

Сдвиги частот бетатронных колебаний и силы резонансов

Д.В. Пестриков

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера
СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

1 Введение

Во многих случаях движение частиц в ускорителях и накопителях заряженных частиц возмущается нелинейными полями. При этом типичным является случай, когда такое возмущение воздействует на частицу периодически, вызывая изменения положений замкнутых орбит частиц, частот колебаний относительно этих орбит и раскачивая колебания частиц. В этой связи часто появляется необходимость вычисления изменений параметров пучков и условий устойчивости частиц под действием нелинейных полей. Требуемые при этом вычисления обычно не могут быть проведены в общем виде. Поэтому влияние действия нелинейных полей на движение частиц исследуется либо по теории возмущений, либо с использованием численных методов. В последнем случае методы, основанные на применении теории возмущений, оказываются, тем не менее, полезны для проверки предсказаний программ и качественной интерпретации результатов счета.

В этой лекции мы обсудим несколько простых задач, иллюстрирующих применение теории возмущений для описания движения частиц в слабо нелинейных полях.

2 Невозмущенные колебания

1. Линейные бетатронные колебания частицы с энергией $\mathcal{E} = c\sqrt{p^2 + M^2c^2}$ около замкнутой равновесной орбиты описываются уравнениями (см., например, [1])

$$x(\theta) = \sqrt{J\beta(\theta)} \cos(\psi + \chi(\theta)), \quad x' = \frac{p_x}{p} = \frac{\beta'}{2\beta}x - R_0\sqrt{\frac{J}{\beta}} \sin(\psi + \chi(\theta)), \quad (2.1)$$

где x — радиальное смещение частицы от замкнутой орбиты (вертикальное смещение будет обозначаться через z), $x' = dx/d\theta$, $p = \gamma Mv$ — импульс частицы на замкнутой орбите. Величины $x(\theta)$ и $p_x(\theta)$ в (2.1) являются решениями гамильтоновой системы уравнений

$$x' = \frac{\partial h}{\partial p_x}, \quad p_x' = -\frac{\partial h}{\partial x}, \quad (2.2)$$

где

$$h = \frac{R_0}{2p} p_x^2 + \frac{p}{2R_0} g(\theta) x^2, \quad (2.3)$$

функция $g(\theta)$ описывает жесткость фокусировки. Если период магнитной системы равен θ_0 , то $g(\theta) = g(\theta + \theta_0)$. В качестве независимой переменной в уравнениях (2.2) используется обобщенный азимут частицы $\theta = s/R_0$, а $2\pi R_0$ — периметр орбиты. При этом $\psi = \nu\theta + \psi_0$, а периодические функции $\beta(\theta) = \beta(\theta + \theta_0)$ и $\chi(\theta) = \chi(\theta + \theta_0)$ описывают модуляцию амплитуд и фаз бетатронных колебаний за счет азимутальной неоднородности фокусировки. Эти функции удовлетворяют уравнениям

$$\chi' + \nu = \frac{R_0}{\beta(\theta)} \quad (2.4)$$

и

$$\beta'' - \frac{(\beta')^2}{2\beta} + 2g(s)\beta = \frac{2R_0^2}{\beta(s)}. \quad (2.5)$$

Из уравнения (2.1) видно, что величина J является интегралом движения

$$J = \frac{x^2}{\beta} + \frac{\beta}{R_0^2} \left(x' - \frac{\beta'}{2\beta} x \right)^2. \quad (2.6)$$

Легко убедиться в том, что формулы (2.1) осуществляют каноническое преобразование от переменных (p_x, x) к переменным действие-фаза (I, ψ) , $I = Jp/2$. Действительно, поскольку $(\phi = \psi + \chi(\theta))$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial I} &= \sqrt{\frac{\beta \cos \phi}{J/2}}, & \frac{\partial x}{\partial \psi} &= -\sqrt{J\beta} \sin \phi, \\ \frac{\partial p}{\partial I} &= -p \frac{R_0 \sin \phi}{2\sqrt{J\beta}}, & \frac{\partial p}{\partial \psi} &= -p R_0 \sqrt{\frac{J}{\beta}} \cos \phi. \end{aligned}$$

вычисление скобки Пуассона $[p, x]$ дает

$$[p, x] = \frac{\partial p}{\partial I} \frac{\partial x}{\partial \psi} - \frac{\partial p}{\partial \psi} \frac{\partial x}{\partial I} = 1.$$

Производящая функция такого преобразования $(S(x, \psi, \theta))$ находится решением уравнения Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} + \frac{R_0}{2p} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{pg(\theta)x^2}{2R_0} = 0. \quad (2.7)$$

Полагая

$$S = p \frac{x^2 v'(\theta)}{2R_0 v(\theta)}, \quad (2.8)$$

находим, что $v(\theta)$ удовлетворяет уравнению, совпадающему с (2.2)

$$v'' + g(\theta)v = 0.$$

Поэтому можем написать

$$v = \sqrt{J\beta(\theta)} \cos \phi, \quad \phi = \psi + \chi(\theta), \quad \psi = \nu\theta + \psi_0.$$

Подстановка этого выражения в(2.8) дает

$$S = p \frac{x^2}{2R_0} \left(\frac{\beta'}{2\beta} - R_0 \frac{\tan(\phi)}{\beta} \right). \quad (2.9)$$

При этом

$$\frac{p_x}{p} = \frac{1}{p} \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\beta'}{2\beta} x - \frac{R_0}{\beta} x \tan \phi, \quad I = -\frac{\partial S}{\partial \psi} = \frac{x^2 p}{2\beta \cos^2 \phi},$$

а гамильтониан в новых переменных ($h + \partial S / \partial \theta$) равен

$$h(I, \psi) = \frac{p\nu x^2}{2\beta \cos^2(\phi)} = \nu I, \quad (2.10)$$

если $x = \sqrt{J\beta} \cos \phi$.

Для численного моделирования бывает удобнее представить уравнения (2.1) в матричной форме. Для этого выразим J и ψ_0 через p и x в некоторой начальной точке орбиты θ_{in} :

$$x_0 = \sqrt{J\beta_0} \cos \psi_0, \quad p_0 = \frac{\beta'_0}{2\beta_0} x_0 - R_0 \sqrt{\frac{J}{\beta_0}} \sin \psi_0.$$

После этого пишем ($\Delta\phi = \phi(\theta) - \phi(\theta_{in})$)

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \sqrt{J\beta(\theta)} \cos[\Delta\phi + \psi_0] = \sqrt{J\beta} \cos(\Delta\phi) \cos \psi_0 - \sin(\Delta\phi) \sin \psi_0 \\ &= x_0 \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}} \left(\cos(\Delta\phi) - \frac{\beta'_0}{2R_0} \sin(\Delta\phi) \right) + p_0 \frac{\sqrt{\beta\beta_0}}{R_0} \sin(\Delta\phi). \end{aligned}$$

Аналогично

$$p(\theta) = -x_0 \frac{1 + \beta'\beta'_0/(4R_0^2)}{\sqrt{\beta\beta_0}/R_0} \sin(\Delta\phi) + p_0 \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta}} \left(\cos(\Delta\phi) + \frac{\beta'}{2R_0} \sin(\Delta\phi) \right).$$

Введя теперь векторы

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} x \\ p_x/p \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

мы можем переписать полученные формулы в виде

$$\mathbf{z}(\theta) = \mathbf{M}(\theta, \theta_{in}) \mathbf{z}(\theta_{in}), \quad (2.12)$$

где \mathbf{M} – матрица, переводящая решение из точки θ_{in} в точку θ ,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}} \left(\cos(\Delta\phi) - \frac{\beta'_0}{2R_0} \sin(\Delta\phi) \right), & \frac{\sqrt{\beta\beta_0}}{R_0} \sin(\Delta\phi) \\ \frac{1 + \beta'\beta'_0/(4R_0^2)}{\sqrt{\beta\beta_0}/R_0} \sin(\Delta\phi), & \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta}} \left(\cos(\Delta\phi) + \frac{\beta'}{2R_0} \sin(\Delta\phi) \right) \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Это выражение существенно упрощается для перехода на период магнитной структуры, когда $\beta(\theta_0 + \theta_{in}) = \beta_0$. Для этого случая полагают $\Delta\phi = \mu$ и, соответственно пишут

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos \mu - \frac{\beta'_0}{2R_0} \sin \mu, & \frac{\beta_0}{R_0} \sin \mu \\ \frac{1 + \beta_0'^2 / (4R_0^2)}{\beta_0 / R_0} \sin \mu, & \cos \mu + \frac{\beta'_0}{2R_0} \sin \mu \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Поскольку $\mathbf{M}(\theta, \theta')$ осуществляет каноническое преобразование $\mathbf{z}(\theta') \rightarrow \mathbf{z}(\theta)$, $|\mathbf{M}| \equiv \text{Det} \mathbf{M} = 1$. Кроме того, по определению

$$\mathbf{M}(\theta_2 + \theta_1, \theta) = \mathbf{M}(\theta_2, \theta_1) \mathbf{M}(\theta_1, \theta), \quad \mathbf{M}^{-1}(\theta, \theta') = \mathbf{M}(\theta', \theta).$$

Для одномерных колебаний преимущества использования гамильтонова формализма могут показаться не столь яркими. Однако уже анализ линейных связанных колебаний частиц демонстрирует значительные вычислительные выгоды применения такого подхода (см., например, [1]).

3 Возмущения бетатронных колебаний

1. Гамильтоновость системы (2.2) (и других уравнений, описывающих невозмущенные колебания частиц) существенно упрощает анализ действия возмущающих полей. Положим, например, что возмущения радиальных колебаний описываются силой F_x . Тогда полная система уравнений (2.2) записывается в виде

$$x' = \frac{\partial h}{\partial p_x}, \quad p'_x = -\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{F_x}{\omega_0}, \quad (3.1)$$

где ω_0 — частота обращения частицы. Для получения уравнений в переменных действие-фаза пишем

$$I' = \frac{\partial I}{\partial x} x' + \frac{\partial I}{\partial p_x} p'_x = [h; I] + \frac{\partial I}{\partial p_x} \frac{F_x}{\omega_0}. \quad (3.2)$$

Учитывая, что I является интегралом движения невозмущенных колебаний ($[h; I] = 0$), а также, что $\partial I / \partial p_x = [I, x] = \partial x / \partial \psi$, перепишем (3.2) в виде

$$I' = \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{F_x}{\omega_0}.$$

Аналогичным образом получим ($I = pJ/2$)

$$\psi' = \nu + \frac{\partial \psi}{\partial p_x} \frac{F_x}{\omega_0} = \nu - \frac{\partial x}{\partial J} \frac{2R_0}{pv} F_x.$$

Таким образом, в переменных действие-фаза уравнения (3.1) записываются в виде

$$J' = \frac{2R_0}{pv} \frac{\partial x}{\partial \psi} F_x, \quad \psi' = \nu - \frac{2R_0}{pv} \frac{\partial x}{\partial J} F_x. \quad (3.3)$$

Если сила \mathbf{F} имеет потенциал $\mathbf{F} = -\partial U/\partial \mathbf{r}$, то поскольку

$$\frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial J} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial J},$$

уравнения (3.3) еще больше упрощаются:

$$J' = -\frac{2R_0}{pv} \frac{\partial U}{\partial \psi}, \quad \psi' = \nu + \frac{2R_0}{pv} \frac{\partial U}{\partial J}. \quad (3.4)$$

В этом случае возмущенные колебания описываются гамильтонианом ¹

$$h = \nu J + \frac{2R_0}{pv} U(I, \psi, \theta). \quad (3.5)$$

2. В большинстве интересных случаев ни уравнения (3.3), ни уравнения (3.4) не могут быть решены в общем виде. Поэтому если не ограничиваться численными решениями, то исследование таких уравнений требует применения теории возмущений. Во многих случаях это оправдано еще и тем, что воздействие возмущений на колебания мало само по себе. Особенностью движения частиц в ускорителе является периодичность прохождения частицами участка орбиты, содержащего возмущение. По этой причине возмущающая сила, или ее потенциал, является периодической функцией азимута θ и фаз колебаний ψ . Это обстоятельство делает естественным применение в качестве теории возмущений метода усреднения [2]. ²

Суть метода усреднения состоит в следующем. Полагая, что возмущение F_x мало (например, $F_x \sim \epsilon$, $|\epsilon| \ll 1$), ищем решения уравнений (3.3) в виде рядов по степеням ϵ :

$$J(\theta) = J_0 + J_1 + \dots, \quad J'_0 = 0,$$

$$\psi(\theta) = \nu\theta + \psi_0 + \psi_1 + \dots, \quad \psi'_0 = 0,$$

из (3.3) получим уравнения первого приближения

$$J'_1 = -\frac{2R_0}{pv} \sqrt{J_0 \beta} \sin \phi F_x(J_0, \nu\theta + \psi_0, \theta), \quad (3.6)$$

$$\psi'_1 = -\frac{2R_0}{pv} \sqrt{\frac{\beta}{J_0}} \cos \phi F_x(J_0, \nu\theta + \psi_0, \theta).$$

Здесь $\phi = \psi + \chi(\theta)$. Изменение, например, J_1 в первом приближении по ϵ можно оценить, если проинтегрировать первое уравнение в (3.6). Для этой цели правую

¹Гамильтоновость системы является важным свойством. В общем случае решения уравнений движения определяют некоторое преобразование начальных условий в мгновенную точку фазового пространства. Для гамильтоновой системы такое преобразование является каноническим. Это означает, что якобиан преобразования $[D(I(\theta), \psi(\theta))/D(I(0), \psi(0))]$ равен единице. Помимо прочего это позволяет отсеивать различного рода спекуляции о возможности охлаждения пучков внешними (хотя и сложно устроенными) полями.

²Более современное изложение теории возмущений для нелинейных систем можно найти, например, в книге [3].

часть уравнения удобно представить рядом Фурье

$$V(J_0, \theta) = \frac{2R_0}{pv} \sqrt{J_0 \beta} \sin \phi F_x(J_0, \nu\theta + \psi_0, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_{m,n} e^{i(m\nu-n)\theta + im\psi_0}. \quad (3.7)$$

Тогда результат интегрирования записывается в виде

$$\Delta J_1(\theta) = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{im\psi_0} V_{m,n}(J_0) \frac{e^{i\theta[m\nu-n]} - 1}{i[m\nu-n]} + \kappa.c. \quad (3.8)$$

Из последнего выражения видно, что изменение J за счет возмущения сведется к малым биениям J вокруг среднего значения $\langle J \rangle = J_0$, если ряд в (3.8) не содержит нулевых $m = 0$ и $n = 0$, а также резонансных $m\nu = n$ гармоник. Как видно из выражения (3.7), гармоника с $m = 0$ может появиться в правой части (3.8) только для сил трения, когда $F_x^{(-)} = [F_x(x, p_x, \theta) - F_x(x, -p_x, \theta)] \neq 0$. Для гамильтоновых сил ($F_x^{(-)} = 0$) такая гармоника равна нулю, а систематическое изменение J возможно лишь за счет резонансных слагаемых.

Точно так же, систематическое изменение ψ_1 определяется медленными слагаемыми разложения

$$Q = \frac{2R_0}{pv} \sqrt{\frac{\beta}{J_0}} \cos \phi F_x(J_0, \nu\theta + \psi_1, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_{m,n} e^{i(m\nu-n)\theta + im\psi_1}. \quad (3.9)$$

Это выражение содержит нулевую гармонику $m = 0$, если для произвольных x $F_x(x, p_x, \theta) - F_x(-x, p_x, \theta) \neq 0$. Для гамильтоновых сил и в нерезонансном случае это единственное медленное слагаемое в правых частях уравнений (3.6). Выделение таких медленных слагаемых осуществляется усреднением правых частей уравнений (3.6) по достаточно протяженному интервалу времени. В результате, приходим к уравнениям

$$J' = 0, \quad \psi' = \nu - Q_{0,0}(J), \quad Q_{0,0} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta d\psi}{(2\pi)^2} Q(J, \psi, \theta). \quad (3.10)$$

Полученные уравнения описывают влияние нерезонансных возмущений на движения частиц в первом приближении метода усреднения. Видно, что в этом случае возмущение приводит лишь к сдвигам частот колебаний на величину $\Delta\nu = Q_{0,0}(J)$.

Другой важный класс медленных слагаемых в правых частях (3.6) появляется в том случае, когда частоты колебаний частиц приближаются к резонансным значениям. В простейшем случае одномерного резонанса это $\nu = n/m$. Если расстройка $\varepsilon = \nu - (n/m)$ мала, то в правых частях (3.6) будут быстроосциллирующими все слагаемые за исключением гармоник (m, n) и $(-m, -n)$. Для выделения систематических изменений амплитуд и фаз колебаний правые части (3.6) усредняют по интервалу времени такому, что

$$1/\nu < \Delta\theta < 1/\varepsilon.$$

Результатом являются уравнения

$$\begin{aligned} J' &= -V_{0,0}(J) - 2|V_{m,n}| \sin(m\psi - n\theta + \arg V_{m,n}), \\ \psi' &= \nu - Q_{0,0}(J) - 2|Q_{m,n}| \cos(m\psi - n\theta + \arg V_{m,n}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Определив теперь медленную фазу колебаний, например, соотношением $w = \psi - (n/m)\theta + \arg V_{m,n}$, получим уравнения первого приближения метода усреднения

$$J' = -V_{0,0}(J) - 2|V_{m,n}| \sin(mw), \quad w' = \varepsilon - Q_{0,0}(J) - 2|Q_{m,n}| \cos(mw). \quad (3.12)$$

В случае гамильтоновых сил ($V_{0,0} = 0$, $V_{m,n} = mQ_{m,n}$) система (3.12) получается с помощью гамильтониана

$$\mathcal{H} = \int_0^{\Delta\theta} \frac{d\theta}{\Delta\theta} h = \varepsilon J - \int dJ Q_{0,0} + 2|Q_{m,n}| \cos mw, \quad (3.13)$$

который к тому же является интегралом движения. Величины $Q_{m,n}$ определяют, насколько сильно резонансное возмущение, то есть мощности резонансов.³

Аналогичным образом получаются уравнения первого приближения метода усреднения для многомерного случая. Например, вблизи резонанса связи $m_x \nu_x + m_z \nu_z = n$ медленной фазой будет величина $w = m_x \psi_x + m_z \psi_z - n\theta$. В случае гамильтоновых сил это приводит к сохранению еще одной величины

$$C_m = \frac{J_x}{m_x} - \frac{J_z}{m_z}. \quad (3.14)$$

Поэтому вблизи суммового резонанса $m_x m_z > 0$ рост одной из амплитуд вызывает рост и второй, а вблизи разностного резонанса $m_x m_z < 0$ рост одной из амплитуд вызывает убывание второй.

4 Сдвиги частот

1. Вычислим сдвиги частот бетатронных колебаний для некоторых типичных возмущений. Одним из распространенных элементов фокусировки современных ускорителей и накопителей являются секступольные линзы. Поперечные магнитные поля в таких элементах описываются выражениями

$$H_z = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} (x^2 - z^2), \quad H_x = \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} xz, \quad (4.1)$$

а воздействие их на частицы определяется следующими компонентами силы Лоренца

$$F_x = \frac{ev}{c} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} (x^2 - z^2), \quad F_z = -\frac{ev}{c} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} xz. \quad (4.2)$$

Такая сила имеет потенциал

$$F_{x,z} = -\frac{\partial U}{\partial(x,z)}, \quad U(x,z) = -\frac{ev}{c} \frac{1}{6} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} (x^3 - 3xz^2). \quad (4.3)$$

³Любопытно отметить, что для гамильтоновой системы процедуре усреднения можно сопоставить каноническое преобразование. Так, если $h = \mathcal{H} + \Delta h$ есть мгновенный гамильтониан системы, то производящая функция такого преобразования S находится решением уравнения

$$\Delta h + \frac{\partial S}{\partial \theta} = 0.$$

Соответственно, гамильтониан (3.5) записывается в виде

$$\mathcal{H} = \nu J - \frac{e R_0}{pc} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} (x^3 - 3xz^2). \quad (4.4)$$

Поскольку это выражение нечетно по x , оно не дает вклада в сдвиги частот бетатронных колебаний синхронных частиц.

Для несинхронных частиц ($p \rightarrow p + \Delta p$) радиальные колебания совершаются от носительно замкнутой орбиты, описываемой дисперсионной функцией кольца

$$x = x_b + \eta \frac{\Delta p}{p}, \quad \eta(\theta + \theta_0) = \eta(\theta), \quad x_b = \sqrt{J\beta} \cos \phi. \quad (4.5)$$

Для таких частиц в линейном приближении по $\Delta p/p$ правая часть (4.4) записывается в виде

$$\mathcal{H} = \nu J - \frac{e R_0}{pc} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} \left(x_b^3 - 3x_b z^2 + 3\eta \frac{\Delta p}{p} [x_b^2 - z^2] \right). \quad (4.6)$$

Усреднение этого выражения по фазам бетатронных колебаний и азимуту приводит к следующим выражениям для сдвигов частот

$$\Delta \nu_{x,z} = \mp \frac{R_0 e}{2pc} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} \beta_{x,z}(\theta) \eta(\theta). \quad (4.7)$$

Зависимость частот колебаний от энергии частиц называется хроматизмом фокусировки. Поскольку угол поворота в магнитном поле убывает с ростом энергии частиц в отсутствие специальных мер частоты колебаний частиц уменьшаются с увеличением их энергии (естественный хроматизм фокусировки отрицателен). Частицы с неравновесной энергией ($p + \Delta p$) осциллируют относительно орбит, радиальное положение которых зависит от энергии частиц. При размещении на орбите секступольных градиентов, определяющие фокусировку, также зависят от энергии. Это приводит к изменению хроматизма фокусировки, описываемому формулами (4.7). Правильным размещением секступольных линз вдоль орбиты можно значительно уменьшить хроматизм кольца.

2. В качестве другого характерного примера рассмотрим возмущение колебаний частиц октупольными линзами. В этом случае поперечные поля записываются в виде

$$H_z = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 H_z}{\partial x^3} (x^3 - 3xz^2), \quad H_x = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 H_z}{\partial x^3} (z^3 - 3x^2 z), \quad (4.8)$$

а поперечные компоненты силы Лоренца получаются с помощью потенциала

$$F_{x,z} = -\frac{\partial U}{\partial(x,z)}, \quad U(x,z) = -\frac{ev}{c} \frac{1}{24} \frac{\partial^3 H_z}{\partial x^3} (x^4 - 6x^2 z^2 + z^4). \quad (4.9)$$

Это дает следующее выражение для гамильтониана \mathcal{H}

$$\mathcal{H} = \nu_x J_x + \nu_z J_z - \frac{2R_0 e}{24pc} \frac{\partial^3 H_z}{\partial x^3} (x^4 - 6x^2 z^2 + z^4).$$

Усреднение этого выражения по фазам бетатронных колебаний

$$\overline{x^4} = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} J_x^2 \beta_x^2 \cos^4 \psi = \frac{3}{8} J_x^2 \beta_x^2, \quad \overline{x^2} = \frac{J_x \beta_x}{2}$$

и азимуту приводит к следующему выражению

$$\overline{H} = \nu_x J_x + \nu_z J_z - \frac{R_0 e}{16pc} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\partial^3 H_z}{\partial x^3} \left(\frac{J_x^2 \beta_x^2 + J_z^2 \beta_z^2}{2} - 2J_x J_z \beta_x \beta_z \right). \quad (4.10)$$

Дифференцируя \overline{H} по $J_{x,z}$ получим следующие выражения для сдвигов частот

$$\Delta\nu_x = a_x J_x - b J_z, \quad \Delta\nu_z = a_z J_z - b J_x, \quad (4.11)$$

где

$$a_{x,z} = -\frac{R_0 e}{16pc} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\partial^3 H_z}{\partial x^3} \beta_{x,z}^2, \quad b = -\frac{R_0 e}{8pc} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\partial^3 H_z}{\partial x^3} \beta_x \beta_z. \quad (4.12)$$

Зависимость сдвига частоты от амплитуд вертикальных и радиальных колебаний позволяет ему принимать как положительные, так и отрицательные значения. Это обстоятельство важно в различных явлениях, обязанных резонансам колебаний частиц. Такая зависимость обуславливает также нерезонансную связь колебаний степеней свободы вблизи резонансов. Например, резонансное условие $\nu_z(J_x, J_z) = n/m$ переводит линию ν_z в полуплоскость J_x, J_z .

Расположение оккупаций в местах с ненулевой дисперсионной функцией приводит к дополнительным изменениям хроматизма фокусировки. Поскольку

$$x = x_b + \eta \frac{\Delta p}{p}, \quad x^3 \simeq x_b^3 + 3x_b^2 \eta \frac{\Delta p}{p} + 3x_b \eta \left(\frac{\Delta p}{p} \right)^2,$$

первая поправка к сдвигу частоты пропорциональна $(\Delta p/p)^2$. Это обстоятельство используется для расширения области коррекции хроматизма фокусировки в машинах с большим энергетическим аксептансом.

5 Внешний резонанс

Одним из распространенных видов измерений параметров пучков в накопителях является раскачка колебаний пучка и измерение его отклика на такое воздействие. Так или иначе, в подобных экспериментах измеряются зависимости амплитуд или фаз вынужденных колебаний от частоты раскачки – то есть резонансные кривые. В отсутствие на орбите нелинейных полей вычисление таких кривых весьма просто. В тех же случаях, когда действие на частицы нелинейных полей неустранимо, правильная интерпретация результатов измерений требует учета влияния нелинейности на измеряемые величины. Сходные задачи возникают при вычислении искажений орбиты и при изучении колебаний частиц вблизи искаженных орбит при наличии на орбите нелинейных полей.

Пусть движение частиц возмущается силой

$$F_z = F_0 \delta_T(\theta) \cos \Omega t. \quad (5.1)$$

Здесь F_0 – амплитуда раскачки,

$$\delta_T(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-in\theta}}{2\pi}$$

– периодическая δ -функция, Ω – частота раскачки. Такая сила имеет потенциал $U \cong -\zeta F_2$. Поэтому колебания частицы описываются гамильтонианом $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + U$ где слагаемое \mathcal{H}_0 описывает невозмущенные колебания частиц. Предполагая, что нелинейность колебаний может быть описана сдвигом частоты $\Delta\nu_z = aJ_z$, пишем $\mathcal{H}_0 = \nu_z J_z + aJ_z^2/2$, или (индекс z для краткости опускаем, в этом разделе $\mu = \Omega/\omega_0$)

$$\mathcal{H} = \nu J + \frac{aJ^2}{2} - F_0 \delta_T(\theta) \cos \mu\theta \sqrt{J\beta(\theta)} \cos[\psi + \chi(\theta)]. \quad (5.2)$$

Теперь, для получения уравнений в первом приближении метода усреднения мы должны отобрать в \mathcal{H} медленные слагаемые. Поскольку ($\phi = \psi + \chi(\theta)$)

$$\cos \mu\theta \cos \phi = \frac{1}{2} [\cos(\mu - \phi) + \cos(\mu + \phi)],$$

медленными будут гармоники с номерами, удовлетворяющими резонансным условиям

$$\omega_0 \nu \pm \Omega = n\omega_0. \quad (5.3)$$

Если такие резонансы хорошо разделены по частотам, то есть их ширины по частотам малы по сравнению с расстоянием до соседних резонансов, то исследование движения частиц можно проводить в приближении изолированного резонанса. Пусть, например, малой величиной является расстройка $\varepsilon = \nu - \mu - n$, $|\varepsilon| \ll 1$. Тогда усреднение гамильтониана \mathcal{H} по интервалу времени, соответствующему

$$1/\nu \ll \Delta\theta \ll 1/\varepsilon, \quad (5.4)$$

занулит в \mathcal{H} все гармоники частот обращения и частот бегатронных колебаний за исключением резонансных. После такого усреднения гамильтониан \mathcal{H} записывается в виде

$$\mathcal{H} = \varepsilon J + \frac{aJ^2}{2} + Q\sqrt{J} \cos(w). \quad (5.5)$$

Здесь $Q = |F_0 \sqrt{\beta(0)}/\pi|$ – мощность резонанса, $w = \psi - (n + \mu)\theta + \arg(Q)$ – медленная фаза колебаний, и принято, что $\chi(0) = 0$.

Гамильтониану (5.5) соответствуют уравнения движения

$$J' = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w} = Q\sqrt{J} \sin(w), \quad w' = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} = \varepsilon + aJ + \frac{Q}{2\sqrt{J}} \cos(w), \quad (5.6)$$

решения которых определяют законы движения $J = J(\theta)$, $w = w(\theta)$ и траектории частиц на фазовой плоскости. Поскольку гамильтониан \mathcal{H} сохраняется, уравнения фазовых траекторий находятся непосредственно из (5.5) и в неявной форме записываются в виде $\mathcal{H}(J, w) = C$.

В действительности нас обычно интересуют не столько законы движения частиц, сколько условия устойчивости их колебаний, резонансные кривые и размеры области фазового пространства, где могут находиться частицы. Большая часть такой информации может быть получена без непосредственного решения уравнений (5.6). Для этого заметим, что если мы положим в (5.5) $\cos w = \pm 1$, то получим две кривые

$$\mathcal{H}_{\pm} = \varepsilon J + \frac{aJ^2}{2} \pm Q\sqrt{J}. \quad (5.7)$$

При движении вдоль фазовой траектории ($\mathcal{H}(J, w) = C$) значение $\cos w$ изменяется в

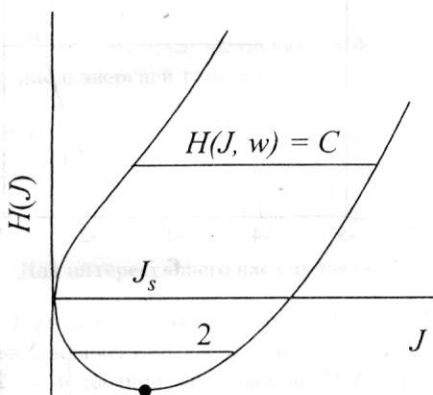


Рис. 1. Схематические зависимости гамильтонианов \mathcal{H}_{\pm} от действия частицы (J). Верхняя кривая \mathcal{H}_+ , нижняя - \mathcal{H}_- .

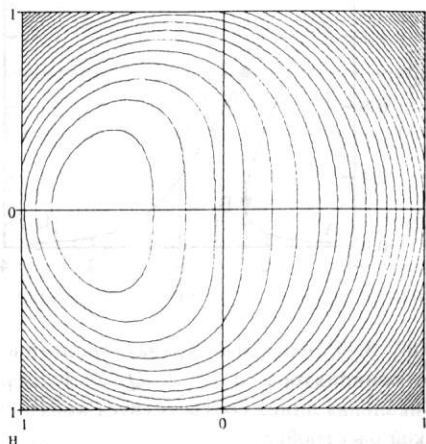


Рис. 2: Фазовые траектории в медленных переменных $x = A \cos(w)$, $p_x = -A \sin(w)$; $\varepsilon = 0$, $a = -2$

пределах, не превышающих ± 1 . Поэтому любая фазовая траектория изображается на диаграмме $\mathcal{H}_+(J)$, $\mathcal{H}_-(J)$ горизонтальной прямой (см. Рис.1). Характер этих кривых зависит от величины расстройки. Если $\varepsilon \geq 0$, то вид кривых $\mathcal{H}_{\pm}(J)$ близок к изображенному на Рис.1. При положительных величинах гамильтониана ($\mathcal{H} > 0$) любая горизонтальная прямая пересекает $\mathcal{H}_+(J)$ и $\mathcal{H}_-(J)$. Это означает, что фазовая переменная w непрерывно увеличивается - то есть движение инфинитно по w (Рис.2). По J движение финитно всегда. Это связано либо с расстройкой от резонанса, либо с зависимостью частоты колебаний от амплитуды, благодаря которой увеличение J выводит колебания частицы из резонанса. В области $\mathcal{H} \leq 0$ характер движения по w меняется. Поскольку $\varepsilon J + aJ^2/2 > 0$, ни одна горизонтальная кривая не пересекает гамильтонианов, соответствующих $\cos(w) > 0$. Это означает, что w колеблется с некоторой амплитудой возле значения $w = \pi$ (см. Рис.2). Как видно из уравнений (5.6), точки $w = 0$ и $w = \pi$, соответствующие гамильтонианам \mathcal{H}_{\pm} , являются точками остановки по J . Точки же, соответствующие экстремумам \mathcal{H}_{\pm} , являются точками устойчивого или неустойчивого равновесия системы. В области $\varepsilon \geq 0$ только \mathcal{H}_-

может достигать минимума

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{\pm}}{\partial J} = \varepsilon + aJ \pm \frac{Q}{2\sqrt{J}}.$$

Если частота раскачки (Ω) равна нулю, то устойчивые точки равновесия зада-

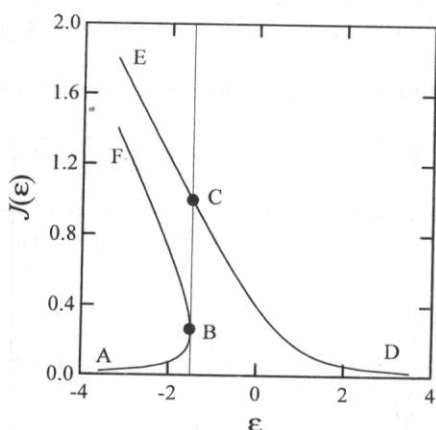


Рис. 3. Резонансная кривая нелинейного осциллятора; $a = 2$, $Q = 1$. Вертикальная линия соответствует критической расстройке

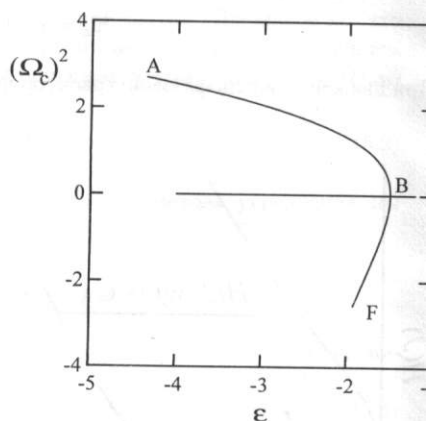


Рис. 4. Зависимость частоты малых свободных колебаний Ω_c^2 от расстройки. Уточнение АВФ резонансной кривой; $a = 2$, $Q = 1$

положение новой замкнутой орбиты. В силу резонансного условия ($2\pi\nu = 2\pi n$) такая орбита замыкается через один оборот. Если же $\Omega \neq 0$, а также не кратна $\omega_0\nu$ или $n\omega_0$, то точки равновесия определяют прецессирующие орбиты.

Области финитного и инфинитного движения по w отделяются траектории $\mathcal{H}(J, w) = 0$. Однако эта кривая не является особенной для системы (5.6). Пересечение этой кривой не изменяет геометрию фазовой плоскости (см., например, Рис.2). Видимое смещение центра плоскости связано с возбуждением вынужденных колебаний. Такое смещение имеет место и при раскачке линейного осциллятора.

Важное место в изучении влияния внешнего воздействия на нелинейный осциллятор занимает построение резонансных кривых – то есть зависимостей амплитуд вынужденных колебаний от частоты раскачки (или расстройки от резонанса). Для уравнений (5.6) амплитуды и фазы вынужденных колебаний являются точками устойчивого равновесия. Поскольку равновесные значения фазы равны $w_{\pm}^{\pm} = 0, \pi$, соответствующие им равновесные амплитуды находятся вычислением экстремумов гамилтонианов \mathcal{H}_{\pm} . Это дает следующие (неявные) уравнения резонансной кривой

$$\varepsilon = -aJ + \frac{Q}{2\sqrt{J}}, \quad \varepsilon = -aJ - \frac{Q}{2\sqrt{J}}. \quad (5.8)$$

Если $a > 0$, первое уравнение, соответствующее минимуму \mathcal{H}_- , имеет однозначные решения $J_s(\varepsilon)$ при всех ε (см. линия DCE на Рис.3). Второе уравнение в (5.8) имеет действительные решения лишь в области $\varepsilon \leq \varepsilon_{cr}$, где

$$\varepsilon_{cr} = -\frac{1}{2} \left(\frac{aQ^2}{2} \right)^{1/3}, \quad (J_s)_{cr} = \left(\frac{Q}{4a} \right)^{2/3}. \quad (5.9)$$

Как видно из Рис.3 (кривая ABF), таких действительных решений два. Вопрос о устойчивости этих решений выясняется вычислением частот малых фазовых колебаний вблизи равновесий. Для этого пишем $J = J_s + p$, $w = w_s + x$, ($|p| \ll J_s$, $|x| \ll w_s$)

$$\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}_s + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial J^2} \right)_s p^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial w^2} \right)_s x^2,$$

где производные вычисляются в точке равновесия. Сравнивая полученное выражение с энергией гармонического осциллятора ($\mathcal{E} = p^2/2M + M\Omega^2 x^2/2$), получаем выражения для эффективной массы и частоты малых фазовых колебаний осциллятора вблизи данной точки равновесия

$$\frac{1}{M_{eff}} = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial J^2} \right)_s, \quad \Omega_c^2 = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial J^2} \right)_s \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial w^2} \right)_s. \quad (5.10)$$

Для интересующего нас случая ($\varepsilon \leq \varepsilon_{cr}$) точки на резонансной кривой соответствуют

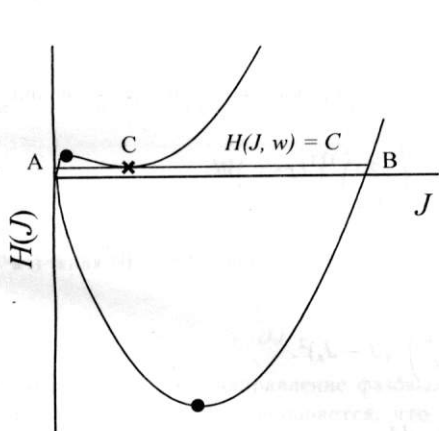


Рис. 5. Схематические зависимости гамильтонианов \mathcal{H}_\pm от действия частицы (J). Верхняя кривая \mathcal{H}_+ , нижняя \mathcal{H}_- ; $\varepsilon < 0$

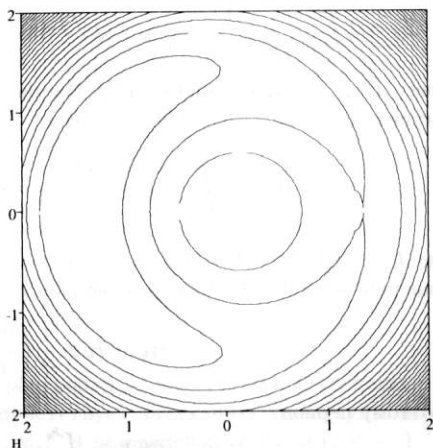


Рис. 6. Фазовые траектории в медленных переменных $x = A \cos(w)$, $p_x = -A \sin(w)$; $\varepsilon = -4$, $a = -2$, $Q = 1$

максимумам (линия AB Рис.3) и минимумам (линия BF Рис.3) гамильтониана \mathcal{H}_+

(Рис.5). Значение $\varepsilon = \varepsilon_{cr}$ является точкой перегиба кривой $\mathcal{H}_+(J)$. По этим причинам на участке АВ (Рис.3) $\Omega_c^2 \geq 0$ (Рис.4), что соответствует устойчивым точкам равновесия.

При медленном прохождении нелинейного резонанса ($\varepsilon' \ll \Omega_s$) значение установившейся амплитуды зависит от направления изменения ε . Если величина ε уменьшается начиная с некоторого положительного значения, то амплитуда установившихся колебаний следует линии DCE резонансной кривой (Рис.3). Наоборот, при сканировании резонанса снизу $\varepsilon_{in} < 0$, $\varepsilon' > 0$ изменение амплитуды установившихся колебаний следует линии ABCD. В такое поведение величины установившейся амплитуды называют гистерезисным.

Как видно на Рис.5, в области $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$ на фазовой плоскости появляется еще одна траектория, которая отделяет области финитного и инфинитного движения по w . Она определяется уравнением $\mathcal{H}(J, w) = (\mathcal{H}_+)_{min}$. В отличие от траектории $\mathcal{H}(J, w) = 0$, новая кривая (сепаратриса) содержит точку неустойчивого равновесия С (Рис.5). Поэтому такая кривая является особенной для системы (5.6). При ее пересечении направление фазовых траекторий меняется на противоположное, а точка неустойчивого равновесия является седловой точкой сепаратрисы. Период биений амплитуды колебания на сепаратрисе логарифмически растет. По этой причине движение в окрестности сепаратрисы чувствительно к возмущениям, в том числе и к тем, которые были отброшены при получении уравнений первого приближения метода усреднения.

Упомянутые периоды биения амплитуд вычисляются непосредственно интегрированием уравнений (5.6). Для этого пишем

$$T_\theta = 2 \int_{J_{in}}^{J_f} \frac{dJ}{Q\sqrt{J} \sin(w[J])}, \quad Q\sqrt{J} \sin(w[J]) = \sqrt{[\mathcal{H}_+(J) - \mathcal{H}][\mathcal{H} - \mathcal{H}_+(J)]}. \quad (5.11)$$

Здесь $J_{f,in}$ - точки остановки по J . Например, в точном резонансе $\varepsilon = 0$ период биений амплитуд на траектории $\mathcal{H} = 0$ равен

$$T_\theta = 2 \int_0^{J_c} \frac{dJ}{\sqrt{J[Q^2 - a^2 J^3/4]}} = 2 \left(\frac{2}{Q^2 a} \right)^{1/3} \int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^3 - 1}},$$

где $J_c = (2Q/a)^{2/3}$. Поскольку $t^3 - 1 = (t-1)(t^2 + t + 1)$, период $T_\theta(\mathcal{H} = 0)$ является конечной величиной. Наоборот, вблизи седловой точки

$$\mathcal{H}_+ - \mathcal{H} \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}_+}{\partial J^2} \right)_s (J - J_s)^2.$$

Поэтому период

$$(T_\theta)_c \propto \int^{J_s} \frac{dJ}{\left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}_+}{\partial J^2} \right)_s^{1/2} (J_s - J)} \quad (5.12)$$

логарифмически расходится. Период малых колебаний вблизи центра сепаратрисы очевидно равен $T_\theta = 2\pi/\Omega_c$.⁴ По этой причине ширина сепаратрисы в пространстве частот равна Ω_c .

⁴Этот факт может быть, впрочем, установлен и прямым вычислением T_θ .

1 Влияние трения

Движение частиц в электрон-позитронных машинах сопровождается потерями энергии на синхротронное излучение. При компенсации этих потерь ускоряющим напряжением энергия колебаний, тем не менее, не восстанавливается. При правильном проектировании фокусирующей системы это приводит к затуханию колебаний частиц. Настоящее время известно также значительное число методов, обеспечивающих сохранение колебаний тяжелых частиц.

Рассмотрим в этой связи действие трения на движение в окрестности изолированного нелинейного резонанса. Если принять для простоты, что сила трения пропорциональна скорости частицы (случай синхротронного излучения), то уравнения движения первого приближения метода усреднения (5.6) заменяются следующими

$$J' = -\lambda J - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w} = -\lambda J + Q\sqrt{J} \sin(w), \quad w' = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} = \varepsilon + aJ + \frac{Q}{2\sqrt{J}} \cos(w). \quad (5.13)$$

Здесь λ — декремент затухания колебаний. Уравнения (5.13) не являются гамильтоновыми. Поэтому теперь изучение особенностей движения должно основываться на следовании самих уравнений (5.13).

Для выяснения качественной картины изменения фазовых траекторий рассмотрим сначала случай, когда декременты трения малы по сравнению с частотами колебаний амплитуд ($\lambda T_\theta \ll 1$). В такой области параметров негамильтоновость системы мала, а действие трения сводится к медленному изменению гамильтониана системы. Поскольку

$$\mathcal{H}' = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} J' + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w} w' = -\lambda J \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J},$$

изменение гамильтониана за период биений равно

$$\Delta \mathcal{H} = -\lambda \int_0^{T_\theta} d\theta \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} J(\theta) = -\lambda \oint dw J(w). \quad (5.14)$$

В зависимости от величины расстройки это изменение может быть как отрицательным, так и положительным. В области $\varepsilon > \varepsilon_{cr}$ для всех w имеем

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} = \varepsilon + aJ + \frac{Q}{2\sqrt{J}} \cos(w) \geq 0.$$

Таким образом, здесь направление фазовых траекторий положительное, и согласно (5.14) гамильтониан \mathcal{H} уменьшается, что соответствует затуханию амплитуды и фазы колебаний к равновесным значениям (J_s, w_s). В резонансной области ($\varepsilon < \varepsilon_{cr}$) точек равновесия две. При больших, отрицательных значениях расстройки на диаграммах ($\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-$) кроме уже имевшихся областей 1 и 2 (см. Рис.7), в которых $\mathcal{H}/\partial J \geq 0$, появляется область 3, в которой направление фазовых траекторий обратное ($\partial \mathcal{H}/\partial J < 0$). В этом случае согласно (5.14) величина гамильтониана увеличится при движении вдоль фазовой траектории. Соответственно, колебания частицы затухают к центру сепаратрисы в области 3. Направление затухания колебаний в окрестности сепаратрисы зависит от начальных условий. Например, для случая,

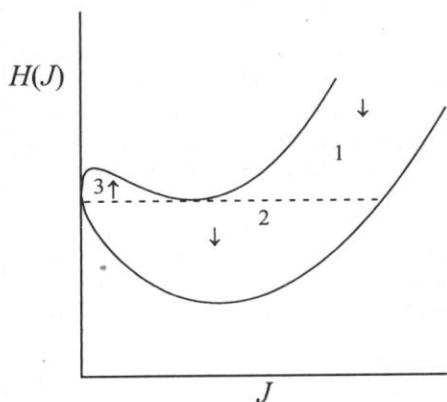


Рис. 7. Схематические зависимости гамильтонианов \mathcal{H}_{\pm} от действия частицы (J). Верхняя кривая \mathcal{H}_{+} , нижняя — \mathcal{H}_{-} ; $\varepsilon < 0$, стрелки указывают направление изменения гамильтониана

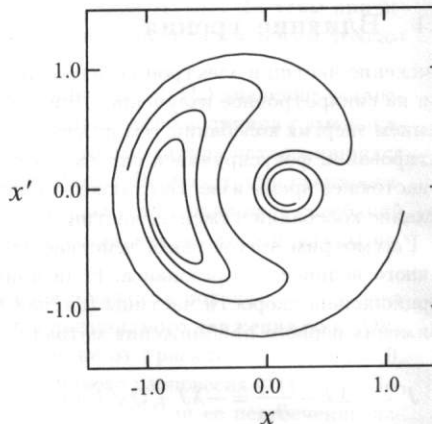


Рис. 8. Затухание колебаний к центрам сепаратрис; $\varepsilon/Q = -3$, $a/Q = 5$, $\lambda/Q = 0.25$. Для обеих траекторий начальное значение J одинаково ($J_{in} = 1.4$), а начальные значения фаз равны $w_{in} = 0$, $w_{in} = 0$

приведенного на Рис.8, затухание к малым амplitудам происходит с интервалами фаз $|w| < \pi/3$.

Как и прежде, резонансная кривая определяется точками равновесия уравнения (5.13):

$$J' = -\lambda J_s + Q\sqrt{J_s} \sin(w_s) = 0, \quad w' = \varepsilon + aJ_s + \frac{Q}{2\sqrt{J_s}} \cos(w_s) = 0.$$

Поскольку $\sin w_s = (\lambda\sqrt{J_s})/Q \leq 1$, значение J_s не может превышать $(Q/\lambda)^2$. Для дальнейших расчетов удобно провести подстановки

$$J = \frac{Q^2}{\lambda^2} u, \quad \tau = \lambda\theta, \quad \Delta = \frac{\varepsilon}{\lambda}, \quad b = \frac{aQ^2}{\lambda^3}.$$

Тогда уравнения равновесия записываются в виде $[(\cdot)' = d/d\tau]$

$$u' = -u + \sqrt{u} \sin w = 0, \quad w' = \Delta + bu + \frac{\cos w}{2\sqrt{u}} = 0, \quad (5.14)$$

а ветви резонансной кривой определяются уравнениями

$$\Delta_{\pm}(u) = -bu \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-u}{u}}. \quad (5.15)$$

Из них, в частности, следует, что в точке окончания ветвей ($u = 1$) резонанс

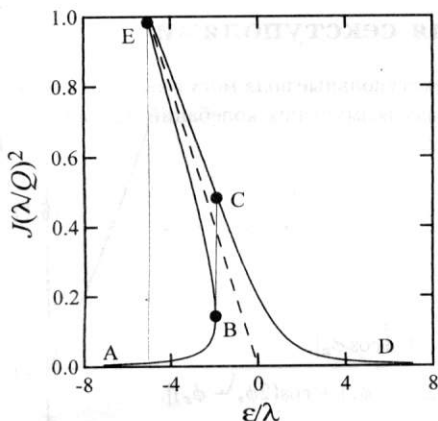


Рис. 9. Резонансная кривая внешнего резонанса с трением; $b = (aQ^2/\lambda^3) = 5$

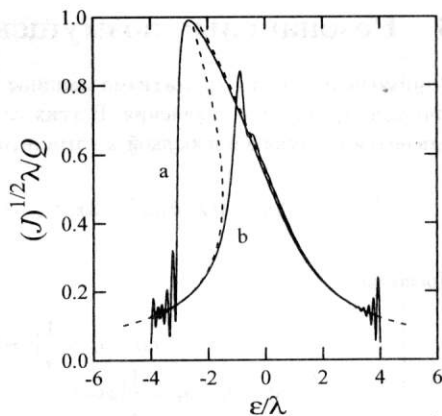


Рис. 10. Прохождение резонанса. Кривая (a) — прохождение сверху вниз; кривая (b) — снизу вверх; $b = 2.5$, $\varepsilon' = \lambda/10$. Пунктирная линия изображает резонансную кривую для этого случая

кривая достигает максимума. Поскольку ветви резонансной кривой имеют конечную точку, явление гистерезиса при прохождении резонанса появляется лишь для достаточно больших амплитуд раскачки. Действительно, ветвь $\Delta_+(u)$ имеет участок с отрицательным наклоном, если уравнение

$$\frac{d\Delta_+}{du} = -b - \frac{\Delta_+ + bu}{2u(1-u)} = 0 \quad (5.17)$$

имеет два действительных корня. Поскольку

$$u_{1,2} = \frac{3}{4} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{8\Delta_+}{9b}} \right),$$

это требует выполнения условия $(\Delta_+ < 0) b \geq 8|\Delta_+|/9$, или

$$Q \geq \frac{2\lambda}{3} \sqrt{\frac{2|\varepsilon|}{a}}. \quad (5.18)$$

Пример резонансной кривой для осциллятора с трением приведен на Рис.9. Собственно ширина резонанса задается интервалом расстроек на участке BE. Как и раньше, этот участок кривой содержит седловые точки сепаратрис. По этой причине величины установившихся амплитуд различны для прохождения резонанса снизу вверх (кривая b на Рис.10) и сверху вниз (кривая a на Рис.10). В первом случае амплитуда колебаний резко увеличивается после точки B (Рис.9), во втором, — после прохождения точки E (Рис.9) колебания срываются.

6 Резонансные возмущения секступолями

Помимо исправления хроматизма машины, секступольные поля могут вызывать многочисленные побочные явления. В этих случаях возмущения колебаний частиц описываются следующей добавкой к гамильтониану

$$\Delta h = 4G_2(\theta)(x^3 - 3xz^2), \quad G_2(\theta) = -\frac{eR_0^2}{12pc} \left. \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} \right|_{r=r_0(\theta)} \quad (6.1)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \cos^3 \phi_x &= \frac{1}{4} [\cos 3\phi_x + 3 \cos \phi_x], \\ \cos \phi_x \cos^2 \phi_z &= \frac{1}{4} [2 \cos \phi_x + \cos(2\phi_z + \phi_x) + \cos(2\phi_z - \phi_x)]. \end{aligned} \quad (6.2)$$

В первом приближении метода усреднения секступольные линзы могут возбуждать резонансы

$$\begin{aligned} \nu_x &= n, & \nu_x &= n/3, \\ \nu_x + 2\nu_z &= n, & \nu_x - 2\nu_z &= n, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где n - целые числа.

Рассмотрим сначала случай, когда $\nu_x \simeq n/3$, как наиболее простой и характерный для возмущений секступольными полями. Для этого подставим в (6.1)

$$x = \sqrt{\frac{2I\beta}{R_0}} \cos[\phi_x(\psi_x, \theta)], \quad \phi_x(\theta)' = 1/\beta_x$$

и усредним Δh , считая малой величиной расстройку от резонанса $\varepsilon = \nu_x - n/3$. После отбрасывания быстроосциллирующих слагаемых усредненный гамильтониан записывается в виде

$$\mathcal{H} = \varepsilon J + QJ^{3/2} \cos 3w. \quad (6.4)$$

где $Q = 2|V_n|$, $w = \psi_x - (n/3)\theta + \arg V_n$,

$$V_n = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} G_2(\theta) \beta_x^{3/2}(\theta) \exp[3i\phi_x(\theta)].$$

Фазовые траектории определяются уравнением $\mathcal{H}(J, w) = C$.

Условия устойчивости колебаний легко получить изучением поведения функций \mathcal{H}_{\pm} :

$$\mathcal{H}_{\pm} = \varepsilon J \pm J^{3/2} Q.$$

Пусть, например, $\varepsilon > 0$. Тогда (Рис.11) функция $\mathcal{H}_+(J)$ монотонно возрастает, а $\mathcal{H}_-(J)$ - имеет максимум при

$$J = J_c = \frac{4\varepsilon^2}{9Q^2}. \quad (6.5)$$

Таким образом, в отсутствие других нелинейностей единственной стационарной точкой вблизи резонанса $\nu = 1/3$ является точка неустойчивого равновесия (6.5). В зави-

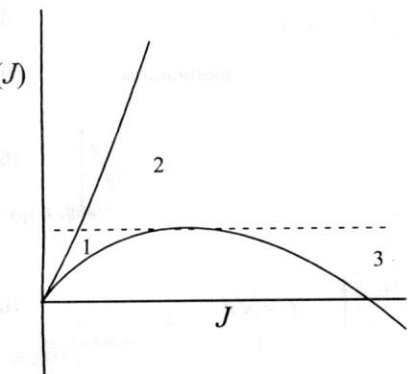


Рис. 11. Зависимости гамильтонианов \mathcal{H}_{\pm} действия; $\varepsilon > 0$, верхняя кривая соответствует \mathcal{H}_+

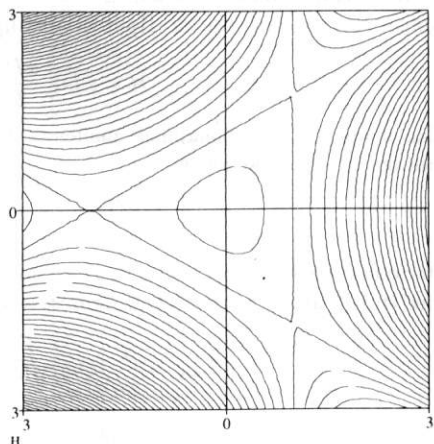


Рис. 12. Фазовые траектории в медленных переменных $x = A \cos(w)$, $p_x = -A \sin(w)$ вблизи резонанса $1/3$; $\varepsilon = 3$, $a = 0$, $Q = 1$. Центральный треугольник соответствует сепаратрисе J_c

мости от начальных условий движение может быть как устойчивым (что соответствует области 1 на Рис.11), так и неустойчивым (области 2 и 3; см. также фазовые траектории на Рис.12). Положение сепаратрисы, разделяющей фазовые траектории устойчивых и неустойчивых колебаний, определяется уравнением

$$\mathcal{H}(J, w) = \frac{4\varepsilon^3}{27Q^2}. \quad (6.6)$$

Уравнение (6.5) определяет так называемую (радиальную) динамическую апертуру фокусировки кольца в окрестности резонанса $n/3$. Поскольку $J = J_c$ является точкой устойчивого равновесия, значение апертуры в (6.5) может оказаться чувствительным к возмущениям. В этой связи может оказаться полезным уточнение величины J_c использованием второго приближения метода усреднения либо численное моделирование.

Используя выражения (6.1) и (6.2), можно найти аналогичные ограничения апертуры вблизи резонансов $\nu_x = n$ и $\nu_x + 2\nu_z = n$. Таким образом, компенсация хроматизма машины секступолями может сопровождаться уменьшением динамической апертуры кольца. Поскольку ограничение связано с резонансным возмущением колебаний частиц, такое ограничение можно ослабить специальным расположением секступолей вдоль орбиты накопителя. Пусть, например, хроматизм корректируется набором коротких секступолей ($G_2 \propto \delta(\theta - \theta_k)$, $k = 1, 2, \dots$), расположенных в местах ненулевой дисперсионной функции. Резонансные возмущения каждого такого секступоля будут компенсированы, если поместить на орбиту дополнительное семейство секступолей, расположенных в местах с тем же значением β -функции, но сдвинутых в фазе бетатронных колебаний на π .

Колебания вблизи резонанса $\nu = 1/3$ могут стабилизироваться кубической нелинейностью ведущего поля. Приняв, для простоты, $\varepsilon = \varepsilon + aJ$, пишем

$$\mathcal{H} = \varepsilon J + \frac{aJ^2}{2} + QJ^{3/2} \cos 3w. \quad (6)$$

Как и прежде, стационарные значения фаз определяются уравнением $\sin w_s = 0$, амплитуд – уравнениями

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{\pm}}{\partial J} = \varepsilon + aJ \pm \frac{3}{2} Q \sqrt{J} = 0. \quad (6)$$

Отсюда следует, что в области $\varepsilon > 0$ функция $\mathcal{H}_+(J)$ не имеет экстремумов, а функция $\mathcal{H}_-(J)$ имеет максимум и минимум в точках

$$x_{\pm} = \frac{3}{4a} \left[Q \pm \sqrt{Q^2 - \frac{16\varepsilon a}{9}} \right], \quad x = \sqrt{J}. \quad (6)$$

Это возможно лишь в интервале

$$0 < \varepsilon < \frac{9Q^2}{16a},$$

где возможно формирование сепаратрисы с центром в точке x_+ и седлом в точке x_- . При больших значениях расстройки $\varepsilon \geq 9Q^2/16a$ такая область автофазировки пропадает, а модуляция амплитуд колебаний становится тем меньше, чем больше

В области $\varepsilon < 0$ обе функции (\mathcal{H}_{\pm}) имеют минимумы в точках (Рис.13)

$$x^{(\pm)} = \frac{3Q}{4a} \left[\sqrt{1 + \frac{16|\varepsilon|a}{9Q^2}} \mp 1 \right].$$

Устойчивых точек равновесия три (Рис.14):

$$[J^{(-)}, \frac{\pi}{3}], \quad [J^{(-)}, \pi], \quad [J^{(-)}, \frac{5\pi}{3}]. \quad (6.1)$$

Они разделены седловыми точками

$$[J^{(+)}, 0], \quad [J^{(+)}, \frac{2\pi}{3}], \quad [J^{(+)}, \frac{4\pi}{3}]. \quad (6.1)$$

Как и прежде, точки устойчивого равновесия (в точном резонансе) определяют положения замкнутых орбит. Поскольку $\nu = 1/3$, эти орбиты замыкаются через три оборота.

Как уже говорилось, например, в электрон-позитронных машинах колебания частиц затухают за счет потерь энергии на синхротронное излучение. Поскольку мощность силы трения в этом случае равна $-\lambda J$, оно может подавлять резонансы третьего и более высокого порядков в области малых амплитуд колебаний. Например для резонанса $\nu = 1/3$ условие стационарности J записывается в виде

$$\sin 3w_s = \frac{\lambda}{3Q\sqrt{J_s}},$$

что выполняется лишь в области, где $J_s \geq \lambda^2/(3Q)^2$.

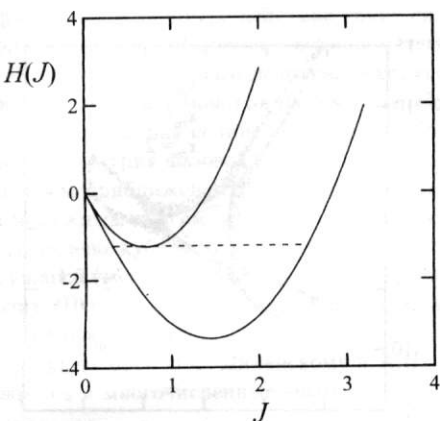


Рис. 13. Зависимости гамильтонианов \mathcal{H}_{\pm} от действия; $\varepsilon = -4$, $a = 2$, $Q = 1$ верхняя кривая соответствует \mathcal{H}_{+}

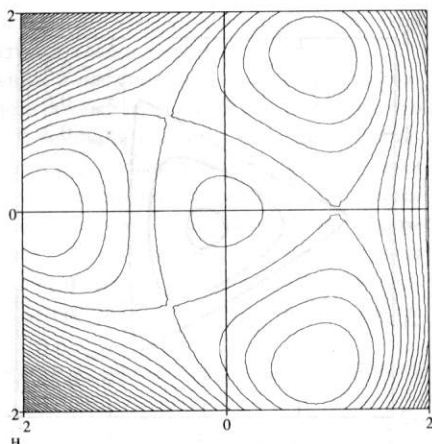


Рис. 14. Фазовые траектории в медленных переменных $x = A \cos(w)$, $p_x = -A \sin(w)$ вблизи резонанса $1/3$; $\varepsilon = -4$, $a = 2$, $Q = 1$. Центральный треугольник соответствует сепаратрисе J_c

Возвращаясь к вопросу оценки динамической апертуры кольца, заметим, что, хотя нелинейность и стабилизирует неустойчивые колебания, накопление частиц вблизи центров сепаратрис будет приводить к увеличению эффективного фазового объема пучка и, соответственно, снижать его плотность в фазовом пространстве. Если это нежелательно, то в области $\varepsilon < 0$ значение динамической апертуры следует определять меньшим корнем уравнения $\mathcal{H}_{-}(J_c) = (\mathcal{H}_{+})_{\min}$.

6.1 Моделирование

Увеличение сдвига частоты за счет кубической нелинейности, а также мощностей резонансов ограничено требованием устойчивости колебаний при возбуждении резонансов высшего порядка. Это обстоятельство можно выяснить либо вычислениями решений в более высоких порядках метода усреднений, либо используя более или менее реалистичные программы, моделирующие движение частиц в накопителе. Поскольку эти вопросы будут обсуждаться в отдельной лекции, мы коротко опишем лишь простейшие эффекты, относящиеся к колебаниям вблизи резонанса $\nu = 1/3$. Мы будем исходить из того, что моделирование действия на колебания квадратичной и кубической нелинейности ведущего поля может основываться на пооборотном преобразовании вида $(\beta x' \rightarrow x')$

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_k = \begin{bmatrix} \cos \mu & \sin \mu \\ -\sin \mu & \cos \mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' - b_2 x^2 - b_3 x^3 \end{pmatrix}_{k-1}, \quad (6.12)$$

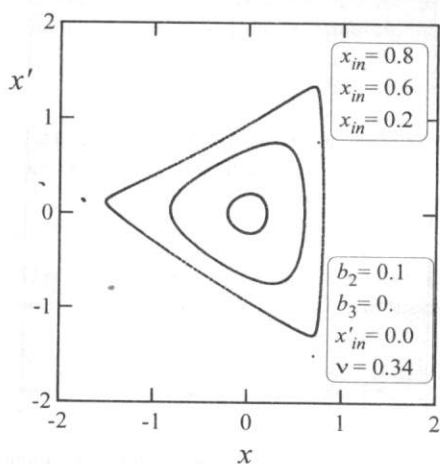


Рис. 15. Фазовые траектории вблизи резонанса $1/3$. Начальные значения x_{in} указаны снаружи внутри

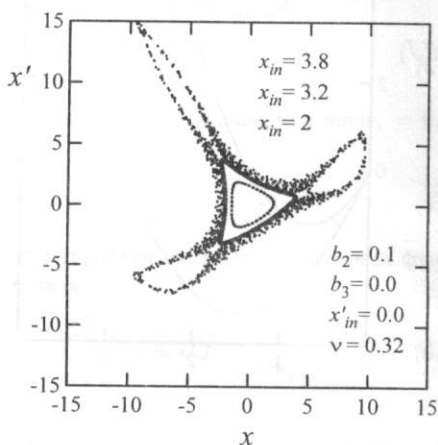


Рис. 16. Фазовые траектории вблизи резонанса $1/3$. Начальные значения x_{in} указаны снаружи внутри

где $\mu = 2\pi\nu$ — набег фазы колебаний на периоде, k нумерует пройденные частицей периоды. Пример результатов такого моделирования для случая, когда частица возмущается лишь секступольной линзой, приведен на Рис.16. В этих вычислениях начальные отклонения изменялись до тех пор, пока одна из фазовых траекторий не достигала границы области устойчивости. Видно, что геометрия центральной части фазовой плоскости (при $J < J_c$) совпадает с ожидавшейся согласно предсказаниям расчетов в первом приближении метода усреднения (Рис.15). Такое же согласие имеет место и для колебаний с частотой, превышающей резонансную $\nu > 1/3$, когда колебания с $J > J_c$ неустойчивы. Граница области устойчивости для $\nu < 1/3$ формально имеет большую ширину по амплитудам (Рис.16). Это достигается за счет формирования на больших амплитудах сепаратрис. Требуемая для этого нелинейность колебаний обеспечивается самой секступольной линзой, вызывающей сдвиг частоты колебаний во втором порядке метода усреднения. Судя по картине фазовых траекторий (Рис.15, 16), вблизи $\nu = 1/3$ этот сдвиг частоты отрицателен.⁵ Также обращает на себя внимание размытость фазовых траекторий вблизи сепаратрис. Обычно это связывается с образованием вблизи сепаратрисы так называемого стохастического слоя [4] из-за перекрытия резонансов высокого порядка. Впрочем, в реальных машинах движение частицы обычно возмущается теми или иными флуктуационными силами, которые также приводят к размытию фазовых траекторий особенно вблизи сепаратрис.

⁵Вычисление сдвига частоты за счет секступольных полей во втором приближении метода усреднения ($\Delta\nu^{(2)}$) позволяет установить, что эта величина, вообще, зависит от частот колебаний. Как и сдвиг частоты за счет октупольных полей, значение $\Delta\nu^{(2)}$ зависит от амплитуд вертикальных и радиальных колебаний частицы.

ри заданной апертуре действие таких сил определяет время жизни пучка. По этой причине время пребывания частицы в сепаратрисе также конечно.

Влияние совместного действия секступольных и октупольных полей на устойчивость колебаний демонстрируется фазовыми портретами пучка на Рис.17. Видно, что если квадратичная нелинейность мала (Рис.17), то вдали границы области устойчивости геометрия фазовой плоскости напоминает предсказывавшуюся вычислениями в первом приближении метода усреднения. Неустойчивы колебания с амплитудами наружным поясом сепаратрис, появление которых здесь в значительной степени обусловлено кубической нелинейностью. Вместе с тем, отметим, что сепаратрисы резонанса ($\nu = 1/3$) не размыты. Увеличение квадратичной нелинейности поля приводит (Рис.18) к размытию границы области устойчивости стохастическим слоем граничных сепаратрис.

Я благодарен Н.С. Диканскому и А.Н. Лебедеву за обсуждение затронутых здесь вопросов и многочисленные комментарии.

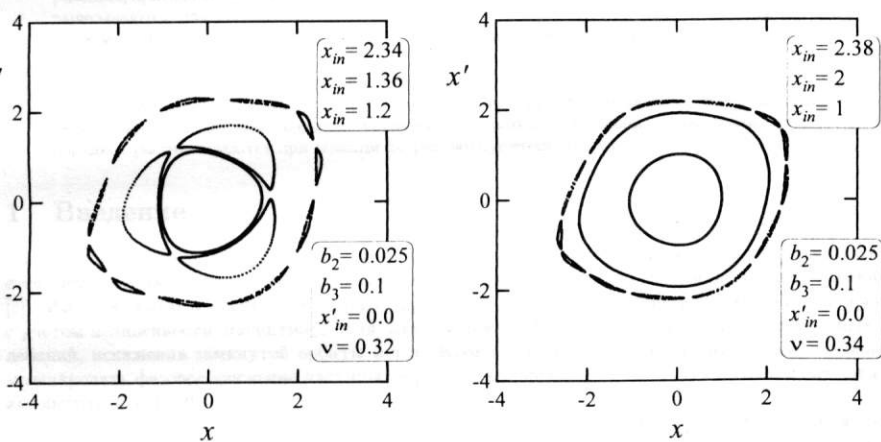
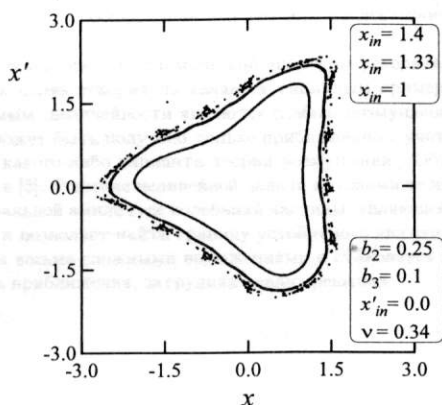


Рис. 17. Фазовые траектории вблизи резонанса $1/3$. Начальные значения x_{in} указаны снаружи внутрь

Рис. 18. Фазовые траектории вблизи резонанса $1/3$. Начальные значения x_{in} указаны снаружи внутрь



Список литературы

- [1] А.А. Коломенский, А.Н. Лебедев. Теория циклических ускорителей. ФМ, М. 1963.
- [2] Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. ФМ, М. 1963.
- [3] Г.Е.О. Джакаля. Методы теории возмущения для нелинейных систем. Наука, М. 1979.
- [4] B.V. Chirikov. Phys. Rep. 52, p.265, 1979.