

НЕУСТОЙЧИВОСТИ
В ПЛАЗМЕ

УДК 533.9

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ КИНЕТИЧЕСКИХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ
ВБЛИЗИ ПОРОГА

© 1997 г. Г. Л. Берк*, Б. Н. Брейзман** **, М. С. Пеккер*

* Институт термоядерных исследований, Техасский университет, г. Остин, США

** Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН, Новосибирск

Поступила в редакцию 17.04.97 г.

Выведено и решено новое нелинейное уравнение для эволюции коллективной моды в кинетической системе вблизи порога линейной неустойчивости. Доминирующая нелинейность связана с откликом резонансных частиц, который можно вычислить итерационно при условии, что эти частицы не захватываются волной. С учетом источников и классических релаксационных процессов теория описывает как мягкий нелинейный режим, в котором уровень насыщения моды пропорционален превышению над порогом неустойчивости, так и взрывной нелинейный режим, в котором мода нарастает до уровня, не зависящего от близости к порогу. Взрывное решение демонстрирует изменение частоты моды во времени. Моды, существующие в отсутствие энергичных частиц, расщепляются на компоненты, одна из которых имеет положительный, а другая отрицательный частотный сдвиг. Моды, требующие для своего существования присутствия энергичных частиц, имеют выделенное направление частотного сдвига. Частотный сдвиг не прекращается даже после захвата модой резонансных частиц.

1. ВВЕДЕНИЕ

В плазменных задачах часто встречаются неустойчивости, возникающие благодаря свободной энергии имеющейся в системе с инверсной заселенностью частиц. Когда исходный инкремент неустойчивости γ_L , связанный с инверсной функцией распределения, превосходит фоновое затухание γ_d , связанное с теми или иными фоновыми диссипативными механизмами, волны нарастают до нелинейного уровня. Недавно [1] припороговый нелинейный режим был описан для одномодовой электростатической задачи о кинетической пучковой неустойчивости с $\gamma_L - \gamma_d \ll \gamma_L$. При этом было показано, что нелинейная эволюция зависит от наличия источника энергичных частиц и частоты столкновительной релаксации (v_{eff}) частиц, взаимодействующих с волной. При наличии столкновений и достаточно малой надкритичности ($\gamma_L - \gamma_d \leq v_{eff}$) уровень насыщения моды всегда пропорционален превышению над порогом неустойчивости. Если же $\gamma_L - \gamma_d \approx v_{eff}$, то мода демонстрирует взрывную эволюцию, нарастая быстрее, чем экспоненциально до уровня, не зависящего от близости к порогу [1].

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы показать, как указанные выше результаты могут быть обобщены на случай произвольной кинетической системы с интегрируемыми невозмущенными орбитами частиц. Это обобщение ведется в нескольких направлениях. Исходная работа [1] ограничивалась анализом волн, которые существуют в отсутствие горячих частиц. Кинетическая компонента рассматривалась в ней как возмуще-

ние к моде. В данной работе мы расширяем теорию на случай так называемых непertурбативных волн, т.е. волн, само существование которых требует присутствия кинетической компоненты. Мы также приведем здесь детальный вывод результатов, кратко изложенных в [2]. Ключевое предположение, необходимое для такого обобщения, состоит в том, что система близка к порогу неустойчивости. При этом допускается, что линейные свойства моды могут существенно зависеть от распределения горячих частиц.

Отличительное свойство припороговой кинетической задачи – это доминирование нелинейного отклика резонансных частиц в общем нелинейном отклике. Чтобы представить вклад резонансных частиц в универсальном виде, используем переменные действие–угол [3]. Столкновения резонансных частиц описываются упрощенным оператором Фоккера–Планка [4], что позволяет учесть столкновения реалистично в отличие от предшествующей работы, где столкновения схематически описывались оператором Крука.

Нерезонансные частицы с достаточной точностью можно описывать в линейном приближении, а такие нелинейные эффекты, как взаимодействие мод, соответствуют более высокому порядку малости. В данной работе используем линейную теорию (включая столкновения) в низшем порядке, а затем итерируем до третьего порядка по амплитуде поля. Этот подход справедлив до тех пор, пока резонансные частицы не успевают совершить одного баунс-цикла в поле волны (либо вследствие их рассеяния из резонанса, либо

связи с тем, что временной интервал слишком мал для того, чтобы появились большие отклонения резонансных частиц). Мы покажем, что теория вытекающие из нее взрывные решения точны, если нелинейная баунс-частота частиц ω_b меньше, чем γ_L . Это существенно более мягкое ограничение на применимость теории, чем предполагалось в [1]. На пределе применимости взрывного решения частота волны изменяется на величину, равную γ_L . В зависимости от деталей частота может увеличиваться, уменьшаться или расщепляться на составляющие, двигающиеся в обоих направлениях. После нарушения припороговой теории удается использовать другой приближенный подход, некоторые результаты которого обобщаются в тексте. Мы увидим, что диссипация и накачка волны остаются сбалансированными и то частота волны может меняться на величину, существенно превышающую γ_L .

Теория, представленная в данной работе, допускает описание весьма широкого класса плазменных явлений. Она может быть использована для интерпретации начальной стадии альфвеновской неустойчивости в токамаке [5] (более точно – неустойчивости тороидальной альфвеновской моды, возбуждаемой энергичными частицами) или для описания непертурбативных мод, таких как «фишбон» [6, 7] (внутренние винтовые моды в присутствии энергичных частиц). Эта теория может помочь понять динамику некоторых коллективных неустойчивостей в накопительных кольцах [8, 9]. Имеются также и другие потенциальные приложения, требующие развития [10]. По течению обстоятельств, данная теория не дает ответа на вопрос, поставленный Саймоном и Робенлютом [11, 12], о том как определить уровень насыщения слабонеустойчивой моды для двугорбой функции распределения, которая едва-едва удовлетворяет критерию Пенроуза [13] для линейной неустойчивости. Дело в том, что в этом случае нелинейность становится существенной только при очень больших амплитудах поля, когда итерационный подход теряет смысл.

Будем придерживаться в этой статье следующей структуры: в разд. 2 обобщена процедура работы [1] и получено универсальное нелинейное уравнение для слабонеустойчивой моды, которое справедливо даже для непертурбативных мод. В разд. 3 продемонстрированы различные нелинейные сценарии, описываемые этим универсальным уравнением. В разд. 4 обсуждены некоторые нелинейные режимы, которые выходят за пределы применимости предположений припороговой теории. В разд. 5 представлены заключительные замечания.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Вблизи порога линейной неустойчивости эволюцию неустойчивой моды можно в общем случае анализировать в предположении слабой нелинейности. В этом пределе возмущенный ток \mathbf{J} , входящий в уравнения Максвелла, есть сумма \mathbf{J}_L , части тока, представляющей собой линейный функционал от электрического поля моды \mathbf{E} , и \mathbf{J}_{NL} , нелинейного тока, функциональная зависимость которого от \mathbf{E} рассчитывается по теории возмущений. В данной работе предполагаем, что вклад в \mathbf{J}_{NL} дают исключительно резонансные частицы, и пренебрегаем другими вкладами в \mathbf{J}_{NL} , малыми в области применимости наших расчетов. Используя фурье-преобразование уравнений Максвелла, получаем

$$\int d\mathbf{r}' \mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega, \alpha) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) = \mathbf{J}_{NL}, \quad (1)$$

где матрица $\mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega, \alpha)$, включающая вклад от \mathbf{J}_L , содержит параметр α , который характеризует близость к порогу неустойчивости. Линейная теория приводит к однородному уравнению

$$\int d\mathbf{r}' \mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega, \alpha) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r}', \omega) = 0.$$

На пороге неустойчивости ($\alpha \equiv \alpha_{cr}$) это уравнение имеет действительное собственное значение $\omega = \omega_0$ и нетривиальный собственный вектор $\mathbf{e}(\mathbf{r}, \omega_0)$, который определен с точностью до произвольной константы. Кроме того, удобно ввести сопряженный вектор $\mathbf{e}^\dagger(\mathbf{r}, \omega_0)$, который является решением уравнения

$$\int d\mathbf{r}' \mathbf{e}^\dagger(\mathbf{r}', \omega_0) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega_0, \alpha_{cr}) = 0.$$

Если $0 < 1 - \alpha_{cr}/\alpha \ll 1$ и нелинейный ток достаточно мал, то собственная функция $\mathbf{e}(\mathbf{r}, \omega)$ должна быть локализована вблизи $\omega = \omega_0$. Поэтому допустимо разложить $\mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega, \alpha)$ в окрестности $\omega = \omega_0$ и $\alpha = \alpha_{cr}$. Чтобы исключить член низшего порядка, умножим обе части уравнения (1) на $\mathbf{e}^\dagger(\mathbf{r}, \omega_0)$ и проинтегрируем результат по всему пространству, что дает

$$\int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \mathbf{e}^\dagger(\mathbf{r}, \omega_0) \cdot [(\omega - \omega_0) \mathbf{g}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_0, \alpha_{cr}) + (\alpha - \alpha_{cr}) \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_0, \alpha_{cr})] \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) = \int d\mathbf{r} \mathbf{e}^\dagger(\mathbf{r}, \omega_0) \cdot \mathbf{J}_{NL}(\mathbf{r}, \omega),$$

где нижний индекс означает частную производную. В этом уравнении можно теперь использовать выражение для $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ в низшем порядке, а именно положить

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = c(\omega) \mathbf{e}(\mathbf{r}, \omega_0).$$

Коэффициент $c(\omega)$ представляет фурье-компоненты, сосредоточенные в окрестности $\omega = \omega_0$.

Действительное электрическое поле моды имеет вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = C(t) \exp(-i\omega_0 t) \mathbf{e}(\mathbf{r}, \omega_0) + \text{к. с.}, \quad (2)$$

где $C(t)$ – медленно меняющаяся амплитуда моды. Обратное преобразование Фурье дает следующее уравнение для $C(t)$:

$$iG_\omega \frac{dC}{dt} + (\alpha - \alpha_{cr}) G_\alpha C = e^{i\omega_0 t} \int d\mathbf{r} \mathbf{e}^\dagger(\mathbf{r}, \omega_0) \cdot \mathbf{J}_{NL}(\mathbf{r}, t), \quad (3)$$

где

$$G_\omega \equiv \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \mathbf{e}^\dagger(\mathbf{r}, \omega_0) \cdot \mathbf{g}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_0, \alpha_{cr}) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r}', \omega_0),$$

$$G_\alpha \equiv \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \mathbf{e}^\dagger(\mathbf{r}, \omega_0) \cdot \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_0, \alpha_{cr}) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r}', \omega_0).$$

Для того чтобы вычислить нелинейный член в уравнении (3), сначала выразим $\mathbf{J}_{NL}(\mathbf{r}, t)$ в терминах функции распределения частиц:

$$e^{i\omega_0 t} \int d\mathbf{r} \mathbf{e}^\dagger(\mathbf{r}, \omega_0) \cdot \mathbf{J}_{NL}(\mathbf{r}, t) = qe^{i\omega_0 t} \int d\Gamma \mathbf{e}^\dagger(\mathbf{r}, \omega_0) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) f_{NL}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t). \quad (4)$$

Здесь q – заряд частицы, $d\Gamma = d\mathbf{r} d\mathbf{p}$ – элемент фазового объема, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ – скорость частицы, а $f_{NL}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ – нелинейная часть функции распределения.

Найдем теперь $f_{NL}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, используя кинетическое уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [H, f] = \text{St}f + Q, \quad (5)$$

в котором гамильтониан H распадается на $H = H_0 + H_1$, где H_0 – невозмущенный гамильтониан, а H_1 – возмущение, связанное с неустойчивой модой. Правая часть уравнения (5) учитывает источник частиц Q и интеграл столкновений St . Предполагаем, что невозмущенное движение, описываемое H_0 , полностью интегрируемо, что допускает каноническое преобразование к переменным действие–угол. Пусть I_i ($i = 1, 2, 3$) являются действиями, а ξ_i – соответствующими каноническими углами, так что все физические величины являются периодическими функциями ξ_i с периодом 2π . Далее, гамильтониан H может быть представлен в форме

$$H = H_0(I_1, I_2, I_3) + H_1, \quad (6)$$

где

$$H_1 = 2\text{Re}C(t) e^{-i\omega_0 t} \times \sum_{l_1, l_2, l_3} V_{l_1, l_2, l_3}(I_1, I_2, I_3) e^{il_1 \xi_1 + il_2 \xi_2 + il_3 \xi_3}. \quad (7)$$

Здесь l_1, l_2 и l_3 – целые числа, а $V_{l_1, l_2, l_3}(I_1, I_2, I_3)$ – матричный элемент, который можно рассчитать стандартным путем, задавая структуру моды и невозмущенные орбиты частиц. Мы пренебрегли в формуле (7) величинами порядка C^2 и другими поправками более высокого порядка к H , поскольку можно показать, что они добавляют в окончательное уравнение малые члены по сравнению с вычисляемым нами вкладом.

Для частиц, близких к резонансу, можно связать H_1 с возмущенным электрическим полем, заданным уравнением (2), что дает

$$H_1 = 2q\text{Re} \left(iC(t) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}}{\omega_0} e^{-i\omega_0 t} \right).$$

Используя это выражение для H_1 , получаем

$$V_{l_1, l_2, l_3}(I_1, I_2, I_3) = \frac{iq}{\omega_0} \int \frac{d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3}{(2\pi)^3} \exp[-i(l_1 \xi_1 + l_2 \xi_2 + l_3 \xi_3)] \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}.$$

Каждый член в возмущенном гамильтониане отвечает отдельному резонансу, который может быть рассмотрен изолированно, если резонансы не перекрываются, что в данном случае предполагается выполненным. Для движения с одним доминирующим резонансом знак суммирования в (7) можно опустить. Далее можно выполнить каноническое преобразование к новому набору переменных действие–угол так, чтобы одним из новых углов стало $\xi = l_1 \xi_1 + l_2 \xi_2 + l_3 \xi_3$, а I было бы соответствующим действием. Тем самым гамильтониан сводится к одномерному виду

$$H = H_0(I) + 2\text{Re}C(t) e^{-i\omega_0 t} V(I) \exp(i\xi), \quad (8)$$

где два других новых действия, не показанные здесь, опущены, поскольку их можно рассматривать как параметры в новом гамильтониане. Положение резонанса $I = I_r$ определяется условием

$$\Omega(I_r) = \omega_0,$$

где $\Omega(I) \equiv \frac{\partial H_0}{\partial I} = l_1 \frac{\partial H_0}{\partial I_1} + l_2 \frac{\partial H_0}{\partial I_2} + l_3 \frac{\partial H_0}{\partial I_3}$. В отсут-

ствие столкновений движение резонансных частиц удовлетворяет уравнению маятника

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \omega_b^2 \sin(\xi - \omega_0 t - \xi_0) = 0, \quad (9)$$

$$\omega_b \equiv |2CV(I_r)\partial\Omega(I_r)/\partial I_r|^{1/2}$$

— нелинейная баунс-частота частиц, а ξ_0 — постоянная фаза.

Вблизи резонанса кинетическое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \Omega(I)\frac{\partial f}{\partial \xi} -$$

$$- 2\text{Re}\left[iC(t)V\left(\frac{\partial\Omega}{\partial I}\right)\exp(i\xi - i\omega_0 t)\right]\frac{\partial f}{\partial \Omega} = \text{St}f + Q. \tag{10}$$

В этом уравнении мы пренебрегли членом $\frac{\partial H_1}{\partial I}\frac{\partial f}{\partial \xi}$, что в данном случае вполне оправдано: этот член мал по сравнению с последним членом в левой части уравнения (10), поскольку возмущенная функция распределения резонансных частиц имеет более крутой градиент по I , чем возмущенный гамильтониан. По той же причине, решая уравнение (10) для резонансных частиц, заменим матричный элемент и $\partial\Omega/\partial I$ константами, вычисленными при $I = I_r$.

Рассмотрим два различных описания столкновений в уравнении (10): упрощенную модель Крука и более реалистичную диффузионную модель. В модели Крука

$$\text{St}f + Q = -v_r(f - F), \tag{11}$$

где F — равновесная функция распределения (с примерно постоянным ненулевым наклоном вблизи резонанса), а v_r — частота релаксации. Диффузионный оператор столкновений сводится к

$$\text{St}f + Q = v_{\text{eff}}^3 \frac{\partial^2}{\partial \Omega^2}(f - F), \tag{12}$$

где F также есть равновесное распределение. Уравнение (12) и выражение для v_{eff}^3 могут быть последовательно получены из оператора Фоккера-Планка с помощью соответствующей процедуры усреднения по орбитам, развитой в [4]. Конкретный вид v_{eff}^3 приведен в разделе (B) Приложения. Заметим, что в операторе столкновений достаточно сохранить только член со второй производной возмущенной функции распределения, поскольку именно он доминирует вблизи резонанса, где локализовано возмущенное распределение. Уравнения (11) и (12) приводят к сходным результатам, если полагать $v_r \sim v_{\text{eff}}$. Параметр v в обоих уравнениях описывает темп выхода частиц из резонанса, когда $C(t)$ достаточно мало.

Решим здесь уравнение (10) с диффузионным оператором столкновений в явном виде, а также приведем результаты для модели Крука (без вывода). Оба решения основаны на теории возмущений, которая предполагает, что либо временной интервал мал по сравнению с характерной баунс-частотой $2\pi/\omega_b$, либо частота столкновительной релаксации много больше, чем ω_b . Это предположение позволяет искать f в виде усеченного ряда Фурье

$$f = F + f_0 + [f_1 \exp(i\xi - i\omega_0 t) + f_2 \exp(2i\xi - 2i\omega_0 t) + \text{к. с.}], \tag{13}$$

где коэффициенты Фурье f_0 , f_1 и f_2 являются функциями t и I или, что более удобно, t и Ω . Хотя в общем случае вторую гармонику f_2 и следует включать в расчет нелинейного отклика, оказывается, что f_2 не влияет на окончательное уравнение для амплитуды моды. Поэтому опустим f_2 с самого начала, а справедливость этой процедуры можно проверить непосредственным вычислением. После такого упрощения уравнения (10) и (12) сводятся к

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - i[\omega_0 - \Omega]f_1 = iC(t)V\frac{\partial\Omega}{\partial I}\frac{\partial}{\partial\Omega}(F + f_0) + v_{\text{eff}}^3 \frac{\partial^2 f_1}{\partial \Omega^2}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = iC(t)V\frac{\partial\Omega}{\partial I}\frac{\partial f_1^*}{\partial\Omega} - iC^*(t)V^*\frac{\partial\Omega}{\partial I}\frac{\partial f_1}{\partial\Omega} + v_{\text{eff}}^3 \frac{\partial^2 f_0}{\partial \Omega^2}. \tag{15}$$

Проинтегрируем уравнения (14) и (15) итерационно, учитывая, что $F \gg f_1 \gg f_0$, и выбрав нулевые начальные условия для f_1 и f_0 . В уравнении (14) удобно провести преобразование Фурье по Ω , в результате чего оно превращается в дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка, которое можно проинтегрировать методом характеристик. Для начала пренебрегаем f_0 в правой части уравнения (14) и находим f_{1L} , т.е. часть f_1 , линейную по C :

$$f_{1L} = i \int_0^t d\tau C(\tau) V \frac{\partial\Omega}{\partial I} \frac{\partial F}{\partial\Omega} e^{i(\omega_0 - \Omega)(t - \tau)} \times \exp\left[-\int_{\tau}^t v_{\text{eff}}^3(\tau_1)(\tau - \tau_1)^2 d\tau_1\right].$$

Это выражение относится к резонансным частицам, для которых $\frac{\partial F}{\partial \Omega}$ и V можно считать констан-

тами. Далее используем f_{1L} вместо f_1 в уравнении (15), чтобы найти f_0 и $\frac{\partial f_0}{\partial \Omega}$:

$$\frac{\partial f_0}{\partial \Omega} = -2\text{Re} \int_0^t \int_0^{\tau_1} d\tau_1 (\tau - \tau_1)^2 C^*(\tau) C(\tau_1) |V|^2 \times \times \left(\frac{\partial \Omega}{\partial I}\right)^2 \frac{\partial F}{\partial \Omega} e^{i(\omega_0 - \Omega)(\tau - \tau_1)} \exp \left[-\int_{\tau}^t v_{\text{eff}}^3(\tau_2) (\tau_1 - \tau)^2 d\tau_2 - \int_{\tau_1}^{\tau} v_{\text{eff}}^3(\tau_3) (\tau_1 - \tau_3)^2 d\tau_3 \right].$$

Подставим теперь $\frac{\partial f_0}{\partial \Omega}$ в уравнение (14) и вычислим f_{1NL} , т.е. часть f_1 , кубическую по C . При $\omega_0 t \gg 1$ доминирующие члены в f_{1NL} имеют вид

$$f_{1NL} = -i \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 (\tau_1 - \tau_2)^2 |V|^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial I}\right)^3 \frac{\partial F}{\partial \Omega} \times \times \exp \left[-\int_{\tau}^t v_{\text{eff}}^3(\tau_3) (\tau - \tau_3)^2 d\tau_3 - \int_{\tau_1}^{\tau} v_{\text{eff}}^3(\tau_3) (\tau_1 - \tau_2)^2 d\tau_3 - \int_{\tau_2}^{\tau_1} v_{\text{eff}}^3(\tau_3) (\tau_2 - \tau_3)^2 d\tau_3 \right] \times \times [C(\tau) C(\tau_1) C^*(\tau_2) e^{i(\omega_0 - \Omega)(t - \tau - \tau_1 + \tau_2)} + C(\tau) C^*(\tau_1) C(\tau_2) e^{i(\omega_0 - \Omega)(t - \tau + \tau_1 - \tau_2)}].$$

Нелинейный член в уравнении (3) является функционалом от f_{1NL} . Процедура вычисления этого члена включает интегрирование по фазовому пространству, в том числе интегрирование по I или, что то же самое, по $\Omega(I)$. Как функция Ω подынтегральное выражение представляет собой произведение некоторой гладкой функции, которую можно считать постоянной вблизи резонанса, и экспоненциальных функций в f_{1NL} . В результате интегрирования по Ω экспоненциальные функции дают две δ -функции: $\delta(t - \tau - \tau_1 + \tau_2)$ и $\delta(t - \tau + \tau_1 - \tau_2)$, из которых только первая попадает во временной интервал уравнения (16). Это об-

стоятельство приводит к следующей структуре уравнения (3):

$$iG_{\omega} \frac{dC}{dt} + (\alpha - \alpha_{cr}) G_{\alpha} C = \int_0^t \int_0^{\tau} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \times \times \delta(t - \tau - \tau_1 + \tau_2) (\tau_1 - \tau_2)^2 C(\tau) C(\tau_1) C^*(\tau_2) \times \times \int d\Gamma \mathcal{K} \exp \left[-\int_{\tau}^t v_{\text{eff}}^3(\tau_3) (\tau - \tau_3)^2 d\tau_3 - \int_{\tau_1}^{\tau} v_{\text{eff}}^3(\tau_3) (\tau_1 - \tau_2)^2 d\tau_3 - \int_{\tau_2}^{\tau_1} v_{\text{eff}}^3(\tau_3) (\tau_2 - \tau_3)^2 d\tau_3 \right],$$

где

$$\mathcal{K} = 2\pi \omega_0 \delta(\omega_0 - \Omega) V^{\dagger} V |V|^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial I}\right)^3 \frac{\partial F}{\partial \Omega},$$

$$V^{\dagger} = \frac{iq}{\omega_0} \int \frac{d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3}{(2\pi)^3} e^{+} \cdot v \exp(i\xi).$$

В случае, когда v_{eff} не зависит от точки в фазовом пространстве, можно рассматривать параметр

$$K = \int d\Gamma \mathcal{K}$$

как коэффициент в уравнении (17) и получить несколько более простое выражение (ниже это всегда будет предполагаться, если не оговорено иное).

Когда уравнения (17)–(19) применяются для описания конкретной системы, может оказаться полезным преобразование I к другим переменным. Например, преобразование оператора $\frac{\partial}{\partial I}$ к физическим переменным в симметричном торе представлено в разделе (а) Приложения.

В терминах уравнения (17) линейный инкремент γ имеет вид $\gamma = -(\alpha - \alpha_{cr}) \text{Im}(G_{\alpha}/G_{\omega})$. Для дальнейшего удобно нормировать время в уравнении (17) в единицах γ^{-1} . Кроме того, введем новую амплитуду

$$A = aC \exp(ibt),$$

где $a = |K/G_{\omega}|^{1/2} \gamma^{5/2}$ и $b = (\alpha - \alpha_{cr}) \text{Re}(G_{\alpha}/G_{\omega})$, что приводит уравнение (17) к стандартному виду

$$\frac{dA}{dt} = A - e^{i\phi} \int_0^{t/2} \tau^2 d\tau \int_0^{t-2\tau} d\tau_1 e^{-v_{\text{eff}}^3 \tau^2 (2\tau/3 + \tau_1)} \times \times A(t - \tau) A(t - \tau - \tau_1) A^*(t - 2\tau - \tau_1).$$

Здесь предполагается, что $v_a \equiv v_{\text{eff}}/\gamma$ не зависит от времени, и введено обозначение ϕ для константы, определяемой соотношением

$$e^{i\phi} \equiv iK|G_\omega|/(|K|G_\omega).$$

Аналогичный вывод можно провести для столкновительного оператора Крука (11). Получающееся при этом безразмерное уравнение имеет вид

$$\frac{dA}{dt} = A - e^{i\phi} \int_0^{t/2} \tau^2 d\tau \int_0^{t-2\tau} d\tau_1 e^{(-2v_a\tau - v_a\tau_1)} \times \times A(t-\tau)A(t-\tau-\tau_1)A^*(t-2\tau-\tau_1), \quad (21)$$

где $v_a = v_r/\gamma$.

В пертурбативном случае матрица g в уравнении (1) близка к эрмитовой, что дает $e^i = e^*$ и $V^i = V^*$. Коэффициент K в этом случае действителен. Величина G_ω для произвольной эрмитовой матрицы g является чисто мнимой, причем $\text{Im}G_\omega|C|^2$ соответствует энергии моды. Таким образом приходим к заключению, что величина ϕ в пертурбативном случае может принимать только значения 0 или π . Заметим, что $\phi = 0$ соответствует положительной энергии волны при отрицательной диссипации, связанной с резонансными частицами.

Абсолютное значение безразмерной амплитуды A в (20), (21) является мерой квадрата характерной нелинейной баунс-частоты ω_b , а именно

$$\omega_b^2 \approx \gamma_L^2 \left(\frac{\alpha - \alpha_{cr}}{\alpha_{cr}} \right)^{5/2} |A|, \quad (22)$$

где для пертурбативных неустойчивостей γ_L есть инкремент в отсутствие фоновой диссипации, а для непертурбативных неустойчивостей γ_L , грубо, соответствует инкременту при $\alpha = 2\alpha_{cr}$. Следует также отметить, что малый параметр

$\left(\frac{\alpha - \alpha_{cr}}{\alpha_{cr}} \right)^{5/2}$ в (22) дает основу для пренебрежения

нелинейными членами порядка выше кубического в уравнениях (20) и (21), если $|A| \ll [\alpha_{cr}/(\alpha - \alpha_{cr})]^{5/2}$. Дальнейшее обсуждение области применимости уравнений (20) и (21) приведено в разделе (Б) Приложения.

3. СТАЦИОНАРНОЕ НАСЫЩЕНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ, ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ, ВЗРЫВНОЙ РЕЖИМ

Уравнение (21) имеет тот же вид, что и полученное в [1], за исключением дополнительного фазового множителя $e^{i\phi}$ и появления комплексно-сопряженного в нелинейном члене. В пределе

больших t (при $\cos\phi > 0$) уравнение (21) имеет периодическое решение с постоянной амплитудой:

$$A = \frac{2v_a^2}{(\cos\phi)^{1/2}} \exp(-it \tan\phi). \quad (23)$$

Это решение обобщает стационарное решение, полученное в [1], на случай $\phi \neq 0$. Аналогичное решение легко получить и для уравнения (20):

$$A = \frac{v_d^2}{\left(\cos\phi \int_0^\infty dz \exp(-2z^3/3) \right)^{1/2}} \exp(-it \tan\phi). \quad (24)$$

Заметим, что при $v_a/v_d = 0.71$ обе модели дают один и тот же стационарный уровень. Для неустойчивой системы с отрицательным значением $\cos\phi$ нелинейность усиливает неустойчивость и всегда приводит к жесткому сценарию, при котором мода нарастает до большой амплитуды, несмотря на близость к порогу неустойчивости. Заметим, что $\cos\phi > 0$ является необходимым, но не достаточным условием для насыщения моды на низком уровне, поскольку жесткий сценарий возможен даже при $\cos\phi > 0$. Однако в этом случае он требует достаточно низкой частоты столкновений (см. ниже).

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости решений с постоянной амплитудой (23) и (24). Для того чтобы сделать анализ более компактным, проведем преобразование

$$A = a(t) \exp(-it \tan\phi), \quad (25)$$

опустим индексы в v_a и v_d и запишем уравнения (20) и (21) в единой форме

$$\frac{da}{dt} = (1 + i \tan\phi)a - \frac{e^{i\phi}}{v^2} \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d\tau_1 Q(v\tau, v\tau_1) \times \times a(t-\tau)a(t-\tau-\tau_1)a^*(t-2\tau-\tau_1), \quad (26)$$

где $Q(x, y) = x^2 e^{-x^2(2x/3+y)}$ для (20) и $Q(x, y) = x^2 e^{-2x-y}$ для (21). Мы расширили пределы интегрирования в (26) до бесконечности, что соответствует пределу больших t . Далее, линеаризуем уравнение (26) относительно стационарного состояния $a = a_0 = \text{const}$, где

$$|a_0|^2 = v^4 \left[\cos\phi \int_0^\infty dx \int_0^\infty Q(x, y) dy \right]^{-1}, \quad (27)$$

и ищем решение в виде

$$a = a_0 + \delta a_1 \exp(v\lambda t) + \delta a_2 \exp(v\lambda^* t), \quad (28)$$

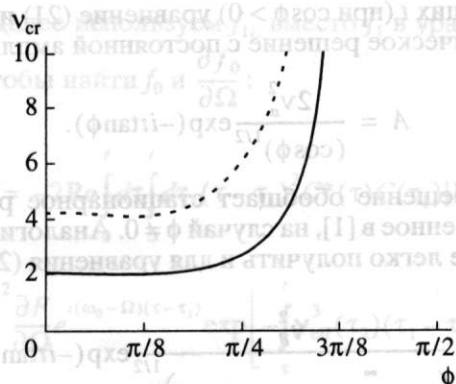


Рис. 1. Границы устойчивости стационарного нелинейного решения. Кривые изображают величину v_{cr} как функцию ϕ ; точечная кривая соответствует модели Крука, сплошная кривая – диффузионной модели столкновений, $v < v_{cr}$ – неустойчивости стационарного состояния.

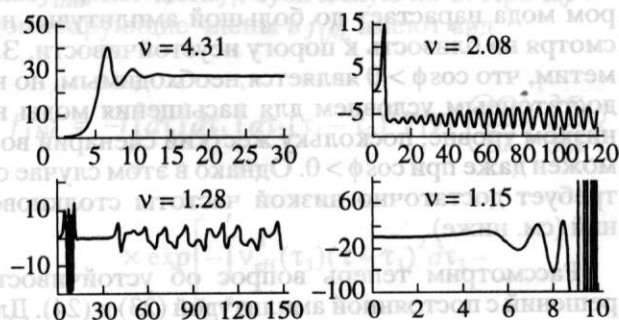


Рис. 2. Переход от стационарного насыщения к взрывному нелинейному режиму при уменьшении v . На рисунке представлена нормализованная амплитуда A как функция нормализованного времени t для диффузионного случая с $\phi = 0$.

где λ – собственное значение. Условие разрешимости соответствующих линейных уравнений для δa_1 и δa_1^* дает дисперсионное соотношение

$$\lambda^2 v^2 \cos^2 \phi - 2\lambda v Q_1 \cos^2 \phi + Q_1^2 = Q_2^2, \quad (29)$$

где

$$Q_1(\lambda) = \left[\int_0^\infty \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy Q(x, y) dy \right]^{-1} \times$$

$$\times \int_0^\infty \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy Q(x, y) [1 - \exp(-\lambda x) - \exp(-\lambda x - \lambda y)],$$

$$Q_2(\lambda) = \left[\int_0^\infty \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy Q(x, y) dy \right]^{-1} \times$$

$$\times \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy Q(x, y) \exp(-2\lambda x - \lambda y).$$

При $v \gg 1$ все корни уравнения (29) имеют $\text{Re} \lambda < 0$, в то время как при достаточно малых v имеются неустойчивые корни. Граничные кривые $v(\phi)$, на которых впервые появляется неустойчивый корень, показаны на рис. 1 как для диффузионной модели, так и для модели Крука. Заметим, что в диффузионной модели достижимо более низкое устойчивое стационарное значение $|A|$, чем в модели Крука. Так, например, при $\phi = 0$ наименьшее устойчивое значение $|A|$ составляет 38 для модели Крука и 6 для диффузионной модели.

Когда нелинейное стационарное решение неустойчиво, мода, очевидно, не может выходить на стационарный уровень. Если v близко к критическому значению, то вместо стационара устанавливается предельный цикл типа обсуждавшегося в [1]. Пример такого цикла для случая $v = 2.08$ показан на рис. 2. По мере того как v смещается глубже в неустойчивую область, бифуркации разрушают периодичность цикла, однако амплитуда моды в этом режиме может оставаться ограниченной (рис. 2 для $v = 1.28$). При совсем малых значениях v в моде развивается взрывная сингулярность, эволюционирующая в режим жесткой нелинейности, который в конце концов выходит за пределы области применимости уравнений (20) или (21).

Соответствующие взрывные решения были найдены в [1] (для $\phi = 0$). Здесь мы представляем несколько иной пример взрывного решения уравнений (20), (21). Как и в [1], ищем асимптотическое решение, которое становится сингулярным в конечный момент t_0 , что позволяет считать $v = 0$ и, кроме того, пренебречь линейным членом. В этом пределе исчезает различие между уравнениями (20) и (21). Искомое решение имеет вид

$$A(t) = g[\chi(t)](t_0 - t)^{-5/2}, \quad (30)$$

где $g[\chi]$ – периодическая функция $\chi \equiv \ln(t_0 - t)$. Такая структура A обеспечивает факторизацию множителя $t_0 - t$ и сводит уравнения (20) и (21) к

$$e^{-i\phi \left(\frac{5}{2}g - \frac{dg}{d\chi} \right)} = \int_0^\infty d\xi \int_0^\infty d\eta U(\xi, \eta) g[\chi + \ln(1 + \xi)] \times \quad (31)$$

$$\times g[\chi + \ln(1 + \xi + \eta)] g^*[\chi + \ln(1 + 2\xi + \eta)],$$

где

$$U(\xi, \eta) = \frac{\xi^2}{(1 + \xi)^{5/2} (1 + \xi + \eta)^{5/2} (1 + 2\xi + \eta)^{5/2}}.$$

Отсюда видно, что

$$g(\chi) = \rho \exp(i\sigma\chi) = \rho \exp[i\sigma \ln(t_0 - t)] \quad (32)$$

— точное решение уравнения (31), если константы ρ и σ с действительным σ удовлетворяют комплексному соотношению

$$e^{-i\phi} \left(\frac{5}{2} - i\sigma \right) = |\rho|^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} d\xi d\eta U(\xi, \eta) \times \\ \times \exp \{ i\sigma \ln [(1 + \xi)(1 + \xi + \eta)/(1 + 2\xi + \eta)] \},$$

которое можно переписать в виде

$$e^{-i\phi} \left(\frac{5}{2} - i\sigma \right) = |\rho|^2 \int_0^{\infty} dz F(z) \exp(i\sigma z), \quad (33)$$

где

$$F(z) = e^{-7z/2} \times \\ \times \int_0^1 \frac{s^3 ds}{[1 + s(1 - e^{-z})^{1/2}]^4 [1 + s(1 - e^{-z})^{-1/2}]^2}.$$

Для того чтобы σ было действительным, должно выполняться соотношение

$$\frac{\sigma \cos \phi + \frac{5}{2} \sin \phi}{\sigma \sin \phi - \frac{5}{2} \cos \phi} = \frac{\int_0^{\infty} dz F(z) \sin(\sigma z)}{\int_0^{\infty} dz F(z) \cos(\sigma z)}. \quad (34)$$

Заметим, что $\sigma > 0$ соответствует нелинейно растущей частоте моды, в то время как $\sigma < 0$ соответствует убывающей частоте. Зависимость σ от ϕ для двух корней уравнения (34) показана на рис. 3. Корни связаны симметрией: если $\sigma(\phi)$ — корень уравнения (34), то и $\sigma(-\phi) = -\sigma(\phi)$ также является корнем. Когда кинетический отклик непертурбативен, сдвиг частоты во взрывном режиме может составить существенную часть исходной частоты моды прежде, чем решение (30) исказится вследствие нелинейностей более высокого порядка.

Аналитическое решение для $\phi = 0$, полученное ранее в [1], обладает специальной симметрией, при которой компоненты с положительным и отрицательным смещением частоты имеют равные амплитуды. Можно, однако, показать, что при ненулевом ϕ двухкомпонентное взрывное решение отсутствует и допустимо только однокомпонентное асимптотическое решение, представленное в данной работе. Интерпретируем этот факт как то, что во взрывном режиме система в конечном счете выбирает определенное направление частотного сдвига. Тем не менее численные результаты при достаточно малых ϕ показывают, что на переходной стадии осуществляются решения, близкие к симметричным (аналогичные найденным в [1]). Для $\phi > \pi/8$ численные решения всегда

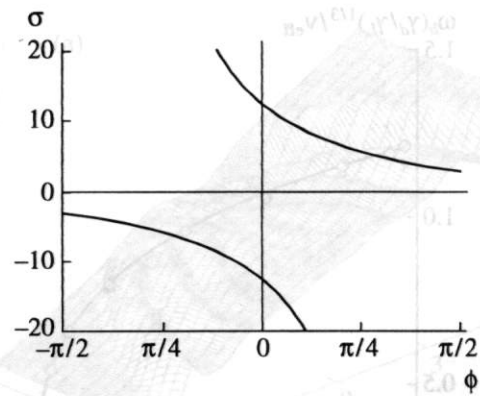


Рис. 3. Нелинейное собственное значение $\sigma(\phi)$ для взрывного решения.

близки к асимптотическим решениям, в которых имеется определенное направление частотного сдвига. Это направление соответствует корню с более низким абсолютным значением σ (рис. 3).

Следует заметить, что осцилляции амплитуды моды, описываемые уравнениями (30)–(32), не являются прямым следствием захвата частиц (действительно, захват частиц мог бы иметь место только тогда, когда взрывное решение оказывается за пределами области своей применимости). Качественное объяснение этих осцилляций состоит в том, что, когда наклон функции распределения частиц вблизи исходного резонанса уменьшается, следом увеличивается крутизна наклона по обе стороны от резонанса. В симметричном случае ($\phi = 0$), рассмотренном в [1], мода как бы распадается на два сателлита, которые имеют тенденцию нарастать быстрее, чем исходная мода. Таким образом, получаем общее взрывное нарастание амплитуды с осцилляциями на частоте биений, увеличивающейся по мере удаления сателлитов друг от друга. Этот процесс продолжается до тех пор, пока мода не начнет захватывать резонансные частицы, при этом представленная теория нарушается. Соответствующая пиковая амплитуда моды не связана с близостью к порогу неустойчивости. Для пертурбативных неустойчивостей, типа кинетической пучковой неустойчивости, эту пиковую амплитуду можно оценить из условия $\omega_b \approx \gamma_L$, где γ_L — инкремент неустойчивости без фонового затухания. Это значительно более высокий уровень, чем заниженное значение $\omega_b \approx \gamma$, приведенное в [1]. Для неустойчивостей, у которых в сильно надпороговом режиме $\gamma \approx \omega$, баунс-частота ω_b может нарастать до $\omega_b \approx \omega$.

Рассмотренные нами взрывные решения могут быть также инициированы достаточно большими флуктуациями при $v > v_{cr}$ (рис. 1) и даже в линейно устойчивой системе. Простая оценка (подкрепленная численной проверкой) показывает, что уровень флуктуации, необходимой для

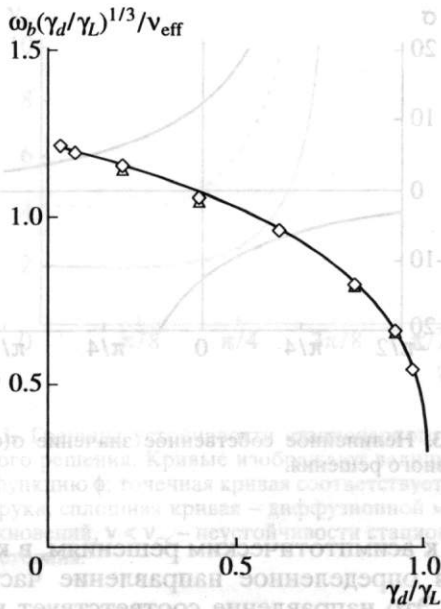


Рис. 4. Уровень стационарного насыщения изолированной моды. Кривая соответствует интерполяционной формуле; ромбы и треугольники соответствуют стационарным решениям уравнений (3) и (10) для $(v_{\text{eff}}/\gamma_L)^3 = 5$ и $(v_{\text{eff}}/\gamma_L)^3 = 10$ соответственно.

инициирования взрыва, определяется условием $(\gamma_L/|\gamma|)^{5/2} > |A| > (1+v)^{5/2}$.

4. РАСШИРЕНИЕ ТЕОРИИ

А. Стационарные решения

Теория, представленная в разд. 2 и 3, ограничена припороговым режимом. Мы видели, что при достаточно большой частоте столкновений ($v_{\text{eff}} \geq \gamma_L - \gamma_d$) устанавливается стационарное решение, в котором уровень насыщения моды пропорционален превышению инкремента над порогом, а именно $\omega_b \approx (1 - \gamma_d/\gamma_L)^{1/4} v_{\text{eff}}$. При увеличении надкритичности итерационный метод в конце концов становится неприменимым, и требуется другая техника решения задачи. Для стационарного отклика пертурбативной моды необходим баланс диссипируемой мощности и мощности, излучаемой резонансными частицами. Это соотношение имеет вид

$$-2\gamma_d \text{Im} G_\omega |C|^2 = \int d\Gamma \frac{\partial H_1}{\partial t} f, \quad (35)$$

где f — стационарное (в системе волны) решение уравнения (10). В дополнение к решению в пределе $1 - \gamma_d/\gamma_L \ll 1$, представленному данной работе, ранее было найдено [14] аналитическое решение в пределе $\gamma_d/\gamma_L \ll 1$. Комбинируя эти два решения (с учетом зависимости v_{eff} от точки в фазовом пространстве), можно построить следующую ин-

терполяционную формулу для стационарного состояния в диффузионной модели столкновений:

$$\frac{\gamma_d}{\gamma_L} = \frac{\int d\Gamma G / [1 + 0.57u / (1 + 1.45/u)^{1/3}]}{\int d\Gamma G}, \quad (36)$$

где

$$G(\Gamma) = |V|^2 \frac{\partial F}{\partial I} \delta(\Omega - \omega_0),$$

$$u(\Gamma) = (\omega_b(\Gamma) / v_{\text{eff}}(\Gamma))^3,$$

а $\omega_b(\Gamma)$ задается уравнением (9).

Эта интерполяционная формула была проверена точным расчетом для системы, в которой $|V|^2$, v_{eff}^3 и $\partial\Omega/\partial I$ не зависят от Γ . Сравнение рассчитанной величины $\omega_b^3 \gamma_d / v_{\text{eff}}^3 \gamma_L$ как функции γ_d/γ_L с интерполяционной формулой приведено на рис. 4, показывающем хорошее согласие между этими двумя расчетами.

Б. Долговременная эволюция взрывного решения

Рассмотрим теперь случай, когда частота столкновений мала ($v_{\text{eff}} \ll \gamma_L$), и представим себе, что превышение над границей устойчивости медленно нарастает со временем. До тех пор пока разность $\gamma_L - \gamma_d$ достаточно мала по сравнению с v_{eff} , реализуется стационарный уровень насыщения, рассмотренный в разд. 4А. Однако, когда $(\gamma_L - \gamma_d)$ становится больше, чем v_{eff} , возникает взрывное решение. Когда это решение достигает уровня $\omega_b \approx \gamma_L$, полученное итерационным методом уравнение (17) становится несправедливым. Заметим, что в этот момент решение имеет частотный сдвиг $\delta\omega$, сравнимый с γ_L .

Эволюция пертурбативных неустойчивостей после взрывной стадии была недавно рассмотрена в работе [15], где показано, что ω_b действительно насыщается на уровне $\omega_b \approx \gamma_L$. Однако, как ни странно, частоты сателлитов продолжают смещаться от частоты исходной моды на величину $\delta\omega$, много большую γ_L , и эти волны не стремятся затухнуть. Мы обнаружили, что смещение частот возникает вследствие формирования "дыры" и "сгустка" в области захвата частиц. При $\delta\omega \gg \gamma_L$ захваченные частицы адиабатически переносят свою плотность в фазовом пространстве, по мере того как частоты сателлитов продолжают медленно меняться по сравнению с периодом частиц. Это создает неравенство между распределением запертых частиц и распределением окружающих пролетных частиц, что обеспечивает поддержание двух мод типа Бернштейна, Грина, Крускала (БГК) [16], которые формируются из сателлитов. Потери энергии, связанные с фоно-

вой диссипацией, компенсируются энергией, высвобождаемой пролетными частицами. Поток пролетных частиц на сепаратрису огибает область захвата и высвобождает энергию, поскольку частицы переходят с одной стороны сепаратрисы на другую.

Рисунок 5 иллюстрирует динамику этого процесса. На этом рисунке представлены усредненное по пространству распределение частиц и спектр моды как функция $\Omega - \omega_0$ и времени. Видно, что функция распределения сначала как бы приобретает вид плато в месте расположения исходного резонанса, однако по мере временной эволюции формируются впадина в распределении, смещающаяся к большим значениям $\Omega - \omega_0$, и бугор, смещающийся к меньшим значениям $\Omega - \omega_0$. БГК-моды сохраняются до тех пор, пока не вступают в игру столкновения. Они перемешивают распределение захваченных и пролетных частиц на временном масштабе $T \sim \gamma_L^2 / v_{\text{eff}}^3$, скорость частотного сдвига уменьшается, и волны затухают. Полный частотный сдвиг составляет $\delta\omega \sim \gamma_L (\gamma_L / v_{\text{eff}})^{3/2}$, если эта величина меньше, чем ширина функции распределения.

Эволюция непертурбативной неустойчивости за пределами взрывной фазы несколько отличается от эволюции пертурбативной. Как мы видели, в непертурбативном случае имеется предпочтительное направление частотного сдвига. Поэтому будет формироваться либо дырка, либо сгусток (но не оба одновременно). Технически проблема долговременной эволюции проще в пертурбативном случае, поскольку полное нелинейное рассмотрение нужно только для резонансных частиц, в то время как остальной отклик системы можно по-прежнему рассматривать как линейный. В непертурбативном случае взрывная сингулярность ведет к полному разрушению всех аспектов линейной задачи, что требует новых методов анализа.

Большие частотные сдвиги наблюдались в фишбон-моде [6] и в перестановочной моде с горячими электронами [10], обе из которых являются непертурбативными. Картина начальной стадии фишбон-неустойчивости согласуется с нашим взрывным сценарием [2]. Что же касается проблемы согласованного описания моды и эволюции частиц в поствзрывной фазе, то она пока не нашла своего решения.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе показано, как нелинейная теория изолированной моды вблизи порога неустойчивости, первоначально развитая для кинетической пучковой неустойчивости в [1], обобщает

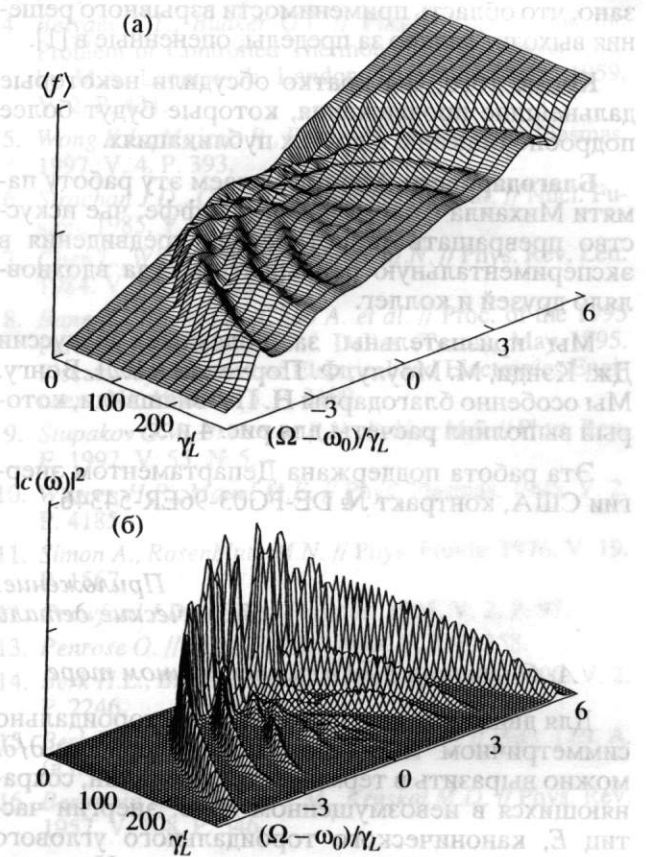


Рис. 5. Спонтанное формирование когерентных мод с частотами, зависящими от времени в припороговом режиме кинетической пучковой неустойчивости. а – пространственное усреднение распределения $\langle f \rangle = F + f_0$ как функция времени и $\Omega - \omega_0$; б – эволюция спектральной интенсивности моды $|c(\omega)|^2$ как функция времени и частоты.

ся на широкий класс кинетических проблем. Это обобщение приводит к новым результатам, в числе которых:

Расширение теории на случай произвольной геометрии и непертурбативных мод (т.е. мод, само существование которых требует кинетического отклика частиц). В этом варианте теория приложима к произвольным модам и любым установкам, в которых равновесные орбиты частиц интегрируемы.

Аналитическое описание возникновения определенного направления частотного сдвига в нелинейной эволюции непертурбативных неустойчивостей.

Вывод нелинейного уравнения эволюции моды с реалистичным диффузионным описанием столкновений в отличие от использовавшейся ранее идеализированной модели Крука.

Новое взрывное решение нелинейного уравнения для комплексной амплитуды волны. Пока-

зано, что область применимости взрывного решения выходит далеко за пределы, оцененные в [1].

Кроме того, мы кратко обсудили некоторые дальнейшие продвижения, которые будут более подробно описаны в других публикациях.

Благодарности. Мы посвящаем эту работу памяти Михаила Соломоновича Иоффе, чье искусство превращать теоретические предвидения в экспериментальную реальность всегда вдохновляло друзей и коллег.

Мы признательны за полезные дискуссии Дж. Кэнди, М. Моулу, Ф. Порчелли и К.Л. Вонгу. Мы особенно благодарны Н. Петвиашвили, который выполнил расчеты для рис. 4 и 5.

Эта работа поддержана Департаментом энергии США, контракт № DE-FG03-96ER-54346.

*Приложение:
Технические детали*

А. Оператор $\partial/\partial I$ в симметричном торе

Для движения ведущего центра в тороидальном симметричном магнитном поле оператор $\partial/\partial I$ можно выразить в терминах трех величин, сохраняющихся в невозмущенном поле: энергии частиц E , канонического тороидального углового момента P_ϕ и магнитного момента μ . Нетрудно видеть, что

$$\partial/\partial I = l_1 \partial/\partial I_1 + l_2 \partial/\partial I_2 + l_3 \partial/\partial I_3,$$

Можно также показать, что всегда допустим следующий выбор: $I_2 = P_\phi$ и $I_3 = \mu mc/q$, где q – заряд частицы. Энергия частицы E как функция I_1 , I_2 и I_3 является гамильтонианом невозмущенной системы. Выберем теперь I_1 так, чтобы оно было действием полоидального движения, при этом величины $\omega_1 \equiv \partial E/\partial I_1$, $\omega_2 \equiv \partial E/\partial I_2$ и $\omega_3 \equiv \partial E/\partial I_3$ являются частотами полоидального, тороидального и циклотронного движения соответственно. Далее можно переписать оператор $\partial/\partial I$ в форме

$$\partial/\partial I = (l_1 \omega_1 + l_2 \omega_2 + l_3 \omega_3) \partial/\partial E + l_2 \partial/\partial I_2 + l_3 \partial/\partial I_3.$$

В резонансе сумма $l_1 \omega_1 + l_2 \omega_2 + l_3 \omega_3$ равна частоте моды ω . В дополнение, l_3 следует положить нулем для низкочастотной моды, а l_2 является не чем иным, как тороидальным номером моды n . Таким образом, получаем

$$\frac{\partial}{\partial I} = \omega \frac{\partial}{\partial E} + n \frac{\partial}{\partial P_\phi} = \omega \frac{\partial}{\partial E} \Big|_{P_\phi} = n \frac{\partial}{\partial P_\phi} \Big|_E,$$

где $P'_\phi = P_\phi - nE/\omega$ и $E' = E - \omega P_\phi/n$.

Б. Предел применимости кубического интегрального уравнения и взрывного решения

Из уравнения (9) видно, что движение частиц можно рассматривать по теории возмущений на достаточно коротких временах, удовлетворяющих условию

$$\int_0^t \omega_b dt \ll 1.$$

В присутствии столкновений время, в течение которого справедлива теория возмущений, может быть сколь угодно велико, если время декорреляции τ_c , которое есть $1/v_{eff}$ или $1/v_r$, в зависимости от модели столкновений, оказывается меньше, чем ω_b^{-1} . Следовательно, рассмотрение по теории возмущений представляется применимым, если

$$\min \left(\int_0^t \omega_b dt; \omega_b \tau_c \right) \ll 1. \quad (A.1)$$

Явное вычисление нелинейных членов следующего (пятого) порядка в уравнении (17) показывает, что такие члены действительно меньше, чем кубичный член, при выполнении условия (A.1).

Условие (A.1) устанавливает предел на ω_b , при котором справедливо взрывное решение. Для взрывного решения член dC/dt в уравнении (17) равен нелинейному члену с $v_{eff} = 0$. Это соотношение дает следующую оценку:

$$\frac{1}{C} \frac{dC}{dt} \approx \gamma_L \left(\int_0^t \omega_b dt \right)^4 \ll \gamma_L, \quad (A.2)$$

где γ_L – инкремент неустойчивости при значительной надкритичности (при $\alpha \sim 2\alpha_{cr}$). Применимость теории возмущений нарушается, когда

$$\frac{1}{C} \frac{dC}{dt} \approx \gamma_L,$$

что определяет характерный временной масштаб вблизи сингулярности: $\Delta t \approx 1/\gamma_L$. Теперь из уравнения (A.2) получаем, что соответствующий предел для ω_b есть $\omega_b \approx 1/\Delta t \approx \gamma_L$.

В. Вид v_{eff}

Оператор столкновений Фоккера–Планка имеет вид

$$St \equiv \frac{\partial}{\partial v} \cdot \mathbf{D} \cdot \frac{\partial}{\partial v},$$

где $\partial/\partial v$ – производная в скоростном пространстве при фиксированном положении в координатном пространстве \mathbf{r} , а \mathbf{D} – тензор, описывающий диффузию в скоростном пространстве. В общем

случае функция распределения f является функцией $I(\Omega)$, ξ и двух дополнительных переменных действия, однако только производная по I велика вблизи резонанса. Следовательно, доминирующая часть в операторе столкновений есть

$$Stf = v_{\text{eff}}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial \Omega^2},$$

где

$$v_{\text{eff}}^3 = \frac{\partial I}{\partial v} \cdot \mathbf{D} \cdot \frac{\partial I}{\partial v} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial I} \right)^2,$$

а черта означает баунс-усреднение по невозмущенной орбите.

Используя результат раздела (А) данного приложения, можно выбрать $I = P_\phi/n$ при постоянном E' , что дает

$$v_{\text{eff}}^3 = \frac{\partial P_\phi}{\partial v} \cdot \mathbf{D} \cdot \frac{\partial P_\phi}{\partial v} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial P_\phi} \Big|_E \right)^2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Berk H.L., Breizman B.N., Pekker M. // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 1256.
2. Breizman B.N., Berk H.L., Pekker M.S. et al. // Phys. Plasmas. 1997. V. 4. P. 1559.

3. Kaufman A.N. // Phys. Fluids. 1972. V. 15. P. 1063.
4. Belyaev S.T., Budker G.I. // Plasma Physics and the Problem of Controlled Thermonuclear Reactions / Ed. by M.A. Leontovich. London: Pergamon Press, 1959. V. 2. P. 431.
5. Wong K.L., Majeski R., Petrov M. et al. // Phys. Plasmas. 1997. V. 4. P. 393.
6. Strachan J.D., Grek B., Heidbrink W. et al. // Nucl. Fusion. 1985. V. 25. P. 863.
7. Chen L., White R.B., Rosenbluth M.N. // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. P. 1122.
8. Bane K., Bowers J., Chao A. et al. // Proc. of the 1995 Particle Accelerator Conf. Dallas (Texas), May 1995. Piscataway: Institute of Electrical and Electronics Engineers, NJ, 1996. V. 5. P. 3109.
9. Stupakov G.V., Breizman B.N., Pekker M.S. // Phys. Rev. E. 1997. V. 55. № 5.
10. Warren H.P., Mauel M.E. // Phys. Plasmas. 1995. V. 2. P. 4185.
11. Simon A., Rosenbluth M.N. // Phys. Fluids. 1976. V. 19. P. 1567.
12. Crawford J.D. // Phys. Plasmas. 1995. V. 2. P. 97.
13. Penrose O. // Phys. Fluids. 1960. V. 3. P. 258.
14. Berk H.L., Breizman B.N. // Phys. Fluids B. 1990. V. 2. P. 2246.
15. Berk H.L., Breizman B.N., Petviashvili N. // Phys. Lett. A. (в печати).
16. Bernstein I.B., Greene J.M., Kruskal M.D. // Phys. Rev. 1957. V. 108. P. 546.