

ВОЗБУЖДЕНИЕ ИОННО-ЗВУКОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ В ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ С РАЗВИТОЙ СИЛЬНОЙ ЛЕНГМЮРОВСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ

© 1997 г. В. С. Бурмасов, Л. Н. Вячеславов, И. В. Кандауров, Э. П. Кругляков,
О. И. Мешков, А. Л. Санин

*Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН
Новосибирский государственный университет*

Поступила в редакцию 19.02.96 г.
Окончательный вариант получен 09.07.96 г.

Представлены результаты измерения плотности энергии ионно-звуковых флуктуаций, сопутствующих развитой сильной ленгмюровской турбулентности, возбуждаемой мощным релятивистским электронным пучком ($E = 700$ кэВ, $j = 1.5$ кА/см², $\tau = 200$ нс) в неизотермической плазме ($n_e \sim 10^{15}$ см⁻³, $T_e \gg T_i$), помещенной в магнитном поле. Турбулентность исследовалась методом лазерного рассеяния (СО₂-лазер, $E = 10$ Дж, $\lambda = 10.288$ мкм). Показано, что спектральная плотность энергии ионно-звуковых колебаний существенно превосходит тепловой уровень ($W_k/T_e \approx 10^5$). Полученные данные по k -спектру ионно-звуковых флуктуаций позволяют дать оценку сверху для минимального размера коллапсирующей каверны $l_{\min} < 30r_D$.

С момента предсказания коллапса ленгмюровских волн В.Е. Захаровым [1] получено немало экспериментальных данных, подтверждающих существование этого явления в режиме сильной ленгмюровской турбулентности. В низкотемпературной разреженной плазме без магнитного поля уже наблюдались ВЧ-колебания, запертые в области с пониженной плотностью, где уровень плотности энергии этих колебаний существенно превосходит средний по объему [2]. Эти области были интерпретированы как стационарные солитоны. В последующих работах [3, 4] удалось исследовать динамику коллапса уединенной каверны. Концепция коллапса ленгмюровских волн подтверждается также численными экспериментами. По существующим сегодня представлениям при сильной ленгмюровской турбулентности в плазме должно возникать множество каверн, которые в условиях развитой сильной турбулентности находятся на разной стадии коллапса. Поглощение энергии ленгмюровских волн частью быстрых электронов осуществляется на заключительной фазе коллапса каждой из каверн. Возможности современного математического моделирования не позволяют дать полного кинетического описания развитой сильной ленгмюровской турбулентности даже в отсутствие магнитного поля. Имеющиеся экспериментальные данные, соответствующие режиму множественных каверн, также весьма скудны. Что же касается случая плазмы в магнитном поле, то строгого доказательства коллапса как нелинейной стадии модуляционной неустойчивости в замагниченной

плазме в общем случае не существует¹. Имеются, однако, примеры численных решений для плазмы в магнитном поле, показывающие, что начальная локализация высокочастотного электрического поля при определенных условиях превращается в каверну, коллапсирующую со сверхзвуковой скоростью [5].

Имеются два макроскопических следствия из существования в плазме коллапсирующих каверн.

1. Энергия ленгмюровских волн, запертых в коллапсирующих кавернах, диссипирует на электронах плазмы. На заключительных стадиях коллапса эта энергия передается небольшой доле электронов, пересекающих каверны за время, меньшее периода колебаний электрического поля в них. Благодаря этому эффекту на электронной функции распределения появляются энергичные "хвосты". В экспериментах по взаимодействию мощных релятивистских электронных пучков (РЭП) с плазмой в сильном магнитном поле хвосты электронной функции распределения как результат возбуждения пучком ленгмюровской турбулентности неоднократно наблюдались [6–8].

2. На заключительных стадиях коллапса, когда включается затухание и высокочастотное давление уменьшается, благодаря перепаду плотности (и газокинетического давления) плазмы вне и

¹ Подразумевается случай, когда магнитная добавка в законе дисперсии ленгмюровских волн превосходит тепловую, т.е. $3(kr_D)^2 < (\omega_{He}/\omega_{pe})^2$.

внутри каверны происходит генерация ионно-звуковых волн. В изотермической плазме коротковолновые ионно-звуковые колебания быстро затухают в результате взаимодействия с резонансными ионами. В неизотермической плазме ($T_e \gg T_i$), когда затухание звуковых волн становится слабым, процесс коллапса порождает интенсивную ионно-звуковую турбулентность. К настоящему времени известны всего два эксперимента, в которых при возбуждении в разреженной плазме с помощью нерелятивистского электронного пучка сильной ленгмюровской турбулентности наблюдалась генерация ионно-звуковых колебаний [9, 10]. В [9] магнитное поле отсутствовало, а эксперимент [10] выполнен в условиях, когда влиянием магнитного поля можно пренебречь $3(kr_D)^2 > (\omega_{He}/\omega_{pe})^2$. В настоящей работе делается первая попытка обнаружения возбуждения низкочастотной ионно-звуковой турбулентности в процессе взаимодействия мощного РЭП с плазмой в сильном магнитном поле.

Эксперименты по исследованию возбуждения ионно-звуковой турбулентности проводились на установке ГОЛ-М. Предварительная водородная плазма ($n_e = 1.5 \times 10^{15} \text{ см}^{-3}$, $T_{e0} \approx 1 \text{ эВ}$, $L = 250 \text{ см}$, $D = 6 \text{ см}$, магнитное поле в однородной части $B_0 = 2.5 \text{ Тл}$, в пробках $B_m = 4.5 \text{ Тл}$) создавалась прямым разрядом. Сквозь одну из пробок в плазму инжектировался электронный пучок с энергией 700 кэВ, током 2–3 кА, диаметром $d_b = 2 \text{ см}$ и длительностью до 200 нс. Ранее на этой установке было продемонстрировано возникновение интенсивной ленгмюровской турбулентности во время инжекции электронного пучка в плазму [11]. Впоследствии был измерен подробный пространственный спектр ленгмюровской турбулентности от области накачки при $|\mathbf{k}| = \omega_{pe}/c$ до $|\mathbf{k}| = 13\omega_{pe}/c$ и показано, что порог модуляционной неустойчивости значительно превышен [12]. Эти результаты наряду с наблюдением значительного количества неравновесных горячих электронов, возникающих во время существования ленгмюровской турбулентности [8], позволяют считать ее сильной. Таким образом, наличие коллапса ленгмюровских волн в наших условиях следует считать весьма вероятным. За оценку сверху начального размера каверны можно взять характерную длину волны энергосодержащей части спектра (области накачки) ленгмюровских колебаний, $l_0 = 2\pi v_b/\omega_{pe} \approx 0.1 \text{ см}$, которая оказывается существенно меньше диаметра турбулентной области $d_b = 2 \text{ см}$. Поскольку, кроме того, характерные времена развития пучковой $t_B \approx (10^{-2} - 10^{-3})2\pi/\omega_{pe} \approx 0.1 \text{ нс}$ и модуляционной $t_m \leq l_0/c_s \approx 10 - 15 \text{ нс}$ неустойчивостей много меньше времени существования турбулентности 200 нс, имеются основания считать исследуемый случай режимом сильной развитой ленгмюровской турбулентности. Методом томсоновского рассеяния с использованием в качестве

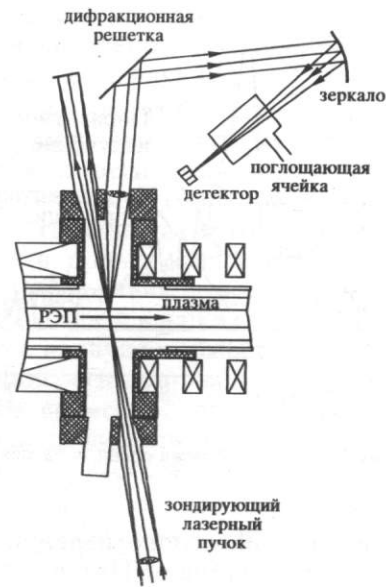


Рис. 1. Схема эксперимента по измерению частотного спектра.

источника излучения второй гармоники неодимового лазера было установлено, что в течение первых 40 нс от начала инжекции РЭП электронная температура плазмы благодаря столкновительному затуханию ленгмюровских волн достигала 50 эВ, оставаясь практически неизменной в течение последующего времени инжекции РЭП. Таким образом, спустя 40 нс после начала инжекции плазма оказывалась сильно неизотермической ($T_e \gg T_i$), поскольку характерное время выравнивания электронной и ионной температур в наших условиях существенно превосходит длительность процесса.

Для исследования спектров низкочастотных флуктуаций использовался метод коллективного лазерного рассеяния с импульсным CO_2 -лазером в качестве источника зондирующего излучения (энергия в импульсе 10 Дж, длительность $\sim 1 \text{ мкс}$) [13]. Рассеянное излучение регистрировалось под углами $\theta = 6, 11, 16^\circ$ по отношению к направлению распространения лазерного пучка. Определялся как частотный, так и пространственный спектр низкочастотных флуктуаций плотности плазмы. На рис. 1 представлена схема, использовавшаяся для исследования частотного спектра колебаний. С помощью длиннофокусной ($f = 75 \text{ см}$) линзы из BaF_2 лазерный пучок фокусировался на ось плазменного столба под углом, близким к 90° . Диаметр лазерного пучка в фокусе составлял 0.1 см. С помощью другой линзы из BaF_2 ($f = 25 \text{ см}$) рассеянное излучение формировалось в параллельный пучок, попадавший на дифракционную решетку (100 штр/мм). Излучение, разложенное в спектр дифракционной решеткой, с помощью сферического зеркала ($R = 100 \text{ см}$) фокусирува-

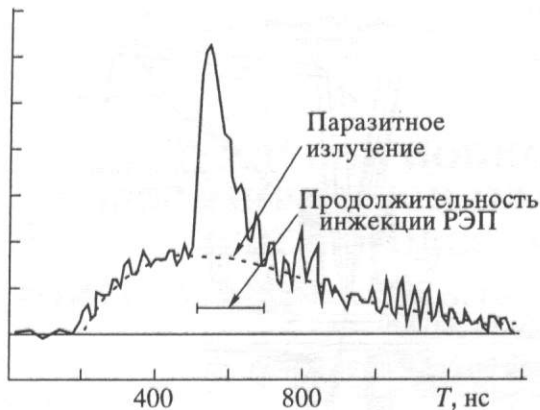


Рис. 2. Осциллограмма сигнала рассеяния.

лось на линейку фотосопровитлений Si : В, охлаждаемую жидким гелием. На рис. 2 представлена типичная осциллограмма регистрируемого сигнала рассеяния на низкочастотных флуктуациях. Здесь же отмечено время, в течение которого в плазму инжектируется электронный пучок. Поскольку длительность зондирующего лазерного излучения в несколько раз превышает длительность сигнала рассеяния на флуктуациях, не возникало проблемы с разделением полезного сигнала и сигнала, связанного с паразитным излучением.

Спектральный состав рассеянного излучения предварительно исследовался в интервале $\omega_0 \pm \pm 1.5\omega_{pe}$ (здесь ω_0 — частота лазерного излучения, ω_{pe} — частота ленгмюровских колебаний плазмы). Предварительный анализ спектрального состава рассеянного излучения показал, что излучение регистрируется лишь в одном канале спектрометра в интервале $\Delta\omega/2\pi < 30$ ГГц, отсчитываемом от несмещенной лазерной частоты. При указанных выше углах регистрации излучение, рассеянное на ленгмюровских колебаниях, не могло наблюдаться, поскольку для волновых чисел $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i| \approx \approx 2|\mathbf{k}_i| \sin \frac{\theta}{2}$ спектральная плотность ленгмюровской турбулентности на несколько порядков ниже максимальной при $|\mathbf{k}| = \omega_{pe}/c$ ($\theta < 1^\circ$) (см. [12]), и соответствующая мощность рассеянного излучения была ниже порога чувствительности в этих экспериментах. В приведенном соотношении \mathbf{k}_i , \mathbf{k}_s — волновые векторы падающего и рассеянного излучения, \mathbf{k} — волновой вектор регистрируемых флуктуаций. Измерение частоты НЧ-турбулентности, обнаруженной в нулевом канале спектрометра, осуществлялось по схеме, представленной на рис. 1, с использованием ячейки поглощения с аммиаком в пространстве между решеткой и детектором. Аммиак имеет одиночную линию $asR(1,1)$, практически совпадающую с линией ге-

нерации $R14$ CO_2 -лазера ($\lambda = 10.288$ мкм). Сдвиг между максимумом частоты поглощения и генерации равен $\Delta\nu \approx 1.45$ ГГц. Постепенное увеличение давления аммиака в кювете, через которую пропускалось исследуемое излучение, приводило к возникновению поглощения рассеянного излучения линией $asR(1,1)$ при ее уширении давлением [13]. Для кюветы длиной 15 см анализируемый сигнал существенно уменьшался по амплитуде уже при давлении 30 Тор. По зависимости поглощения от давления в кювете было установлено, что сдвиг частоты рассеянного на низкочастотных флуктуациях излучения соответствует величине $\Delta\nu \sim 2$ ГГц. Эта величина находится в хорошем соответствии с частотой ионно-звуковых флуктуаций в условиях эксперимента. Одновременно с регистрацией ионно-звуковой турбулентности с помощью отдельного канала с углом наблюдения 0.5° регистрировалась и ленгмюровская турбулентность. Для подавления паразитного излучения на несмещенной частоте в этом канале применялась ячейка поглощения с аммиаком подобно тому, как это описано в [13]. Сопоставление сигналов показывает, что возникновение ВЧ- и НЧ-турбулентности происходит практически одновременно, а их амплитуды хорошо скоррелированы. Поскольку ионно-звуковая турбулентность при определенных условиях может возбуждаться обратным током, возникающим при инъекции РЭП в плазму, были поставлены специальные контрольные эксперименты. Было показано, что при инъекции РЭП через толстую фольгу даже при увеличенной плотности тока релятивистских электронов не возбуждается как ионно-звуковая, так и ленгмюровская турбулентность (в данном эксперименте наблюдались ленгмюровские волны, распространяющиеся под углами 30° – 90° по отношению к направлению движения электронного пучка). При увеличении толщины фольги возрастает угловой разброс пучка, что приводит к резкому уменьшению инкремента пучковой неустойчивости $\Gamma \propto \propto 1/\Delta\theta_b^2$ и снижению эффективности пучково-плазменного взаимодействия, что видно, в частности, по значительному снижению температуры плазмы в этом случае. Таким образом, можно считать установленным, что наблюдаемая ионно-звуковая турбулентность является следствием развитой сильной ленгмюровской турбулентности. В этом случае ионный звук должен генерироваться на заключительных стадиях коллапса. Соответственно анализ k -спектра НЧ-турбулентности позволяет дать оценку минимального размера коллапсирующих каверн. Схема измерения k -спектра ионно-звуковой турбулентности показана на рис. 3. Рассеянное излучение собиралось линзой, так что регистрировались колебания, распространяющиеся примерно под углом 45° к направле-

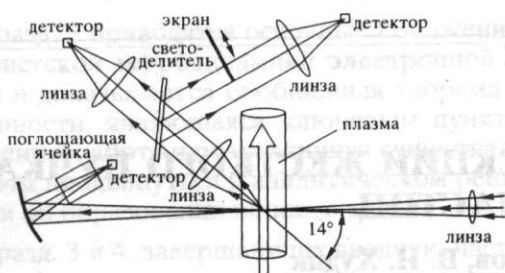


Рис. 3. Схема измерений k -спектра.

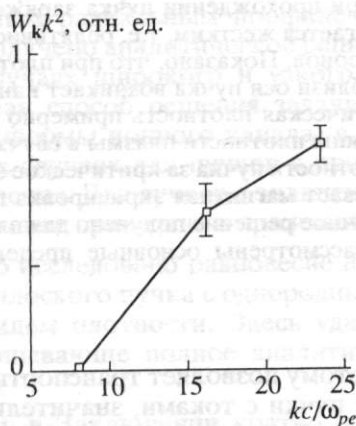


Рис. 4. Пространственный спектр ионно-звуковых колебаний.

нию магнитного поля. Рассеянное излучение с помощью светоделительной пластинки направлялось на два канала, один из которых служил для слежения за общим уровнем рассеянного сигнала с целью уменьшения разброса в измерениях. Во втором канале излучение регистрировалось под углом 11° или 16° . На рисунке изображен также канал ($\theta = 0.5^\circ$) для наблюдения рассеянного излучения, характеризующего спектральную плотность ленгмюровской турбулентности (см. [12]).

На рис. 4 приведены первые результаты измерений пространственного спектра ионно-звуковой турбулентности. Величина ошибки определяется статистическим разбросом сигналов в различных выстрелах. Спектральная плотность энергии ионно-звуковой турбулентности в максимуме существенно превышает уровень тепловых флуктуаций: $W_k/T_e \approx 10^5$. Хотя полученные на рис. 4 данные и не дают возможности определить минимальный размер коллапсирующих каверн, они все же позволяют дать в качестве его оценки сверху величину $l_{\min} < 30r_D$. Этот масштаб довольно близок к значению, полученному в [9, 10] для минимальных размеров коллапсирующих каверн

в максвелловской плазме без магнитного поля $l_c = 15r_D$, и значительно меньше длин ленгмюровских волн в области накачки $l_0 \approx 800r_D$.

Можно отметить, что в экспериментах с более редкой плазмой при сильной ленгмюровской турбулентности регистрировались хаотические всплески излучения на основной плазменной частоте или ее гармониках, что являлось важным аргументом в пользу существования коллапса [10, 14, 15]. Измерения эмиссии на частоте $2\omega_{pe}$ проводились ранее и в наших условиях [16], однако вероятное наличие множества каверн в области, из которой регистрировалось излучение, и недостаточное временное разрешение приемника ($t \approx 200$ нс) не позволили зарегистрировать всплешечный характер собственной эмиссии плазмы.

Работа была выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 94-02-03937а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Захаров В.Е. // ЖЭТФ. 1972. Т. 62. С. 1745.
2. Kim H.C., Stenzel R., Wong A.Y. // Phys. Rev. Lett. 1974. V. 33. P. 886.
3. Wong A.Y., Cheung P.Y. // Ibid. 1984. V. 52. P. 1222.
4. Cheung P.Y., Wong A.Y. // Phys. Fluids. 1985. V. 28. P. 1538.
5. Лунатов А.С. // Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 26. С. 516.
6. Burmasov V.S., Khilchenko A.D., Kruglyakov E.P. et al. // Proc. 10th Europ. Conf. on Contr. Fusion and Plasma Phys. Moscow, 1981. V. 1. P. C2.
7. Arzhannikov A.V., Burdakov A.V., Vyacheslavov L.N. et al. // Proc. Intern. Conf. on Plasma Phys. Lausanne, 1984. Inv. Paper. 1. P. 285.
8. Vyacheslavov L.N., Burmasov V.S., Kandaurov I.V. et al. // Bull. Amer. Phys. Soc. 1995. V. 40. P. 1715.
9. Whelan D.A., Stenzel R.L. // Phys. Fluids. 1985. V. 28. P. 958.
10. Карфидов Д.М., Рубенчик А.М., Сергейчев К.Ф., Сычѳв И.А. // ЖЭТФ. 1990. Т. 98. С. 1592.
11. Вячеславов Л.Н., Кандауров И.В., Кругляков Э.П. и др. // Письма в ЖЭТФ. 1989. Т. 50. С. 379.
12. Vyacheslavov L.N., Burmasov V.S., Kandaurov I.V. et al. // Phys. Plasmas. 1995. V. 2. P. 2224.
13. Vyacheslavov L.N., Kruglyakov E.P., Losev M.V., Sannin A.L. // Rev. Sci. Instrum. 1993. V. 64(6) P. 1398.
14. Волков В.Д., Перепелкин Н.Ф., Супруненко В.А., Сухомлин Е.А. Коллективные явления в токонесящей плазме. Киев: Наук. думка, 1979. С. 131.
15. Cheung P.Y. A dissertation for DP in Physics. UCLA, 1984.
16. Kandaurov I.V., Kruglyakov E.P., Losev M.V. et al. // IX Intern. Conf. on High-Power Particle Beams, Washington, 1992. V. 2. P. 1037.

ПУЧКИ В ПЛАЗМЕ

УДК 933.95

РАВНОВЕСИЕ ПЛАЗМЫ ПРИ ИНЖЕКЦИИ ЖЕСТКОГО ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

© 1997 г. И. А. Котельников, В. Н. Худик

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН

Поступила в редакцию 01.04.96 г.

Найдено равновесное распределение плотности электронов при прохождении пучка заряженных частиц через плазму с неподвижными ионами. Пучок предполагается жестким, т.е. релятивистская масса частиц пучка велика по сравнению с массой покоя электронов. Показано, что при плотности пучка ультрарелятивистских электронов выше критической вблизи оси пучка возникает канал, из которого полностью вытеснены все электроны плазмы. Критическая плотность примерно равна плотности плазмы в случае узкого пучка и снижается до половины плотности плазмы в случае широкого пучка. Размер канала увеличивается при увеличении плотности пучка за критическое значение и может превысить диаметр пучка, в результате чего исчезает магнитная экранировка пучка, препятствующая его самофокусировке и ограничению тока. Точное решение получено для плоского пучка. Для цилиндрического и эллиптического пучков рассмотрены основные предельные случаи.

1. ВВЕДЕНИЕ

Предложенные в последние годы новые методы ускорения и транспортировки заряженных частиц, нацеленные на достижение рекордного темпа ускорения (см. обзоры [1, 2]), возобновили интерес к исследованию взаимодействия плотных ступков релятивистских заряженных частиц с плазмой. Предполагается, что пучок ультрарелятивистских электронов инжектируется в плазму и возбуждает в ней кильватерную волну, в которой происходит ускорение частиц, находящихся в резонансе с волной, до энергии, значительно превышающей энергию частиц драйверного пучка. Оставаясь за рамками настоящей работы вопросы, связанные с эффективностью возбуждения кильватерной волны, рассмотрим задачу о равновесии плазмы при инжекции в нее релятивистского электронного пучка.

Огромное большинство работ, посвященных этой проблеме (их обзор можно найти в монографии [3]), основано на предположении о фиксированной зарядовой компенсации пучка. Иными словами, обычно предполагается, что отношение n_b/n_i плотности пучка n_b к плотности нейтрализующего фона ионов n_i задано и равно, например, единице. Применительно к инжекции пучка в плазму это или подобные ему предположения обычно ни на чем не основаны, поэтому степень зарядовой и токовой компенсации пучка должна определяться из решения задачи о движении пучка в плазме. Впервые в ясной форме об этом было сказано в [4–7], где было показано, что при инжекции пучка в плазму в ней возникает обратный ток, который приводит к магнитной экранировке

пучка и поэтому позволяет транспортировать через плазму пучки с токами, значительно превышающими альфвеновский предел [8].

Магнитная экранировка пучка имеет место, если плотность пучка заметно меньше плотности плазмы. При увеличении плотности пучка электроны плазмы выталкиваются из области, занятой пучком. При плотности пучка выше некоторой критической в плазме образуется ионный канал, из которого удалены все электроны плазмы. Диаметр канала может превышать диаметр пучка. Задача о транспортировке электронного пучка внутри ионного канала, образующегося в разреженной плазме, была решена в [9]. Как оказалось, пучок в канале принимает форму гофрированного цилиндра, а размер гофров зависит от начального диаметра пучка.

Условия образования ионного канала исследовались численно в недавней работе [10], причем постановка задачи была сформулирована в работе [11], ориентированной на схемы кильватерного ускорения, в которых используются короткие ступки электронов. В частности, в [11] было отмечено, что на начальной стадии инжекции ультрарелятивистского электронного пучка в плазму в отличие от ситуации, рассмотренной в [9], можно пренебречь влиянием плазмы на движение частиц пучка, а ионы плазмы можно считать неподвижными.

В настоящей работе получено аналитическое решение задачи [10] о начальной стадии формирования ионного канала.

Ниже будем придерживаться следующего плана изложения.

В разд. 2 приводятся основные положения релятивистской гидродинамики электронной жидкости и доказывается обобщенная теорема вложенности, являющаяся ключевым пунктом в настоящей работе и позволяющая существенным образом продвинуться в аналитическом решении задачи об образовании ионного канала.

В разд. 3 и 4, завершающих вводную часть работы, сформулированы основные свойства стационарного потенциального течения электронной жидкости.

В разд. 5 рассмотрен цилиндрический пучок с произвольным радиальным профилем плотности. Здесь получено аналитическое решение в предельных случаях широкого и узкого пучков, а также указан способ решения задачи (включая отыскание формы ионного канала) в указанных предельных случаях для пучков с произвольной формой сечения. Для пучков с эллиптическим сечением решение приведено в приложениях А и Б.

В разд. 6 исследовано равновесие плазмы при инъекции плоского пучка с однородным по сечению профилем плотности. Здесь удается получить исчерпывающе полное аналитическое решение.

Наконец, в Заключении кратко обсуждается устойчивость полученных решений. Подробный анализ устойчивости выполнен в отдельной статье [12].

2. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЫ

Следуя [11], будем пренебрегать смещением ионов плазмы и частиц пучка под действием электромагнитного поля, индуцированного пучком в плазме. Это предположение справедливо, если в течение рассматриваемого интервала времени τ индуцированное пучком поле не успевает вызвать заметного изменения траектории движения частиц пучка и ионов плазмы в отличие от легко подвижных электронов плазмы. Можно показать, что последнее предположение справедливо, если релятивистская масса электронов пучка $\gamma_b m_e$ значительно больше массы электронов m_e , а длительность рассматриваемого интервала времени удовлетворяет неравенствам

$$\tau \ll \omega_p^{-1} \sqrt{\gamma_b}, \quad \tau \ll \omega_p^{-1} \sqrt{m_i/m_e}. \quad (1)$$

Пучок, удовлетворяющий указанным условиям, для краткости будем называть жестким. При выполнении первого из условий (1) плотность пучка есть заданная функция координат и времени. Полагая для простоты, что все частицы пучка имеют одинаковую скорость \mathbf{u} , имеем

$$n_b = n_b(\mathbf{r} - \mathbf{u}t). \quad (2)$$

Второе из неравенств (1) позволяет пренебречь движением ионов¹. Поэтому их плотность n_i также является заданной функцией координат. Начиная с разд. 6, будем считать плазму однородной, тогда $n_i = \text{const}$.

Пренебрегая кинетическими эффектами, будем считать, что температура электронов плазмы T_e и их частота столкновений ν_{ei} с ионами плазмы равны нулю. Более точные ограничения на величину T_e и ν_{ei} приведены в Заключении.

В гидродинамическом приближении течение электронов плазмы описывается динамическим уравнением

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{p} = -e\mathbf{E} - (e/c)[\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad (3)$$

где \mathbf{v} – скорость, $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$ – импульс, $\gamma \equiv (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ – релятивистский фактор электронов плазмы (который не следует путать с релятивистским фактором $\gamma_b \equiv (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ частиц пучка), $e > 0$ – элементарный заряд. Электрическое и магнитное поля, индуцированные в системе плазма–пучок, определяются из уравнений Максвелла

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\text{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}(en_e \mathbf{v} + en_b \mathbf{u}). \quad (5)$$

При заданной плотности ионов n_i и плотности пучка n_b плотность электронов n_e плазмы выражается через электрическое поле \mathbf{E} при помощи уравнения

$$\text{div}\mathbf{E} = 4\pi e(n_i - n_b - n_e). \quad (6)$$

Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div}n_e \mathbf{v} = 0$$

есть следствие уравнений (5) и (6), а последнее из уравнений Максвелла,

$$\text{div}\mathbf{B} = 0,$$

фактически служит начальным условием для уравнения (4). Поэтому уравнения (3)–(6) составляют полную систему уравнений гидродинамики электронной жидкости.

Преобразуем уравнение (3), применив к нему операцию rot и приняв во внимание тождество

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{p} = \nabla(\gamma m c^2) - \mathbf{v} \times \text{rot}\mathbf{p}. \quad (7)$$

¹ Если в первом из неравенств (1) τ имеет смысл времени Δt , прошедшего от момента входа пучка в плазму, то во втором неравенстве τ есть длительность пучка L/u , пропорциональная его длине L .

Результат преобразований можно привести к уравнению, известному в магнитной гидродинамике как уравнение вмороженности, если ввести "эффективное" магнитное поле $\mathcal{B} = \mathbf{B} - (c/e)\text{rot}\mathbf{p}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{B} = \text{rot}[\mathbf{v} \times \mathcal{B}]. \quad (8)$$

В нерелятивистском пределе это уравнение получено, например, в [13, §7.4]. Его следствием являются два взаимно дополняющие утверждения, составляющие теорему вмороженности (см., например, [14], §65)).

Первое. Поток вектора \mathcal{B} через всякую поверхность, опирающуюся на любой замкнутый жидкий контур (т.е. контур, движущийся вместе с составляющими его частицами), сохраняется:

$$\int \mathcal{B} d\mathbf{S} = \text{const}. \quad (9)$$

Второе. Каждая силовая линия поля \mathcal{B} перемещается вместе с находящимися на ней электронами, а величина \mathcal{B}/n_e меняется в каждой точке пропорционально растяжению соответствующей "жидкой линии".

Уравнение (8) переходит в обычное уравнение вмороженности

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} = \text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad (10)$$

в пределе

$$\omega \ll \omega_p, \quad \lambda_p \ll a,$$

где a — характерный размер задачи (диаметр пучка), $\lambda_p = c/\omega_p$ — толщина скин-слоя. Иными словами, уравнение вмороженности (10) верно, если движение достаточно медленное, а толщина скин-слоя достаточно мала. Уравнение (8) не требует выполнения этих условий.

3. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ

Будем считать, что до начала инъекции пучка электроны плазмы покоились, а поля в плазме отсутствовали. Тогда из (9) следует, что вспомогательное поле \mathcal{B} тождественно равно нулю или, что то же самое,

$$\mathbf{B} = (c/e)\text{rot}\boldsymbol{\gamma}\mathbf{v}. \quad (11)$$

Используя (7), (11), из уравнения (3) можно исключить магнитное поле и выразить электрическое поле через скорость электронов:

$$\mathbf{E} = -\frac{m_e}{e} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}\mathbf{v}}{\partial t} - \frac{1}{e} \nabla \boldsymbol{\gamma} m_e c^2. \quad (12)$$

Подставляя (12) в уравнение (5), находим плотность электронов плазмы как функцию их скорости:

$$n_e = n_i - n_b + \frac{m_e c^2}{4\pi e^2} \Delta \boldsymbol{\gamma} + \frac{m_e}{4\pi e^2} \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \boldsymbol{\gamma}\mathbf{v}. \quad (13)$$

Исключая теперь в (5) \mathbf{B} , \mathbf{E} и n_e , получаем уравнение для определения поля скоростей электронов $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$:

$$c^2 \text{rot}^2 \boldsymbol{\gamma}\mathbf{v} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \text{div} \right) \left[\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}\mathbf{v}}{\partial t} + c^2 \nabla \boldsymbol{\gamma} \right] = \omega_p^2 [(n_b/n_i - 1)\mathbf{v} - (n_b/n_i)\mathbf{u}], \quad (14)$$

где $\omega_p = \sqrt{4\pi n_i e^2 / m_e}$ — электронная плазменная частота, вычисленная по невозмущенной плотности электронов, равной плотности ионов плазмы n_i .

Движение холодных электронов, удовлетворяющее уравнению (11), принадлежит классу течений, которые можно назвать потенциальными. Действительно, если выразить магнитное поле через векторный потенциал \mathbf{A} :

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A},$$

то из равенства $\mathcal{B} = 0$ находим, что канонический импульс электронов $\mathcal{P} = \mathbf{p} + (-e/c)\mathbf{A}$ есть градиент некоторой функции s , которая является "потенциалом обобщенного импульса":

$$\mathcal{P} = \nabla s. \quad (15)$$

Для потенциального течения уравнению (3) можно придать форму уравнения Бернулли:

$$\frac{\partial s}{\partial t} - e\phi + \boldsymbol{\gamma} m c^2 = f(t), \quad (16)$$

если использовать тождество (7) и ввести электрический потенциал ϕ посредством

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Функцию $f(t)$ в правой части (16) без ограничения общности можно считать равной нулю, так как потенциал s определен с точностью до произвольной функции времени. Заметим, что после подстановки

$$\boldsymbol{\gamma} m c^2 = \{m^2 c^4 + c^2 [\nabla s + (e/c)\mathbf{A}]^2\}^{1/2}$$

и $f(t) = 0$ уравнение (16) совпадает с уравнением Гамильтона-Якоби [15, §16]. Следовательно, потенциал обобщенного импульса s является общим интегралом уравнения Гамильтона-Якоби².

² Напомним, что в механических приложениях основную роль играет так называемый полный интеграл [16, §47].

Выполнив калибровочное преобразование потенциалов

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} - (c/e)\nabla s, \quad \varphi \rightarrow \varphi + \frac{1}{e} \frac{\partial s}{\partial t},$$

соотношения (15), (16) можно переписать в виде равенства нулю обобщенного четырехимпульса электронов плазмы:

$$\mathcal{P}^k = \{\gamma mc + (-e/c)\varphi, \mathbf{p} + (-e/c)\mathbf{A}\} = 0. \quad (17)$$

Уравнение (14), описывающее потенциальное течение электронного газа в электромагнитном поле, индуцированном жестким пучком, можно также получить, варьируя по \mathbf{v} интеграл действия

$$S = \int d^3 r dt [(H^2 - E^2)/8\pi - e(n_i - n_b)\varphi - en_b \mathbf{u} \mathbf{A}], \quad (18)$$

в котором \mathbf{E} , \mathbf{B} , φ и \mathbf{A} выражены через скорость электронов плазмы с помощью соотношений (11), (12) и (17).

Как мы увидим в следующем разделе, уравнение (14) формально может иметь решения такие, что плотность электронов, вычисленная при помощи (13), в некоторой области становится отрицательной. В этом случае следует считать, что образуется полость, откуда электроны плазмы полностью вытеснены. Внутри полости электромагнитное поле удовлетворяет уравнениям Максвелла с известным распределением зарядов и токов:

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div} \mathbf{E} = 4\pi e(n_i - n_b), \quad (19)$$

$$\text{rot} \mathbf{B} = -\frac{4\pi}{c} en_b \mathbf{u} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \text{div} \mathbf{B} = 0. \quad (20)$$

На поверхности, ограничивающей полость, поля \mathbf{E} и \mathbf{B} непрерывны, а сама форма канала должна определяться из совместного решения уравнений (11)–(14), (19) и (20).

4. СТАЦИОНАРНОЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ

В оставшейся части статьи сосредоточимся на рассмотрении пучков, стационарных в том смысле, как это было разъяснено во Введении (см. (1)). Именно, будем считать, что плотность частиц пучка не зависит от времени t и координаты z вдоль направления распространения пучка:

$$n_b = n_b(\mathbf{r}_\perp).$$

Здесь \mathbf{r}_\perp – радиус-вектор в плоскости, перпендикулярной скорости частиц пучка $\mathbf{u} = (0, 0, u)$. Течение электронов плазмы в этом случае является стационарным и потенциальным, а скорость час-

тиц $\mathbf{v} = (0, 0, v)$ параллельна скорости пучка. Тогда уравнение (14) принимает следующий вид:

$$\lambda_p^2 \text{div}_\perp (\gamma^2 \nabla_\perp v) - \gamma v - \frac{n_b}{n_i} \gamma (u - v) = 0, \quad (21)$$

где $\lambda_p = c/\omega_p$, а индекс \perp у операторов дифференцирования подчеркивает, что они действуют только на поперечные координаты.

Как мы увидим, скорость электронов плазмы знакоопределена и направлена так, чтобы уменьшить плотность суммарного тока в системе пучок–плазма. Если канал не возникает, то система приблизительно квазинейтральна. В общем случае имеет место зарядовая (электрическая) экранировка пучка:

$$\int d^2 \mathbf{r}_\perp (n_i - n_e - n_b) = 0. \quad (22)$$

Магнитное поле пучка экранируется на расстоянии порядка толщины скин-слоя λ_p от границы пучка. Поэтому, если характерный радиус пучка a меньше λ_p , нейтрализация магнитного поля отсутствует, но всегда имеется токовая (магнитная) экранировка пучка:

$$\int d^2 \mathbf{r}_\perp (n_e v + n_b u) = 0. \quad (23)$$

Введем функцию

$$\chi = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1 + v/c}{1 - v/c} \right] \quad (24)$$

и перейдем к безразмерным переменным: скорость будем измерять в единицах c , длину – в единицах λ_p , плотность – в единицах n_i . Плотность ионного остова в этих единицах равна 1, а плотность пучка и электронов плазмы по-прежнему будем обозначать через n_b и n_e . Относительно скорости частиц пучка предполагаем, что она направлена в положительном направлении оси z : $0 < u < 1$. В новых обозначениях уравнение (21) для определения поля скоростей $v = \text{th} \chi$ принимает вид

$$\Delta_\perp \chi = \text{sh} \chi + n_b u \text{ch} \chi - n_b \text{sh} \chi. \quad (25)$$

Плотность плазменных электронов n_e , нескомпенсированная плотность тока j_z , электрическое и магнитное поля – все выражаются через функцию $\chi(\mathbf{r}_\perp)$:

$$\mathbf{B} = -[\mathbf{i}_z \times \nabla_\perp] \text{sh} \chi, \quad (26a)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla_\perp \text{ch} \chi, \quad (26b)$$

$$n_e = 1 - n_b + \Delta_\perp \text{ch} \chi, \quad (26в)$$

$$j_z = -\Delta_\perp \text{sh} \chi, \quad (26г)$$

здесь $i_z = (0, 0, 1)$, плотность тока измеряется в единицах $|e|n_i c$, а электрическое и магнитное поля – в единицах $4\pi|e|n_i\lambda_p$.

5. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ПУЧОК

Характер течения электронов плазмы существенным образом зависит от соотношения характерного радиуса пучка a и толщины скин-слоя. Если плотность пучка меньше плотности плазмы, толщину скин-слоя следует вычислять по плотности плазмы; в этом случае она равна $\lambda_p = \sqrt{m_e c^2 / 4\pi e^2 n_i}$. Если $n_b \gg n_i$, то толщина скин-слоя $\lambda_b = \sqrt{m_e c^2 / 4\pi e^2 n_b}$ определяется плотностью пучка n_b . При $n_b \ll n_i$ параметр λ_b не имеет особого смысла, тем не менее нам будет удобно ввести понятие “тонкого” и “широкого” пучков, сравнивая ширину пучка a именно с величиной λ_b . Ниже будет показано, что при $a \ll \lambda_b$ (“тонкий” пучок) скорость электронов плазмы мала по сравнению со скоростью света, тогда как в противоположном случае $a \gg \lambda_b$ (“широкий” пучок) при возникновении ионного канала вблизи его границы электроны плазмы двигаются с релятивистскими скоростями. Толщина скин-слоя λ_p , вычисленная по плотности плазмы n_i , определяет глубину проникновения магнитного поля пучка в плазму. Если канал отсутствует (т.е. заведомо $n_b \ll n_i$), магнитное поле экранируется на расстоянии порядка λ_p от пучка (если $a \ll \lambda_p$) либо нейтрализуется (если $a \gg \lambda_p$) обратным током. Если канал существует (т.е. заведомо $n_b > n_i$), магнитное поле тонкого пучка ($a \ll \lambda_b$) также экранируется на расстоянии порядка λ_p , но от границы канала; в случае широкого пучка ($a \gg \lambda_b$) магнитное поле экранируется на существенно меньшем расстоянии от границы канала за счет образования плотного слоя релятивистских электронов.

5.1. Тонкий пучок

Рассмотрим сначала “тонкий” пучок, полагая, что его радиус удовлетворяет условию $a \ll \lambda_b$. В безразмерных переменных оно эквивалентно неравенству

$$a^2 n_b u \ll 1. \quad (27)$$

При $n_b \ll 1$ радиус “тонкого” пучка формально может быть больше толщины скин-слоя в плазме.

Как подтверждают результаты последующих вычислений, при выполнении неравенства (27) функция χ , а вместе с ней и скорость электронов плазмы малы, $v \approx \chi \ll 1$. Подставляя $\chi = v$ в (25), отбрасывая последнее слагаемое (оно мало по

сравнению со вторым) и заменяя гиперболические функции $\text{ch}\chi$ и $\text{sh}\chi$ первыми членами разложения по малому аргументу $\chi \ll 1$, получаем уравнение

$$\Delta_{\perp} \chi = \chi + n_b u. \quad (28)$$

В осесимметричном случае, когда n_b зависит только от расстояния r от оси пучка z в цилиндрической системе координат, решение уравнения (28) выражается через цилиндрические функции мнимого аргумента K_0 и I_0 :

$$v(r) = -K_0(r) \int_0^r dr' r' n_b u I_0(r') - I_0(r) \int_r^{\infty} dr' r' n_b u K_0(r'). \quad (29)$$

Если радиус пучка значительно больше толщины скин-слоя в плазме, т.е. $a \gg 1$, то $v(r) \approx -n_b u$. В этом нетрудно убедиться, если заметить, что

$$r I_0(r) = \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} I_0(r), \quad r K_0(r) = \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} K_0(r),$$

выполнить в (29) интегрирование по частям и использовать тождество

$$K_0(r) \frac{d}{dr} I_0(r) - I_0(r) \frac{d}{dr} K_0(r) = \frac{1}{r}.$$

При $a \gg 1$ магнитное поле оценивается как $B = -v' \sim n_b u / a$; оно значительно меньше, чем магнитное поле $B_b \sim n_b u a$ такого же пучка в вакууме.

Если радиус пучка значительно меньше толщины скин-слоя в плазме, $a \ll 1$, то на небольших расстояниях от оси пучка $B \sim B_b$. Ток плазмы экранирует поле пучка лишь на расстоянии $r \geq 1$. Система с большой точностью квазинейтральна, а электрическое поле значительно меньше, чем магнитное: $|n_e + n_b - 1| \sim (n_b u a^2)^2 \ll 1$, $E = vB \sim (n_b u a^2) B$.

Описанная картина требует уточнения, если плотность пучка превышает плотность плазмы, $n_b \geq 1$. Рассмотрим типичную ситуацию, когда плотность пучка n_b максимальна на его оси и монотонно убывает к периферии пучка. Подставляя (29) в (26в), найдем, что плотность электронов плазмы на оси пучка обращается в нуль при $n_b(0) = n_{cr}$, где

$$n_{cr} = 1 - n_b(0) u \int_0^{\infty} dr' r' n_b u K_0(r'). \quad (30)$$

Второе слагаемое в выражении для n_{cr} значительно меньше единицы, поэтому в него можно подставить $n_b(0) = 1$. Если $n_b(0) > n_{cr}$, вблизи оси z

образуется канал, из которого вытеснены все электроны плазмы. При выполнении условия (27) скорость электронов плазмы по-прежнему мала, но теперь вместо (29) имеем

$$v(r) = -K_0(r) \left[\int_0^r dr' r' n_b u I_0(r') + C \right] - I_0(r) \int_r^{r_*} dr' r' n_b u K_0(r'), \quad (31)$$

где константу C , как и радиус канала r_* , следует находить из условия непрерывности электрического и магнитного полей на границе канала:

$$E = \frac{1}{r_*} \int_0^{r_*} dr r (1 - n_b) = -v v',$$

$$B = -\frac{1}{r_*} \int_0^{r_*} dr r n_b u = -v'.$$

Исключая из этих равенств C , нетрудно получить уравнение для определения r_* . В пределе $n_b(0) \rightarrow n_{cr}$, когда $r_* \ll 1$, оно имеет вид

$$2\pi \int_0^{r_*} dr r (n_b - n_{cr}) = \pi r_*^2 n_{cr}^2 \int_0^{r_*} dr r^{-1} \int_0^r dr' r' n_b u.$$

Отсюда ясно, что радиус канала пропорционален $(n_b(0) - n_{cr})^{1/2}$. Если $n_b(0) \gg n_{cr} \approx 1$ (но $n_b u a^2 \ll 1$), радиус канала $r_* \sim a \sqrt{n_b}$ значительно больше, чем радиус пучка (см. ниже). Тогда получаем уравнение

$$\int_0^{r_*} dr r (1 - n_b) = - \left(K_0(r_*) / r_* K_0'(r_*) \right) \left[\int_0^{r_*} dr r n_b u \right]^2.$$

Поскольку его правая часть мала по параметру (27), в первом приближении радиус канала можно находить из условия, что полный заряд внутри канала равен нулю:

$$2\pi \int_0^{r_*} dr r n_b = \pi r_*^2. \quad (32)$$

С этой же точностью электрическое поле равно нулю на границе канала, а критическая плотность —

³ Если плотность пучка однородна по его сечению, то радиус канала превышает радиус пучка при сколь угодно малой надкритичности.

плотности плазмы, $n_{cr} \approx 1$. При $r_* \gg a$ скорость движения электронов плазмы вне канала описывается формулой

$$v = \frac{K_0(r)}{r_* K_0'(r_*)} \int_0^{r_*} dr r n_b u.$$

На пределе применимости приближения тонкого пучка, $n_b u a^2 \rightarrow 1$, вблизи границы канала она приближается к скорости света. При $n_b \gg 1$ условие $n_b u a^2 \ll 1$ может не выполняться, даже если $a < 1$.

Приближенное равенство $E = 0$ на границе канала имеет простое объяснение и справедливо для тонкого пучка любой формы. Действительно, поскольку электроны плазмы находятся в равновесии, должна быть равна нулю действующая на них сила, поэтому на границе канала $E + |v, B|/c = 0$. При нерелятивистских скоростях вторым слагаемым здесь можно пренебречь, откуда и следует граничное условие $E = 0$. Указанное граничное условие дает ключ к определению формы канала для узкого пучка с сечением произвольной формы. Ее следует находить из решения уравнений электростатики

$$\operatorname{div} E = 1 - n_b, \quad \operatorname{rot} E = 0$$

с граничным условием $E = 0$. Для пучка с эллиптическим сечением решение приведено в Приложении А.

5.2. Широкий пучок

Рассмотрим теперь противоположный случай

$$a^2 n_b u \gg 1. \quad (33)$$

Если ионный канал не образуется (а значит, $n_b < 1$ и $a \gg 1$), скорость электронов плазмы можно найти, приравняв к нулю правую часть уравнения (25) или пренебрегая первым членом в уравнении (21):

$$v = -\frac{n_b}{1 - n_b} u + \mathcal{O}(a^{-2}). \quad (34)$$

В этом случае имеет место локальная нейтрализация заряда и тока пучка. Однако при $n_b \geq 1/(1 + u)$ скорость электронов (34) формально становится больше скорости света. Следовательно, при $a \gg 1$ критическая плотность пучка, соответствующая образованию канала, примерно равна половине плотности невозмущенной плазмы:

$$n_{cr} = 1/(1 + u) = 1/2 + 1/8 \gamma_b^2.$$

Предположим, что плотность пучка значительно больше критической ($n_{cr} = 1$ в случае $a \ll 1$

и $n_{cr} = 1/2$ в случае $a \gg 1$). При этом характерный радиус канала r_* значительно больше, чем радиус пучка, так как $r_* \sim a\sqrt{n_b}$. Вытесненные из канала электроны движутся с релятивистскими скоростями в тонком приграничном слое, толщину которого обозначим через δ_* . За его пределами имеют место локальная токовая и зарядовая нейтрализация. Плотность электронов в слое n_* можно оценить, подставляя $n_e \sim n_*$ и $\text{sh}\chi = \text{ch}\chi = \gamma_*$ в уравнение (26в), откуда получаем соотношение

$$n_* \sim \gamma_*/\delta_*^2.$$

Полагая $n_b(r_*) = 0$, из уравнения (25) находим связь между толщиной приграничного слоя и релятивистским фактором γ_* электронов в этом слое:

$$\gamma_* \sim 1/\delta_*^2.$$

Еще одно соотношение получим, используя следствие (11) уравнения вмороженности:

$$n_b u a^2 / r_* \sim \gamma_* / \delta_*.$$

Объединяя эти оценки и полагая для простоты $u = 1$, получаем

$$\begin{aligned} \gamma_* &\sim (n_b a^2)^{1/3}, \quad \delta_* \sim (n_b a^2)^{-1/6}, \\ n_* &\sim (n_b a^2)^{2/3}. \end{aligned} \quad (35)$$

Приближение жесткого пучка применимо, если релятивистский фактор электронов пучка γ_b значительно больше, чем γ_* , т.е.

$$\gamma_b \gg (n_b a^2)^{1/3}.$$

Ультрарелятивистский характер движения электронов в приграничном слое существенно упрощает решение рассматриваемой задачи. Вычисления естественным образом разбиваются на три этапа.

Сначала определим форму канала. Введем в рассмотрение поле \mathbf{F} силы, действующей на единичный заряд, движущийся с околосветовой скоростью вдоль оси z :

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} - [\mathbf{i}_z \times \mathbf{V}]. \quad (36)$$

Внутри канала это поле удовлетворяет уравнениям

$$\text{div}\mathbf{F} = 1 - 2n_b, \quad (37)$$

$$\text{rot}\mathbf{F} = 0. \quad (38)$$

На границе канала вектор \mathbf{F} равен нулю, так как равна нулю сила Лоренца, действующая на электрон приграничного слоя. Таким образом, в случае широкого пучка форма канала определяется из решения "электростатических" уравнений (37), (38) с граничным условием $\mathbf{F} = 0$. Так как поток вектора \mathbf{F} через границу канала при этом равен нулю, то из уравнения (37) следует, что заряд электронов пучка внутри канала вдвое меньше заряда нейтрализующего фона ионов. Для осесимметричного пучка отсюда сразу получаем уравнение для определения радиуса канала:

$$2\pi \int_0^{r_*} dr r n_b = \frac{1}{2} \pi r_*^2. \quad (39)$$

Для случая эллиптического пучка форма канала найдена в Приложении Б.

На втором этапе вычислим электрическое и магнитное поля внутри канала. Характерная величина электростатического потенциала внутри канала ϕ порядка $(n_b a^2)$. С другой стороны, из (26б) следует, что на границе канала величина потенциала $\phi_* \sim \gamma_* \sim (n_b a^2)^{1/3}$ значительно меньше этого значения. Таким образом, чтобы найти ϕ , нужно решить двумерное уравнение Пуассона

$$\Delta_{\perp} \phi = n_b - 1 \quad (40)$$

в определенной ранее области с граничным условием $\phi = 0$. При известных ϕ и \mathbf{F} электрическое и магнитное поля внутри канала вычисляются по формулам

$$\mathbf{E} = -\nabla_{\perp} \phi, \quad (41)$$

$$\mathbf{V} = [\mathbf{i}_z \times (\mathbf{F} + \nabla_{\perp} \phi)].$$

На третьем этапе найдем поле скоростей электронов в приграничном слое. Для этого выделим небольшой участок поверхности, являющейся границей канала, и введем здесь локальную декартову систему координат с осью x , направленной по внешней нормали \mathbf{n} к границе. Следует считать, что на границе заданы электрическое и магнитное поля, найденные на втором этапе, причем электрическое поле перпендикулярно границе, а магнитное параллельно:

$$\mathbf{E} = E_* \mathbf{n}, \quad \mathbf{V} = E_* [\mathbf{i}_z \times \mathbf{n}], \quad E_* = -(\mathbf{n} \nabla_{\perp}) \phi. \quad (42)$$

Пренебрегая зависимостью χ от координат в плоскости границы по сравнению с быстрым изменением в направлении оси x и полагая $u = 1$ в уравнении (25), перепишем его в виде

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \text{sh}\chi + n_{b*} e^{-\chi}.$$

Плотность пучка на границе канала $n_{b*} \equiv n_b(r_*)$ можно считать постоянной на толщине приграничного слоя δ_* . Вводя обозначение⁴

$$\sigma = \frac{1}{2} \ln(1 - 2n_{b*}),$$

еще более упростим уравнение на функцию χ :

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - e^\sigma \operatorname{sh}(\chi - \sigma) = 0. \quad (43)$$

Оно имеет интеграл "энергии":

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 - e^\sigma \operatorname{ch}(\chi - \sigma) = \text{const}. \quad (44)$$

Вне приграничного слоя функция $\chi(x)$ меняется значительно медленнее, чем внутри слоя. Поэтому нужно считать, что $\chi(x) \rightarrow \sigma$ при $x \rightarrow \infty$ (см. уравнение (43)), а $W = -e^\sigma$. На границе канала (т.е. при $x = 0$) функция χ принимает большое отрицательное значение χ_* , так как здесь $v = \operatorname{th} \chi \rightarrow -1$, а ее производную находим из (44):

$$\mathbf{n} \nabla \chi = \frac{\partial \chi}{\partial x} = 2e^{\sigma/2} \operatorname{sh}(\chi_*/2 - \sigma/2). \quad (45)$$

Уравнение для определения χ_* получаем из условия непрерывности электрического поля на границе и формул (26б), (45):

$$E_* = 2e^{\sigma/2} \operatorname{sh} \chi_* \operatorname{sh}(\chi_*/2 - \sigma/2). \quad (46)$$

Это же соотношение следует из условия непрерывности магнитного поля. Учитывая, что $E_* \sim (n_b a^2)^{1/2} \gg 1$, уравнение (46) можно решать приближенно:

$$\chi_* \approx -\frac{2}{3} \ln(2E_* e^{-\sigma}). \quad (47)$$

Теперь из уравнения (44) с $W = -e^\sigma$ нетрудно найти зависимость χ от x :

$$\frac{\operatorname{th}[(\chi - \sigma)/4]}{\operatorname{th}[(\chi_* - \sigma)/4]} = \exp[-xe^{\sigma/2}], \quad (48)$$

а затем при помощи соотношений $v = \operatorname{th} \chi$ (26а), (26б) вычислить скорость электронов и электромагнитное поле в приграничном слое.

В качестве примера рассмотрим осесимметричный пучок со ступенчатым профилем плотности. Радиус канала $r_* = \sqrt{2n_b a^2}$, определяемый из уравнения (39), в этом случае больше радиуса

⁴ Вне канала $n_b < 1/2$.

пучка, так что все частицы пучка находятся внутри канала, а $n_{b*} = 0$. В результате получаем: $\sigma = 0$,

$$E_* = r_*/4, \chi_* = -(2/3) \ln(r_*/2), \gamma_* = r_*^{2/3} / 2^{5/3}.$$

При распространении пучков с $a \sim 1$ и $n_b \sim 1$ слой, в котором электроны плазмы движутся с околорелятивистскими скоростями $v \sim 1/2$, имеет ширину порядка a . В этом случае решение может быть найдено только численно. Рассмотрим случай, когда пучок аксиально-симметричен и целиком находится внутри канала. На границе канала электрическое и магнитное поля

$$E_* = r_*(1 - \langle n_b \rangle)/2, \quad B_* = -r_* \langle n_b \rangle u/2 \quad (49)$$

выражаются через среднюю плотность пучка

$$\langle n_b \rangle = \frac{1}{\pi r_*^2} \int_{r \leq r_*} n_b dx dy.$$

Так как вне канала $n_b = 0$, уравнение (25) несколько упрощается:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \chi}{\partial r} = \operatorname{sh} \chi. \quad (50)$$

Граничные условия при $r = r_*$ получаем, приравняв (26а), (26б) соответственно к B_* и E_* :

$$\operatorname{th} \chi_* = E_*/B_*, \quad \frac{\partial \chi}{\partial r} = \sqrt{B_*^2 - E_*^2}. \quad (51)$$

При удалении от пучка скорость течения электронов плазмы убывает ($\chi \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$), что и определяет зависимость $\langle n_b \rangle$ от r_* (рис. 1а). Зависимость скорости электронов на границе от размера канала приведена на рис. 1б.

6. ПЛОСКИЙ ПУЧОК

Рассмотрим стационарный плоский пучок с шириной $2a$. Будем считать, что плотность частиц пучка равна $n_b = \text{const}$ при $|x| < a$ и обращается в нуль при $x < -a$ и $x > a$. Считая частицы пучка ультрарелятивистскими, по-прежнему будем пренебрегать их смещением под действием индуцированных пучком полей.

В плоской геометрии уравнение (25) преобразуется к виду

$$\chi'' = n_b u \operatorname{ch} \chi + (1 - n_b) \operatorname{sh} \chi, \quad (25')$$

где штрих означает дифференцирование по координате x , а вместо (26а)–(26б) имеем

$$B_y = -\operatorname{ch} \chi \chi', \quad (26а')$$

$$E_x = -\operatorname{sh} \chi \chi', \quad (26б')$$

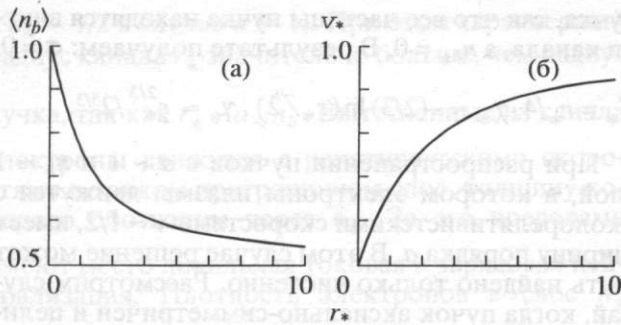


Рис. 1. Зависимость $\langle n_b \rangle$ (а) и скорости электронов v_* на границе канала (б) от радиуса канала r_* .

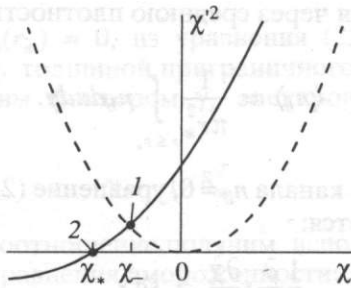


Рис. 2. Зависимость χ^2 от χ : пунктирная кривая соответствует области $|x| \gg a$ вне пучка, сплошная кривая — в области $|x| \ll a$ внутри пучка. Точка 0 соответствует $x = \pm\infty$, $1 - x = \pm a$, $2 - x = 0$.

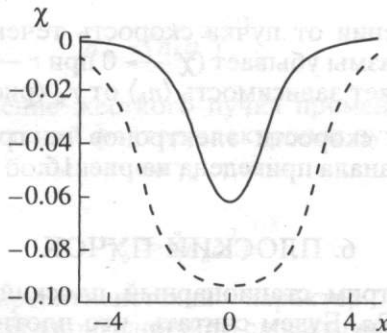


Рис. 3. Зависимость $\chi(x)$ для пучка малой плотности: $n_b = 0.1$, $u = 0.99$. Сплошная кривая — $a = 1$, пунктирная — $a = 3$.

$$n_e = 1 - n_b + \text{ch} \chi \chi'^2 + \text{sh} \chi \chi'' \tag{26в'}$$

$$j_z = -\text{sh} \chi \chi'^2 - \text{ch} \chi \chi'' \tag{26г'}$$

На границе пучка $x = \pm a$ непрерывна функция χ и ее первая производная χ' , а при $x \rightarrow \pm\infty$ всякое движение должно затухать, т.е. $\chi \rightarrow 0$ и $\chi' \rightarrow 0$. Можно показать, что ограниченное решение

уравнения (25') с указанными граничными условиями существует при одновременном выполнении следующих условий.

Во-первых, ток электронов плазмы должен быть направлен так, чтобы компенсировать ток частиц пучка, а именно функция $\chi(x)$ всюду отрицательна либо равна нулю, $\chi \leq 0$.

Во-вторых, при отсутствии ионного канала решение симметрично относительно центральной плоскости пучка $x = 0$, $\chi(-x) = \chi(x)$, однако в отличие от цилиндрического случая канал не обязательно соосен с пучком.

В-третьих, функция χ монотонна в каждом из полупространств $x < 0$ и $x > 0$ вне канала.

Рассмотрим сначала случай, когда канал не образуется. Не предполагая заранее наличие определенной симметрии в искомом решении, обозначим величину функции $\chi(x)$ на границах $x = \pm a$ соответственно через χ_{\pm} и по аналогии с $v = \text{th} \chi$ введем обозначение $u = \text{th} \psi$.

Интегрируя уравнение (25') с учетом непрерывности χ и χ' , находим, что

$$\chi'^2 = 4 \text{sh}^2(\chi/2) \tag{52}$$

при $|x| < a$ и

$$\chi'^2 = 4 \text{sh}^2(\chi_{\pm}/2) + 2n_b u (\text{sh} \chi - \text{sh} \chi_{\pm}) + 2(1 - n_b)(\text{ch} \chi - \text{ch} \chi_{\pm}) \tag{53}$$

при $|x| > a$, причем либо $\chi_+ = \chi_-$, либо $\chi_+ = 2\psi - \chi_-$. Из уравнения (52) следует, что вне пучка функция $\chi(x)$ монотонна, поскольку χ' нигде не обращается в нуль, кроме как при $\chi \rightarrow 0$. Поэтому для существования ограниченного решения необходимо, чтобы нашлась такая точка, где в нуль обращалась бы правая часть уравнения (53).

Проследим за возможным профилем $\chi(x)$, используя график зависимости χ'^2 от χ , представленный на рис. 2. Стартуем, например, из $x = -\infty$ и будем двигаться в положительном направлении оси x (рис. 3). На рис. 2 стартовой точке $x = -\infty$ соответствует начало координат $\chi = \chi' = 0$. Стартовая точка отмечена цифрой 0 и находится на пунктирной кривой, которая описывается формулой (52), соответствующей области вне пучка. Предположим, что $\chi_- < 0$. Тогда движению от $x = -\infty$ к границе пучка $x = -a$ на рис. 2 соответствует перемещение по пунктирной кривой в сторону увеличения χ от точки 0 к точке 1, где происходит переход на сплошную кривую, изображающую зависимость χ'^2 от χ внутри пучка. Поскольку χ' непрерывна на границе пучка, при движении от границы $x = -a$ в глубь пучка величина χ должна по-прежнему уменьшаться (увеличиваться по абсолютной величине). Как видно из рис. 2, величина

на χ^2 при этом уменьшается, пока не обратится в нуль в точке 2, где сплошная кривая пересекает ось абсцисс. Из точки 2 движение возможно только в обратном направлении, т.е. в сторону увеличения χ , так как при дальнейшем уменьшении χ величина χ^2 стала бы отрицательной. Таким образом, происходит возврат в точку 1, которая является граничной. Следовательно, попадание в эту точку должно происходить при $x = +a$. Теперь в точке 1 происходит обратный переход со сплошной кривой на пунктирную и затем возвращение в точку 0, но уже при $x = +\infty$. Тем самым мы доказали, что в принципе может существовать решение, обладающее указанными выше свойствами знакоопределенности, четности и монотонности.

Нетрудно убедиться, что других решений, в частности таких, что $\chi(x) \geq 0$, не существует. Для этого нужно заметить, что в зависимости от соотношения параметров n_b и u правая часть уравнения (53) может обращаться в нуль либо в одной, либо в двух точках. Например, при $n_b < 1/(1+u)$ имеются два корня, причем оба отрицательны. Один из них соответствует только что рассмотренному решению, а второй недоступен, так как отделен от первого интервалом, на котором $\chi^2 < 0$. При $1/(1+u) < n_b < 1/(1-u)$ существует один корень, также отрицательный. При $n_b > 1/(1-u)$ вновь появляется второй, причем положительный, корень, однако он соответствует движению электронов плазмы со скоростью больше скорости электронов пучка, что выходит за рамки применимости используемого нами приближения.

Основываясь на доказанном свойстве четности, введем единое обозначение χ_a вместо χ_+ и χ_- , а экстремальное значение функции χ , достигаемое при $x = 0$, обозначим через χ_* . Чтобы вычислить χ_* , заметим, что $\chi' = 0$ при $\chi = \chi_*$. Приравняв к нулю χ' в (53), получаем уравнение для определения χ_* :

$$\text{sh}^2(\chi_*/2) + (n_b/\text{ch}\psi) \text{sh}(\chi_a/2 - \chi_*/2) \times \text{sh}(\chi_a/2 + \chi_*/2 - \psi) = 0. \quad (54)$$

Из него можно выразить χ_* как функцию параметров n_b , u и не определенного пока значения χ_a , т.е. $\chi_* = \chi_*(n_b, u; \chi_a)$. При наличии двух корней следует брать отрицательный и наименьший по абсолютной величине. Для вычисления χ_a служит уравнение

$$\int_{\chi_*}^{\chi_a} d\chi/\chi' = a, \quad (55)$$

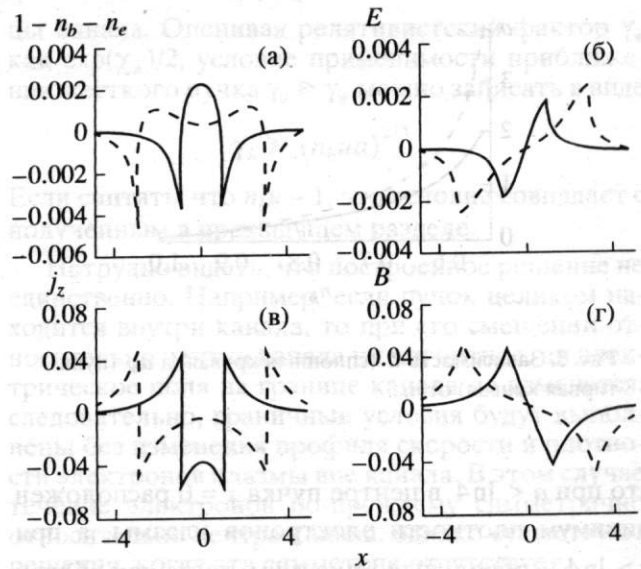


Рис. 4. Электронный пучок малой плотности: $n_b = 0.1$, $u = 0.99$. Сплошная кривая — $a = 1$, пунктирная — $a = 3$. а — пространственное распределение нескомпенсированной плотности заряда $1 - n_b - n_e$ в зависимости от x ; б — профиль электрического поля $E(x)$; в — пространственное распределение нескомпенсированной плотности тока $j_z(x)$; г — профиль магнитного поля $B(x)$.

где

$$\chi' = \sqrt{2} \sqrt{n_b u (\text{sh}\chi - \text{sh}\chi_*) + (1 - n_b)(\text{ch}\chi - \text{ch}\chi_*)}.$$

В качестве примера приведем решение для пучков малой плотности. При $n_b \ll 1$ все величины, за исключением нескомпенсированного заряда $1 - n_b - n_e$, линейны по функции χ , которая в свою очередь пропорциональна плотности пучка n_b :

$$\chi = n_b u \begin{cases} -[1 - e^{-a} \text{ch} x], & |x| < a, \\ -\text{sh} a e^{-|x|}, & |x| > a. \end{cases}$$

Электрическое и магнитные поля непрерывны на границе пучка, а нескомпенсированная плотность тока и нескомпенсированная плотность заряда испытывают скачок:

$$j_z = n_b u \begin{cases} -e^{-a} \text{ch} x, & |x| < a, \\ \text{sh} a e^{-|x|}, & |x| > a; \end{cases}$$

$$1 - n_b - n_e = n_b^2 u^2 \begin{cases} -[e^{-2a} \text{ch} 2x - e^{-a} \text{ch} x], & |x| < a, \\ 2 \text{sh}^2 a e^{-2|x|}, & |x| > a. \end{cases}$$

Графики, соответствующие случаю пучков малой плотности, приведены на рис. 4. Отметим,

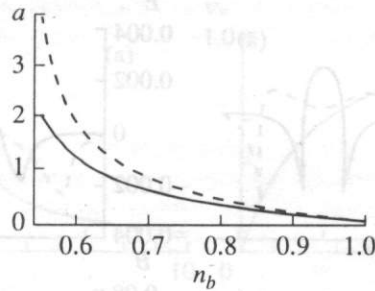


Рис. 5. Зависимость \bar{a} (сплошная кривая) и \bar{a}_* (пунктирная кривая) от n_b .

что при $a < \ln 4$ в центре пучка $x = 0$ расположен минимум плотности электронов плазмы, а при $a > \ln 4$ – локальный максимум, тогда как вблизи границ пучка имеются два минимума плотности.

Переходя к рассмотрению пучков большой плотности, отметим, что система уравнений (54) и (55) относительно параметров χ_* и χ_0 формально имеет вещественные корни при любых n_b , u и a . Однако при достаточно большой плотности пучка существенным оказывается ограничение $n_e \geq 0$, которому это формальное решение не всегда удовлетворяет.

Можно показать, что в момент возникновения канала плотность электронов плазмы (26в') минимальна в центре пучка $x = 0$. Обозначим величину $\bar{\chi}_*$, при которой n_e обращается в нуль, через $\bar{\chi}_*$. Подставляя $\chi = \bar{\chi}_*$, $n_e = 0$ в (26в'), используя (25') и учитывая, что $\chi' = 0$ при $x = 0$, для определения $\bar{\chi}_*$ получаем уравнение, в которое не входит величина χ_a . Из него находим:

$$\text{th } \bar{\chi}_* = -\frac{1-n_b}{n_b u}, \quad \bar{\chi}_* = \frac{1}{2} \ln \frac{n_b(1+u)-1}{1-n_b(1-u)}. \quad (56)$$

Так как $\bar{\chi}_* < 0$, а абсолютное значение $\text{th } \bar{\chi}_*$ не может быть больше единицы, зарождение канала происходит, если плотность пучка попадает в интервал

$$1/(1+u) < n_b < 1.$$

При $n_b < 1/(1+u)$ канал не может существовать, а при $n_b > 1$ не существует равновесия без канала. К тем же выводам мы пришли в предыдущем разделе.

Подставляя найденное значение $\bar{\chi}_*$ в уравнение (54) в качестве χ_* , находим величину χ_a в момент зарождения канала:

$$\text{th } \bar{\chi}_a = \frac{u - \sqrt{1 - (1-u^2)n_b^2}}{1 - u\sqrt{1 - (1-u^2)n_b^2}}, \quad (57)$$

$$\bar{\chi}_a = \ln \frac{1 - \sqrt{1 - (1-u^2)n_b^2}}{(1-u)n_b}.$$

Теперь из уравнения (55) можем найти критическое значение ширины пучка:

$$\bar{a} = \frac{F\left(\arccos\left[\frac{1 - \text{sh}(\bar{\chi}_a - \bar{\chi}_*)}{1 + \text{sh}(\bar{\chi}_a - \bar{\chi}_*)}\right], \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2^4} \sqrt{(n_b u)^2 - (1-n_b)^2}}, \quad (58)$$

где $F(\varphi, k) = \int_0^\varphi d\varphi / \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$ – эллиптический интеграл первого рода. При заданной плотности пучка, попадающей в интервал значений $1/(1+u) < n_b < 1$, канал существует, если $a > \bar{a}$. Если $n_b \rightarrow 1/(1+u)$, то $\bar{a} \rightarrow \infty$; если $n_b \rightarrow 1$, то $\bar{a} \rightarrow 0$. График зависимости \bar{a} от n_b изображен на рис. 5.

Обозначим через x_* полуширину ионного канала, предполагая, что границами являются плоскости $x = \pm x_*$. Рассмотрим сначала случай, когда канал находится целиком внутри пучка, т.е. $x_* < a$. Тогда на внутренней стороне границы канала электрическое и магнитное поля соответственно равны

$$E_x = (1-n_b)x_*, \quad B_y = -n_b u x_*. \quad (59)$$

Сравнивая эти значения с формулами (26б') и (26а'), находим, что значение χ на границе канала равно $\bar{\chi}_*$, а

$$\chi'^2 = [(n_b u)^2 - (1-n_b)^2] x_*^2. \quad (60)$$

Используя (53), теперь можно связать x_* со значением функции $\chi(x)$ на границе пучка:

$$x_*^2 = 2 \frac{n_b \text{ch } \chi_a - n_b u \text{sh } \chi_a - 1}{(n_b u)^2 - (1-n_b)^2}. \quad (61)$$

Для вычисления χ_a служит аналог уравнения (55):

$$\int_{\bar{\chi}_*}^{\chi_a} d\chi / \chi' = a - x_*, \quad (62)$$

где

$$\chi'^2 = \sqrt{2}[n_b u (\text{sh} \chi - \text{sh} \chi_a) + (1 - n_b)(\text{ch} \chi - \text{ch} \chi_a) + \text{ch} \chi_a - 1]^{1/2}.$$

Если $\chi_a = \bar{\chi}_*$, то ширина канала равна ширине пучка, $x_* = a$. Обозначим ширину пучка, соответствующую равенству $x_* = a$, через \bar{a}_* . Ее нетрудно найти из уравнения (61):

$$\bar{a}_*^2 = 2n_b u / [(n_b u)^2 - (1 - n_b)^2]^{3/2} - 2 / [(n_b u)^2 - (1 - n_b)^2]. \quad (63)$$

Как видно из рис. 5, при одинаковой плотности пучка $\bar{a}_* > \bar{a}$. Таким образом, мы выяснили, что при изменении ширины канала и фиксированной плотности пучка, удовлетворяющей неравенству $1/(1+u) < n_b < 1$, канал отсутствует, если $a < \bar{a}$; канал находится внутри пучка, если $\bar{a} < a < \bar{a}_*$; канал шире пучка, если $a > \bar{a}_*$. Так как оба критических значения ширины пучка \bar{a} и \bar{a}_* стремятся к нулю при $n_b \rightarrow 1$, ясно, что канал всегда шире пучка, если $n_b \geq 1$.

Перейдем к случаю $x_* > a$. Из условия непрерывности электрического и магнитного полей на границе канала получаем

$$\begin{aligned} E_x &= x_* - n_b a = -\text{sh} \chi_* \chi', \\ B_y &= -n_b u a = -\text{ch} \chi_* \chi'. \end{aligned} \quad (64)$$

Учитывая также, что в соответствии с (52) $\chi'^2 = 4 \text{sh}^2(\chi_*/2)$, получаем уравнение

$$\text{ch}^2 \chi_* (\text{ch} \chi_* - 1) = (n_b u a)^2 / 2 \quad (65)$$

для определения χ_* и параметрическую формулу для вычисления x_* по найденному значению χ_* :

$$x_* = n_b a + 2 \text{sh}(\chi_*/2) \text{sh} \chi_*. \quad (66)$$

Кубическое (относительно $\text{ch} \chi_*$) уравнение (65) имеет один вещественный корень. В частности, в случае тонкого пучка, $n_b u a \ll 1$, находим:

$$\chi_* \approx -n_b u a, \quad x_* \approx n_b a + (n_b u a)^2.$$

В противоположном случае $n_b u a \gg 1$:

$$\chi_* \approx -\ln(2n_b u a)^{2/3}, \quad x_* \approx (1+u)n_b a.$$

Как и в случае цилиндрического пучка, чем шире пучок, тем больше скорость электронов плазмы. Наибольшая скорость достигается вблизи грани-

цы канала. Оценивая релятивистский фактор γ_* как $\exp(\chi_*)/2$, условие применимости приближения жесткого пучка $\gamma_b \gg \gamma_*$ можно записать в виде

$$\gamma_b \gg (n_b u a)^{2/3}.$$

Если считать, что $n_b u \sim 1$, это условие совпадает с полученным в предыдущем разделе.

Нетрудно видеть, что построенное решение не единственно. Например, если пучок целиком находится внутри канала, то при его смещении относительно центра канала ни магнитное, ни электрическое поля на границе канала не изменятся; следовательно, граничные условия будут выполнены без изменения профиля скорости и плотности электронов плазмы вне канала. В этом случае течение электронов по-прежнему симметрично относительно центра канала, однако существуют решения, когда эта симметрия отсутствует.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Используя обобщенную теорему вмороженности (8), мы вычислили критическую плотность пучка ультрарелятивистских электронов, выше которой вблизи оси пучка возникает канал, из которого полностью вытеснены все электроны плазмы. В пределе тонкого пучка, $\lambda_p \ll a$, критическая плотность приближается к плотности плазмы. В случае широкого пучка, $\lambda_p \gg a$, она вдвое меньше. Размер канала увеличивается при увеличении плотности пучка за критическое значение и может превысить диаметр пучка, в результате чего исчезает магнитная экранировка пучка, препятствующая его самофокусировке и ограничению тока. Точное решение получено для плоского пучка. Для цилиндрического и эллиптического пучков рассмотрены предельные случаи тонкого и широкого пучков. В случае тонкого пучка его магнитное поле экранируется обратным током, создаваемым электронами плазмы, на расстоянии порядка скин-длины λ_p от границы канала. В случае широкого пучка магнитное поле экранируется тонким плотным слоем электронов плазмы, движущихся вблизи границы канала с релятивистскими скоростями.

Сделанное при выводе уравнений (11)–(14) предположение о зарядовом составе частиц пучка не является существенным. Мы предполагали, что пучок состоит из частиц с зарядом $(-e) < 0$. Полагая $n_b < 0$ в уравнениях, записанных в безразмерном виде, легко перейти к случаю пучка, состоящего из однократно ионизованных ионов или позитронов. Поэтому развитый в нашей работе подход к исследованию равновесия плазмы при инъекции электронного пучка легко переносится на случай пучка, состоящего из положительно заряженных частиц; разумеется, при этом канал не образуется.

В настоящей работе не анализировалась устойчивость плазмы, так как этой теме посвящена отдельная работа [12]. Отметим только, что применение теоремы вмерзлости (11) позволяет существенно продвинуться в исследовании вопросов устойчивости и доказать, что рассмотренные нами равновесия устойчивы по крайней мере в пределе пучка малой плотности. Существующие утверждения о неустойчивости плазмы при инжекции пучка (см., например, [17]) относятся к течениям, которые не являются потенциальным в том смысле, что эффективное поле \mathcal{R} не равно нулю.

Также не учитывались диссипативные процессы. Если пучок возбуждает микротурбулентность, то описанная в нашей работе картина течения плазмы существенно изменится, так как рассеяние электронов на флуктуациях препятствует скинированию поля пучка. Известно, однако, что чем выше плотность плазмы, тем меньше уровень турбулентности. Что касается кулоновских столкновений частиц, то им можно пренебречь, если

$$\tau \ll \nu_{ei},$$

где ν_{ei} — частота рассеяния электронов плазмы на ионах. Тепловое движение электронов плазмы не существенно, если за характерное время задачи τ электроны не успевают выскочить из скин-слоя, т.е.

$$\nu_{ei} \tau \ll \lambda_p \min[1, (n_b a^2)^{-1/6}].$$

Хотя последнее условие достаточно очевидно, отметим, что его можно получить, используя оценку глубины проникновения поля в плазму при аномальном скин-эффекте

$$\delta \sim \sqrt[3]{\lambda_p^2 \nu_{ei} \tau n_* / n_i \gamma_*^3}$$

и сравнивая ее с толщиной релятивистского слоя электронов δ_* на границе канала.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы признательны Ю.А. Цидулко за плодотворные дискуссии.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ТОНКИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ПУЧОК

Покажем, что если плотность пучка постоянна на софокусных эллипсах, то граница канала также является эллипсом, софокусным с пучком. Введем эллиптические координаты ξ, η согласно соотношениям

$$x = \rho \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = \rho \operatorname{sh} \xi \sin \eta,$$

где 2ρ — расстояние между фокусами. Координатные линии $\xi = \text{const}$ являются эллипсами, а $\eta = \text{const}$ — гиперболами с фокусами в точках $x = \pm \rho, y = 0$. Уравнение Пуассона

$$\Delta_{\perp} \Phi = n_b - 1 \quad (67)$$

в эллиптических координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = -\frac{\rho^2}{2} (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta) \rho. \quad (68)$$

Эллиптическому пучку соответствует случай, когда плотность заряда $\rho = 1 - n_b$ зависит только от $\xi, n_b = n_b(\xi)$. Пусть также $n_b(\xi)$ — монотонно убывающая функция. Канал образуется, если $n_b(0) > 1$.

Решение уравнения (68) ищем в виде

$$\Phi(\xi, \eta) = \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi) \cos 2\eta. \quad (69)$$

Подстановка (69) в (68) приводит к уравнениям

$$\varphi_1'' = -\frac{\rho^2}{2} \operatorname{ch} 2\xi \rho(\xi), \quad (70)$$

$$\varphi_2'' - 4\varphi_2 = \frac{\rho^2}{2} \rho(\xi), \quad (71)$$

где штрих означает дифференцирование по ξ . При $\xi = 0$ эллипс вырождается в отрезок прямой $[-\rho, \rho]$ на оси x , а производная $\partial\Phi/\partial\xi$ на этом отрезке вследствие симметрии задачи равна нулю, т.е.

$$\varphi_1'(0) = 0, \quad \varphi_2'(0) = 0.$$

Предположим, что канал ограничен эллипсом с $\xi = \xi_0$. Потребовав, чтобы на границе канала $E = 0$, получаем еще три граничных условия при $\xi = \xi_0$:

$$\varphi_1'(\xi_0) = 0, \quad \varphi_2'(\xi_0) = 0, \quad \varphi_2(\xi_0) = 0.$$

Таким образом, для двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка на две функции всего имеем пять граничных условий, что больше требуемых четырех. Однако оказывается, что из трех граничных условий на функцию $\varphi_2(\xi)$ одно есть следствие двух других.

Чтобы доказать это, проинтегрируем сначала уравнение (70) по ξ от 0 до ξ_* с учетом граничных условий на функцию $\varphi_1(\xi)$. Как и должно быть, таких условий два, и мы получаем уравнение для определения ξ_* :

$$2\pi \int_0^{\xi_*} \operatorname{ch} 2\xi \rho(\xi) d\xi = \int_{\xi \leq \xi_*} \rho dx dy = 0. \quad (72)$$

При указанных выше предположениях относительно функции $\rho(\xi)$ оно имеет единственное решение. Умножим теперь (71) на $\operatorname{ch} 2\xi$ и проинте-

грируем по ξ от нуля до ξ_* . При этом в правой части уравнения получим нуль как следствие (72), а в левой – линейную комбинацию $\varphi_2'(0)$, $\varphi_2(\xi_*)$ и $\varphi_2'(\xi_*)$:

$$\int_0^{\xi_*} (\varphi_2'' - 4\varphi_2) \operatorname{ch} 2\xi d\xi =$$

$$= \varphi_2'(\xi_*) \operatorname{ch} 2\xi_* - \varphi_2'(0) - 2\varphi_2(\xi_*) \operatorname{sh} 2\xi_* = 0.$$

Отсюда следует сделанное выше утверждение. Итак, в случае тонкого пучка канал ограничен эллипсом с полуосями

$$a_* = p \operatorname{ch} \xi_*, \quad b_* = p \operatorname{sh} \xi_*,$$

внутри которого полный заряд равен нулю, а решение уравнения (68) имеет вид

$$\varphi = -\frac{p^2}{2} \left\{ \int_0^{\xi} d\xi' \rho(\xi') [\xi - \xi'] \operatorname{ch} 2\xi' - \int_0^{\xi_*} d\xi' \rho(\xi') [\xi_* - \xi'] \operatorname{ch} 2\xi' \right\} +$$

$$+ \frac{p^2}{4} \left\{ \int_0^{\xi} d\xi' \rho(\xi') \operatorname{sh} 2(\xi - \xi') - \frac{\operatorname{ch} 2\xi}{\operatorname{ch} 2\xi_*} \int_0^{\xi_*} d\xi' \rho(\xi') \operatorname{sh} 2(\xi_* - \xi') \right\} \cos 2\eta. \quad (73)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ШИРОКИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ПУЧОК

Поле F , удовлетворяя уравнениям электростатики, является потенциальным $F = -\nabla\psi$, причем на границе канала $F = 0$. Потенциал ψ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta_{\perp} \psi = 2n_b - 1. \quad (74)$$

Форму границы канала и функцию ψ внутри канала находим аналогично тому, как это сделано в Приложении А, где во всех формулах нужно положить $\rho = 1 - 2n_b$.

Представим электростатический потенциал ϕ в виде суммы

$$\phi = \frac{1}{2} \Psi + \tilde{\phi}. \quad (75)$$

Найдем электрическое поле на границе канала. Очевидно, что $E_* = -(\mathbf{n} \cdot \nabla_{\perp}) \tilde{\phi}$. Сравнивая (67) и (75), заключаем, что вспомогательный потенциал $\tilde{\phi}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_{\perp} \tilde{\phi} = -\frac{1}{2}. \quad (76)$$

На границе канала $\tilde{\phi} = \text{const}$, так как электрическое поле перпендикулярно ей. Искомое решение уравнения Пуассона (76) имеет вид

$$\tilde{\phi} = -\frac{a_*^2 b_*^2}{4(a_*^2 + b_*^2)} \left(\frac{x^2}{a_*^2} + \frac{y^2}{b_*^2} \right). \quad (77)$$

Отсюда простым дифференцированием находим E_* :

$$E_*(x_*, y_*) = \frac{a_*^2 b_*^2}{2(a_*^2 + b_*^2)} \left(\frac{x_*^2}{a_*^2} + \frac{y_*^2}{b_*^2} \right)^{1/2}. \quad (78)$$

В частности, при аксиально-симметричном пучке канал представляет собой круг радиуса $r_* = a_* = b_*$, на границе которого $E_* = r_*/4$. Если к тому же весь

пучок находится внутри канала, то $\chi_* \approx \frac{2}{3} \ln(r_*/2)$, $\gamma_* \approx (r_*/2)^{2/3}/2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sessler A.M. // Phys. Fluids B. 1990. V. 2. P. 1325.
2. Wurtele J.S. // Ibid. 1993. V. 5. P. 2363.
3. Рухадзе А.А., Богданкевич Л.С., Росинский С.Е., Рухлин В.Г. Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. М.: Атомиздат, 1980.
4. Cox L.J., Bennett W.H. // Phys. Fluids. 1970. V. 13. P. 182.
5. Hammer D.A., Rostoker N. // Plasma Phys. 1970. V. 13. P. 1831.
6. Рухадзе А.А., Рухлин В.Г. // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 177.
7. Lee R., Sudan R.N. // Phys. Fluids. 1971. V. 14. P. 1213.
8. Alfvén H. // Phys. Rev. 1939. V. 55. P. 425.
9. Росинский С.Е., Рухлин В.Г. // ЖТФ. 1972. Т. 42. С. 511.
10. Лотов К.В. Препринт № 95-16. Новосибирск: Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера, 1995; Lotov K.V. To be published in Plasma Physics.

11. Breizman B.N., Tajima T., Fisher D.L., Chebotaev P.Z. // Research Trends in Physics: Coherent Radiation and Particle Acceleration. La Jolla International Scholl of Physics. The Institute for Advanced Studies, La Jolla, California, 1992. P. 263.
12. Худик В.Н., Федорук М.П. Препринт № 95-71. Новосибирск: Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера, 1995.
13. Петвиашвили В.И., Похотелов О.А. Уединенные волны в плазме и атмосфере. М.: Энергоатомиздат, 1989.

14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. Сер. Теоретическая физика. Т. VIII. М.: Наука, 1982.
15. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. Сер. Теоретическая физика. Т. II. М.: Наука, 1988.
16. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. Сер. Теоретическая физика. Т. I. М.: Наука, 1988.
17. Лотов К.В., Рютов Д.Д. Препринт № 94-32. Новосибирск: Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера, 1994.