

РАССЕЯНИЕ И ЗАХВАТ ЭЛЕКТРОНА ИЗОЛИРОВАННОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ СФЕРОЙ

Б.А. Князев

Новосибирский государственный университет
630090 Новосибирск, knyazev@phys.nsu.ru

Задача о движении электрона вблизи изолированной незаряженной проводящей сферы позволяет в рамках курса общей физики (3 семестр, электродинамика) закрепить основные понятия, связанные с движением в потенциальных полях, продемонстрировать принципы "обезразмеривания" физических уравнений и перекинуть мостик к атомной физике и элементарной теории газофазных реакций.

Введение

Задача, о которой пойдет речь, формально говоря, относится к набору задач, предназначенных для освоения "метода изображений" в курсе электродинамики, читаемом в третьем семестре в рамках курса общей физики. В задачнике [1] она имеет номер 2.60, а ее решение приведено в [2]. При работе со студентами, однако, выяснилось, что ряд понятий, встречающихся при решении задачи, вызывает у них определенные затруднения. С другой стороны, по ходу решения возникают ситуации, позволяющие напомнить студентам некоторые вопросы, изученные (но не всегда до конца осознанные) в курсе механики, продемонстрировать некоторые технические приемы, а также перебросить мостик в еще не изучавшиеся ими разделы физики. Подобные экскурсии позволяют выработать у студентов более цельное представление о физике, избегая превращения ее в набор "предметов".

Разберем решение задачи, обращая особое внимание на методические аспекты. Аналитическое решение задачи мы сопровождаем графиками, полученными с помощью прикладного пакета Mathcad 6.0 Plus [3]. Использование графиков облегчает восприятие полученных результатов, а расчет их на компьютере обеспечивает точность их представления. Вычисленные траектории движения электрона дают возможность зрительно воспринять их отличие от траекторий в поле, спадающем по закону обратных квадратов. Представляется, что использование подобного рода прикладных программ при подготовке к семинарским занятиям весьма перспективно.

Формулировка задачи

Найти сечение захвата электронов (заряд e , масса m , скорость на бесконечности v_0) абсолютно проводящей нейтральной закрепленной сферой радиуса a [2].

Предполагаем, что масса сферы (шара) много больше массы электрона. Тогда приведенная масса системы приблизительно равна массе электрона. Пусть далее начало координат системы центра масс совпадает с центром сферы. Электрон, находящийся на некотором расстоянии r от центра сферы, поляризует ее, индуцируя на поверхности распределение зарядов, обеспечивающее ее эквипотенциальность. Студентам уже известна задача о распределении электрического поля в пространстве для системы, состоящей из проводящей сферы и внешнего заряда (задача 2.27 из [1]). В частности, они знают (задача 24 в [2]), что реальное распределение зарядов на сфере можно заменить двумя равноименными зарядами-изображениями одинаковой величины $|e'| = |e''| = (ae/r)$, один из которых расположен в центре, а второй на расстоянии $\Delta = a^2/r$ от центра на прямой, соединяющей центр сферы и электрон (рис. 1). Поскольку поле, создаваемое зарядами, индуцированными на шаре, суммарно притягивает электрон, пролет его мимо сферы приводит либо к "рассеянию", либо к захвату электрона. Задача,

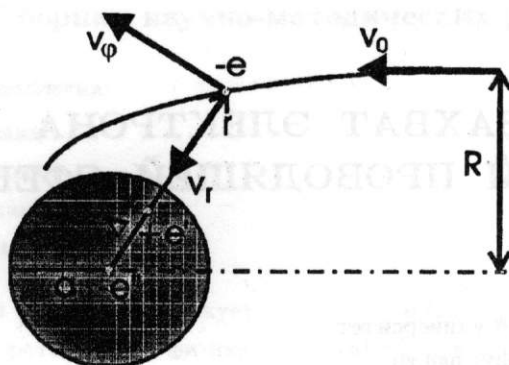


Рис. 1. Схема рассеяния электрона проводящей сферой.

которую должны решить студенты, сводится к определению условий захвата. По ходу решения, однако, встречается достаточно много поучительных моментов, поэтому данную задачу можно дать в качестве домашнего задания, а при разборе решения обсудить некоторые вопросы, о которых и пойдет речь в настоящей работе.

Вычисление потенциала взаимодействия

Поскольку все силы радиальны и лежат в одной плоскости, система является консервативной. В ней выполняются законы сохранения энергии и момента импульса при движении электрона в поле центральных сил

$$U + \frac{mv_r^2}{2} + \frac{mv_\phi^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}, \quad (1)$$

$$mv_0 R = mv_\phi r. \quad (2)$$

Следует заметить, что при вычислении потенциальной энергии электрона $U(r) = -e\varphi(r)$ легко допустить ошибку, если вычислять потенциал в месте нахождения электрона как сумму потенциалов, создаваемых двумя зарядами-изображениями

$$\varphi = \frac{ee'}{r - \Delta} - \frac{ee''}{r} = \frac{ea^3}{r^2(r^2 - a^2)} \quad (\text{неверно!}). \quad (3)$$

Здесь уместно напомнить студентам, что при введении понятия электрического поля отправной точкой является вычисление силы, действующей на заряд, иными словами, вводится вектор напряженности поля, который равен силе, действующая на единичный заряд. Потенциал же вводится (для консервативных систем) как некоторая функция, градиент которой в каждой точке пространства равен вектору напряженности электрического поля:

$$E_r = \frac{e'}{(r - \Delta)^2} - \frac{e''}{r^2} = ae \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{r}{(r^2 - a^2)^2} \right), \quad (4)$$

$$\varphi = - \int E_r dr = \frac{ea^3}{2r^2(r^2 - a^2)}. \quad (5)$$

Видно, что правильный результат отличается от неправильного в два раза.

Студенты уже изучали в курсе механики задачу о движении частицы в гравитационном (или кулоновском) поле, где вводилось, в частности, понятие эффективного потенциала. Однако, как показывают беседы со студентами, они не всегда четко осознают, что многие характеристики движения и свойства траекторий, в частности, наличие финитных эллиптических траекторий, связаны с квадратичным спадом действующей силы с расстоянием.

Эффективный потенциал

Используя закон сохранения момента импульса, исключим из (1) угловую скорость. Закон сохранения энергии тогда примет вид

$$U_{eff} + \frac{mv_r^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}, \tag{6}$$

где

$$U_{eff} = -\frac{e^2 a^3}{2r^2(r^2 - a^2)} + \frac{mv_0^2 R^2}{2r^2} \tag{7}$$

— эффективный потенциал. Видно, что введение эффективного потенциала сводит задачу к задаче об одномерном движении электрона в силовом поле по координате r .

Переход к безразмерным уравнениям

Решение уравнения (6) приводит к достаточно громоздким выражениям, поэтому удобнее перейти к безразмерным переменным. Введение таких переменных позволяет объяснить студентам основные принципы “обезразмеривания”, а также показать, что появляющиеся при этом масштабные множители определяют характерные для конкретной задачи масштабы величин. Комбинируя соответствующим образом переменные в уравнении (6), естественным образом приходим к безразмерным переменным

$$u = \frac{U_{eff}}{(e^2/a)}, \quad \tau = \frac{r}{a}, \quad \rho = \frac{R}{a}, \quad \varepsilon = \frac{(mv_0^2/2)}{(e^2/a)}.$$

Отсюда сразу видно, что размеры следует измерять в радиусах сферы, а энергии — в единицах потенциальной энергии взаимодействия двух электронов, находящихся на расстоянии a друг от друга.

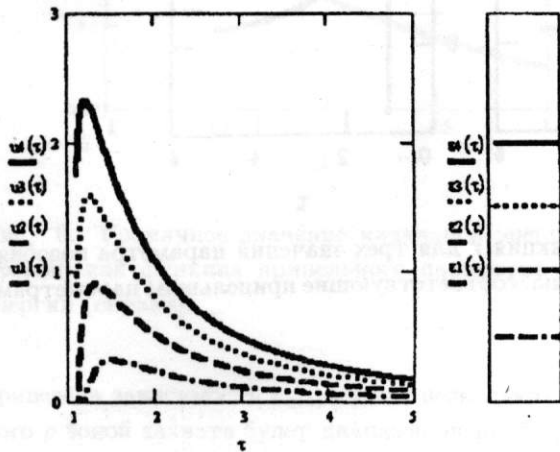


Рис. 2. Безразмерный эффективный потенциал как функция τ при одном и том же прицельном параметре $\rho = 1.5$ для четырех значений начальной энергии электрона.

В результате безразмерный эффективный потенциал принимает вид

$$u = -\frac{1}{2\tau^2(\tau^2 - 1)} + \frac{\varepsilon\rho^2}{\tau^2}. \tag{8}$$

Отсюда сразу следует, что параметром подобия для рассматриваемой задачи является величина $\varepsilon\rho^2$. Это обстоятельство дает удобный повод для объяснения, что же такое параметры подобия в физических задачах и как они позволяют повысить общность решения задачи.

Графическое представление эффективного потенциала

Используя уравнение (8), нетрудно нарисовать качественно характерный вид эффективного потенциала. Он равен нулю на бесконечности, нарастает до максимальной величины на некотором расстоянии τ_{max} от центра, а затем вблизи поверхности сферы резко стремится к минус бесконечности, что формально отвечает притяжению электрона ближайшим зарядом-изображением.

Обсуждение со студентами движения электрона в поле с описанной зависимостью потенциала от расстояния показало, что они не всегда правильно понимают смысл эффективного потенциала, — он воспринимается многими как реально существующий потенциал, что приводит к парадоксальной “зависимости” захвата электрона от энергии. Действительно, при такой интерпретации эффективного потенциала электрон с малой энергией при движении по координате τ “натывается” на барьер и отражается от него (что при реальном движении соответствует пролету мимо сферы). При повышении же энергии электрон оказывается способен преодолеть барьер, и следовательно, захватывается сферой, что явно противоречит здравому смыслу. Непонимание такого рода возникает оттого, что знакомый студентам по механике эффективный потенциал гравитационного поля вблизи поверхности возрастает и при росте энергии всегда остается отражающим (хотя, конечно, частица может попасть на притягивающую сферу, если радиус последней больше расстояния наибольшего сближения).

Для преодоления данного заблуждения полезно напомнить, что кривая эффективного потенциала сама изменяется с изменением энергии. Это ясно видно из приведенных на рис. 2 потенциальных кривых, вычисленных с помощью Mathcad. Из рисунка следует, что если даже при высоких начальных энергиях электрон отражается от барьера, то уменьшение энергии вызывает относительное уменьшение барьера, что рано или поздно приводит к захвату электрона. Таким образом, мы приходим к заключению, что эффективный потенциал изменяется с изменением энергии электрона. На рис. 3 приведены графики эффективного потенциала для трех значений параметра подобия $\varepsilon\rho^2$. На каждом из них прямыми показаны значения энергий, соответствующих двум прицельным параметрам.

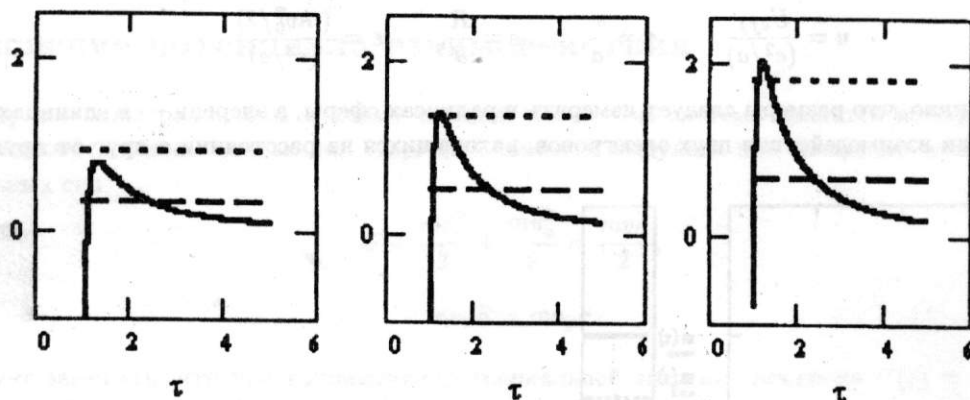


Рис. 3. Безразмерный эффективный потенциал как функция τ для трех значений параметра подобия (слева направо) $\varepsilon\rho^2 = 2, 3, 4$. Прямые — энергии электрона, соответствующие прицельным параметрам $\rho = 1.5$ (верхняя прямая) и $\rho = 2.5$.

Сечение захвата электрона

Итак, захват электрона происходит, если начальная энергия превышает высоту потенциального барьера, которая есть функция только безразмерного параметра $\varepsilon\rho^2$. Дифференцируя (8) по τ и приравнявая результат нулю, найдем положение максимума эффективного потенциала

$$\tau_{\max} = \sqrt{\frac{1 + 2\varepsilon\rho^2 + \sqrt{1 + \varepsilon\rho^2}}{2\varepsilon\rho^2}}. \quad (9)$$

Подставив в (8), получим

$$u_{\max} = \frac{2\varepsilon^2\rho^4\sqrt{1 + 2\varepsilon\rho^2}}{(1 + 2\varepsilon\rho^2 + \sqrt{1 + 2\varepsilon\rho^2})(1 + \sqrt{1 + 2\varepsilon\rho^2})} = f(\varepsilon\rho^2). \quad (10)$$

График этой зависимости представлен на рис. 4. Несмотря на свою универсальность, он не очень удобен для практического использования, поскольку задачей, представляющей практический интерес, обычно является определение вероятности захвата “силовым центром” широкого потока частиц с заданным распределением по энергиям. С этой точки зрения более удобен график (рис. 5), на котором

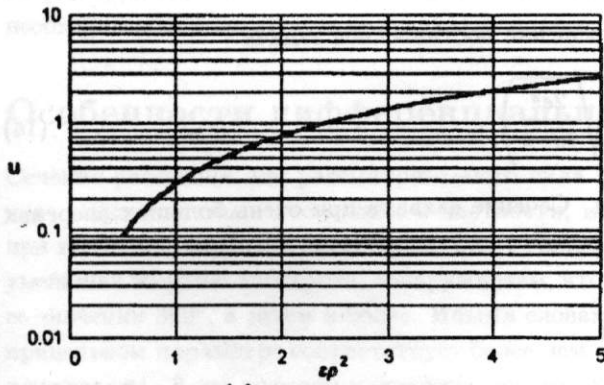


Рис. 4. Максимальное значение эффективного потенциала как функция параметра $\epsilon\rho^2$.

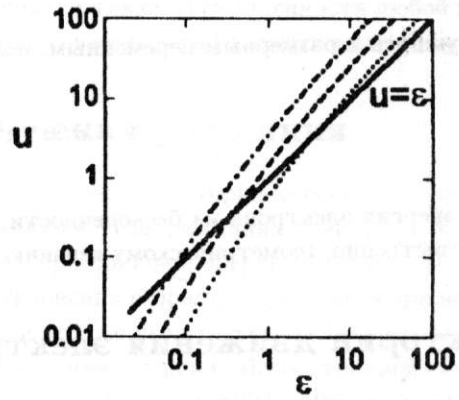


Рис. 5. Максимальное значение эффективного потенциала как функция начальной энергии электрона для трех прицельных параметров: $\rho = 1.3$ (точки), 1.8 (пунктир) и 2.5 (штрихпунктир).

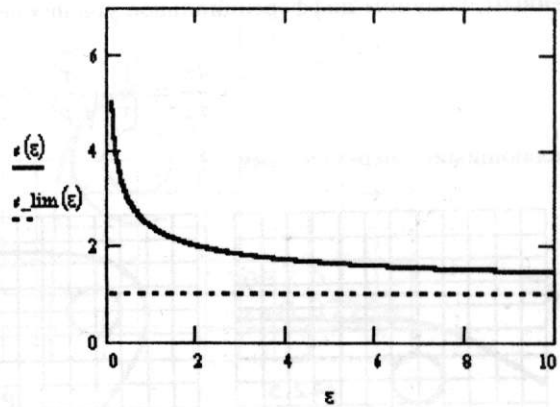
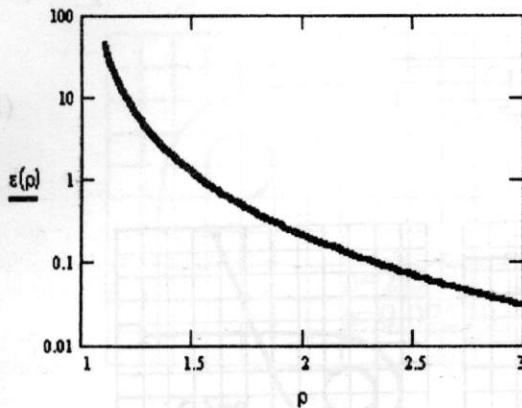


Рис. 6. Граничное значение начальной энергии электрона, ниже которой электрон захватывается сферой, как функция прицельного параметра (слева) и безразмерное сечение захвата как функция энергии (справа).

приведена зависимость $u_{max}(\epsilon)$ для нескольких фиксированных значений ρ . Для каждого фиксированного ρ зоной захвата будет диапазон энергий ϵ , лежащий ниже пересечения соответствующей кривой $u_{max}(\epsilon; \rho)$ с прямой $u = \epsilon$. Чем меньше ρ , тем выше лежит пороговая энергия захвата ϵ_c . Подставив в (10) $u_{max} = \epsilon$, получим выражение для $\epsilon_c(\rho)$

$$\epsilon_c(\rho) = \frac{2}{(\rho^2 - 1)^2}, \tag{11}$$

представленное графически на рис. 6 слева.

Из последнего выражения легко найти безразмерное сечение захвата s как функцию начальной энергии электрона

$$\rho_c^2 \equiv s = 1 + \sqrt{\frac{2}{\epsilon}}, \tag{12}$$

где s определяется через размерные переменные следующим образом

$$s = \frac{\sigma}{\pi a^2} = \frac{\pi R_c^2}{\pi a^2}. \tag{13}$$

График $s(\epsilon)$ показан на рис. 6 слева. Ее асимптотическое значение при $\epsilon \rightarrow \infty$ равно единице.

Вернувшись к размерным переменным, получим решение поставленной задачи

$$\sigma = \pi a^2 \left(1 + \sqrt{\frac{2e^2}{\epsilon_0 \cdot a}} \right), \quad (14)$$

где ϵ_0 – энергия электрона на бесконечности в эргах. Сечение захвата при очень больших энергиях равно, естественно, геометрическому сечению сферы и растет с уменьшением энергии.

Траектории движения электрона

Хотя решение поставленной задачи полностью завершается предыдущим разделом, тем не менее, кажется полезным провести точные вычисления траекторий электрона при разных начальных условиях. Траектории будем искать, исходя из параметрического уравнения траектории в полярной системе координат

$$\frac{dr}{dt} = v_r, \quad r \frac{d\varphi}{dt} = v_\varphi. \quad (15)$$

Исключая из уравнений время, получим $dr/d\varphi = (v_r/v_\varphi) \cdot r$, откуда, перейдя к тем же безразмерным переменным, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\tau}{d\varphi} = \frac{\tau}{|\tau|} \sqrt{\frac{\tau^2}{\rho^2} + \frac{1}{2\epsilon\rho^2(\tau^2 - 1)}} - 1 \quad (16)$$

с разделяющимися переменными.

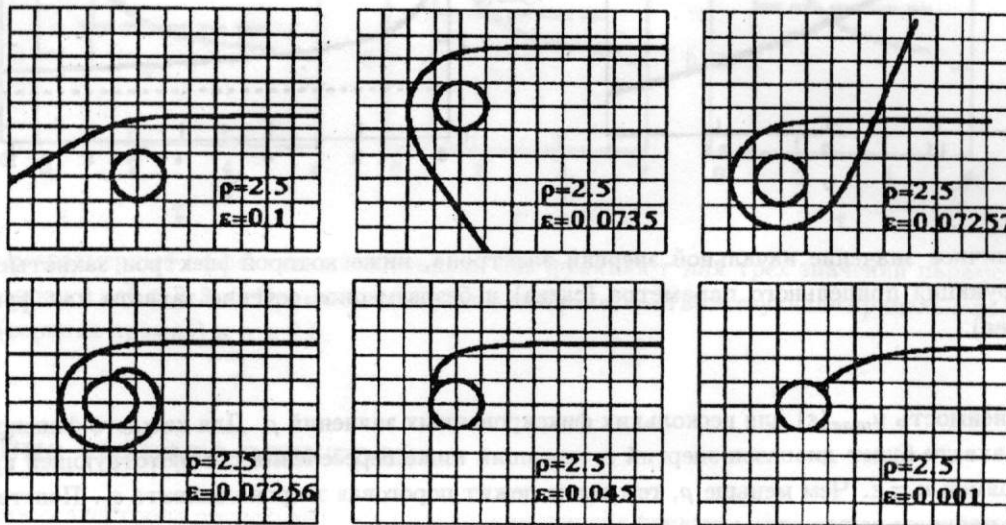


Рис. 7. Пролетные (вверху) и захватные орбиты электрона с различными начальными энергиями при прицельном параметре $\rho = 2.5$.

Для простоты, зададимся прицельным параметром $\rho = 2.5$ и будем варьировать только начальную энергию электрона. Поскольку потенциал взаимодействия быстро спадает с расстоянием, при численном интегрировании уравнения траектории с помощью Mathcad начальное расстояние можно взять относительно небольшим. На рис. 7 приведены шесть характерных траекторий, полученных для начальных энергий, указанных на графиках. Видно, что они сильно отличаются от привычных нам кривых второго порядка, получающихся для сил, спадающих по закону обратных квадратов. Пролетные траектории (три верхние кривые) при малых энергиях имеют протяженные участки почти кругового движения вокруг сферы, образуя при очень низких энергиях даже петли. При дальнейшем снижении энергии траектории (три нижние кривые) заканчиваются на поверхности сферы.

При точном совпадении ϵ и u_{max} электрон должен выйти на круговую траекторию, на которой формально может находиться неограниченно долго. Это обстоятельство дает еще одну возможность

обсудить со студентами проблемы устойчивости траектории, а также ограниченность любой модели и необходимость в некоторых ситуациях учитывать внешние (даже слабые) возмущения.

Особенности дифференциального сечения рассеяния

Сечение рассеяния для рассматриваемого вида потенциала имеет некоторые особенности по сравнению с кулоновским. Это видно, в частности, по зависимости угла рассеяния электрона от энергии при постоянном прицельном параметре. Угол отклонения при большой энергии невелик. Постепенно уменьшая энергию электрона, обнаруживаем, что угол отклонения возрастает, достигая при некотором ее значении 360° , а затем и более. Иными словами, один и тот же угол рассеяния при фиксированном прицельном параметре соответствует более чем одному значению энергии. Иллюстрацией сказанному служит рис. 8, на котором приведены две траектории с углом рассеяния 90° . "Разрыв" траектории соответствует максимальному сближению электрона со сферой и связан с особенностями программы расчетов, в которой была исключена особая точка. Видно, что траектории принципиально отличаются от траекторий движения в кулоновском поле. Здесь можно напомнить студентам понятие дифференциального сечения рассеяния $d\sigma$ на определенный угол $\theta, \theta + d\theta$ и показать, что в нашем случае для заданной энергии дифференциальное сечение рассеяния геометрически будет представлять собой систему концентрических колец¹.

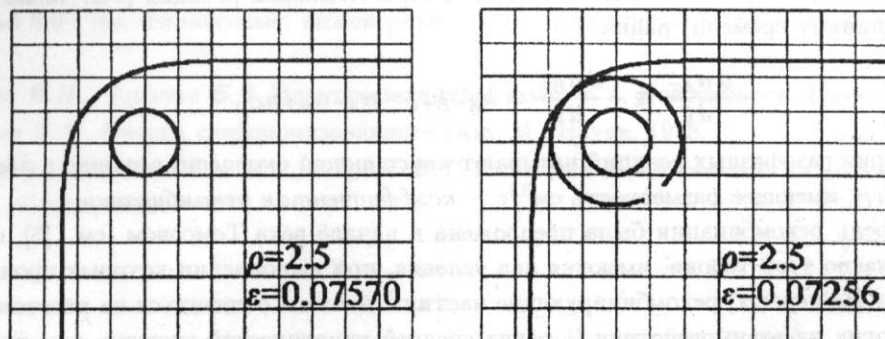


Рис. 8. Две траектории с одинаковым прицельным параметром и разными начальными энергиями, соответствующие отклонению электрона на 90° градусов.

Поляризуемость атомов и молекул

Незаряженный шар высокой проводимости можно рассматривать как простейшую модель нейтрального атома или молекулы. Тогда, в соответствии с этой моделью, на пролетающий мимо молекулы электрон действует электрическое поле поляризованной электроном молекулы, определяемое выражением (4). Предположим, что $r \gg a$ и разложим напряженность в точке r по малому параметру a/r , что даст нам выражение

$$E \approx -\frac{2a^3 e}{r^5} \tag{17}$$

Сравнивая это выражение с известным выражением [4] для напряженности поля диполя с дипольным моментом d в направлении вдоль его оси

$$E = -\frac{2d}{r^3}, \tag{18}$$

получим

$$d = -a^3 \frac{e}{r^2} \equiv a^3 \cdot E_e \tag{19}$$

Поскольку, по определению, дипольный момент наведенного диполя равен $d = \beta E_e$, где β — поляризуемость атома, получаем для модели проводящего шара

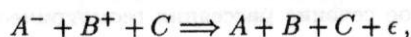
$$\beta = a^3 \tag{20}$$

¹ Подробное исследование траекторий и дифференциального сечения выходит за рамки данной работы.

Отсюда ясно, что размерность поляризуемости в системе СГС есть объем. Для атома водорода в рамках данной модели можно ожидать величину поляризуемости равной $4\pi a_0^3/3 \approx 4.2a_0^3$, где $a_0 \approx 5 \cdot 10^{-9}$ см – борковский радиус. Учитывая примитивность модели, удивительно, что действительное значение поляризуемости атома водорода оказывается равным $4.50a_0^3$ [5]. Здесь можно указать студентам, что часто значения величин, полученные из простых модельных соображений, дают результаты, не слишком отличающиеся от истинных и вполне приемлемые для оценок по порядку величины.

Рекомбинация положительных и отрицательных ионов в газе

Примером такой оценки может служить вычисление скорости тройной рекомбинации отрицательных ионов (A^-) с положительными (B^+) в слабоионизованном газе. Известно, что при рекомбинации выделяется избыточная энергия, равная энергии связи плюс энергия относительного движения, поэтому процесс рекомбинации требует участия третьей частицы (или фотона), уносящей избыточную энергию. Пусть этой третьей частицей будет нейтральный атом или молекула C . Тогда символически такая реакция запишется в виде



где ϵ – кинетическая энергия разлетающихся частиц. Скорость данной реакции (т.е. число реакций в единице объема в единицу времени) равна

$$-\frac{dn_{A^-}}{dt} \equiv -\frac{dn_{B^+}}{dt} = k_{A-B+C} \cdot n_{A^-} n_{B^+} n_C,$$

где k_{A-B+C} – в теории газофазных реакций называют *константой скорости реакции*, а произведение $\alpha_{A-B+C} = n_C k_{A-B+C}$, имеющее размерность $\text{см}^3/\text{с}$, – *коэффициентом рекомбинации*.

Простейшая модель рекомбинации была предложена в начале века Томсоном (см. [5], стр. 249 и [6], стр. 167). Согласно этой теории, имеются два условия, при выполнении которых происходит рекомбинация частиц. Во-первых, рекомбинирующие частицы должны сблизиться на расстояние, когда потенциальная энергия их взаимодействия U равна средней кинетической энергии, т.е. температуре T , выраженной в энергетических единицах. Во-вторых, в момент взаимодействия заряженных частиц одна из них должна испытать столкновение с третьей частицей, которая уносит избыток энергии.

Применительно к нашему случаю коэффициент рекомбинации α_{A-B+C} равен произведению вероятности нахождения второго иона в сфере радиуса b , окружающей первый ион, определяемого из условия $(e^2/b) \sim T$, на частоту столкновения иона с “третьей” частицей $n_B v \sigma$, где $v \sim \sqrt{2T/M}$ – скорость относительного движения, а σ – сечение столкновения с переносом импульса (транспортное сечение). Получим тогда для коэффициента рекомбинации

$$\alpha_{A-B+C} = \frac{4\sqrt{2}e^6 n_C \sigma}{M^{1/2} T^{5/2}}. \quad (21)$$

Величина коэффициента рекомбинации пропорциональна транспортному сечению и быстро падает с ростом температуры. Из проведенного выше анализа траекторий видно, что сечение рассеяния на большие углы по порядку величины близко к сечению захвата заряженной частицы за счет поляризационного взаимодействия (14). Заменив в нем энергию налетающей частицы ϵ на T и пренебрегая единицей в области низких температур $T \ll e^2/a$, получим

$$\sigma \approx \pi \sqrt{\frac{e^2 a^3}{T}} = \pi \sqrt{\frac{e^2 \beta}{T}}. \quad (22)$$

где β – поляризуемость частицы B . Оценив размер атомов средней массы величиной a_0 , получим для $T = 0.3$ эВ в качестве оценки сечения величину $\sigma \approx 8 \cdot 10^{-16}$ см^2 , что более или менее верно по порядку величины.

Подставив, наконец, (22) в (21), получим окончательно

$$\alpha_{A-B+C} = \frac{4\sqrt{2}\pi e^7 a_0^{3/2} n_C}{M^{1/2} T^6}. \quad (23)$$

Заключение

Таким образом, задача о рассеянии электрона проводящей сферой дает довольно широкие возможности для углубленного усвоения целого ряда важных понятий из разных разделов физики. Естественно, что студенты второго курса еще не в состоянии проделать самостоятельно анализ, подобный выполненному выше. Поэтому данная задача (может быть с некоторыми дополнительными заданиями и рекомендациями преподавателя) может быть дана для решения дома. На семинаре же, после разбора решения, преподаватель может дополнить и расширить его в духе данной статьи, показать распечатки траекторий, а студентам, имеющим доступ к компьютеру, передать программу для самостоятельной работы. Желающие могут получить программу, написанную для Mathcad 6.0 Plus, связавшись с автором по электронной почте.

Литература

- [1] Меледин Г.В., Росляков Г.В., Эйдельман Ю.И. Задачи по электродинамике частиц и полей. Новосибирск, НГУ, 1986.
- [2] Жданова Т.А., Меледин Г.В. Задачи по электродинамике с решениями. Новосибирск, НГУ, 1995.
- [3] Mathcad 6.0 Plus. Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде Windows 95. М., Филинь, 1996.
- [4] Мешков И.Н., Чириков Б.В. Электромагнитное поле, ч. 1, Новосибирск, Наука, 1987.
- [5] Смирнов Б.М. Физика слабоионизованного газа, М., Наука, 1978.
- [6] Биберман Л.М., Воробьев В.С., Якубов И.Т. Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы, М., Наука, 1982.

Scattering and capture of electron by isolated conducting sphere

B.A. Knyazev

Novosibirsk State University

A problem of electron motion near the isolated uncharged conducting sphere is solved based on the course of university physics (electrodynamics and mechanics). The main concepts of the motion in potential fields are considered using dimensionless variables. These concepts allow a bridge to the atomic physics and elementary theory of gasphase reactions to be constructed.

Задача 1

Как выглядит взаимодействие электрического дипольного момента с электромагнитным полем с точностью до первого порядка до v/c включительно?

КОЕ-ЧТО ПРО НЕИСЧЕРПАЕМЫЙ ЭЛЕКТРОН

В.В. Бажанова

Новосибирский филиал Московской технологической академии
легкой промышленности

Е.А. Переведенцев и Ю.И. Эйдельман

Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера СО РАН, 630090 Новосибирск,
Новосибирский государственный университет

Рассмотрен круг задач, возникающих при описании циркулирующего в ускорителе единственного электрона.

Быть может, эти электроны —
Миры, где пять материков,
Искусства, знания, войны, троны
И память сорока веков!

Валерий Брюсов (1922).

Рассмотренные ниже задачи отобраны в связи с интересным вопросом о том, что можно узнать про единственную элементарную частицу, циркулирующую в ускорителе. Например, можно ли увидеть ее невооруженным глазом? Если да, то что именно мы увидим?

В этой статье мы будем, как это в основном принято на семинарах по электродинамике на 2-м курсе физфака НГУ [1], рассматривать достаточно сложные задачи почти "на пальцах" с привлечением (как бы со стороны) минимума теоретического материала. Большим подспорьем в этом будет краткая, но весьма содержательная статья [2], которая избавляет нас от необходимости выводить многие используемые соотношения.

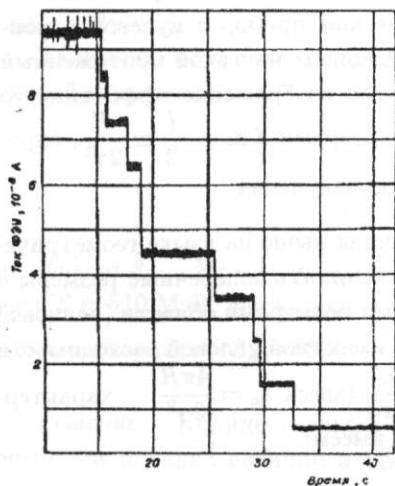
Так можно ли увидеть невооруженным глазом единственный электрон? Увидеть — это значит зарегистрировать свет либо рассеянный этим электроном, либо излученный им. Займемся только второй возможностью, оставив рассмотрение первой до другого раза.

Хорошо известно, что пучок электронов при своем движении в циклическом ускорителе непрерывно испускает так называемое *синхротронное излучение*. В учебниках по электродинамике его называют также магнито-тормозным. Сам факт излучения света электроном связан с центростремительным ускорением частицы, движущейся по дуге в ведущем магнитном поле ускорителя. Поскольку современные электронные ускорители рассчитаны на очень высокие энергии, то электроны оказываются, как правило, ультррелятивистскими: $\gamma = \frac{\mathcal{E}}{mc^2} \gg 1$. В этом случае излучение электрона имеет характерные особенности (сошлемся хотя бы на статью [2]):

- излучение в процессе движения электрона по орбите подобно лучу прожектора — в каждый данный момент оно направлено только вперед в направлении движения электрона и сконцентрировано в узком конусе с углом раствора $\psi \approx \gamma^{-1}$;
- тем самым все излучение лежит фактически в плоскости вращения электрона, практически не выходя из угла $\approx \psi$;
- полная интенсивность излучения весьма высока, а спектр очень широк и захватывает (при соответствующих энергиях частицы) и область видимого света.

Эти особенности открывают возможность увидеть единственную релятивистскую частицу, зарегистрировав (глазом или с помощью фотоумножителя) ее синхротронное излучение. Такие эксперименты уже неоднократно проводились, например, в ИЯФ им. Г.И.Будкера СО РАН: физики невооруженным

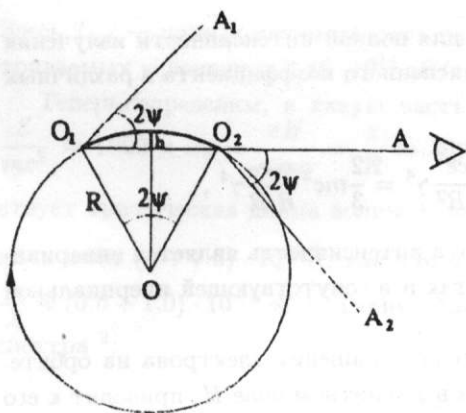
глазом наблюдали свет единственного электрона, циркулирующего в накопителях ВЭПП-2 и ВЭПП-3 [3, 4].



Эти эксперименты проводятся следующим образом: число частиц в пучке, движущемся по орбите в накопителе, непрерывно уменьшается по ряду причин, прежде всего из-за их рассеяния на атомах остаточного газа, присутствующего внутри вакуумной камеры накопителя несмотря на очень глубокий вакуум $\approx 10^{-9} \div 10^{-10}$ Торр. Поэтому, начиная с некоторого момента, можно зафиксировать, что уровень интенсивности синхротронного излучения частиц пучка начинает падать не плавно, а скачками, кратными некоторой величине (см. рисунок). В конце концов, излучение пучка пропадает совсем. Тогда минимальное излучение, предшествующее этапу его полного исчезновения, и есть свет последней оставшейся частицы, т.е. единственного электрона. Таким образом, принципиальный ответ на заданный ранее вопрос является утвердительным – единственный электрон зарегистрировать можно.

А теперь займемся рассмотрением некоторых задач.

Задача 1. Излучение релятивистского электрона, движущегося в однородном магнитном поле $H = 6 \cdot 10^3$ э по орбите радиуса $R = 50$ см, наблюдается невооруженным глазом. Оценить видимый "размер" излучающего электрона (см., например, $\mathcal{N} 5.35$ из [5]).



Решение. Нетрудно видеть, что свет, излучаемый электроном, начнет попадать в глаз наблюдателя (т. А) в тот момент, когда частица находится в точке O_1 орбиты и конус света A_1O_1A "наедет" на линию наблюдения O_1O_2A ; наблюдатель перестанет регистрировать свет, излучаемый электроном, после прохождения им точки O_2 , для которой линия O_1O_2A наблюдения оказывается вне конуса света AO_2A_2 . Таким образом, наблюдатель видит электрон на дуге O_1O_2 его орбиты, т.е. видимый поперечный "размер" электрона совпадает с высотой h стрелки этой дуги. Из геометрии видно, что центральный угол O_1OO_2 этой дуги совпадает с полным углом раствора конуса излучаемого света, т.е. это угол порядка $2\psi \approx 2\gamma^{-1}$.

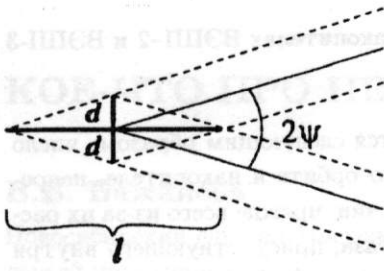
Тогда сразу получаем оценку для величины h :

$$h = R(1 - \cos\psi) \approx R \frac{\psi^2}{2} \approx \frac{R}{2\gamma^2}.$$

Вспоминая, что релятивистский электрон в однородном магнитном поле H движется под действием силы Лоренца по орбите такого радиуса R , что

$$eH = \frac{\gamma mc^2}{R}, \quad \text{найдем} \quad \gamma = \frac{eHR}{mc^2},$$

откуда $\gamma \approx 176$, $\mathcal{E} \approx 90$ МэВ и $h \approx 8 \cdot 10^{-4}$ см. Таким образом, этот электрон имеет вполне ощутимый "размер".



Нами найден размер "светящегося" электрона в плоскости его орбиты. Легко сообразить, что другой поперечный размер — в направлении, перпендикулярном к плоскости орбиты — также окажется ненулевым, поскольку светящаяся дуга длины $l \simeq R/\gamma \approx 0.28$ см имеет протяженность вдоль оси наблюдения ("глубина поля" в оптике). Идеальный оптический прибор с нулевой глубиной резкости, с объективом, наведенным на такой протяженный вглубь источник света, сформирует изображение эффективного видимого плоского источника с размерами $d \simeq \psi \cdot \frac{l}{2} \simeq \frac{R}{2\gamma^2}$, определяемыми угловой расходимостью излучения.

Интересно отметить, что эта оценка поперечного размера, полученная выше на языке геометрической оптики, подтверждается и волновой оптикой. Здесь мы могли бы считать поперечные размеры d светящегося электрона дифракционными, совпадающими с поперечными размерами области (волновой зоны), из которой исходят излучаемые волны, а величину d оценить из известной угловой расходимости излучения, приписав ей дифракционное происхождение. Тогда $\psi \simeq \frac{\lambda_c}{2\pi d}$ (здесь $\lambda_c = \frac{4\pi R}{3\gamma^3}$ — характерная длина волны излучения, см. следующую задачу), и отсюда снова имеем:

$$d \simeq \frac{\lambda_c}{2\pi\psi} = \frac{4\pi R/3\gamma^3}{2\pi/\gamma} = \frac{2R}{3\gamma^2} \approx 10 \text{ мкм.}$$

Окончание решения задачи см. на с.16.

Задача 2. Найти интенсивность излучения ультрарелятивистского электрона с энергией \mathcal{E} , вращающегося в однородном поле H . На каких характерных частотах происходит это излучение? (\mathcal{N} 5.30 из [5]).

Решение. Имея "под рукой" качественный результат из [2] для полной интенсивности излучения ультрарелятивистской частицы, просто приведем его с учетом численного коэффициента в различных используемых формах [3, 6]:

$$I_{tot} = \frac{2}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 cH^2 \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^2 = \frac{2}{3} cr_0^2 H^2 \gamma^2 = \frac{2}{3} \frac{ce^2}{R^2} \gamma^4 = \frac{2}{3} mc^2 \frac{c}{R} \frac{r_0}{R} \gamma^4,$$

где r_0 — классический радиус электрона. Напомним также, что эта интенсивность является инвариантом и одна и та же как в лабораторной системе отсчета (ЛС), так и в сопутствующей инерциальной системе (СИС) для электрона (это также показывается в [2]).

Чтобы ответить на второй вопрос, определим сначала частоту обращения электрона на орбите. Сила Лоренца, действующая на ультрарелятивистский электрон в магнитном поле H , приводит к его движению по окружности радиуса $R = \frac{\mathcal{E}}{eH}$ и нетрудно видеть, что это вращение характеризуется частотой обращения ω_0 такой, что $\gamma m \omega_0^2 R = eH$. Но $R = \frac{c}{\omega_0}$ и тогда получаем известное выражение для частоты обращения:

$$\omega_0 = \frac{eH}{\gamma mc}.$$

Казалось бы, излучение электрона должно происходить именно на этой частоте, но это справедливо только в нерелятивистском приближении. Для ультрарелятивистской частицы это не так. Способов объяснения есть несколько. Один из них, например, приведен в [2] и состоит в следующем. Мы уже видели в предыдущей задаче, что наблюдатель регистрирует излучаемый электроном свет в течение очень короткого временного интервала, пока частица поворачивается на орбите всего на угол порядка $\approx \gamma^{-1}$, пролетая светящуюся дугу длины $l \sim R/\gamma$. Именно на этом коротком отрезке пути и формируется наблюдаемое удаленным (коллимированным) приемником излучение со всеми его характеристиками. Краткость вспышки излучения соответствует (по соотношению неопределенности для $\Delta\omega \cdot \Delta t$) ограниченности спектрального диапазона $\Delta\omega$ наблюдаемого излучения. Для оценки

$\Delta\omega$ заметим, что при переходе в СИС длина светящейся дуги сожмется в γ раз: $l' \approx l/\gamma \approx R/\gamma^2$, соответственно и длительность вспышки излучения в этой системе составит $\Delta t' \approx l'/c \approx R/c\gamma^2$, а максимальная частота в спектре вспышки $\omega'_{max} \sim \Delta\omega' \approx 1/\Delta t' = \frac{c}{R}\gamma^2 = \omega_0\gamma^2$. Возвращаясь в ЛС, учтем, что эффект Доплера увеличит в 2γ раз частоту излучателя, летящего навстречу наблюдателю: $\omega_{max} = 2\gamma\omega'_{max} \approx \omega_0\gamma^3 \gg \omega_0$.

Таким образом, спектр излучения релятивистского электрона, циркулирующего в ускорителе с частотой обращения ω_0 , будет содержать очень высокие характерные частоты:

$$\omega_c \approx \omega_0\gamma^3 = \frac{eH}{mc} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^2.$$

Задача 3. Можно ли увидеть невооруженным глазом единственный электрон (позитрон) с энергией $\mathcal{E} \approx 510$ МэВ, движущийся в магнитном поле $H = 1.7 \cdot 10^4$ э ускорителя? Порог чувствительности глаза составляет $^1 I_{кр} \approx 500 \frac{\text{эВ}}{c}$ (N 5.46 из [5]).

Решение. Количественный характер вопроса в этой задаче не позволяет нам ограничиться лишь оценками порядка величин и требует использования точных формул для характеристик излучения. Воспользуемся известным спектральным распределением мощности синхротронного излучения (СИ) для ультрарелятивистской частицы (см., например, §74 в [6]). Принимая для критической частоты СИ значение $\omega_c = \frac{3}{2}\omega_0\gamma^3$, вводя безразмерную частоту $y = \frac{\omega}{\omega_c}$ и выражая через нее спектральную плотность излученной мощности $\frac{dI}{d\omega} \rightarrow \frac{dI}{dy}$, приведем ее к простому виду:

$$\frac{dI}{dy} = \begin{cases} 1.333 I_{tot} y^{1/3} & \text{при } y \ll 1, \\ \frac{9}{8} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} I_{tot} y^{1/2} e^{-y} & \text{при } y \gg 1. \end{cases}$$

Здесь I_{tot} — полная интенсивность излучения электрона (см. предыдущую задачу), равная в рассматриваемых условиях $\approx 2.86 \cdot 10^{11}$ эВ/с.

Теперь определим, в какую часть спектра попадает оптический диапазон света. Имеем: $\gamma = \frac{\mathcal{E}}{mc^2} \approx 1000$ и $\omega_0 = \frac{eH}{\gamma mc} = \frac{c}{R} \approx 300$ МГц, $R = 100$ см. Критической частоте излучения соответствует критическая длина волны $\lambda_c = \frac{2\pi c}{\omega_c} = \frac{4\pi R}{3\gamma^3} \approx 42$ Å. Оптический диапазон занимает интервал длин волн $(4 \div 7.6) \cdot 10^3$ Å, так что для всего излучения электрона в видимом диапазоне имеем $y = \frac{\lambda_c}{\lambda} \approx (0.5 \div 1.0) \cdot 10^{-2} \ll 1$. Таким образом, нужно проинтегрировать только соответствующую часть спектра ²:

$$I = 1.333 I_{tot} \int_{y_{min}}^{y_{max}} y^{1/3} dy = I_{tot} (y_{max}^{4/3} - y_{min}^{4/3}) \approx 1.3 \cdot 10^{-3} I_{tot}.$$

Излучение освещает весьма узкую полосу вблизи плоскости орбиты. Телесный угол фотоприемника (глаза) захватывает лишь малую долю этого телесного угла, заполненного излучением, что и требуется учесть в оценке зарегистрированной мощности. Ширина пояса определяется угловой расходимостью излучения, для которой в видимой, длинноволновой части спектра ($\lambda \gg \lambda_c$) можно дать простую оценку [2, 3]:

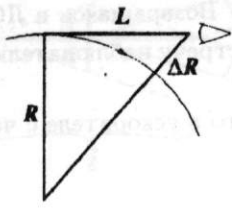
$$\psi_\lambda \approx \left(\frac{3\lambda}{4\pi R} \right)^{1/3} \approx 0.62 \left(\frac{\lambda}{R} \right)^{1/3} \approx 4.9 \cdot 10^{-3} \text{ для } \lambda = 5000 \text{ Å}.$$

Заметим, что $1/\gamma \ll \psi_\lambda \ll 1$.

¹Вообще говоря, при специальной подготовке (аккомодация в темном помещении в течение нескольких часов) человек может зарегистрировать глазом вспышку даже от одного гамма-кванта. Нетрудно видеть, что в оптическом диапазоне света при $\lambda \approx 5000$ Å энергия этого кванта составляет всего ≈ 2.5 эВ, так что величине $I_{кр}$ соответствует поток порядка 200 (!) таких фотонов в секунду.

²Вновь сошлемся на статью [2], в которой из очень простых качественных соображений выводится функциональная зависимость спектральной плотности излучения от частоты как раз в интересующем нас интервале частот.

Для более полного сбора света приемник (глаз наблюдателя) с диаметром адаптированного к темноте зрачка $D \approx 8$ мм следует расположить как можно ближе. Оптимальным является расстояние



$L \approx \frac{D}{2\psi\lambda} \approx 80$ см. Дальнейшее приближение вряд ли возможно: ведь найденное расстояние L , отсчитанное по касательной к средней точке светящейся дуги, уже соответствует довольно малому радиальному удалению от орбиты: $\Delta R \approx L^2/2R \approx 30$ см. Итак, захватив всю ширину освещенного пояса, учтем теперь долю его периметра, захваченную светоприемником:

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{D}{L} + 2\psi\lambda \right) \approx 3.2 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

В итоге, получим оценку видимой глазом интенсивности излучения единственного электрона:

$$\begin{aligned} I_{\text{вид}} &= I_{\text{tot}} \cdot (\text{доля спектра}) \cdot (\text{доля телесного угла}) \approx \\ &\approx (2.86 \cdot 10^{11} \text{эВ/с}) \cdot (1.3 \cdot 10^{-3}) \cdot (3.2 \cdot 10^{-3}) \approx 1.2 \cdot 10^6 \text{эВ/с} \gg 500 \text{эВ/с}. \end{aligned}$$

Хотя видимая глазом интенсивность и составляет лишь около 1/250000-й от полной излученной электроном мощности, ее с большим избытком хватает для наблюдения!

Обещанное окончание решения задачи 1.

Вооружившись сведениями о спектрально-угловых характеристиках СИ, вернемся к вопросу о видимых размерах единственного электрона, вращающегося по круговой орбите и наблюдаемого с помощью его собственного излучения. Как соотносится спектр излучения в рассматриваемой задаче с видимым глазом спектральным диапазоном? Вычисляя критическую длину волны $\lambda_c = 4\pi R/3\gamma^3 \approx 3800 \text{ \AA}$, видим, что весь широкий максимум спектра СИ в нашем случае попадает в диапазон видимого света, тем самым оправдывая оценку для его угловой расходимости $\psi \sim 1/\gamma$, использованную в решении и, строго говоря, пригодную для описания угловой расходимости излучения в целом, то есть на частотах $\omega \sim \omega_c$. На краях же спектра излучения, вдали от его максимума, следует использовать иную меру угловой расходимости.

Найдем теперь видимые размеры электрона в условиях задачи 3. Здесь видимый свет лежит лишь в дальней низкочастотной (длинноволновой) части спектра, между тем как сам спектр тянулся до $\lambda_c \approx 40 \text{ \AA}$, что соответствует границе перехода от жесткого ультрафиолетового к мягкому рентгеновскому диапазону длин волн излучения. В такой ситуации решение нашей задачи модифицируется: в качестве длины светящейся дуги для излучения с $\lambda \gg \lambda_c$ теперь выступает $l_\lambda \approx R\psi_\lambda$ (угол $\psi_\lambda \approx 5 \cdot 10^{-3} \gg \frac{1}{\gamma}$ найден в задаче 3), то есть $l_\lambda \approx 0.62(R^2\lambda)^{1/3} \approx 0.5$ см.

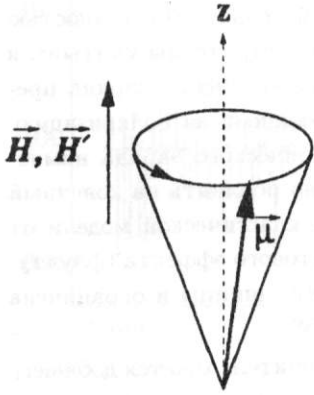
Не повторяя рассуждений из задачи 1, отметим, что и в длинноволновой области спектра оценки для обоих поперечных размеров, выполненные тремя разными способами, совпадают друг с другом:

$$h \approx \frac{1}{2} R\psi_\lambda^2 \approx d \approx \frac{1}{2} l_\lambda \psi_\lambda \approx \frac{\lambda}{2\pi\psi_\lambda} \approx 0.2(\lambda^2 R)^{1/3} \approx 12 \text{ мкм},$$

что на порядок превышает размер $R/2\gamma^2 \approx 0.5$ мкм, который получился бы при наблюдении с помощью жесткого излучения с длиной волны $\lambda \approx \lambda_c \approx 40 \text{ \AA}$.

Практическая важность сделанного нами добавления к решению проявляется в проблемах оптической диагностики пучков частиц, циркулирующих в накопителях: фактически мы вывели принципиальный предел для разрешающей способности аппаратуры, предназначенной для измерения поперечных размеров пучка путем формирования его изображения в той или иной области спектра. Разумеется, видимый свет предпочтительнее, именно в оптическом диапазоне доступен наиболее мощный арсенал измерительных средств для этой цели: высококачественные объективы, фотоумножители, электронно-оптические преобразователи изображений и т.д. Однако в большинстве современных электронных накопителей вертикальные установившиеся размеры пучков как раз и составляют $\sim 10 \div 50$ мкм. В результате прямое измерение столь малых размеров пучка оказывается невозможным в оптическом диапазоне, где по нашим оценкам, видимый размер каждого из "светящихся" электронов этого пучка превосходит истинный размер всего пучка! Приходится использовать для таких измерений более жесткое излучение, преодолевая непростые экспериментальные проблемы рентгеновской оптики.

Задача 4. При движении электрона с энергией \mathcal{E} в магнитном поле \vec{H} ускорителя происходит, как известно [7], ориентирование собственного магнитного момента $\vec{\mu}$ электрона вдоль поля, т.е. электронный пучок поляризуется. На языке классической электродинамики этот процесс можно описать как изменение угла между векторами $\vec{\mu}$ и \vec{H} в результате потери энергии магнитного диполя $W = -\vec{\mu}\vec{H}'$ на магнитодипольное излучение электрона (здесь \vec{H}' — поле ускорителя в СИС). Найти время установления поляризации и оценить его в накопителе ВЭПП-3, для которого $\mathcal{E} \approx 2.1$ ГэВ и радиус орбиты электрона составляет $R \approx 8$ м (\mathcal{N} 5.40 из [5]).



Решение. В соответствии с условием запишем уравнение для изменения энергии W магнитного диполя в СИС:

$$\frac{d}{dt'}(\vec{\mu}\vec{H}') = \frac{2}{3c^3}\ddot{\mu}^2,$$

где $\vec{H}' = \gamma\vec{H}$ — поле ускорителя в этой системе и $\dot{\vec{\mu}} = \frac{d\vec{\mu}}{dt'}$ — временная производная магнитного момента электрона в этой же системе. Но в магнитном поле \vec{H} происходит прецессия магнитного момента электрона вокруг направления поля, описываемая в СИС уравнением (см., например, задачи \mathcal{N} 720, 721 из [8])

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt'} = g [\vec{\mu}\vec{H}'],$$

где g — гиромагнитное соотношение для электрона. Тогда

$$\ddot{\mu} = g [\dot{\vec{\mu}}\vec{H}'] = g^2 [[\vec{\mu}\vec{H}']\vec{H}'] = g^2 (\vec{H}'(\vec{\mu}\vec{H}') - \vec{\mu}H'^2)$$

и, следовательно,

$$\ddot{\mu}^2 = g^4 (H'^2(\vec{\mu}\vec{H}')^2 - 2H'^2(\vec{\mu}\vec{H}')^2 + \mu^2 H'^4) = g^4 H'^2 (\mu^2 H'^2 - (\vec{\mu}\vec{H}')^2).$$

Если ввести угол θ между векторами $\vec{\mu}$ и \vec{H}' , так что $(\vec{\mu}\vec{H}') = \mu H' \cos \theta$, то уравнение для изменения этого угла может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \mu H' \frac{d \cos \theta}{dt'} &= \frac{2}{3c^3} g^4 H'^4 \mu^2 (1 - \cos^2 \theta) \quad \text{или} \\ \frac{d \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} &= \frac{2}{3c^3} g^4 \mu H'^3 dt' = \frac{2}{3c^3} g^4 \mu (\gamma H)^3 \frac{dt}{\gamma}. \end{aligned}$$

В последнем уравнении совершен переход в ЛС с учетом связи $dt' = \frac{dt}{\gamma}$. Интегрирование этого уравнения с учетом выражений для собственного магнитного момента электрона $\mu = \frac{e\hbar}{2mc}$ ($\hbar = 1.055 \cdot 10^{-27}$ эрг·с — постоянная Планка) и его гиромагнитного отношения $g = -\frac{e}{mc}$ (e — модуль заряда электрона!) дает следующую временную зависимость для величины угла θ при начальной его величине $\theta(t=0) = \frac{\pi}{2}$:

$$\cos \theta = \text{th} \left(\frac{t}{2\tau} \right), \quad \tau = \frac{3}{4} \frac{c^3}{\mu g^4 \gamma^2 H^3} = \frac{3}{2} \frac{m^5 c^8}{\hbar e^5 \gamma^2 H^3},$$

где τ — характерное время радиационной поляризации пучка. Таким образом, видно, что со временем происходит установление вектора собственного магнитного момента электрона вдоль направления ведущего поля накопителя и за время $\approx 3\tau$ пучок практически полностью поляризуется. Для численных оценок удобно записать выражение для τ через энергию электрона $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ и радиус его орбиты R (в задаче 1 была получена формула $R = \frac{\gamma mc^2}{eH} = \frac{e\gamma}{r_0 H}$, где $r_0 = \frac{e^2}{mc^2} \approx 2.85 \cdot 10^{-13}$ см — классический радиус электрона), так что имеем

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{m^5 c^8 r_0^3 R^3}{\hbar e^8 \gamma^5} = \frac{3}{2} \frac{m}{\hbar r_0} R^3 \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^5 \approx 0.45 \cdot 10^{13} R^3 \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^5 \text{ [секунд]} .$$

Итак, в накопителе ВЭПП-3 ($\mathcal{E} = 2.1$ ГэВ и $R \approx 8$ м) полная поляризация электронного пучка наступает за время $\approx 3\tau \simeq 1.2$ часа, что представляется вполне разумным с точки зрения возможности постановки экспериментов с поляризованными пучками в этом накопителе. Поляризованный в накопителе ВЭПП-3 пучок действительно был использован в экспериментах по прецизионному измерению масс семейства ψ -мезонов [9].

Приведенная оценка τ совпадает с результатом релятивистской квантовой теории [7] с точностью до численного множителя порядка единицы. Главная причина расхождения в том, что мы учитывали только излучение классического магнитного дипольного момента, а в полях излучения заряда пренебрегли вызванными прецессией спин-зависящими поправками, также влияющими на поляризацию. Эти относительно малые добавки к сильному эффекту (а излучение электрического заряда намного сильнее излучения прецессирующего магнитного диполя) способны заметно повлиять на конечный результат для электрона [10, 11]. Другое же, качественное отличие нашей классической модели от реального поведения электрона состоит в том, что под действием чисто квантового эффекта (флуктуации электромагнитного вакуума) степень поляризации никогда не достигает единицы и ограничена для электронов величиной 92.4%.

В заключение разговора о поляризации электронов и/или позитронов в накопителе хочется добавить следующее. Помимо того, что поляризованные пучки используются непосредственно для проведения разнообразных экспериментов по физике высоких энергий, они оказались важнейшим методическим инструментом, позволяющим с высочайшей точностью проводить абсолютную калибровку энергии накопителей и, тем самым, обеспечивать прецизионное измерение параметров элементарных частиц. Речь идет о следующем. Оказывается, что в ускорителе энергия циркулирующих частиц \mathcal{E} и частота прецессии спина Ω вокруг направления ведущего поля ускорителя однозначно связаны таким соотношением:

$$\frac{\Omega}{\omega_0} = 1 + \frac{g'}{g} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right),$$

где g' , g — аномальная и нормальные части гиромагнитного отношения частицы и ω_0 — частота ее обращения. В этой формуле величина $\frac{g'}{g}$ известна для электронов с высочайшей точностью из квантовой электродинамики: $g' = (0.001159652193 \pm 0.000000000010)g$, а частота ω_0 задается высокочастотной системой ускорителя и может быть измерена также с очень высокой точностью. Следовательно, для прецизионного определения \mathcal{E} необходимо с такой же точностью каким-либо образом измерить частоту прецессии спина Ω . И тут приходит на помощь метод резонансной деполяризации [12]. Дело в том, что физики уже давно научились, во-первых, измерять степень поляризации циркулирующего пучка (как именно — это отдельная тема) и, во-вторых, проводить его деполяризацию. Последняя осуществляется с помощью высокочастотного поля, создаваемого на небольшом участке орбиты и частота которого ω_d при своем плавном изменении "проезжает" через условие резонанса

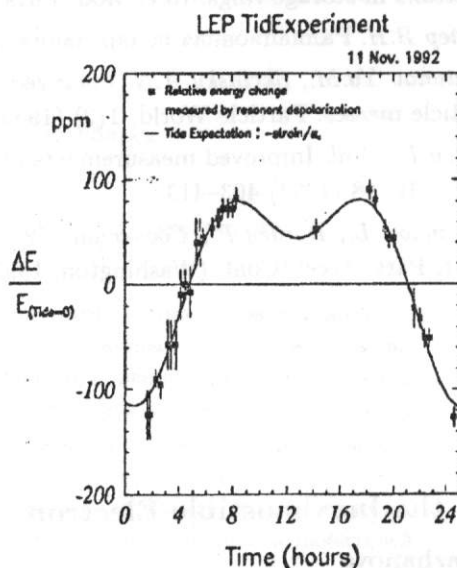
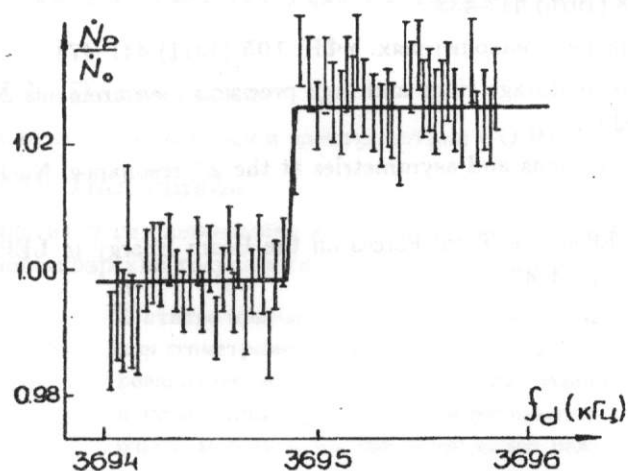
$$\omega_d \pm N\omega_0 = \Omega,$$

где N — целое число. В момент выполнения этого условия происходит быстрая деполяризация пучка: угол прецессии спина каждой частицы пучка при резонансе быстро осциллирует в интервале от 0 до 2π с частотой, определяемой направлением и амплитудой высокочастотного деполяризующего поля; так как в системе всегда присутствуют квантовые флуктуации синхротронного излучения, разброс частот $\delta\omega_d$ деполяризатора и т.д., то фазы спинового вращения перемешиваются, т.е. происходит деполяризация пучка, а момент этого события как раз и фиксируется системой измерения поляризации.

На рисунке слева на с.19 приведена картина изменения некоторого параметра, характеризующего степень поляризации пучка, при плавном изменении частоты деполяризующего поля со скоростью $\simeq 1.5 \frac{\Gamma_{\text{ц}}}{\text{с}}$. Частота деполяризатора, соответствующая середине оптимизированной по критерию χ^2

"ступеньки" принималась равной частоте прецессии спина; точность измерения этой частоты оказывается очень высокой: $\approx 10^{-6}$, что и обеспечивает калибровку энергии ускорителя с высочайшей точностью³.

Ярким свидетельством этой точности является эксперимент [15], проведенный на накопительном кольце LEP, периметр которого составляет около 27 км. Эксперимент состоял в измерении суточных



колебаний периметра кольца (который при фиксированной частоте высокочастотной системы накопителя однозначно определяет энергию частиц), связанных с действием приливных сил Луны и Солнца. На рисунке справа как раз и показано сравнение измеренного относительного отклонения энергии и его значения, рассчитанного по деформации земной поверхности из-за приливных сил, приводящих к вариации ускорения свободного падения и, как следствие, изменению периметра кольца накопителя. Точность совпадения эксперимента с теоретическими предсказаниями избавляет нас от необходимости дальнейших комментариев.

Литература

- [1] Бажанова В.В., Меледин Г.В., Переведенцев Е.А., Эйдельман Ю.И. Скин-эффект в задачах. Сиб.физ.журнал, № 2 (1995) 12-30.
- [2] Khrilovich I.V. Ultrarelativistic synchrotron radiation without special functions. Сиб.физ.журнал, № 2 (1995) 31-33.
- [3] Кулипанов Г.Н., Скринский А.Н. Использование синхротронного излучения: состояние и перспективы. УФН, 122(3) (1977), 369-418.
- [4] Pinaev I.V., Popik V.M., Shaftan T.V., Sokolov A.S., Vinokurov N.A., Vorobyov P.V. Experiments with undulator radiation of a single electron. Nucl. Instr. and Met., A341 (1994) 17-20.
- [5] Меледин Г.В., Росляков Г.В., Эйдельман Ю.И. Задачи по электродинамике частиц и волн. Новосибирский государственный университет, Новосибирск, 1987.
- [6] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М., Наука, 1973.
- [7] Соколов А.А., Тернов И.М. О поляризационных и спиновых эффектах в теории синхротронного излучения. ДАН, 153 (1963) 1052-1054.
- [8] Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. М., Наука, 1970.

³Эта зависимость была измерена в ходе прецизионного измерения масс семейства ψ -мезонов на накопителе ВЭПП-4 [9]. Отметим, что методом резонансной деполяризации были проведены прецизионные измерения масс K^{\pm} , K^0 , ω , ϕ -, семейств ψ - и Υ -мезонов в экспериментах на ВЭПП-2М и ВЭПП-4 [13] и Z -бозона на LEP [14].

- [9] *Жолениц А.А., Курдадзе Л.М., Лельчук М.Ю. и др.* Абсолютная калибровка энергии накопителя ВЭПП-4 и прецизионное измерение масс ψ - и ψ' -мезонов. *ЯФ*, **34** (1981) 1471-1481.
- [10] *Дербенев Я.С., Кондратенко А.М.* Кинетика поляризации частиц в накопителях. *ЖЭТФ*, **64** (1973) 1918-1929.
- [11] *Jackson J.D.* On understanding spin-flip synchrotron radiation and the transverse polarization of electrons in storage rings. *Rev. Mod. Phys.*, v.48 (1976) 417-433.
- [12] *Байер В.Н.* Радиационная поляризация электронов в накопителях. *УФН*, **105** (1971) 441-478.
- [13] *Shatunov Yu.M., Skrinisky A.N.* Polarized beams in storage rings and high precision measurements of particle masses. *Particle World*, **1**(2) (1989) 35-39.
- [14] *Abreu P. et al.* Improved measurements of cross sections and asymmetries at the Z^0 resonance. *Nucl. Phys.*, **B418** (1994) 403-413.
- [15] *Arnaudon L., Bordry F., Coosemans W. et al.* Effects of Tidal Forces on the Beam Energy in LEP. *IEEE Part. Accel. Conf.* (Washington, 1993), v.1, p.44-46.

About the Inexhaustible Electron

V.V. Bazhanova

Novosibirsk Branch of the Moscow Technological Academy

Yu.I. Eidelman and E.A. Perevedentsev

Budker Institute of Nuclear Physics and Novosibirsk State University

Several problems are considered arising during the description of a single electron circulating in the accelerator.

Задача 2

Как известно, уровни плоского ротатора двукратно вырождены (при ненулевом моменте). Пусть такой ротатор имеет электрический дипольный момент и помещен в электрическое поле, лежащее в его плоскости. Найти расщепление n -ого уровня.