффект прерывания пучка). Позже было выяснено, что аналогичные явления могут иметь место и для сгустков в накопителях.

Коль скоро ожидаемые времена развития неустойчивостей короче периода синхронных колебаний, уместно в качестве продольных переменных взять  $(\Delta p, \phi)$ . Для простоты, ниже мы проведём вычисления для дипольных бетатронных колебаний. Тогда, в пренебрежении продольной подвижностью частиц, основное интегральное уравнение записывается в виде  $(\omega_m = m_z \omega_z)$ :

$$(\omega - \omega_m) f_m = i f_m^{(0)} - \lambda(\phi) \sqrt{I_z} \frac{\partial F_0}{\partial I_z} \int dI'_z d\Delta p' d\phi' K(\phi - \phi') \sqrt{I'_z} f_m. \quad (5.1)$$

Здесь  $f_m^{(0)}$  — начальное значение гармоники  $f_m$ ,  $f_0 = \lambda(\phi) F_0(I_z, \Delta p)$  — функция распределения в стационарном состоянии, а

$$K(\phi - \phi') = \int_{-\infty}^{\infty} dn \Omega_{mn} e^{in(\phi - \phi')}. \quad (5.2)$$

Для упрощения вычислений мы снова воспользуемся моделью, когда

$$\Omega_{mn} = \frac{i \Omega_m}{\pi (n + m_z \nu_z + i0)}. \quad (5.3)$$

При этом, вычисление интеграла в (5.2) даёт

$$K(\phi) = \Omega_m e^{-im_z \nu_z \phi} \begin{cases} 1, & \phi \leq 0 \\ 0, & \phi > 0 \end{cases}$$

Подстановка этого выражения, а также решений в форме

$$f_m = \frac{i f_m^{(0)}}{\omega - \omega_m} - \lambda(\phi) \chi(\phi) e^{im_z \nu_z \phi} \frac{\sqrt{I_z} \partial F_0 / \partial I_z}{\omega - \omega_m}, \quad \text{Im} \omega > 0 \quad (5.4)$$

в уравнение (5.1) приводит к следующему уравнению для новой неизвестной функции  $\chi$ :

$$\chi(\phi) = i \Omega_m \int_{\phi}^{\infty} d_m^{(0)}(\phi') d\phi' + \Lambda_m \int_{\phi}^{\infty} \lambda(\phi') \chi(\phi'). \quad (5.5)$$

Здесь

$$d_m^{(0)} = \int dI'_z d\Delta p \frac{\sqrt{I'_z} f_m^{(0)}}{\omega - \omega_m} \quad (5.6)$$

– фурье-амплитуда начальной линейной плотности дипольного момента сгустка, а

$$\Lambda_m = -\Omega_m \int dI_z d\Delta p \frac{I_z \partial F_0 / \partial I_z}{\omega - \omega_m}. \quad (5.7)$$

В отличие от уравнений, которые нам приходилось решать до этого, уравнение (5.5) представляет собой неоднородное интегральное уравнение Вольтерра. Относительно этих уравнений известно, что однородные интегральные уравнения Вольтерра не имеют нетривиальных решений. Этим доказывается отсутствие спектров собственных частот быстрых неустойчивостей<sup>3</sup>.

Уравнение (5.5) решается преобразованием его в дифференциальное уравнение. После дифференцирования обеих частей получаем

$$\frac{d\chi}{d\phi} = -i\Omega_m d_m^{(0)} - \Lambda_m \lambda(\phi) \chi. \quad (5.8)$$

Записывая

$$\chi = A(\phi) \exp\left(\Lambda_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' \lambda(\phi')\right),$$

с использованием граничного условия  $A(\infty) = 0$  получаем

$$A = i\Omega_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' d_m^{(0)}(\phi') \exp\left(-\Lambda_m \int_{\phi'}^{\infty} d\phi'' \lambda(\phi'')\right)$$

или, окончательно,

$$\chi(\phi) = i\Omega_m \int_{\phi}^{\infty} d\phi' d_m^{(0)}(\phi') \exp\left(-\Lambda_m \int_{\phi}^{\phi'} d\phi'' \lambda(\phi'')\right). \quad (5.9)$$

2. Зависимость полученных решений от времени получается комбинированием выражений (5.4), (5.9) и выполнением обратного преобразования Фурье:

$$f_m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} f_m(\omega).$$

Анализ решений существенно упрощается в случае, когда можно пренебречь разбросами частот в пучке. При этом,

$$d_m^{(0)} = \frac{D_m}{\omega - \omega_m}, \quad D_m = \int dI_z d\Delta p \sqrt{I_z} f_m^{(0)},$$

а  $\Lambda_m = \Omega_m / (\omega - \omega_m)$ . Тогда, например, для амплитуды дипольного момента

$$d_m = \int dI_z d\Delta p \sqrt{I_z} f_m$$

<sup>3</sup>Последнее обстоятельство легко, впрочем, проверить прямым вычислением определителя Фредгольма (привращивание нулю этого определителя дает дисперсионное уравнение). Для уравнения (5.5) такой определитель вычисляется точно и в общем виде.

получаем:

$$d_m(\phi, t)e^{i\omega_m t} = D_m(\phi) + \lambda(\phi) \int_{\phi}^{\infty} d\phi' D_m(\phi') R_m(\phi, \phi', t),$$

$$R_m(\phi, \phi', t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} R_m(\phi, \phi', \omega), \quad (5.10)$$

$$R_m(\phi, \phi', \omega) = \frac{i\Omega_m}{\omega^2} \exp\left(-\frac{\Omega_m}{\omega} \int_{\phi}^{\phi'} d\phi'' \lambda(\phi'')\right).$$

Входящая в эти соотношения функция  $R_m(\phi, \phi', \omega)$  является резольвентой интегрального уравнения (5.5). Как известно, для задач, допускающих нахождение спектра собственных значений, особенностями резольвенты, как функции комплексной переменной  $\omega$  являются либо простые полюсы, либо полюсы конечной кратности. В отличие от этого, единственной особой точкой функции  $R_m(\omega)$  является существенно особая точка при  $\omega = 0$ . Это обстоятельство еще раз указывает на отсутствие спектра собственных частот в обсуждаемой задаче. Определённые заключения о характере развития колебаний даёт разложение функции  $R_m(\omega)$  в ряд Тэйлора

$$R_m(\phi, \phi', \omega) = \frac{i\Omega_m}{\omega^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\xi)^k}{k!} \frac{1}{\omega^k}, \quad \xi = \Omega_m \int_{\phi}^{\phi'} d\phi'' \lambda(\phi''). \quad (5.11)$$

В этом уравнении первое слагаемое описывает резонансную раскачку частиц в точке  $\phi$  частицами в точке  $\phi'$ , как если бы между ними не было промежуточных частиц. Следующее слагаемое описывает раскачку частиц в точке  $\phi$  частицами, расположенными в промежуточной точке  $\phi < \phi'' < \phi'$ , колебания которых возбуждены резонансной раскачкой частицами в точке  $\phi'$ . Это приводит к повышению порядка полюса на единицу и т.д. Таким образом, выражение (5.11) описывает резонансную раскачку колебаний частиц в точке  $\phi$  с учетом коллективной реакции промежуточных частиц.

Интеграл по  $\omega$ , определяющий функцию  $R_m(\phi, \phi', t)$ , вычисляется подстановкой разложения (5.11) в (5.10):

$$R_m(\phi, \phi', t) = \Omega_m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\xi)^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{-2\pi i} \frac{e^{-i\omega t}}{[\omega + i0]^{(k+2)}}. \quad (5.12)$$

Используя соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{-2\pi i} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^{(k+2)}} = \frac{1}{(k+1)!} \left. \frac{d^{(k+1)} \exp(-i\omega t)}{d\omega^{(k+1)}} \right|_{\omega=0} = \frac{(-it)^{(k+1)}}{(k+1)!},$$

перепишем (5.12) в виде

$$R_m(\phi, \phi', t) = -i\Omega_m t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\xi t)^k}{k!(k+1)!}. \quad (5.13)$$

Как и ожидалось, на малых интервалах времени ( $|\Omega_m t| \ll 1$ ) это выражение описывает линейный рост амплитуды колебания, специфичный для резонансной раскачки. Для выяснения обратной асимптотики ( $|\Omega_m t| \gg 1$ ) воспользуемся соотношением

$$J_1(z) = \frac{z}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{k!(k+1)!},$$

где  $J_1(z)$ -функция Бесселя порядка 1. Тогда (5.13) записывается в виде

$$R_m(\phi, \phi', t) = -i\Omega_m t \frac{J_1(2\sqrt{-i\xi t})}{\sqrt{-i\xi t}}. \quad (5.14)$$

Учитывая, что при больших  $\text{Im}z$  функция  $J_1(z)$  растет как  $J_1 \propto \exp(\text{Im}z)$ , с точностью до неэкспоненциального множителя пишем

$$R_m(\phi, \phi', t) \propto \exp\left\{\sqrt{\frac{|\Omega_m|t}{2}} \int_{\phi}^{\phi'} d\phi'' \lambda(\phi'')\right\}, \quad |\Omega_m|t \gg 1. \quad (5.15)$$

Как видно из этого выражения, в отличие от синхротронных мод, времена нарастания быстрых неустойчивостей определяются действительной частью  $\Omega_m$ , а также зависят от расстояния до головной части сгустка. Такое поведение колебаний отражает то обстоятельство, что неустойчивость обусловлена резонансной раскачкой частиц пучка впереди идущими.

3. Развитие описанной неустойчивости может ограничиваться трением (охлаждением пучка), затуханием Ландау, а также специальным разведением частот бетатронных колебаний частиц по длине сгустка ( $\omega_z(\phi)$ ). Последний механизм был предложен для подавления таких неустойчивостей в линейных ускорителях (В.Е. Балакин, А.В. Новохатский, В.П. Смирнов 1978 [4]) и по фамилиям авторов получил название БНС-подавление (BNS-damping).

Рассмотрим кратко влияние затухания Ландау и трения. Для простоты мы предположим, что затуханию Ландау обусловлено разбросом импульсов в пучке, а в качестве функции распределения по импульсам возьмём лоренцево распределение. При этом повторение вычислений п.1. с удержанием усреднения частотных знаменателей по импульсам приводит к замене в соответствующих формулах выражений  $1/(\omega - \omega_m)$  на

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta}{\pi(\Delta p^2 + \Delta^2)} \frac{d\Delta p}{[\omega - \omega_m - \kappa_p \Delta p]} = \frac{1}{\omega - \omega_m + i\delta_m},$$

$$\kappa_p = m_z \frac{d\omega_z}{d\Delta p}, \quad \delta_m = |\kappa_p| \Delta.$$

Учитывая это обстоятельство, легко убедиться в том, что, например, первое уравнение в (5.10) переписывается в виде

$$d_m(\phi, t) e^{i\omega_m t + \delta_m t} = D_m(\phi) + \lambda(\phi) \int_{\phi}^{\infty} d\phi' D_m(\phi') R_m(\phi, \phi', t). \quad (5.16)$$

Характер поведения этих решений на малых временах ( $|\Omega_m|t \ll 1$ ) совпадает с уже обсуждавшимися. На больших временах ( $\delta_m t \gg 1$ ), поскольку  $R_m$  растёт не быстрее  $\exp(\sqrt{t/\tau_m})$ , величины  $d_m(\phi, t)$  экспоненциально затухают. Это означает, что даже если  $|\Omega_m| > \delta_m$ , с течением времени разброс частот абсолютно подавляет развитие неустойчивости. При этом требование отсутствия потерь пучка лишь устанавливает нижний предел на апертуру вакуумной камеры (а также на уровень когерентного шума пучка).



Аналогичным образом действует трение. Разница заключается лишь в том, что если  $\lambda_z$ -декремент затухания вертикальных бетатронных колебаний, то при  $\lambda_z \gg \delta_m$  величина  $\delta_m$  в (5.16) должна быть заменена на  $|m_z|\lambda_z$ .

Изучение BNS-подавления вообще требует большего количества вычислений. Мы приведём критерий устойчивости для специального случая, когда  $\omega_z(\phi) = \omega_z + \kappa\phi$ , линейная плотность пучка задаётся ступенчатой функцией

$$\lambda(\phi) = \frac{1}{\phi_b} \begin{cases} 1, & |\phi| \leq \phi_b/2, \\ 0, & |\phi| > \phi_b/2, \end{cases}$$

а начальное поперечное отклонение одинаково для всех частиц пучка. Такой критерий имеет вид

$$0 \leq \frac{\text{Re}\Omega_m}{m_z \Delta\omega_z} \leq 1, \quad \Delta\omega_z = \kappa\phi_b. \quad (5.17)$$

При нарушении критерия (5.17) колебания в пучке нарастают по степенному закону.

Отсутствие спектра собственных частот у быстрых однооборотных неустойчивостей является, конечно, приближенным. В этой связи может возникнуть законный вопрос: "Нельзя ли получить уравнение (5.1) непосредственно из уравнения (2.18), а если можно, то при каких условиях?". Оказывается, что действительно можно при условии, что инкременты/декременты когерентных колебаний велики по сравнению с частотой синхротронных колебаний. Технически такие вычисления основываются на замене суммирования по  $m_s$  в (2.18) интегрированием с использованием формулы суммирования по периодам

$$\sum_{m_s=-\infty}^{\infty} A_{m_s} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dm_s A_{m_s} \exp(2\pi i l m_s).$$

При этом слагаемое с  $l = 0$  дает вклад одного периода, а остальные – вклады предыдущих и последующих (по отношению к данному) периодов. Ядро результирующего интегрального уравнения является суммой ядер Вольтерра и Фредгольма. Если неустойчивость медленная, то превалирует фредгольмовская часть – спектры колебаний хорошо определены. Наоборот, если колебания быстрые, то главной является вольтерровская часть ядра. В таком случае собственные частоты колебаний и расстояния между ними оказываются экспоненциально малыми (по параметру  $|\Omega_m|/\omega_s \gg 1$ ). Детали таких вычислений можно найти в [5].

## А К решению уравнений (4.4)

Система уравнений (4.4) может быть решена точно. Для этого заметим, что если воспользоваться соотношениями

$$J_m(0) = \delta_{m,0}, \quad J_m(-n) = (-1)^m J_m(n),$$

$$J_{-m}(n) = (-1)^m J_m(n)$$

и

$$\frac{\pi}{2}(m^2 - m'^2) \int_0^{\infty} \frac{dn}{n} J_m(n) J_{m'}(n) = \sin \left[ \frac{\pi}{2}(m - m') \right],$$

то этим уравнениям можно придать следующий вид

$$(x-w)C_0 = iW \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{2k+1}^-}{(2k+1)^2}, \quad (\text{A.1})$$

$$C_{2k+1}^- = iW \frac{2x}{x^2 - (2k+1)^2} \left[ \frac{C_0}{(2k+1)^2} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{C_{2p}^+}{(2k+1)^2 - 4p^2} \right], \quad (\text{A.2})$$

$$C_{2p}^+ = iW \frac{2x}{x^2 - 4p^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{2k+1}^-}{(2k+1)^2 - 4p^2}. \quad (\text{A.3})$$

Здесь  $W = (4w/\pi^2)$  а

$$C_{2k}^+ = C_{2k} + C_{-2k}, \quad C_{2k+1}^- = C_{2k+1} - C_{-(2k+1)}.$$

Полученная система уравнений может быть решена точно в том смысле, что она позволяет найти собственные векторы и дисперсионное уравнение задачи. Действительно, подставляя (A.3) в (A.2), перепишем это уравнение в виде

$$C_{2k+1}^- = iW \frac{2x}{x^2 - (2k+1)^2} \left[ \frac{C_0}{(2k+1)^2} + \sum_{k'=0}^{\infty} C_{2k'+1}^- \times \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2iWx}{[(2k+1)^2 - 4p^2][x^2 - 4p^2][(2k'+1)^2 - 4p^2]} \right]. \quad (\text{A.4})$$

Учитывая, что

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - 4p^2} = \frac{\pi}{4\alpha} \left[ \cot \frac{\pi\alpha}{2} - \frac{2}{\pi\alpha} \right],$$

выполним суммирование по  $p$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{[(2k+1)^2 - 4p^2][x^2 - 4p^2][(2k'+1)^2 - 4p^2]} = \\ & = -\frac{1}{2x^2(2k+1)^2(2k'+1)^2} + \frac{\pi}{4x} \frac{\cot(\pi x/2)}{[x^2 - (2k+1)^2][x^2 - (2k'+1)^2]}. \end{aligned}$$

Используя это выражение, вместо (A.4) получаем

$$\begin{aligned} C_{2k+1}^- = & -\frac{2W^2}{(2k+1)^2[x^2 - (2k+1)^2]} \frac{w}{x-w} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{C_{2k'+1}^-}{(2k'+1)^2} \\ & - W^2 \frac{\pi x \cot(\pi x/2)}{[x^2 - (2k+1)^2]^2} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{C_{2k'+1}^-}{x^2 - (2k'+1)^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Решения последних уравнений очевидны:

$$C_{2k+1}^- = \frac{A(x)}{(2k+1)^2[x^2 - (2k+1)^2]} + \frac{B(x)}{[x^2 - (2k+1)^2]^2}. \quad (\text{A.6})$$

Подстановка же (А.6) в (А.5) дает дисперсионное уравнение задачи

$$\frac{x}{w} - 1 = 2W^2 V_1(x) - \left( \frac{2W^4 \pi x \cot(\pi x/2)}{1 + W^2 \pi x \cot(\pi x/2)} V_2^2(x) \right). \quad (\text{A.7})$$

Здесь

$$\begin{aligned} V_1(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4 [x^2 - (2k+1)^2]}, \\ V_2(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 [x^2 - (2k+1)^2]^2}, \\ V_3(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[x^2 - (2k+1)^2]^3}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

С использованием соотношения

$$\tan \frac{\pi x}{2} = \frac{4x}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 - x^2}$$

функции  $V_1, V_2$  и  $V_3$  могут быть выражены через тригонометрические функции.

## Список литературы

- [1] Pellegrini C. //Il Nuovo Cimento, 1969. **64A**, P. 447.
- [2] Sands M. SLAC TN-69-8, SLAC, 1969.
- [3] Kohaupt R.D. DESY Report 80/22, 1980.
- [4] Балакин В.Е., Кооп И.А., Новохатский А.В., Скринский А.Н., Смирнов В.П. //Тр. VI Всесоюз. совещ. по ускорителям заряженных частиц, Дубна 1978, Дубна: 1979. Т.1, С. 143; Balakin V.E., Novokhatski A.V., Smirnov V.P. //Proceedings of the 12th Intern. Conf. on High Energy Accel., Fermilab, 1983. P. 119.
- [5] D. Pestrikov. //Part. Accel. **41**(1), p. 13, 1993.