# ЧЁРНЫЕ ДЫРЫ. КЛАССИКА И КВАНТЫ

**И.Б.Хриплович**

**Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера, 630090 Новосибирск**

Аннотация

**Обсуждаются понятия температуры и энтропии чёрных дыр. Рассмотрены некоторые попытки квантования поверхности горизонта этих объектов.**

# BLACK HOLES. CLASSICAL AND QUANTUM

**I.B. Khriplovich**

Budker Institute of Nuclear Physics, 630090 Novosibirsk

Abstract

The entropy and temperature of black holes are discussed. We consider also some approaches to quantization of black holes. New quantization rule is proposed based on an analysis of the Kerr solution.

Эта Школа посвящена памяти Владимира Наумовича Грибова. Участникам Школы, относящимся к старшему и среднему поколению, необычайно повезло: мы общались с великим физиком, с замечательным человеком. Этого не забыть.

У Грибова нет опубликованных работ, относящихся к чёрным дырам. Однако еще в 1971 или 1972 году, за 2 – 3 года до появления известной работы Хокинга [1], Грибов четко сформулировал в обсуждениях вывод о том, что чёрные дыры излучают. В те относительно далекие времена его утверждение вызвало резко отрицательную реакцию, по крайней мере, части "гравитационной" общественности, настаивавшей на том, что мысль об излучении черных дыр противоречит самим основам общей теории относительности. Знаю я это по независимым рассказам А.Д.Долгова, Д.И.Дьяконова, Л.Б.Окуня, присутствовавших при тогдашних дискуссиях. Вывод Грибова об излучении чёрных дыр и связанные с ним обсуждения упомянуты также в недавней яркой статье Ю.Л.Докшицера [2]. Остается лишь пожалеть о том, что Владимир Наумович не опубликовал свой результат, по-видимому, считая его самоочевидным.

И еще одна, личная причина, по которой мне хотелось бы рассказать о чёрных дырах на этой Школе. Случилось так, что мой последний разговор с Грибовым о физике касался именно температуры и энтропии чёрных дыр. Было это в конце сентября 1996 года в Москве, у него дома. Многие присутствующие здесь могут живо представить себе это изнурительное обсуждение, начавшееся около 11 утра и закончившееся после 7 вечера. Но, разумеется, был в гостеприимном доме и перерыв на обед, было и по сто грамм коньячка. Через несколько дней я встретился с Владимиром Наумовичем в последний раз, на праздновании юбилея ПИЯФ.

# 1 Немного истории. Классические свойства чёрных дыр

Черные дыры – неизбежный результат эволюции, сжатия достаточно массивных звезд. Есть прямые наблюдательные указания на существование чёрных дыр, в частности, в ядрах галактик.

История этого понятия насчитывает более 200 лет. В 1783 году английский естествоиспытатель Джон Мичелл, ректор Торнхилл Колледжа в Йоркшире, заметил, что достаточно тяжелые звезды должны обладать совершенно необычным свойством: свет не может покинуть их поверхность. Его рассуждение было основано на простых корпускулярных соображениях и выглядело примерно так. Тело, имеющее радиальную скорость $v$, может покинуть поверхность звезды радиуса $R$ и массы $M$ при условии, что кинетическая энергия этого тела $mv^2/2$ превышает энергию притяжения $GMm/R$, т.е. при $v^2 > 2GM/R$. Применение последнего неравенства к свету приводит к выводу: если радиус звезды массы $M$ меньше, чем

$$r_g = \frac{2GM}{c^2},$$

то свет не может покинуть ее поверхность, такая звезда не светит ! Рассуждение, как мы теперь понимаем, совершенно неверное, но результат правильный. Последовательное применение общей теории относительности (ОТО) приводит не только к тому же выводу, но и к точно такому же количественному критерию. Величину $r_g$ называют гравитационным радиусом.

Спустя еще 13 лет этот же результат формулирует Лаплас в первом издании своей "Системы мира". Результат приводится также во втором издании книги (1799 г.) и ... отсутствует в третьем (1808 г.). По всей видимости, дело в том, что к тому времени, когда Лаплас готовил третье издание, опыты Юнга наглядно продемонстрировали волновую природу света и корпускулярные соображения полностью вышли из моды.

Чёрная дыра – вполне естественное название для обсуждаемого объекта. Свойства его весьма необычны. Чёрная дыра возникает, когда звезда сжимается настолько сильно, что ее радиус становится меньше гравитационного $r_g$. Усиливающееся гравитационное поле не выпускает с расстояний $r < r_g$ во внешнее пространство никаких сигналов, даже свет. Из-под сферы радиуса $r_g$ (ее называют горизонтом событий) не выходит никакая информация. Одно из следствий этого факта состоит в том, что чёрные дыры характеризуются лишь очень ограниченным числом параметров: массой, моментом импульса и (если он есть) электрическим зарядом. Ничем иным одна чёрная дыра от другой не отличается.

Стоит заметить, что вывод общей теории относительности о неизбежности коллапса, сжатия в точку достаточно массивной звезды настолько парадоксален, что даже классики ОТО долгое время не могли с ним смириться.

Занятно выглядит падение пробного тела на чёрную дыру. По часам бесконечно удаленного наблюдателя это тело достигает горизонта лишь за бесконечное время по закону (см. [3], § 102)

$$r - r_g \sim \exp\left(-ct/r_g\right) . \tag{1}$$

С другой стороны, по часам, установленным на самом пробном теле, время этого путешествия вполне конечно. Даже точка $r = 0$ достигается пробным телом за конечное собственное время.

## 2 Энтропия и температура чёрных дыр

Для мысленного эксперимента, который будет рассмотрен ниже, нам понадобится точное выражение, следующее из ОТО, для энергии частицы массы $m$ в гравитационном поле точечного источника:

$$E = mc^2\sqrt{1 - r_g/r} . \tag{2}$$

Вместо строгого вывода этого соотношения ограничимся качественным соображением в его пользу. Вспомним, что в специальной теории относительности энергия частицы со скоростью $v$ равна

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} ,$$

а в нерелятивистском приближении она переходит в сумму энергии покоя и кинетической энергии:

$$mc^2 + mv^2/2.$$

Совершенно естественно, что нерелятивистское выражение для полной энергии частицы, покоящейся в гравитационном поле,

$$mc^2 - kMm/r$$

обобщается в ОТО к виду (2).

Мысленный эксперимент состоит в рассмотрении следующего устройства [4]. Пусть вдали от чёрной дыры находится маховик. На его вал намотан канат, к другому концу которого прикреплен груз массы $m$. Этот груз также находится вначале на большом расстоянии от чёрной дыры. Опуская его в чёрную дыру, мы раскручиваем маховик, энергию которого в принципе можно использовать. При медленном, адиабатическом опускании груза с бесконечности до расстояния $r$ выделенная энергия составит, очевидно,

$$\Delta E = mc^2 \left(1 - \sqrt{1 - r_g/r}\right).$$

Когда груз приближается вплотную к горизонту, выделенная энергия стремится к $mc^2$. Иными словами, в такой машине полностью используется вся энергия покоя. Для сравнения заметим, что даже в термоядерных реакциях выделяемая энергия составляет не более 1%.

Заметим, что энергия и масса чёрной дыры, захватившей груз, не меняются. Действительно, вся энергия, вся масса груза уже перешли в энергию маховика.

Описанное устройство – не более чем фантастика, и даже не слишком научная. Однако рассмотренный мысленный эксперимент поучителен не только сам по себе. Он понадобится нам для качественного объяснения одного из самых удивительных свойств чёрных дыр: они светят !

Первым, кто осознал, что классические представления о чёрных дырах, описанные выше, принципиально неполны, был американский физик Джон Уилер. Его соображения выглядели примерно так. Возьмём ящик, заполненный, например, излучением при некоторой температуре. Он обладает, очевидно, и конечной энтропией. Сбросим этот ящик в чёрную дыру. Тогда энтропия наблюдаемой части Вселенной навсегда уменьшится. Но это прямое нарушение второго начала термодинамики ! Что-то здесь не так.

Парадокс был разрешен Джекобом Бекенштейном, учеником Уилера, а затем – английским физиком Стивеном Хокингом. Их работы привели к гораздо более глубокому пониманию природы черных дыр. Исследования в этой области лежат на самом передовом фронте современной теоретической физики. Я постараюсь описать этот класс явлений, оставаясь на качественном уровне, не стремясь ни к строгости аргументации, ни к воспроизведению исторической последовательности результатов.

Итак, вернёмся к уилеровскому ящику, заполненному излучением при некоторой температуре $T$. Заметим прежде всего, что для спасения второго начала просто необходимо принять, что сама чёрная дыра обладает энтропией, которая возрастает при поглощении этого ящика. Но телу с ненулевой энтропией естественно приписать и конечную температуру. Несмотря на всю неожиданность этого вывода, он достаточно естествен и с чуть иной точки зрения. Ведь чёрная дыра – идеальный поглотитель, абсолютно черное тело, для которого температура – вполне обычная характеристика.

Попробуем сначала оценить эту температуру просто из соображений размерности. Будем измерять её в тех же единицах, что и энергию, это позволит избавиться в формулах от постоянной Больцмана $k$. (Кстати, энтропия в принятых единицах безразмерна, оценить ее из соображений размерности нельзя.) Сама чёрная дыра характеризуется единственным параметром – массой $M$ (мы примем здесь для упрощения задачи, что у дыры нет ни внутреннего момента импульса, ни заряда). Помимо $M$, в нашем распоряжении есть еще две мировые константы, $G$ и $c$, одна из которых, гравитационная постоянная $G$, по-видимому, должна входить в ответ просто по смыслу задачи. Очевидная комбинация $Mc^2$ не подходит на роль температуры: она чрезмерно велика, да и не содержит $G$. Но никакой иной комбинации, имеющей размерность энергии, из перечисленных величин построить нельзя. Однако в нашем распоряжении есть еще одна мировая константа – постоянная Планка $\hbar$. Используя ее, построить требуемую комбинацию размерности энергии уже несложно. Температура чёрной дыры составляет по порядку величины $\hbar c^3/(GM)$, или (с точностью до двойки) $\hbar c/r_g$.

Формально задача решена, но возникает естественный вопрос: какое отношение имеет квант действия $\hbar$ к нашей, на первый взгляд, совершенно классической проблеме ? Чтобы ответить на него, снова вернёмся к ящику с излучением [4]. Будем опускать этот ящик на тросе к чёрной дыре, подобно грузу, рассмотренному выше. Для наших дальнейших рассуждений принципиально важна возможность вернуть ящик в исходное положение, на большое расстояние от горизонта. Поэтому ни ящик в целом, ни даже часть его пересекать горизонт не должны: что под горизонт попало, то пропало для нас безвозвратно. Итак, когда ящик приблизится к горизонту, откроем крышку, находящуюся в его дне. После того, как излучение уйдет в чёрную дыру, вернём ящик с помощью троса в исходное положение, на большое расстояние от звезды. Энергия, которую мы таким образом извлекли, на первый взгляд равна энергии всего излучения, которое было запасено в ящике. Казалось бы, все оно ушло под горизонт, подобно грузу, обсуждавшемуся раньше.

Однако дело обстоит не так. Здесь следует учесть волновые свойства излучения. В силу соотношения неопределенности размеры ящика не могут быть меньше, чем характерная длина волны излучения $\lambda$, которая связана с его частотой $\omega$ соотношением $\lambda = 2\pi c/\omega$. В свою очередь, характерная энергия квантов $\hbar\omega$ – это не что иное как температура излучения $T_1$. Таким образом, размеры ящика, в том числе и его высота, ограничены неравенством

$$d > \frac{\hbar c}{T_1}\,.$$

Естественно поэтому, что реально превратить в полезную работу можно не всё из лучение, содержащееся в ящике, а лишь его долю, ограниченную соотношением

$$\eta \sim 1 - \frac{d}{r_g} < 1 - \frac{\hbar c}{r_g T_1}. \tag{3}$$

Обсуждаемая система, состоящая из чёрной дыры и ящика с излучением, который связан с маховиком, может рассматриваться как тепловая машина с температурой рабочего тела, излучения, $T_1$. Величина $\eta$ – не что иное как коэффициент полезного действия этой машины. А он, как известно, ограничен формулой Карно:

$$\eta = 1 - \frac{T}{T_1} \tag{4}$$

где $T$ – температура холодильника. Сравнивая соотношения (3) и (4), приходим к выводу, что величину $\hbar c/r_g$ можно отождествить с температурой холодильника, чёрной дыры, в полном соответствии с результатом, полученным выше из соображений размерности. Строгое рассмотрение [1] приводит к выражению для температуры чёрной дыры, отличающемуся от приведенных оценок лишь численным коэффициентом (правда, довольно большим, $4\pi$):

$$T = \frac{\hbar c}{4\pi r_g} = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM} = \frac{m_p^2 c^2}{8\pi M}. \tag{5}$$

Здесь

$$m_p = \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{1/2} = 2,2 \cdot 10^{-5}\ \text{г} \tag{6}$$

– так называемая планковская масса.

Неизбежным следствием конечной температуры $T$ чёрной дыры является вывод о том, что она на самом деле излучает. Дыра рождает не только фотоны и нейтрино с энергиями порядка $T$, но и частицы с ненулевой массой покоя $m$ (если только температура дыры достаточно велика, $T > mc^2$).

Полезно взглянуть на излучение чёрных дыр и с иной, так сказать, микроскопической, точки зрения. Соотношение неопределенности
$\Delta E\, \Delta t \sim \hbar$ позволяет рождение пар частиц из вакуума на время $t$, не превышающее $\hbar/E$; здесь $E$ – полная энергия пары ($2mc^2$ для частиц с массой). Гравитационное поле в окрестности горизонта очень велико, так что уход одной из родившихся частиц пары в чёрную дыру, а другой – на бесконечность разрешён по энергии. В квантовой механике, за счет туннельного эффекта, такого рода процессы рождения частиц становятся возможными. В частности, рождение электрон-позитронных пар в сильных электрических полях не только давно изучается теоретически, но и наблюдалось экспериментально в столкновениях тяжелых ионов. По существу, аналогичное явление может служить объяснением излучения чёрных дыр. Примерно в этом состоял один из аргументов Грибова.

Стоит отметить здесь и другое соображение Грибова: чёрная дыра заведомо не может удерживать излучение с длиной волны, превышающей гравитационный радиус. Очевидно соответствие этого аргумента выражению (5) для температуры, т.е. для частоты, за которой начинается экспоненциальный спад интенсивности.

На самом деле для реальных чёрных дыр температура (5) ничтожно мала. В частности, при массе, сравнимой с массой Солнца, она составляет всего около $10^{-}$ градуса Кельвина. Согласно формуле (5), она падает с ростом массы чёрной дыры растет с ее убыванием. Так, для того, чтобы эта температура стала достаточной дл рождения электрон-позитронных пар, самых легких частиц с ненулевой массой поко т.е. сравнялась (теперь уже снова в энергетических единицах) с 1 МэВ, масса чёрно дыры должна быть на 17 порядков меньше массы Солнца. Иными словами, эта масс не должна превышать $10^{17}$ г. Однако звезды столь малой массы не могут сжатьс до размеров, меньших своего гравитационного радиуса, не могут превратиться чёрную дыру. Такие легкие чёрные дыры могли бы, в принципе, возникать на самы ранних стадиях эволюции Вселенной, когда плотность вещества была очень велика

Могут ли однако подобные минидыры сохраниться с тех пор ? Может ли их воз раст приближаться к $10^{10}$ лет ? Препятствием здесь служит само тепловое излучени чёрной дыры. Оценим его интенсивность $I$ из соображений размерности. Для этог достаточно разделить $T$ на характерное время, которое есть не что иное как $r_g/c$:

$$I \;=\; -\,c^2\frac{dM}{dt} \;\sim\; \frac{cT}{r_g} \;\sim\; \frac{m_p^4c^4}{\hbar M^2}\,. \qquad (7$$

Простой расчёт показывает, что до нашего времени могли дожить звезды с начально массой

$$M \;\geq\; m_p\left(\frac{\tau}{t_p}\right)^{1/3}\,. \qquad (8$$

Здесь $\tau$ – время, прошедшее с момента возникновения Вселенной:

$$\tau \;\sim\; 10^{10}\ \text{лет} \;\sim\; 10^{17}\text{с}\,,$$

а $t_p$ – так называемое планковское время:

$$t_p \;=\; \frac{\hbar}{m_pc^2} \;=\; \left(\frac{\hbar G}{c^5}\right)^{1/2} \;=\; 0.54\cdot 10^{-43}\ \text{с}\,. \qquad (9$$

Вместе с энергией чёрная дыра теряет и массу. При этом, согласно соотношени (7), интенсивность её излучения растет, она светит все ярче и ярче. Гравитационны радиус черной дыры становится меньше и меньше. Чем же кончается этот процесс Очевидно, звезда не может высветить больше энергии, чем имеет. Излучение за ведомо прекращается, когда температура чёрной дыры становится сравнимой с е энергией покоя, при

$$Mc^2 \;\sim\; T \;\sim\; \frac{m_p^2c^2}{M}\,,$$

т.е. когда масса такой минидыры уменьшается до планковской:

$$M \;\sim\; m_p\,.$$

Здесь наше полуклассическое рассмотрение квантовых эффектов в окрестности чёр ных дыр, да и в гравитации вообще, становится недостаточным. Здесь требуетс последовательная квантовая теория гравитации. Увы, такой теории до сих пор не существует.

Вернемся однако к вопросу, могли ли дожить до нашего времени яркие минидыры, возникшие на ранних стадиях эволюции Вселенной. Сравнительно простые оценки с помощью формулы (8) показывают, что масса самого яркого подобного долгожителя выглядит достаточно скромно, она составляет примерно $10^{15}$ г. Однако последняя стадия его эволюции накануне выхода на планковские масштабы должна быть весьма впечатляющей: взрыв мощностью в тысячи самых больших водородных бомб. Эти явления до сих пор астрономами не наблюдались.

# 3 Энтропия чёрных дыр и площадь горизонта

Теперь, когда нам известна температура чёрной дыры (5), вычисление ее энтропии становится элементарной задачей. Хорошо известное термодинамическое соотношение связывает приращение энергии тела $E$ (в данном случае $E$ – это $Mc^2$) с приращением его энтропии $S$:

$$dE \;=\; T\,dS\,. \tag{10}$$

При подстановке выражения (5) для температуры приходим к дифференциальному уравнению, которое легко интегрируется. Естественное граничное условие здесь

$$S \;=\; 0 \;\; \text{при} \;\; M \;=\; 0\,.$$

В результате приходим к следующему замечательному соотношению:

$$S \;=\; \frac{\pi r_g^2}{l_p^2} \;=\; \frac{A}{4l_p^2}\,. \tag{11}$$

Таким образом, энтропия чёерной дыры совпадает с точностью до численного множителя с площадью её горизонта $A = 4\pi r_g^2$, измеренной в единицах квадрата планковской длины

$$l_p \;=\; \sqrt{\hbar G/c^3} \;=\; 1.6\cdot 10^{-33} \;\; \text{см}\,. \tag{12}$$

Факт пропорциональности энтропии и площади горизонта был установлен Бекенштейном [4].

Подобно тому, как второе начало термодинамики накладывает серьезные ограничения на возможные процессы в обычной жизни, оно играет важную роль и в физике чёрных дыр. Из него следует, в частности, важное утверждение: при любом взаимодействии между чёрными дырами сумма площадей их горизонтов возрастает или остается постоянной. (На самом деле, впервые закон неубывания площадей был получен Хокингом иначе [5], еще до того, как была установлена пропорциональность между $S$ и $A$.)

Этот закон ограничивает, например, предельную энергию, которая может выделиться при слиянии двух чёрных дыр. Пусть для простоты их массы были равны:

$M_1 = M_2 = M$. Поскольку площадь горизонта пропорциональна квадрату массы, то для массы $M_f$ конечной дыры возникает неравенство

$$M_f^2 > 2M^2 \quad \text{или} \quad M_f > \sqrt{2}M .$$

Таким образом, энерговыделение в этом процессе не превышает

$$2M - \sqrt{2}M = 2M(1 - 1/\sqrt{2}) .$$

# 4 Чёрные дыры с зарядом и моментом

Любопытными особенностями обладают температура и энтропия чёрных дыр, имеющих заряд и момент количества движения.

Начнем с заряженной чёрной дыры. Ее метрика, т.н. метрика Райснера – Нордстрема, может быть получена из центрально-симметричной метрики нейтральной чёрной дыры, т.н. метрики Шварцшильда, (см. [3], §100)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) , \qquad (13)$$

следующим образом. При наличии, наряду с точечной массой $M_0$, распределенной массы $m(r)$ естественно произвести в выражении (13) замену

$$M \rightarrow M_0 + m(r) .$$

В данном случае $m(r)$ есть не что иное как электростатическая энергия заряда $q$, заключённая внутри сферы радиуса $r$ (и делённая на $c^2$):

$$m(r) = 4\pi \int dr\, r^2 \frac{\mathcal{E}^2}{8\pi c^2} = \frac{q^2}{2c^2} \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{2c^2} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) . \qquad (14)$$

Как обычно, электростатическая энергия классического точечного заряда линейно расходится и, чтобы получить конечный ответ, приходится вводить минимальное расстояние $r_0$. Возникшее таким образом слагаемое $q^2/(2c^2 r_0)$ соответствует классической перенормировке массы и объединяется с "затравочной" массой $M_0$ в "наблюдаемую" массу

$$M = M_0 + \frac{q^2}{2c^2 r_0} .$$

Итак, в результате замены

$$M \rightarrow M - \frac{q^2}{2c^2 r}$$

шварцшильдова метрика (13) переходит в метрику Райснера – Нордстрема:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{Gq^2}{c^4 r^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{Gq^2}{c^4 r^2}\right)^{-1} dr^2 \\ &- \quad r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) . \qquad (15) \end{aligned}$$

Несмотря на некоторую нестрогость этих рассуждений, они не только приводят к правильному результату, но и верны по существу, отличаясь от строгого вывода в рамках ОТО лишь отсутствием некоторых технических деталей [1].

Стоит подчеркнуть следующее обстоятельство. Изложенные соображения наглядно демонстрируют тот факт, что в выражении (15) для метрики заряженной чёрной дыры слагаемое $Gq^2/(c^4r^2)$, по своему физическому смыслу, должно оставаться меньшим, чем $2GM/(c^2r)$. Поэтому встречающееся в литературе обсуждение поведения метрики (15) при ином соотношении между этими членами (и тем более, аналитическое продолжение метрики Райснера – Нордстрема на $r < 0$) едва ли может представлять реальный физический интерес. Впрочем, неприменимость метрики (15) при $r \to 0$ никоим образом не бросает тень на использование её для исследования явлений в окрестности горизонта. А именно этот вопрос интересует нас в первую очередь.

Радиусом горизонта заряженной чёрной дыры служит корень уравнения

$$1 - \frac{2GM}{c^2r} + \frac{Gq^2}{c^4r^2} = 0 \, .$$

Он равен

$$r_{rn} = \frac{1}{c^2}\left(GM + \sqrt{G^2M^2 - Gq^2}\right)$$

(разумеется, из двух корней уравнения мы выбрали здесь тот, который переходит в $2GM/c^2$ при $q = 0$). Соответственно, площадь горизонта заряженной черной дыры составляет

$$A_{rn} = 4\pi r_{rn}^2 = \frac{4\pi}{c^4}\left(GM + \sqrt{G^2M^2 - Gq^2}\right)^2 \, . \qquad (16)$$

Решение Райснера – Нордстрема имеет физический смысл лишь при $q^2 \leq GM^2$. Заряженную чёрную дыру с $q^2 = GM^2$ называют предельной.

Перейдем теперь к обсуждению чёрной дыры, обладающей внутренним моментом импульса $\mathbf{J}$. Соответствующее решение уравнений ОТО было получено Керром. Вычисления в данном случае чрезвычайно громоздки [2]. Поэтому приведем без вывода нужное нам выражение для площади горизонта керровской черной дыры:

$$A_k = 8\pi\left[\left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{GM}{c^2}\right)^4 - \left(\frac{G\mathbf{J}}{c^3}\right)^2}\,\right] \, . \qquad (17)$$

Решение Керра также имеет физический смысл лишь при
$\mathbf{J}^2 \leq (GM^2/c)^2$. И в этом случае чёрную дыру с $bj^2 = (GM^2/c)^2$ называют предельной.

[1] Изложенный наивный вывод формулы (15) был известен также М.П.Райану, частное сообщение.

[2] Даже авторы книги [3] (см. §104), вместо этих расчетов, ограничиваются сноской: "В литературе нет конструктивного аналитического вывода метрики Керра, адекватного ее физическому смыслу, и даже прямая проверка этого решения уравнений Эйнштейна связана с громоздкими вычислениями."

Чему же равна энтропия чёрных дыр с зарядом и моментом, $4\pi G^2 M^2/(c^4 l_p^2)$ или $A/(4l_p^2)$ ? Вспомним, что энтропия не меняется при адиабатическом, медленном изменении параметров системы. Кстати, именно это имело место в примере с адиабатическим опусканием груза на поверхность горизонта шварцшильдовской чёрной дыры: масса дыры и площадь ее горизонта не менялись.

Рассмотрим аналогичный, адиабатический захват частицы заряженной чёрной дырой [6]. Итак, пусть частица с зарядом $e$ имеет на бесконечности полную энергию $\epsilon$, лишь слегка превышающую $eq/r_{rn}$, $\epsilon \to eq/r_{rn}$. Из-за кулоновского отталкивания эта частица достигает горизонта очень медленно. В результате захвата масса чёрной дыры увеличивается на $\Delta M = \epsilon \to eq/r_{rn}$ ($\neq 0!$), а ее заряд – на $\Delta q = e$. Изменение же поверхности горизонта,

$$\Delta A_{rn} = \frac{8\pi r_{rn}}{\sqrt{M^2 - q^2}}(\Delta M\ r_{rn} - \Delta q\ q) = \frac{8\pi r_{rn}}{\sqrt{M^2 - q^2}}(\epsilon\ r_{rn} - e\ q), \qquad (18)$$

в этом процессе исчезающе мало при $q < M$. (Здесь и ниже в этом разделе используется система единиц, в которой $G = 1$, $c = 1$.)

Несколько более сложные рассуждения показывают, что аналогичный результат справедлив и для адиабатического захвата частицы керровской чёрной дырой.

Таким образом, как было впервые показано в [7], площадь горизонта непредельных чёрных дыр не меняется при адиабатическом процессе. Поэтому в общем случае энтропия чёрной дыры пропорциональна именно поверхности горизонта:

$$S = \frac{A}{4l_p^2}.$$

А как выглядит в общем случае температура чёрной дыры ? Для вращающейся чёрной дыры термодинамическое соотношение (10) обобщается к виду [8], §26

$$dM = TdS + \omega dJ, \qquad (19)$$

где $\omega$ играет роль частоты вращения. Теперь, дифференцируя по $S$ при $J = \mathrm{const}$ выражение для энтропии

$$S = 2\pi\left(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2}\right),$$

находим

$$T = \frac{\partial M}{\partial S} = \frac{\sqrt{M^4 - J^2}}{4\pi M\left(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2}\right)}. \qquad (20)$$

Для заряженной чёрной дыры аналог соотношения (19) выглядит так:

$$dM = TdS + \phi dq. \qquad (21)$$

Здесь $\phi$ играет роль электростатического потенциала. Дифференцируя выражение для энтропии для этого случая

$$S = 2\pi\left(M + \sqrt{M^2 - q^2}\right)^2,$$

получаем

$$T = \frac{\partial M}{\partial S} = \frac{\sqrt{M^2 - q^2}}{2\pi\left(M + \sqrt{M^2 - q^2}\right)^2}. \qquad (22)$$

Как видно из соотношений (20), (22), температура предельной чёрной дыры равна нулю.

Между тем, излучение предельных чёрных дыр само по себе отнюдь не запрещено. Для предельной керровской дыры оно ограничено, однако, очевидным условием $\Delta(M^4 - J^2) \geq 0$. Легко найти отсюда максимально возможную энергию $\omega\ (= -\Delta M)$ излученного кванта:

$$\omega \leq \frac{m_p^2}{2M}\,|\Delta J|\,.$$

Существование излучения предельных керровских дыр следует и из прямых расчетов [9].

Аналогично, излучение предельной заряженной дыры ограничено условием $\Delta(M^2 - q^2) \geq 0$. Очевидно, в данном случае потеря энергии должна сопровождаться потерей заряда, т.е. излучаться могут лишь заряженные частицы, среди которых нет безмассовых. Ограничение на массу $\mu$ излученной частицы с зарядом $e$ выглядит вполне либерально:

$$\mu \leq e\, m_p\,.$$

В естественной ситуации, когда $e$ сравним с зарядом электрона, правая часть этого неравенства, т.е. максимальное значение излученной массы, сводится к $\sqrt{\alpha}\, m_p$, где $\alpha = 1/137$. Ясно, что предельная заряженная чёрная дыра (разумеется, при соответствующей массе $M$) может излучать любые известные заряженные элементарные частицы, включая $W$-бозон и $t$-кварк.

Следует заметить, что, согласно формулам (16), (17), ни поверхность горизонта, ни, следовательно, энтропия чёрной дыры не обращаются в нуль в предельном случае, т.е. при нулевой температуре. Возникает, таким образом, противоречие с теоремой Нернста, т.н. третьим началом термодинамики, согласно которому энтропия системы обращается в нуль при нулевой температуре. Этой проблеме физики чёрных дыр посвящена обширная литература. Однако, по-видимому, особых причин для беспокойства здесь нет. Фактически теорема Нернста справедлива лишь при условии, что основное состояние системы невырождено. Хотя это условие в обычных термодинамических системах, как правило, выполняется, не видно физических оснований для того, чтобы считать невырожденным состояние предельной чёрной дыры.

# 5 Квантование чёрных дыр

Идея квантования поверхности горизонта чёрных дыр была сформулирована много лет назад Бекенштейном [10]. Он основывался на том факте, уже упоминавшемся выше, что площадь поверхности непредельной чёрной дыры обладает свойствами адиабатического инварианта [7]. Квантование же адиабатического инварианта выглядит совершенно естественным. Если принять эту гипотезу, то общая структура условия квантования для больших (обобщенных) квантовых чисел $n$ становится очевидной, с точностью до численного коэффициента $\alpha$ (наш аргумент отличается от приведенного в оригинальной работе [10]). Условие квантования должно выглядеть так:

$$A_n = \alpha l_p^2 n \,, \tag{23}$$

где $n$ – положительное целое число. Действительно, присутствие квадрата планковской длины

$$l_p^2 = \frac{G\hbar}{c^3}$$

в формуле (23) совершенно естественно. Далее, чтобы площадь горизонта $A$ оставалась конечной в классическом пределе, степень $n$ в выражении (23) должна совпадать со степенью $\hbar$ в $l_p^2$. Справедливость этого аргумента можно проверить, рассматривая любое квантовомеханическое среднее, не исчезающее в классическом пределе.

Позднее квантование чёрных дыр было предложено в работах [11, 12], исходя из иных соображений. В частности, статья Когана [12] была первым исследованием задачи в очень популярном ныне струнном подходе. Однако, хотя имеется довольно обширная литература по квантованию чёрных дыр (см. недавний обзор [6]), нельзя сказать, что проблема решена. В частности, имеются разные предсказания для константы $\alpha$ в формуле (23).

Логика, приводящая наиболее естественным образом к одному из предсказаний [11], $\alpha = 4\ln 2$, выглядит так [6]. Формула (23) наводит на мысль о том, что поверхность горизонта может рассматриваться как состоящая из $n$ одинаковых участков площадью $\alpha l_p^2$ каждый. Пусть каждый из них имеет одинаковое число $k$ квантовых состояний. Тогда полное число возможных состояний равно

$$K = k^{A/\alpha l_p^2} \,. \tag{24}$$

При этом энтропия системы составляет

$$S = \ln K = \frac{A}{\alpha l_p^2} \ln k \,. \tag{25}$$

Из сравнения с соотношением

$$S = \frac{A}{4 l_p^2}$$

следует, что $\alpha = 4\ln k$. Имеются дополнительные аргументы в пользу того, что $k = 2$ [6, 11, 13]. Спектр масс при этом выглядит так:

$$M_n = \sqrt{\frac{\ln 2}{4\pi}}\, m_p \sqrt{n} \,, \tag{26}$$

а расстояние между соседними уровнями равно

$$M_n - M_{n-1} = \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}}\, \frac{m_p^2}{4M_n} \,. \tag{27}$$

Спектр излучения чёрной дыры становится дискретным с частотами перехода, кратными (27). Он имеет огибающую, соответствующую хокинговской температуре (5), с обычным максимумом (для бозонов) при

$$T_{\max} = 282 \, \frac{m_p^2 c^2}{8\pi M} \, . \tag{28}$$

Возможна, однако, и иная логика [14]. Начнем с керровской дыры. Заметим прежде всего, что в силу обычных законов квантовой механики полный момент $\mathbf{J}$ этой изолированной системы квантуется:

$$\mathbf{J}^2 = \hbar^2 j(j+1) \, . \tag{29}$$

Здесь, как обычно, $j$ – неотрицательное целое или полуцелое число. Далее, удобно переписать выражение (17) для поверхности горизонта керровской дыры в виде

$$A = 8\pi l_p^2 \left[ \frac{M^2}{m_p^2} + \sqrt{\frac{M^4}{m_p^4} - j(j+1)} \right] . \tag{30}$$

В случае предельной керровской дыры это уравнение приводит к следующему правилу квантования для ее массы $M_e$ [15]:

$$M_e = m_p \left[ j(j+1) \right]^{1/4} . \tag{31}$$

Хотя для предельной чёрной дыры площадь горизонта не обладает свойствами адиабатического инварианта, естественно искать правило квантования, которое обобщало бы (31) на непредельный случай. Достаточно очевидное обобщение выглядит так:

$$M_N = m_p \left[ N(N+1) \right]^{1/4} \; ; \tag{32}$$

$$A_{Nj} = 8\pi l_p^2 \left[ \sqrt{N(N+1)} + \sqrt{N(N+1) - j(j+1)} \right] . \tag{33}$$

Здесь $N$ – неотрицательное целое или полуцелое число, $N \geq j$. Разумеется, зависимость площади $A_{Nj}$ от двух квантовых чисел $N$ и $j$, а не от одного, никак не противоречит ее адиабатическим свойствам, столь важным для задачи.

Если перейти от $N$ к целым квантовым числам $n = 2N$, условие квантования (32) для больших $n$ запишется так:

$$M_n = \frac{1}{\sqrt{2}} m_p \sqrt{n} \, , \tag{34}$$

что отличается от условия квантования (26) численным множителем $\sqrt{2\pi / \ln 2} = 3,01$.

Для шварцшильдовской черной дыры близкое условие квантования

$$M_n = \frac{1}{2} m_p \sqrt{n} \tag{35}$$

с целыми $n$ было получено ранее в работе [16], из соображений периодичности в мнимом эвклидовом времени.

Следует отметить также определенное сходство между нашей формулой (33) и условием квантования площади поверхности:

$$A_a = 8\pi l_p^2 \sum_i \sqrt{2j_{1i}(j_{1i}+1) + 2j_{2i}(j_{2i}+1) - j_{12i}(j_{12i}+1)}\,, \tag{36}$$

полученным в петлевом подходе к квантовой гравитации [17]. В формуле (36) $j_{1i}$, $j_{2i}$ – неотрицательные целые или полуцелые числа; $j_{12i}$ пробегают значения от $|j_{1i} - j_{2i}|$ до $j_{1i} + j_{2i}$. Для обычной замкнутой поверхности $\sum_i j_{1i}$ и $\sum_i j_{2i}$ – целые числа.

Я благодарен А.А.Померанскому за многочисленные обсуждения. Я признателен также Дж.Д.Бекенштейну за совет опубликовать условия квантования (32), (33). Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 95-02-04436-а.

# Литература

[1] S.W. Hawking, Nature **248** (1974) 30; Commun.Math.Phys. **43** (1975) 199.

[2] Yu.L. Dokshitser, Phys.World, to be published;
e-Print Archive: physics/9801025.

[3] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Теория поля.* М.: Наука, 1988.

[4] J.D. Bekenstein, Phys.Rev. D **7** (1973) 2333.

[5] S.W. Hawking, Phys.Rev.Lett. **26** (1971) 1344.

[6] J.D. Bekenstein, in: Proceedings of the Eigth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity, in press; e-print Archive: gr-qc/9710076

[7] D. Christodoulou, Phys.Rev.Lett. **25** (1970) 1596;
D. Christodoulou and R. Ruffini, Phys.Rev. D **4** (1971) 3552.

[8] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Статистическая физика*, часть 1. М.: Наука, 1976.

[9] D.N. Page, Phys.Rev. D **14** (1976) 3260.

[10] J.D. Bekenstein, Lett.Nuovo Cimento **11** (1974) 467.

[11] V.F. Mukhanov, Pis'ma Zh.Eksp.Teor.Fiz. **44** (1986) 50; [JETP Lett. **44** (1989) 63].

[12] Ya.I. Kogan, Pis'ma Zh.Eksp.Teor.Fiz. **44** (1986) 209; [ JETP Lett. **44** (1989) 267 ].

[13] J.D. Bekenstein and V.F. Mukhanov, Phys.Lett. B **385** (1995) 7.

[14] И.Б.Хриплович, направлено в печать; e-Print Archive: gr-qc/9804004.

[15] P. Mazur, Gen.Rel.Grav. **19** (1987) 1173.

[16] H.A. Kastrup, Phys.Lett. B **385** (1996) 75; e-Print Archive: gr-qc/9605038.

[17] A. Ashtekar and J. Lewandowski, Class.Quantum Grav. **14** (1997) 55; e-Print Archive: gr-qc/9602046.

# УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ С ВНУТРЕННИМ МОМЕНТОМ ВО ВНЕШНИХ ПОЛЯХ

**А.А.Померанский[1], И.Б.Хриплович[2]**
**Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера**
**630090 Новосибирск, Россия**

**А н н о т а ц и я**

Рассматривается движение релятивистской частицы с внутренним моментом (спином) во внешних электромагнитном и гравитационном полях, в первом приближении по внешнему полю, но в произвольном порядке по спину. Правильный учет влияния спина на траекторию частицы достигается при нековариантном описании спина. Конкретные вычисления проведены с точностью до членов второго порядка по спину включительно. Дан простой вывод гравитационного спин-орбитального и спин-спинового взаимодействия для релятивистской частицы. Обсуждается гравимагнитный момент (ГМ), своеобразный спиновый эффект в общей теории относительности. Показано, что для керровской черной дыры гравимагнитное отношение, т.е. коэффициент при ГМ, равен единице (подобно тому, как для заряженной керровской дыры гиромагнитное отношение равно двум). Полученные уравнения движения для релятивистской частицы со спином во внешнем гравитационном поле существенно отличаются от уравнений Папапетру.

# EQUATIONS OF MOTION OF SPINNING RELATIVISTIC PARTICLE IN EXTERNAL FIELDS

**A.A. Pomeransky, I.B. Khriplovich**
**Budker Institute of Nuclear Physics, 630090 Novosibirsk, Russia**

**A b s t r a c t**

We consider the motion of a spinning relativistic particle in external electromagnetic and gravitational fields, to first order in the external field, but to an arbitrary order in spin. The correct account for the spin influence on the particle trajectory is obtained with the noncovariant description of spin. Concrete calculations are performed up to second order in spin included. A simple derivation is presented for the gravitational spin-orbit and spin-spin interactions of a relativistic particle. We discuss the gravimagnetic moment (GM), a specific spin effect in general relativity. It is demonstrated that for the Kerr black hole the gravimagnetic ratio, i.e., the coefficient at the GM, equals to unity (as well as for the charged Kerr hole the gyromagnetic ratio equals to two). The equations of motion obtained for relativistic spinning particle in external gravitational field differ essentially from the Papapetrou equations.

---

[1]pomeransky@vxinpz.inp.nsk.su
[2]khriplovich@inp.nsk.su

# 1 Введение

Задача о движении частицы с внутренним моментом (спином) во внешнем поле состоит из двух частей: описание прецессии самого спина в этих полях и учет влияния спина на траекторию движения. В низшем неисчезающем порядке по $c^{-2}$ полное решение задачи для случая внешнего электромагнитного поля было дано более 70 лет назад [1]. Прецессия гироскопа в центрально-симметричном гравитационном поле была рассмотрена в том же приближении еще раньше [2]. Затем, заметно позднее, была описана прецессия спина и для случая гравитационного спин-спинового взаимодействия [3]. Полностью релятивистская задача о прецессии спина во внешнем электромагнитном поле была также решена более 70 лет назад [4], а затем в более удобном формализме, использующем ковариантный вектор спина, в работе [5].

Что же касается второй части задачи, относящейся к влиянию спина на траекторию, то здесь ситуация иная. Ковариантные уравнения движения для релятивистской частицы со спином в электромагнитном поле были написаны в той же работе [4], а для случая гравитационного поля – в [6]. Эти уравнения неоднократно обсуждались впоследствии с разных точек зрения в многочисленных статьях [7–17]. Вопрос о влиянии спина на траекторию частицы во внешних полях имеет не только сугубо теоретический интерес. Он привлекает внимание в связи с описанием движения ультрарелятивистских частиц в ускорителях [18] (см. также недавний обзор [19]). Далее, существуют макроскопические объекты, внутреннее вращение которых влияет на их движение во внешнем гравитационном поле. Речь идет о керровских черных дырах. Эта задача важна, в частности, для расчета гравитационного излучения двойных звезд. В этой связи она рассматривалась в работах [20–23]. Однако, обратившись к этим расчетам, мы обнаружили [24], что используемые там уравнения движения с учетом спина в низшем неисчезающем порядке по $c^{-2}$, уже в более простом случае внешнего поля приводят к результатам, отличным от хорошо известного гравитационного спин-орбитального взаимодействия. Проблема связана по существу с правильным определением координаты центра масс. Более того, оказалось, что и уравнения Папапетру [6] сами по себе в том же $c^{-2}$ приближении не воспроизводят результат для гравитационного спин-орбитального взаимодействия, восходящий к [2]. Это расхождение было отмечено уже давно в работе [25], однако, его объяснение, предложенное там, представляется неудовлетворительным (см. [24]).

В настоящей работе получены уравнения движения релятивистской частицы при нековариантном описании спина. Они согласуются с хорошо известными предельными случаями. Хотя для внешнего электромагнитного поля такие уравнения в линейном по спину приближении были получены ранее [18] (см. также [19]), мы хотели бы начать с замечаний, относящихся к этому приближению в электродинамике.

## 2 Ковариантные и нековариантные уравнения движения частицы со спином в электромагнитном поле

Взаимодействие спина с внешним электромагнитным полем описывается, с точностью до членов порядка $c^{-2}$ включительно, хорошо известным гамильтонианом (см., например, [26]):

$$H = -\frac{eg}{2m}\mathbf{sB} + \frac{e(g-1)}{2m^2}\mathbf{s}[\mathbf{p}\times\mathbf{E}]\,. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ – внешние поля, магнитное и электрическое; $e$, $m$, $\mathbf{s}$ и $\mathbf{p}$ – заряд, масса, спин и импульс частицы, соответственно; $g$ – её гиромагнитное отношение. Подчеркнем, что структура второго, томасовского, слагаемого в этом выражении не только надежно установлена теоретически, но и подтверждена с высокой точностью экспериментально, во всяком случае, в атомной физике. Заметим также, во избежание недоразумений, что в самом общем случае последнее слагаемое в формуле (1) следовало бы переписать в эрмитовой форме (см., например, [27]):

$$[\mathbf{p}\times\mathbf{E}] \to \frac{1}{2}\left([\mathbf{p}\times\mathbf{E}] - [\mathbf{E}\times\mathbf{p}]\right) = [\mathbf{p}\times\mathbf{E}] + \frac{i}{2}\,\nabla\times\mathbf{E}\,.$$

Однако нас будет интересовать, главным образом, квазиклассическое приближение, когда во взаимодействии, линейном по спину, производные от полей отбрасываются. (Кроме того, поправка, содержащая $\nabla\times\mathbf{E}$, обращается в нуль в случае потенциального электрического поля, рассмотренном в [26].)

Попробуем построить ковариантное уравнение движения с учетом спина, которое в том же приближении воспроизводило бы силу

$$\mathbf{f}_m = \frac{eg}{2m}\mathbf{sB}_{,m} + \frac{e(g-1)}{2m}\left(\frac{d}{dt}[\mathbf{E}\times\mathbf{s}]_m - \mathbf{s}[\mathbf{v}\times\mathbf{E}_{,m}]\right)\,, \qquad (2)$$

соответствующую гамильтониану (1) (здесь и ниже запятая с индексом означает частную производную). Ковариантная поправка $f^\mu$ к силе Лоренца $eF^{\mu\nu}u_\nu$, линейная по тензору спина $S_{\mu\nu}$ и по градиенту тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu,\lambda}$, может зависеть также и от 4-скорости $u^\mu$. Поскольку $u_\mu u^\mu = 1$, эта поправка должна удовлетворять условию $u_\mu f^\mu = 0$. Из указанных величин можно построить лишь две независимые структуры, удовлетворяющие последнему условию. Первая из них,

$$\eta^{\mu\kappa}F_{\nu\lambda,\kappa}S^{\nu\lambda} - F_{\lambda\nu,\kappa}u_\kappa S^{\lambda\nu}u^\mu\,,$$

сводится в интересующем нас приближении к

$$2\mathbf{s}\left(\mathbf{B}_{,m} - [\mathbf{v}\times\mathbf{E}_{,m}]\right)\,,$$

а вторая,

$$u^\lambda F_{\lambda\nu,\kappa}u^\kappa S^{\nu\mu}\,,$$

к

$$\frac{d}{dt}\,[\mathbf{s}\times\mathbf{E}]_m\,.$$

(Заметим, что структуры, содержащие свертку $F_{\nu\kappa,\lambda}S^{\kappa\lambda}$, приводятся к указанным двум, в силу уравнений Максвелла и антисимметрии $S_{\kappa\lambda}$.)

Очевидно, никакая линейная комбинация двух указанных структур не может воспроизвести правильное выражение (2) для силы, зависящей от спина.

В несколько менее общем виде это было показано ранее в работе [24]. Там же было отмечено, что координата, входящая в ковариантное уравнение, не совпадает с обычной. Поэтому для получения правильного $c^{-2}$ приближения к ковариантному уравнению движения требуется дополнительное переопределение координаты:

$$\mathbf{r}\to\mathbf{r}-\frac{1}{2m}\mathbf{v}\times\mathbf{s}\,. \tag{3}$$

В случае спина 1/2 это переопределение тесно связано с преобразованием Фолди-Ваутхойзена [28]. Обобщение указанной подстановки на случай произвольных скоростей предложено в недавней работе [19].

Между тем, правильные уравнения движения в электромагнитном поле с учетом спина в первом порядке известны достаточно давно [18]. Напомним, что исходное физическое определение спина нековариантно и относится к собственной системе частицы. Это трехмерный вектор $\mathbf{s}$ (или трехмерный антисимметричный тензор) внутреннего момента, заданный в этой системе. Ковариантный вектор спина $S_\mu$ (или ковариантный антисимметричный тензор $S_{\mu\nu}$) получается отсюда просто преобразованием Лоренца. Кстати, в таком подходе условия $u^\mu S_\mu=0$, $u^\mu S_{\mu\nu}=0$ выполняются тождественно. Частота прецессии спина $\mathbf{s}$ при произвольной скорости частицы хорошо известна (см., например, [26]):

$$\begin{aligned}\mathbf{\Omega}=\frac{e}{2m}\Bigg\{(g-2)\left[\mathbf{B}-\frac{\gamma}{\gamma+1}\mathbf{v}(\mathbf{vB})-\mathbf{v}\times\mathbf{E}\right]\\ +\;2\left[\frac{1}{\gamma}\mathbf{B}-\frac{1}{\gamma+1}\mathbf{v}\times\mathbf{E}\right]\Bigg\}\,,\end{aligned} \tag{4}$$

где $\gamma=1/\sqrt{1-v^2}$. Соответствующий лагранжиан взаимодействия (лагранжево описание здесь чуть удобнее, чем гамильтоново) равен, естественно,

$$\begin{aligned}L_{1s}=\mathbf{\Omega s}=\frac{e}{2m}\mathbf{s}\Bigg\{(g-2)\left[\mathbf{B}-\frac{\gamma}{\gamma+1}\mathbf{v}(\mathbf{vB})-\mathbf{v}\times\mathbf{E}\right]\\ +\;2\left[\frac{1}{\gamma}\mathbf{B}-\frac{1}{\gamma+1}\mathbf{v}\times\mathbf{E}\right]\Bigg\}\,.\end{aligned} \tag{5}$$

Уравнение движения для координат имеет обычный вид:

$$\left(\nabla-\frac{d}{dt}\nabla_{\mathbf{v}}\right)L_{tot}=0\,, \tag{6}$$

где $L_{tot}$ – полный лагранжиан системы, а уравнение движения для спина в общем виде выглядит так:

$$\dot{\mathbf{s}} \; = \; -\{L, \mathbf{s}\} \; , \tag{7}$$

где $\{... \, , ...\}$ – скобки Пуассона, или

$$\dot{\mathbf{s}} \; = \; -i[L, \mathbf{s}] \tag{8}$$

в квантовой задаче.

# 3 Уравнения движения частицы со спином в электромагнитном поле. Общий формализм. Эффекты, линейные по спину

В этом разделе мы укажем общий подход к выводу уравнений движения во внешнем электромагнитном поле в произвольном порядке по спину. По ходу дела мы воспроизведем здесь известный результат (4).

Наш подход к задаче основан на следующем, физически очевидном, соображении. Пока и поскольку мы не обсуждаем внутренние возбуждения тела, движущегося во внешнем поле, это тело, пусть даже макроскопическое, может рассматриваться как элементарная частица со спином.

Поэтому лагранжиан взаимодействия спина с внешним полем может быть получен из амплитуды упругого рассеяния

$$-e \, J^\mu A_\mu \tag{9}$$

частицы со спином $s$ на вектор-потенциале $A_\mu$. В силу соображений, приведенных в конце предыдущего раздела, учет эффектов, нелинейных по спину, интересующих нас в первую очередь, может иметь физический смысл лишь в классическом пределе $s \gg 1$. Именно это приближение будет в основном использоваться ниже.

Матричный элемент $J_\mu$ оператора электромагнитного тока между состояниями с импульсами $k$ и $k'$ может быть представлен (при условии $P$- и $T$-инвариантности) следующим образом (см. [29, 30]):

$$J_\mu \; = \; \frac{1}{2\epsilon} \, \bar{\psi}(k') \, \{p_\mu F_e + \Sigma_{\mu\nu} q^\nu \, F_m\} \, \psi(k) \; . \tag{10}$$

Здесь $p_\mu = (k' + k)_\mu$, $q_\mu = (k' - k)_\mu$.

Волновая функция частицы с произвольным спином $\psi$ может быть записана (см., например, [26], §31) как

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \; . \tag{11}$$

Оба спинора,

$$\xi \; = \; \left\{ \xi^{\alpha_1 \, \alpha_2 \, .. \, \alpha_p}_{\dot\beta_1 \, \dot\beta_2 \, .. \, \dot\beta_q} \right\} \; ,$$

и

$$\eta = \left\{ \eta^{\beta_1 \beta_2 \,..\, \beta_q}_{\dot\alpha_1 \dot\alpha_2 \,..\, \dot\alpha_p} \right\},$$

симметричны по пунктирным и непунктирным индексам в отдельности, а

$$p + q = 2s\ .$$

Для частицы с полуцелым спином можно выбрать

$$p = s + \frac{1}{2}\,, \qquad q = s - \frac{1}{2}\,.$$

В случае целого спина удобно принять

$$p = q = s\ .$$

Спиноры $\xi$ и $\eta$ выбраны таким образом, что при отражении координат они переходят друг в друга (с точностью до фазы). При $p \neq q$ это различные объекты, которые принадлежат к разным представлениям группы Лоренца. Если же $p = q$, эти два спинора совпадают. Тем не менее, мы будем использовать одно и то же выражение (11) для волновой функции любого спина, т.е. будем формально вводить объект $\eta$ и для целого спина, имея в виду, конечно, что он выражается через $\xi$. Это позволяет проводить вычисления единообразно для целых и полуцелых спинов.

В системе покоя и $\xi$, и $\eta$ совпадают с нерелятивистским спинором $\xi_0$, который симметричен по всем индексам; в этой системе нет разницы между пунктирными и непунктирными индексами. Спиноры $\xi$ и $\eta$ получаются из $\xi_0$ с помощью преобразования Лоренца:

$$\xi = \exp\{\Sigma\phi/2\}\ \xi_0\ ; \qquad \eta = \exp\{-\Sigma\phi/2\}\ \xi_0\ . \tag{12}$$

Здесь вектор $\phi$ направлен вдоль скорости, $\tanh\phi = v$;

$$\mathbf{\Sigma} = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i - \sum_{i=p+1}^{p+q} \sigma_i\ ,$$

а $\sigma_i$ действует на $i$-ый индекс спинора $\xi_0$ следующим образом:

$$\sigma_i\,\xi_0 = (\sigma_i)_{\alpha_i\beta_i}\,(\xi_0)_{\dots\beta_i\dots}\ . \tag{13}$$

В преобразовании Лоренца (12) для $\xi$, после действия оператора $\mathbf{\Sigma}$ на $\xi_0$ первые $p$ индексов отождествляются с верхними непунктирными индексами, а следующие $q$ индексов отождествляются с нижними пунктирными индексами. Для $\eta$ ситуация обратная.

Заметим, что во внешнем поле компоненты скорости $\mathbf{v}$ (а вместе с ними и компоненты $\phi$), вообще говоря, не коммутируют. Однако в интересующем нас приближении взаимодействия, линейного по внешнему полю, этой некоммутативностью, которая сама пропорциональна полю, можно пренебречь. Кроме того, нас будет интересовать, главным образом, классический предел конечного ответа, где подобные коммутаторы несущественны, т.к. они содержат лишнюю степень $\hbar$. Поэтому мы будем считать $\mathbf{v}$ и $\phi$ обычными численными параметрами.

Далее,

$$\bar{\psi} \;=\; \psi^\dagger\gamma_0 = \psi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \;;$$

здесь $I$ – сумма единичных $2\times 2$ матриц, действующих на все индексы спиноров $\xi$ и $\eta$. Компоненты матрицы $\Sigma_{\mu\nu} = -\Sigma_{\nu\mu}$ выглядят так:

$$\Sigma_{0n} \;=\; \begin{pmatrix} -\Sigma_n & 0 \\ 0 & \Sigma_n \end{pmatrix} \;; \tag{14}$$

$$\Sigma_{mn} \;=\; -2i\epsilon_{mnk}\begin{pmatrix} s_k & 0 \\ 0 & s_k \end{pmatrix} \;; \tag{15}$$

$$\mathbf{s} \;=\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2s}\sigma_i\,.$$

Скалярные операторы $F_{e,m}$ зависят от двух инвариантов, $t = q^2$ и $\tau = (S^\mu q_\mu)^2$. Ковариантный вектор спина $S_\mu$ определен, например, для состояния с импульсом $k_\mu$ и получается с помощью преобразования Лоренца из вектора спина $(0,\mathbf{s})$ в системе покоя:

$$S^\mu \;=\; (S_0, \mathbf{S})\;,\quad S_0 \;=\; \frac{(\mathbf{sk})}{m}\;,\quad \mathbf{S} \;=\; \mathbf{s} + \frac{\mathbf{k}(\mathbf{ks})}{m(\epsilon+m)}\;. \tag{16}$$

В разложении по электрическим мультиполям

$$F_e(t,\tau) \;=\; \sum_{n=0}^{N_e} f_{e,2n}(t)\tau^n$$

высшая степень $N_e$, очевидно, равна $s$ и $s-1/2$ для целого и полуцелого спина, соответственно. В магнитном мультипольном разложении

$$F_m(t,\tau) \;=\; \sum_{n=0}^{N_m} f_{m,2n}(t)\tau^n$$

высшая степень $N_m$ составляет $s-1$ и $s-1/2$ для целого и полуцелого спина. Нетрудно видеть, что

$$f_{e,0}(0) \;=\; 1\;,\qquad f_{m,0}(0) \;=\; \frac{g}{2}\;.$$

Заметим, наконец, что выбор нековариантной нормировки для амплитуды (9) обусловлен тем, что нас интересует лагранжиан, относящийся к мировому времени $t$, а не к собственному времени $\tau$.

Воспроизведем теперь в используемом подходе хорошо известный результат (5) для случая постоянного внешнего поля. Начнем с членов, пропорциональных $g$-фактору. Соответствующее слагаемое в амплитуде рассеяния может быть записано так:

$$\frac{eg}{4\epsilon}\,\xi_0'^\dagger\Big\{\Big[\exp\{\Sigma\phi/2\}(\mathbf{sB})\exp\{-\Sigma\phi/2\} + \exp\{-\Sigma\phi/2\}(\mathbf{sB})\exp\{\Sigma\phi/2\}\Big]$$

$$+\frac{i}{2}\left[\exp\{\boldsymbol{\Sigma}\phi/2\}(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{E})\exp\{-\boldsymbol{\Sigma}\phi/2\}-\exp\{-\boldsymbol{\Sigma}\phi/2\}(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{E})\exp\{\boldsymbol{\Sigma}\phi/2\}\right]\Big\}\xi_0\,. \tag{17}$$

Существенно, что в рассматриваемом случае постоянного внешнего поля можно положить $\mathbf{k}'=\mathbf{k}$, $\mathbf{v}'=\mathbf{v}$, $\phi'=\phi$, поскольку $\mathbf{q}=\mathbf{k}'-\mathbf{k}$ соответствует градиенту поля.

Дальнейшие вычисления используют известное тождество

$$\exp\{\hat{A}\}\hat{B}\exp\{-\hat{A}\} = \hat{B}+\frac{1}{1!}[\hat{A},\,\hat{B}]+\frac{1}{2!}\left[\hat{A},\,[\hat{A},\,\hat{B}]\right]+\ldots,$$

а также соотношения

$$[\Sigma_i,\,\Sigma_j]=4i\epsilon_{ijk}s_k\,,\quad [\Sigma_i,\,s_j]=i\epsilon_{ijk}\Sigma_k\,; \tag{18}$$

$$\cosh\phi=\gamma,\quad \sinh\phi=v\,\gamma. \tag{19}$$

После достаточно простых алгебраических преобразований выражение (17) приводится к виду

$$\frac{eg}{2m}\,\mathbf{s}\left[\mathbf{B}-\frac{\gamma}{\gamma+1}\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{B})-\mathbf{v}\times\mathbf{E}\right]. \tag{20}$$

Перейдем теперь к вкладу конвективного слагаемого

$$-\frac{e}{2\epsilon}\,\bar{\psi}(k')\psi(k)\,p^\mu A_\mu. \tag{21}$$

Представим произведение экспонент в выражении

$$\bar{\psi}(k')\psi(k)=\frac{1}{2}\xi_0'^{\dagger}[\exp\{\boldsymbol{\Sigma}\phi'/2\}\exp\{-\boldsymbol{\Sigma}\phi/2\}+\exp\{-\boldsymbol{\Sigma}\phi'/2\}\exp\{\boldsymbol{\Sigma}\phi/2\}]\xi_0 \tag{22}$$

в виде

$$\begin{aligned}&\exp\{\boldsymbol{\Sigma}\phi'/2\}\exp\{-\boldsymbol{\Sigma}\phi/2\}\\ &=\prod_p\exp\{\sigma\phi'/2\}\exp\{-\sigma\phi/2\}\prod_q\exp\{-\sigma\phi'/2\}\exp\{\sigma\phi/2\}.\end{aligned} \tag{23}$$

Рассмотрим типичный множитель в этой формуле:

$$\begin{aligned}\exp\frac{\sigma\phi'}{2}\exp\frac{-\sigma\phi}{2} &= \cosh\frac{\phi'}{2}\cosh\frac{\phi}{2}-(\mathbf{n}'\mathbf{n})\sinh\frac{\phi'}{2}\sinh\frac{\phi}{2}\\ +\quad&\sigma\left[\mathbf{n}'\sinh\frac{\phi'}{2}\cosh\frac{\phi}{2}-\mathbf{n}\cosh\frac{\phi'}{2}\sinh\frac{\phi}{2}\right]-i\,(\sigma[\mathbf{n}'\times\mathbf{n}])\sinh\frac{\phi'}{2}\sinh\frac{\phi}{2}\,;\end{aligned} \tag{24}$$

здесь $\mathbf{n}'=\mathbf{v}'/v'$, $\mathbf{n}=\mathbf{v}/v$. Поскольку градиенты нас интересуют, только если они входят вместе со спином, в первом слагаемом

$$\cosh(\phi'/2)\cosh(\phi/2)\;-\;(\mathbf{n}'\mathbf{n})\sinh(\phi'/2)\sinh(\phi/2)$$

полагаем $\phi'=\phi/2$, $\mathbf{n}'=\mathbf{n}$, после чего это слагаемое становится равным единице. Далее, сейчас мы обсуждаем взаимодействие, линейное по спину, так что произведение (23) сводится к

$$1+\boldsymbol{\Sigma}\left[\mathbf{n}'\sinh\frac{\phi'}{2}\cosh\frac{\phi}{2}-\mathbf{n}\cosh\frac{\phi'}{2}\sinh\frac{\phi}{2}\right]-2i\,(\mathbf{s}[\mathbf{n}'\times\mathbf{n}])\sinh\frac{\phi'}{2}\sinh\frac{\phi}{2}\,.$$

При подстановке в формулу (22) слагаемые, пропорциональные $\boldsymbol{\Sigma}$, взаимно сокращаются. Ограничиваясь затем членами, линейными по $\mathbf{q}$, сводим зависящую от спина часть выражения (21) к виду

$$- e\,\frac{p^\mu}{2\epsilon}\,\frac{i(\mathbf{s}[\mathbf{k}\times\mathbf{q}])}{m(\epsilon+m)}\,A_\mu\,.$$

Заметим далее, что поскольку $p^\mu q_\mu = 0$, имеет место тождество

$$p^\mu q_\alpha A_\mu \;=\; p^\mu(q_\alpha A_\mu - q_\mu A_\alpha) \;=\; p^\mu i F_{\alpha\mu}\,. \tag{25}$$

Теперь уже можно положить $p_\mu \to 2mu_\mu$, где $u_\mu$ – четырехмерная скорость. В результате мы приходим к следующему выражению:

$$-\frac{e}{2m}\mathbf{s}\left[2\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\mathbf{B}\;\frac{2\gamma}{\gamma+1}\mathbf{v}(\mathbf{vB}) - \frac{2\gamma}{\gamma+1}\mathbf{v}\times\mathbf{E}\right]\,. \tag{26}$$

Выражения (20), (26) в сумме дают формулу (5). Таким образом, мы воспроизвели известный результат для взаимодействия, линейного по спину, исходя из релятивистского волнового уравнения для произвольного спина.

В дальнейшем мы будем неоднократно использовать тождества типа (25). На классическом языке подобное преобразование соответствует отбрасыванию в лагранжиане (или добавлению к нему) полной производной по времени. Действительно,

$$u^\mu q_\mu \;\to\; u^\mu \partial_\mu = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\right) \;=\; \gamma\,\frac{d}{dt}\,.$$

# 4 Уравнения движения частицы со спином в электромагнитном поле. Эффекты, квадратичные по спину

Перейдем теперь к взаимодействию, квадратичному по спину. "Затравочное", явное квадрупольное взаимодействие, содержащееся в выражениях (9), (10), составляет

$$- e\,\frac{p^\mu}{2\epsilon}\,f_{e,2}(S^\alpha q_\alpha)^2\,A_\mu\,. \tag{27}$$

Используя тождество (25) и соотношения (16), сводим его к виду

$$-e\,f_{e,2}\,\gamma\left\{(\mathbf{vs})\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{v}\nabla)\right] + \frac{1}{\gamma}(\mathbf{s}\nabla)\right\}\left[(\mathbf{sE}) - \frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{sv})(\mathbf{vE}) + (\mathbf{s}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}])\right].$$

Отбрасывая полную производную по времени $\partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla$, приходим к выражению

$$L_{2s} = -\,e\,f_{e,2}\left[(\mathbf{s}\nabla) - \frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{vs})(\mathbf{v}\nabla)\right]\left[(\mathbf{sE}) - \frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{sv})(\mathbf{vE}) + (\mathbf{s}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}])\right]. \tag{28}$$

Как нетрудно убедиться, используя уравнения Максвелла и добавляя полную производную по $t$, структура этого выражения такова, что тензор $s_i s_j$ в нем можно переписать в неприводимой форме: $s_i s_j \to s_i s_j - (1/3)\delta_{ij}\mathbf{s}^2$. Теперь из нерелятивистского предела формулы (28) видно, что она, действительно, описывает взаимодействие с внешним полем квадрупольного момента:

$$Q_{ij} = -2\, e\, f_{e,2}\, (3\, s_i s_j - \delta_{ij}\mathbf{s}^2); \quad Q = Q_{zz}|_{s_z=s} = -2\, e\, f_{e,2}\, s(2s-1). \tag{29}$$

В асимптотике, при $\gamma \to \infty$, взаимодействие (28) выходит на константу

$$L_{2s} = -e\, f_{e,2}\Big[(\mathbf{s}\nabla) - (\mathbf{vs})(\mathbf{v}\nabla)\Big]\Big[(\mathbf{sE}) - (\mathbf{sv})(\mathbf{vE}) + (\mathbf{s}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}])\Big]. \tag{30}$$

Хорошо известно, что даже в отсутствие затравочного квадрупольного члена, т.е. при $f_{e,2} = 0$, квадрупольное взаимодействие возникает в нерелятивистском пределе за счет конвективного и магнитного слагаемых во взаимодействии (9). Значение этого индуцированного квадрупольного момента при произвольном спине частицы было получено в работе [30] [3]:

$$Q_1 = -e(g-1)\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \begin{cases} s, & \text{целый спин,} \\ s-1/2, & \text{полуцелый спин}. \end{cases} \tag{31}$$

В этой формуле выделена въявь постоянная Планка $\hbar$, чтобы продемонстрировать, что индуцированный квадрупольный момент $Q_1$ исчезает в классическом пределе $\hbar \to 0$, $s \to \infty$, $\hbar s \to \mathrm{const}$. Поэтому квадратичное по спину взаимодействие, пропорциональное $Q_1$, не сказывается реально на уравнениях движения классической частицы (хотя и играет роль в атомной спектроскопии [30]).

Между тем, конвективное и магнитное слагаемые в выражении (9) индуцируют взаимодействие, квадратичное по спину, которое имеет классический предел и потому представляет интерес для нашей задачи. Здесь удобно начать с взаимодействия конвективного тока. Вернемся к формуле (24). По-прежнему полагаем в ней

$$\cosh(\phi'/2)\cosh(\phi/2) - (\mathbf{n}'\mathbf{n})\sinh(\phi'/2)\sinh(\phi/2) = 1.$$

А в остальных членах, линейных по $\sigma$, сохраняем лишь первую степень $\mathbf{q} \to -i\hbar\nabla$ в надежде на то, что в окончательный ответ, в произведение (23), $\hbar$ войдет в комбинации $\hbar s \to \mathrm{const}$. Тем не менее, сами по себе эти члены малы по сравнению с единицей, и поэтому в классическом пределе выражение (24) можно записать так:

$$\exp\left\{\sigma\left[\mathbf{n}'\sinh(\phi'/2)\cosh(\phi/2) - \mathbf{n}\cosh(\phi'/2)\sinh(\phi/2)\right] - i\,(\sigma[\mathbf{n}'\times\mathbf{n}])\sinh^2(\phi/2)\right\}.$$

Нетрудно видеть, что в произведении (23) операторы $\sigma$, стоящие при

$$\mathbf{n}'\sinh(\phi'/2)\cosh(\phi/2) - \mathbf{n}\cosh(\phi'/2)\sinh(\phi/2),$$

[3] Авторами этой работы допущена опечатка в ответе для индуцированного квадрупольного момента, в результате которой его значение, приведенное в [30], вдвое меньше правильного

собираются в показателе результирующей экспоненты в оператор $\mathbf{\Sigma}$, а он исчезает в классическом пределе. В этом пределе выживают лишь те операторы $\sigma$, которые стоят при $[\mathbf{n}' \times \mathbf{n}]\sinh^2(\phi/2)$; они собираются в $2\mathbf{s}$. Таким образом, в классическом пределе произведение (23) сводится с учетом второго тождества (19) к

$$\exp\left\{\frac{1}{m}\frac{\gamma}{\gamma+1}\left(\mathbf{s}\left[\mathbf{v}\times\nabla\right]\right)\right\}. \tag{32}$$

Заметим, что действие оператора (32) на любую функцию координат, будь то вектор-потенциал или напряженность поля, сводится к сдвигу ее аргумента

$$\mathbf{r} \to \mathbf{r} + \frac{1}{m}\frac{\gamma}{\gamma+1}\mathbf{s}\times\mathbf{v}.$$

Любопытно, что именно эта подстановка предложена в работе [19] для перехода от ковариантных уравнений движения, линейных по спину, к нековариантным. Ее частный случай в $c^{-2}$ приближении – формула (3).

Теперь, учитывая второй член разложения экспоненты (32) и вновь используя тождество (25), без труда получаем следующее выражение для квадратичного по спину взаимодействия, возникающего от конвективного тока:

$$-\frac{e}{2m^2}\frac{\gamma}{\gamma+1}\left(\mathbf{s}\left[\mathbf{v}\times\nabla\right]\right)\left[\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)(\mathbf{sB})-\frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{sv})(\mathbf{vB})-\frac{\gamma}{\gamma+1}\left(\mathbf{s}\left[\mathbf{v}\times\mathbf{E}\right]\right)\right]. \tag{33}$$

Перейдем к вкладу в обсуждаемый эффект, обусловленному магнитным моментом. Интересующее нас слагаемое в амплитуде рассеяния, пропорциональное $g$-фактору, теперь удобно записать так:

$$\begin{aligned}
\frac{eg}{4\epsilon}\xi_0'^{\dagger}\{&[\exp\{\mathbf{\Sigma}\phi'/2\}\exp\{-\mathbf{\Sigma}\phi/2\}\exp\{\mathbf{\Sigma}\phi/2\}(\mathbf{sB})\exp\{-\mathbf{\Sigma}\phi/2\}\\
&+\exp\{-\mathbf{\Sigma}\phi'/2\}\exp\{\mathbf{\Sigma}\phi/2\}\exp\{-\mathbf{\Sigma}\phi/2\}(\mathbf{sB})\exp\{\mathbf{\Sigma}\phi/2\}]\\
&+\frac{i}{2}[\exp\{\mathbf{\Sigma}\phi'/2\}\exp\{-\mathbf{\Sigma}\phi/2\}\exp\{\mathbf{\Sigma}\phi/2\}(\mathbf{\Sigma E})\exp\{-\mathbf{\Sigma}\phi/2\}\\
&-\exp\{-\mathbf{\Sigma}\phi'/2\}\exp\{\mathbf{\Sigma}\phi/2\}\exp\{-\mathbf{\Sigma}\phi/2\}(\mathbf{\Sigma E})\exp\{\mathbf{\Sigma}\phi/2\}]\}\,\xi_0.
\end{aligned} \tag{34}$$

Используя на этот раз первый член разложения экспоненты (32), приходим к следующему выражению для вклада, пропорционального магнитному моменту:

$$\frac{eg}{2m^2}\frac{\gamma}{\gamma+1}\left(\mathbf{s}\left[\mathbf{v}\times\nabla\right]\right)\left[(\mathbf{sB})-\frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{sv})(\mathbf{vB})-\left(\mathbf{s}\left[\mathbf{v}\times\mathbf{E}\right]\right)\right]. \tag{35}$$

Полный ответ для индуцированного взаимодействия, квадратичного по спину, равен

$$L_{2s}^{i} = \frac{e}{2m^2}\frac{\gamma}{\gamma+1}\left(\mathbf{s}\left[\mathbf{v}\times\nabla\right]\right)\left[\left(g-1+\frac{1}{\gamma}\right)(\mathbf{sB})-(g-1)\frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{sv})(\mathbf{vB})\right.$$

$$-\left(g-\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)(\mathbf{s}\,[\mathbf{v}\times\mathbf{E}])\Bigg] . \quad (36)$$

Заметим, что в нерелятивистском пределе индуцированное взаимодействие с магнитным полем стремится к нулю как $v/c$, а с электрическим – как $(v/c)^2$. Более того, та часть взаимодействия (36), которая не связана с $g$-фактором, не является неприводимой по спину; иными словами, структура $s_i s_j$ в ней не сводится к неприводимому тензору $s_i s_j - (1/3)\delta_{ij}\mathbf{s}^2$. Взаимодействие (36) вообще не является квадрупольным. Представляет интерес, однако, его асимптотическое поведение при $\gamma \to \infty$. В этом пределе

$$L^i_{2s} = \frac{e}{2m^2}(g-1)\,(\mathbf{s}\,[\mathbf{v}\times\nabla])\,[(\mathbf{sB}) - (\mathbf{sv})(\mathbf{vB}) - (\mathbf{s}\,[\mathbf{v}\times\mathbf{E}])] . \quad (37)$$

Поразительным образом асимптотики (30) и (37) совпадают с точностью до множителя и до полной производной по времени. Для доказательства этого факта удобно ввести ортонормированную тройку векторов:

$$\mathbf{v};\ \ \rho = \frac{[\mathbf{v}\times\mathbf{s}]}{|[\mathbf{v}\times\mathbf{s}]|}\,; \qquad \zeta = [\mathbf{v}\times\rho]\,.$$

Используя полноту этого базиса и уравнение $\dot{\mathbf{E}} = [\nabla\times\mathbf{B}]$, а также отбрасывая полную производную по $t$, нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned}&[(\mathbf{s}\nabla) - (\mathbf{vs})(\mathbf{v}\nabla)]\,[(\mathbf{sE}) - (\mathbf{sv})(\mathbf{vE}) + (\mathbf{s}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}])]\\ &\quad = \ [\mathbf{v}\times\mathbf{s}]^2\,(\zeta\nabla)[(\zeta\mathbf{E}) + (\rho\mathbf{B})]\,,\end{aligned}$$

действительно, совпадает с

$$\begin{aligned}&(\mathbf{s}\,[\mathbf{v}\times\nabla])\,\Big[(\mathbf{sB}) - (\mathbf{sv})(\mathbf{vB}) - (\mathbf{s}\,[\mathbf{v}\times\mathbf{E}])\Big]\\ &\quad = -\,[\mathbf{v}\times\mathbf{s}]^2\,(\rho\nabla)\,[(\rho[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]) + (\rho\mathbf{E})]\,.\end{aligned}$$

Таким образом, имеется выделенное значение затравочного квадрупольного момента (29)

$$Q = -2(g-1)\,\frac{es^2}{m^2}\,, \qquad \text{или} \quad f_{e,2} = (g-1)\,\frac{1}{2m^2} \quad (38)$$

(напомним, что мы сейчас рассматриваем классическую ситуацию, когда $s \gg 1$), при котором полное взаимодействие, квадратичное по спину, $L_{2s} + L^i_{2s}$, асимптотически падает с энергией.

Ситуация сходна с той, которая имеет место для взаимодействия, линейного по спину. Хорошо известно (см., например, [11, 31, 32]), что имеется выделенное значение $g$-фактора, $g = 2$, при котором линейное по спину взаимодействие падает при $\gamma \to \infty$. Это непосредственно видно из формулы (5) для лагранжиана первого порядка. Таким образом, полагая дополнительно $g = 2$, мы получаем

$$Q = -2\,\frac{es^2}{m^2}\,, \qquad \text{или} \quad f_{e,2} = \frac{1}{2m^2}\,. \quad (39)$$

Заметим, что выбор $g = 2$ для затравочного магнитного момента является необходимым (но не достаточным) условием перенормируемости в квантовой электродинамике [11, 31, 32]. Это условие выполнено не только для электрона, но и для заряженного векторного бозона в перенормируемой теории электрослабых взаимодействий.

Однако в определенном отношении ситуация с выделенными значениями (38), (39) квадрупольного момента отличается от ситуации с $g$-фактором. Условия (38), (39), в отличие от условия $g = 2$, не универсальны, они имеют место только для больших спинов, $s \gg 1$, иными словами, относятся лишь к классическим объектам с внутренним моментом. В частности, у заряженного векторного бозона перенормируемой электрослабой теории затравочное квадрупольное взаимодействие вообще отсутствует, $f_{e,2} = 0$. Квадрупольный момент этой частицы имеет (на нашем языке) индуцированную природу, он дается формулой (31) при $s = 1$ и $g = 2$.

# 5 Прецессия спина в гравитационном поле

В этом разделе мы дадим простой и общий вывод уравнений прецессии спина в гравитационном поле. Этот подход не только позволяет легко воспроизвести и обобщить известные результаты для спиновых эффектов. Прослеженная здесь замечательная аналогия между гравитационным и электромагнитным полем дает возможность без особых затруднений перенести результаты двух предыдущих разделов на случай внешнего гравитационного поля.

Из сохранения момента импульса в плоском пространстве-времени в сочетании с принципом эквивалентности следует, что 4-вектор спина $S^\mu$ параллельно переносится вдоль мировой линии частицы. Параллельный перенос вектора вдоль геодезической $x^\mu(\tau)$ означает равенство нулю его ковариантной призводной:

$$\frac{DS^\mu}{D\tau} = 0 \,. \tag{40}$$

(В этом разделе мы ограничиваемся эффектами, линейными по спину.) Перейдем к естественному для описания спина тетрадному формализму. В силу соотношения (40) уравнение для тетрадных компонент спина $S^a = S^\mu e^a_\mu$ выглядит так:

$$\frac{DS^a}{D\tau} = \frac{dS^a}{d\tau} = S^\mu e^a_{\mu;\nu} u^\nu = \eta^{ab} \gamma_{bcd} u^d S^c \,. \tag{41}$$

Здесь

$$\gamma_{abc} = e_{a\mu;\nu} e^\mu_b e^\nu_c = -\gamma_{bac} \tag{42}$$

— коэффициенты вращения Риччи [33]. Разумеется, уравнение для тетрадных компонент 4-скорости выглядит точно так же:

$$\frac{du^a}{d\tau} = \eta^{ab} \gamma_{bcd} u^d u^c \,. \tag{43}$$

Смысл уравнений (41), (43) ясен: тетрадные компоненты обоих векторов меняются одинаково, лишь за счет вращения локального лоренцева репера.

Точно так же четырехмерные спин и скорость заряженной частицы с гиромагнитным отношением $g = 2$ одинаково прецессируют во внешнем электромагнитном поле в силу уравнения Баргмана, Мишеля, Телегди [5, 26] (при $g = 2$) и уравнения Лоренца:

$$\frac{dS_a}{d\tau} = \frac{e}{m} F_{ab} S^b \ ; \qquad \frac{du_a}{d\tau} = \frac{e}{m} F_{ab} u^b \ .$$

Таким образом, имеет место очевидное соответствие:

$$\frac{e}{m} F_{ab} \longleftrightarrow \gamma_{abc} u^c \ . \tag{44}$$

Оно позволяет получить частоту прецессии $\omega$ трехмерного вектора спина $\mathbf{s}$ во внешнем гравитационном поле из выражения (4) с помощью простой замены

$$\frac{e}{m} B_i \longrightarrow -\frac{1}{2} \epsilon_{ikl} \gamma_{klc} u^c \ ; \qquad \frac{e}{m} E_i \longrightarrow \gamma_{0ic} u^c \ . \tag{45}$$

Эта частота равна

$$\omega_i = -\epsilon_{ikl} \left( \frac{1}{2} \gamma_{klc} + \frac{u^k}{u^0 + 1} \gamma_{0lc} \right) \frac{u^c}{u^0_w} \ . \tag{46}$$

Общий множитель $1/u^0_w$ в этом выражении связан с переходом в левой части уравнения (41) к дифференцированию по мировому времени $t$:

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} = u^0_w \frac{d}{dt} \ .$$

Величина $u^0_w$ снабжена индексом $w$ с тем, чтобы подчеркнуть, что это мировая, а не тетрадная, компонента 4-скорости. Все остальные индексы в выражении (46) тетрадные, $c = 0, 1, 2, 3$; $\ i, k, l = 1, 2, 3$. Соответствующая поправка к лагранжиану, зависящая от спина, равна

$$L_{1sg} = \mathbf{s}\omega \ . \tag{47}$$

В качестве иллюстрации формул (46), (47) применим их к случаям спин-орбитального и спин-спинового взаимодействий. Мы ограничимся, как это делается обычно в обсуждаемых задачах, линейным приближением по гравитационному полю. Однако в нашем подходе, в отличие от стандартных, обе задачи элементарно решаются при произвольной скорости частицы.

Тетрады $e_{a\mu}$ связаны с метрикой соотношением

$$e_{a\mu} e_{b\nu} \eta^{ab} = g_{\mu\nu} \ .$$

В линейном приближении можно положить $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ и не делать различия между тетрадным и мировым индексом в $e_{a\mu}$. Неоднозначность в выборе тетрад исключим, приняв симметричную калибровку $e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu}$. Тогда

$$e_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \ .$$

Используя выражение (42) для коэффициентов Риччи, находим в линейном приближении

$$\gamma_{abc} = \frac{1}{2}(h_{bc,a} - h_{ac,b}) . \quad (48)$$

Начнем со спин-орбитального взаимодействия. В центрально-симметричном поле, которое создается массой $M$, метрика имеет вид

$$h_{00} = -\frac{2kM}{r}; \quad h_{mn} = -\frac{2kM}{r}\delta_{mn} . \quad (49)$$

Отличные от нуля коэффициенты Риччи здесь таковы:

$$\gamma_{ijk} = \frac{kM}{r^3}(\delta_{jk}r_i - \delta_{ik}r_j) , \quad \gamma_{0i0} = -\frac{kM}{r^3}r_i . \quad (50)$$

Их подстановка в формулу (46) дает следующее выражение для частоты прецессии:

$$\omega_{ls} = \frac{2\gamma+1}{\gamma+1}\frac{kM}{r^3}\,\mathbf{v}\times\mathbf{r} . \quad (51)$$

В пределе малых скоростей, $\gamma \to 1$, ответ переходит в классический результат [2].

Перейдем к спин-спиновому взаимодействию. Пусть спин центрального тела равен $\mathbf{s}_0$. Линейные по $\mathbf{s}_0$ компоненты метрики, ответственные за спин-спиновое взаимодействие, таковы:

$$h_{0i} = 2k\,\frac{[\mathbf{s}_0\times\mathbf{r}]_i}{r^3} .$$

Здесь отличные от нуля коэффициенты Риччи равны

$$\gamma_{ij0} = k\left(\nabla_i\frac{[\mathbf{s}_0\times\mathbf{r}]_j}{r^3} - \nabla_j\frac{[\mathbf{s}_0\times\mathbf{r}]_i}{r^3}\right), \quad \gamma_{0ij} = -k\nabla_i\frac{[\mathbf{s}_0\times\mathbf{r}]_j}{r^3} . \quad (52)$$

Частота спин-спиновой прецессии составляет

$$\omega_{ss} = -k\left(2-\frac{1}{\gamma}\right)(\mathbf{s}_0\nabla)\nabla\frac{1}{r}$$

$$+\quad k\frac{\gamma}{\gamma+1}\Big[\mathbf{v}(\mathbf{s}_0\nabla) - \mathbf{s}_0(\mathbf{v}\nabla) + (\mathbf{v}\mathbf{s}_0)\nabla\Big](\mathbf{v}\nabla)\,\frac{1}{r} . \quad (53)$$

В пределе малых скоростей эта формула также переходит в соответствующий классический результат [3].

В заключение этого раздела заметим, что и в случае внешнего гравитационного поля не существует ковариантного выражения для силы, линейной по спину частицы. Иными словами, отклонение траектории частицы с внутренним моментом от геодезической не описывается тензором Римана. В этом случае возможная ковариантная структура вообще единственна, с точностью до множителя (в работе [6] он равен $-1/2m$): $R_{\mu\nu ab}u^{\nu}S^{ab}$. Как уже отмечалось во Введении, это ковариантное описание (в отличие от наших формул (46), (47)) противоречит классическим результатам в пределе малых скоростей.

# 6 Уравнения движения частицы со спином в гравитационном поле. Общий формализм

Уравнения движения во внешнем гравитационном поле в произвольном порядке по спину строятся аналогично уравнениям движения в случае электромагнитного поля.

Начнем с амплитуды упругого рассеяния в слабом внешнем гравитационном поле $h_{\mu\nu}$. Мы используем ее лишь в качестве наводящего соображения, а затем выйдем за рамки линейного приближения. Эта амплитуда равна

$$-\frac{1}{2}T_{\mu\nu}h^{\mu\nu}\ . \tag{54}$$

Матричный элемент $T_{\mu\nu}$ тензора энергии-импульса между состояниями с импульсами $k$ и $k'$ может быть записан следующим образом:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\epsilon}\,\bar{\psi}(k')\Big\{p_\mu p_\nu\,F_1 + \frac{1}{2}(p_\mu\Sigma_{\nu\lambda} + p_\nu\Sigma_{\mu\lambda})\,q^\lambda\,F_2$$
$$+\,(\eta_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu)\,F_3 + [S_\mu S_\nu q^2 - (S_\mu q_\nu + S_\nu q_\mu)(Sq) + \eta_{\mu\nu}(Sq)^2]\,F_4\Big\}\,\psi(k)\ . \tag{55}$$

Скалярные операторы $F_i$ в этом выражении также разлагаются по степеням $\tau = (Sq)^2$:

$$F_i(t,\tau) = \sum_{n=0}^{N_i} f_{i,2n}(t)\tau^n.$$

Нетрудно убедиться в том, что полное число инвариантных формфакторов $f_{i,2n}$ равно $4s+2$ и $4s+1$ для целого и полуцелого спина, соответственно. Независимость четырех тензорных структур, входящих в выражение (55), очевидна. А полноту разложения можно проверить, например, убедившись в том, что подсчет полного числа инвариантных формфакторов в аннигиляционном канале приводит к результату, совпадающему с указанным выше.

В общековариантной записи структура $(\eta_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu)\,h^{\mu\nu}$ соответствует скалярной кривизне $R$, а $[S_\mu S_\nu q^2 - (S_\mu q_\nu + S_\nu q_\mu)(Sq) + \eta_{\mu\nu}(Sq)^2]\,h^{\mu\nu}$ соответствует произведению $R_{\mu\nu}S^\mu S^\nu$, где $R_{\mu\nu}$ – тензор Риччи. Поскольку нас интересуют уравнения движения вне источников поля, мы опускаем соответствующие слагаемые в разложении (55).

Подобно тому, как в электродинамике сохранение заряда приводит к условию $f_{e,0}(0) = 1$, здесь из сохранения энергии следует, что $f_{1,0}(0) = 1$. Что же касается слагаемого в амплитуде (54), содержащего $f_{2,0}$, то его удобно переписать иначе, используя аналогию (44) с электромагнитным полем. Полагая в соответствующем электромагнитном слагаемом

$$i\,\frac{eg}{8\epsilon}\,\bar{\psi}(k')\,\Sigma^{ab}F_{ab}\,\psi(k)$$

$g = 2$, $(e/m)F_{ab} = f_{ab} = \gamma_{abc}u^c$, приходим к следующему вкладу в лагранжиан гравитационного взаимодействия:

$$i\,\frac{1}{4u_w^0}\,\bar{\psi}(k')\,\Sigma^{ab}f_{ab}\,\psi(k)\ ; \tag{56}$$

здесь, как обычно, $u_w^0 = \epsilon/m$. Используя для $\gamma_{abc}$ линейное приближение (48), нетрудно убедиться в том, что выражение (56), действительно, соответствует обсуждаемому вкладу в амплитуду при условии $f_{2,0} = 1$. Таким образом, в гравитации фиксировано значение еще одного формфактора при нулевой передаче импульса $t$. Это соответствует закону сохранения момента количества движения. Указанное обстоятельство было отмечено в работах [34, 35].

Вернемся к конвективному слагаемому в формуле (54). Подобно тому, как это было в электродинамике, при переходе к спинорам в собственной системе здесь член первого порядка по спину записывается в виде

$$- \frac{p^\mu p^\nu}{8\epsilon} \frac{1}{m} \frac{u^0}{u^0 + 1} (\mathbf{s} [\mathbf{v} \times \nabla]) \, h_{\mu\nu} \,. \tag{57}$$

Используя соотношения (25), (48), получаем

$$p^\mu \nabla_k h_{\mu\nu} \;\to\; - p^\mu(-\partial_k h_{\mu\nu} + \partial_\mu h_{k\nu}) \;\to\; -2p^a \gamma_{ak\nu} \,.$$

Таким образом, выражение (57) переписывается через коэффиценты Риччи:

$$\frac{1}{u_w^0} \frac{u^0}{u^0 + 1} \epsilon^{mnk} s^m v^n u^a u^c \gamma_{akc} \,. \tag{58}$$

Как нетрудно убедиться, выражения (56) и (58) в сумме воспроизводят лагранжиан (47).

# 7 Уравнения движения частицы со спином в гравитационном поле. Второй порядок по спину

Перейдем теперь к исследованию эффектов, квадратичных по спину, в уравнениях движения в гравитационном поле. В случае двойной звезды эти эффекты имеют тот же порядок величины, что и спин-спиновое взаимодействие при сравнимых спинах компонент системы [24]. Влияние последнего на характеристики гравитационного излучения становится заметным для системы двух предельных черных дыр [21]. Соответственно, спиновые эффекты второго порядка в уравнениях движения становятся ощутимыми, если предельной черной дырой является хотя бы одна из компонент двойной системы [24]. Таким образом, исследование этих эффектов представляет не только чисто теоретический интерес. Они могут быть в принципе обнаружены с помощью детекторов гравитационных волн, строящихся в настоящее время.

Очевидным источником спиновых эффектов второго порядка является слагаемое

$$L_{2sg} \;=\; - f_{1,2} \frac{1}{8\epsilon} p^\mu p^\nu (Sq)^2 h_{\mu\nu} \tag{59}$$

в амплитуде (54). Благодаря соотношению

$$p^\mu p^\nu q_\alpha q_\beta h_{\mu\nu} \;=\; p^\mu p^\nu (q_\alpha q_\beta h_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu h_{\alpha\beta} - q_\alpha q_\nu h_{\mu\beta} - q_\beta q_\mu h_{\nu\alpha}) \to 2p^\mu p^\nu R_{\mu\alpha\nu\beta} \,,$$

лагранжиан (59) переписывается через тензор Римана:

$$L_{2sg} = -\frac{\kappa}{2\epsilon} u^a S^b u^c S^d R_{abcd} . \tag{60}$$

Вместо $f_{1,2}$ мы ввели безразмерный параметр $\kappa$:

$$f_{1,2} = \frac{\kappa}{2m^2} .$$

Удобно далее воспользоваться представлением Петрова для компонент тензора Римана (см. [33]):

$$E_{kl} = R_{0k0l} , \quad E_{kl} = E_{lk} ; \quad C_{kl} = \frac{1}{4}\epsilon_{kmn}\epsilon_{lrs}R_{mnrs}, \quad C_{kl} = C_{lk} ;$$

$$B_{kl} = \frac{1}{2}\epsilon_{lrs}R_{0krs} , \quad B_{kk} = 0. \tag{61}$$

Мы ограничиваемся к тому же случаем гравитационного поля без источников. Тогда, при $R_{ab} = 0$, имеют место дальнейшие упрощения:

$$C_{kl} = -E_{kl}, \quad B_{kl} = B_{lk}, \quad E_{kk} = C_{kk} = 0 . \tag{62}$$

В итоге приходим к следующему лагранжиану взаимодействия, квадратичному по спину:

$$\begin{aligned} L_{2sg} = -\frac{\kappa}{2\epsilon} \Bigg[ & (2\mathbf{u}^2 + 1) E_{kl} - 2\left(2 - \frac{1}{u_0 + 1}\right) u_k u_m E_{lm} + \delta_{kl} u_m u_n E_{mn} \\ & + \frac{1}{(u_0 + 1)^2} u_k u_l u_m u_n E_{mn} \\ & - 2\, u_0\, \epsilon_{kmn} u_m B_{nl} + \frac{2}{u_0 + 1} u_k u_m \epsilon_{lrn} u_r B_{mn} \Bigg] \left(s_k s_l - \frac{1}{3}\delta_{kl}\mathbf{s}^2\right) . \end{aligned} \tag{63}$$

Во избежание недоразумений заметим, что в этой формуле (а также в (63), (64)) все трехмерные индексы нужно считать контравариантными.

Так же, как в электродинамике, здесь, наряду с "затравочным" взаимодействием (63), существует индуцированное взаимодействие, квадратичное по спину. Его явный вид проще всего получить, полагая в электромагнитной формуле (36) $g = 2$ и совершая подстановку (45). При этом учитываем также соответствие

$$q_i \gamma_{abc} u^c = (q_i \gamma_{abc} - q_c \gamma_{abi})\, u^c \to i\,(\partial_i \gamma_{abc} - \partial_c \gamma_{abi})\, u^c \to i\, R_{abci} u^c .$$

Наконец, используя соотношения (61), (62), получаем следующий результат для индуцированного взаимодействия:

$$L^i_{2sg} = \frac{1}{2\epsilon}\left\{\left(2\mathbf{u}^2 - \frac{u^0 - 1}{u^0 + 1}\right) E_{kl} - 2\left[2 - \frac{1}{u_0 + 1} - \frac{1}{(u_0 + 1)^2}\right] u_k u_m E_{lm}\right.$$

$$+\left[1-\frac{1}{(u_0+1)^2}\right]\delta_{kl}u_m u_n E_{mn}+\frac{1}{(u_0+1)^2}u_k u_l u_m u_n E_{mn} \tag{64}$$
$$-2\left(u_0-\frac{1}{u_0+1}\right)\epsilon_{kmn}u_m B_{nl}+\frac{2}{u_0+1}u_k u_m \epsilon_{lrn}u_r B_{mn}\Big\} s_k s_l\,.$$

Так же, как и в электромагнитном случае, индуцированное взаимодействие здесь стремится к нулю в нерелятивистском пределе $\sim v/c$, а спиновый множитель в нем, $s_k s_l$, не является неприводимым тензором.

Асимптотическое поведение $L_{2sg}$ и $L^i_{2sg}$ одинаковое: оба лагранжиана линейно растут с энергией. Однако и в этом случае коэффицент в "затравочном" взаимодействии может быть выбран так, $\kappa = 1$, что суммарный лагранжиан второго порядка по спину убывает (так же, как аналогичное взаимодействие в электродинамике), когда энергия стремится к бесконечности. При $\kappa = 1$

$$L_{2sg}+L^i_{2sg}=-\frac{1}{\epsilon(u^0+1)}\Big(u^0 E_{kl}-\frac{1}{u_0+1}u_k u_m E_{lm}$$
$$+\frac{1}{2(u_0+1)}\delta_{kl}u_m u_n E_{mn}+\epsilon_{kmn}u_m B_{nl}\Big) s_k s_l\,. \tag{65}$$

Выделенность значения $\kappa = 1$ с точки зрения высокоэнергетического поведения была показана в [11]. Еще раньше вопрос о выделенных значениях $\kappa$ обсуждался в [36] на языке волновых уравнений для произвольных спинов (не обязательно больших). В этой работе для целых спинов было получено значение $\kappa = 1$, в то время как для полуцелых спинов были предложены меньшие значения $\kappa$. Очевидно, что в классическом пределе больших спинов значения параметра $\kappa$ не должны меняться скачком при переходе от целого спина к полуцелому, поэтому предложенные в [36] волновые уравнения для полуцелых спинов представляются нелогичными.

# 8 Гравимагнитный момент. Мультиполи черных дыр

Существует глубокая аналогия между линейным по спину взаимодействием магнитного момента с электромагнитным полем,

$$\mathcal{L}_{em}=-\frac{eg}{4m}F_{ab}S^{ab}, \tag{66}$$

и "затравочным" гравитационным лагранжианом (60), квадратичным по спину [11]. (Здесь удобнее записывать гравитационный лагранжиан, подобно $\mathcal{L}_{em}$, для собственного времени $\tau$, а не мирового – $t$, т.е. умножить выражение (60) на $\epsilon/m$.) Эта аналогия основана на следующем наблюдении. Как известно, в релятивистское волновое уравнение для частицы во внешних полях, электромагнитном и гравитационном, канонический импульс $i\partial_\mu$ входит через комбинацию

$$\Pi_\mu = i\partial_\mu - eA_\mu - \frac{1}{2}\Sigma^{ab}\gamma_{ab\mu}\,.$$

Из структуры коммутатора (или скобок Пуассона в классическом пределе)

$$[\Pi_\mu, \Pi_\nu] \;=\; -\,i\,(eF_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\Sigma^{ab}R_{ab\mu\nu})$$

следует, что в определенном смысле $-\frac{1}{2}\Sigma^{ab}R_{ab\mu\nu}$ играет в гравитации ту же роль, что $eF_{\mu\nu}$ в электромагнетизме. Вполне естественно тогда, что гравитационный аналог электромагнитного взаимодействия спина (66) выглядит так:

$$\mathcal{L}_{gm} \;=\; \frac{\kappa}{8m}R_{abcd}S^{ab}S^{cd}\ . \tag{67}$$

Нетрудно показать, что выражения (67) и (60) совпадают (с точностью до множителя $\epsilon/m$). Для этого достаточно учесть соотношение $S^{ab} = \epsilon^{abcd}S_c u_d$, а также тождество

$$\tilde{R}_{abcd} \;=\; \frac{1}{4}\,\epsilon_{ab}{}^{ef}\,\epsilon_{cd}{}^{gh}R_{efgh} \;=\; -\,R_{abcd}\ ,$$

имеющее место для гравитационного поля вне источников.

По аналогии с магнитным моментом

$$\frac{eg}{2m}\ S^{\mu\nu}$$

естественно ввести понятие гравимагнитного момента

$$-\frac{\kappa}{2m}S^{ab}S^{cd}.$$

Гравимагнитное отношение $\kappa$, подобно гиромагнитному отношению $g$ в электродинамике, может, вообще говоря, принимать любые значения. Вполне естественно, однако, что в гравитации значение $\kappa = 1$ столь же выделено, как и $g = 2$ в электродинамике. Во всяком случае, при $g = 2$ и $\kappa = 1$ уравнения движения спина выглядят максимально просто.

Для классического объекта значения обоих параметров $g$ и $\kappa$ зависят, вообще говоря, от его различных характеристик. Однако для черных дыр ситуация иная. Из анализа решения Керра-Ньюмена следует, что гиромагнитное отношение заряженной вращающейся черной дыры универсально (и такое же, как у электрона!): $g = 2$ [37].

Покажем, что для керровской черной дыры гравимагнитное отношение $\kappa = 1$. Этот результат фактически следует из анализа движения спина черной дыры во внешнем поле, проведенного в работе [20] (хотя само данное утверждение и не сформулировано там явно). Мы приведем здесь независимый и, на наш взгляд, более простой вывод этого важного результата.

На больших расстояниях от керровской дыры ее можно рассматривать как точечный источник слабого гравитационного поля. В линейном приближении по полю покоящейся дыры лагранжева плотность, соответствующая взаимодействию (60), может быть записана как

$$\mathrm{L} \;=\; \frac{\kappa}{4m}\,(\mathbf{s}\nabla)^2\,h_{00}\delta(\mathbf{r})\ . \tag{68}$$

Индуцируемая таким образом поправка к тензору энергии-импульса имеет только одну компоненту

$$\delta T_{00} = -\frac{\kappa}{2m}(\mathbf{s}\nabla)^2\delta(\mathbf{r}). \tag{69}$$

Найдем соответствующую поправку к 00-компоненте метрики. В калибровке

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \quad \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{\alpha}_{\alpha} \tag{70}$$

статическое уравнение Эйнштейна для $h_{00}$ имеет вид

$$\Delta h_{00} = 8\pi k T_{00}.$$

Искомая поправка равна

$$h_{00} = \kappa\frac{k}{m}(\mathbf{s}\nabla)^2\frac{1}{r}. \tag{71}$$

Сравним ее с соответствующим вкладом в метрику Керра. В координатах Бойера-Линдквиста эта метрика такова:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g r}{\Sigma}\right)dt^2 - \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2}{\Sigma}\sin^2\theta\right)r^2\sin^2\theta$$
$$+ \frac{2r_g r a}{\Sigma}\sin^2\theta d\phi dt, \tag{72}$$

где $\Delta = r^2 - r_g r + a^2$, $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$, $\mathbf{a} = \mathbf{s}/m$. При $r_g = 0$ метрика (72) описывает плоское пространство в сфероидальных координатах [33]. Между тем, калибровке (70) соответствуют в плоском пространстве декартовы координаты. Переход от сфероидальных координат к декартовым осуществляется с нужной точностью заменой

$$\mathbf{r} \to \mathbf{r} + \frac{\mathbf{a}(\mathbf{ar}) - \mathbf{r}a^2}{2r^2}.$$

В декартовых координатах зависящая от спина часть 00-компоненты метрики

$$g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_g a^2}{2r^3}(3\cos^2\theta - 1),$$

очевидно, совпадает с $h_{00}$ из формулы (71) при $\kappa = 1$. Несколько более сложное рассмотрение пространственных компонент керровской метрики приводит к тому же результату: $\kappa = 1$.

Заметим, что движение керровской черной дыры во внешнем гравитационном поле не описывается уравнением Папапетру, даже если оставить в стороне проблему спин-орбитального взаимодействия, линейного по спину. Дело в том, что это уравнение относится к случаю $\kappa = 0$ [14].

Аналогично доказывается, что и для заряженной керровской дыры гравимагнитное отношение $\kappa = 1$. Более того, можно показать, что электрический квадрупольный момент заряженной керровской дыры также равен тому значению

$$Q = -2\frac{es^2}{m^2},$$

при котором квадратичное по спину взаимодействие падает с ростом энергии. Можно показать также, что и остальные, более высокие мультипольные моменты заряженной керровской дыры обладают именно теми значениями, которые обеспечивают для взаимодействия любого порядка по спину (но, разумеется, линейного по внешнему полю) асимптотическое убывание с энергией.

Мы благодарны И.А.Коопу, Р.А.Сенькову, А.Н.Скринскому и Ю.М.Шатунову за полезные обсуждения. Мы признательны Р.Руффини, Д.Бини, Дж.Джемелли, П.Менотти, а также рецензенту ЖЭТФа, за замечания, благодаря которым статья стала, как мы надеемся, более понятной. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант N 95-02-04436-а.

# Литература

[1] L.H. Thomas, Nature **117** (1926) 514; Phil.Mag. **3** (1926) 1.

[2] W. de Sitter, Mon.Not.R.Astron.Soc. **77** 155 (1916) 181.

[3] L. Schiff, Phys.Rev.Lett. **4** (1959) 435.

[4] J. Frenkel, Z.Phys. **37** (1926) 243; [перевод: Я.И.Френкель, *Собрание избранных трудов*, т. 2, изд-во АН СССР, М.-Л. (1958), с. 460.].

[5] V. Bargman, L. Michel, and V. Telegdi, Phys.Rev.Lett. **2** (1959) 435.

[6] A. Papapetrou, Proc.Roy.Soc.London A **209** (1951) 248.

[7] A. Barducci, R. Casalbuoni, and L. Lusanna, Nuovo Cimento A **35** (1976) 389.

[8] F. Ravndal, Phys.Rev. D **21** (1980) 2823.

[9] P.L. Nash, J.Math.Phys. **25** (1984) 2104.

[10] U. Heinz, Phys.Lett. B **144** (1984) 228; Ann.Phys. (N.Y.) **161** (1985) 48.

[11] И.Б.Хриплович, ЖЭТФ **96** (1989) 385.

[12] J.W. van Holten, Nucl.Phys. B **356** (1991) 3.

[13] R.H. Rietdijk and J.W. van Holten, Class.Quantum Grav. **9** (1992) 575.

[14] K. Yee and M. Bander, Phys.Rev. D **48** (1993) 2797.

[15] J.P. Costella and B.H.J. McKellar, Int.J.Mod.Phys. A **9** (1994) 461.

[16] M. Chaichian, R. Gonzales Felipe, and D. Louis Martinez, Phys.Lett. A **236** (1997) 188; E-print archive hep-th/9601119.

[17] Я.И. Азимов, Р.М. Рындин, Материалы XXXI Зимней школы ПИЯФ, Санкт-Петербург (1997) с.130; E-print archive hep-ph/9710433, hep-ph/9707468.

[18] Я.С.Дербенев, А.М.Кондратенко, ЖЭТФ **64** (1973) 1918.

[19] K. Heinemann, preprint DESY 96-229, physics/9611001.

[20] K.S. Thorne and J.B. Hartle, Phys.Rev. D **31** (1985) 1815.

[21] L.E. Kidder, C.M. Will, and A.G. Wiseman, Phys.Rev. **D47** (1993) R4183.

[22] L. Blanchet, T. Damour, B.R. Iyer, C.M. Will, and A.G. Wiseman, Phys.Rev.Lett. **74** (1995) 3515.

[23] H.T. Cho, preprint, gr-qc/9703071.

[24] I.B. Khriplovich and A.A. Pomeransky, Phys.Lett. A **216** (1996) 7; gr-qc/9602004.

[25] B.M. Barker and R.F. O'Connell, Gen.Rel.Grav. **5**, (1974) 539.

[26] В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, *Квантовая электродинамика*, М., Наука, 1989.

[27] Дж.Д.Бьеркен, С.Д.Дрелл, *Релятивистская квантовая теория*, М., Наука, 1978.

[28] L.L. Foldy and S.A. Wouthuysen, Phys.Rev. **78** (1951) 248.

[29] И.Б.Хриплович, *Несохранение четности в атомных явлениях*, М., Наука, 1988.

[30] I.B. Khriplovich, A.I. Milstein, and R.A. Sen'kov, Phys.Lett. A **221** (1996) 370; ЖЭТФ.**111** (1997) 1935.

[31] S. Weinberg, in *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory*, eds. S. Deser, M.Grisaru and H. Pendleton, Cambridge MA, MIT Press, 1970.

[32] S. Ferrara, M. Porrati, and V.L. Telegdi, Phys.Rev. D **46** (1992) 3529.

[33] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Теория поля*, М., Наука, 1988.

[34] И.Ю.Кобзарев, Л.Б.Окунь, ЖЭТФ.**43** (1962) 1904.

[35] F.W. Hehl, A. Macias, E.W. Mielke, and Yu.N. Obukhov, preprint, gr-qc/9706009.

[36] S.M. Christensen and M.J. Duff, Nucl.Phys. B**154** (1979) 301.

[37] B. Carter, Phys.Rev. **174** (1968) 1559.

## ПРИРОДА ДАРВИНОВСКОГО ЧЛЕНА И ВКЛАД $(Z\alpha)^4m^3/M^2$ В ЛЭМБОВСКИЙ СДВИГ

**А.И. Мильштейн, Р.А. Сеньков, И.Б. Хриплович**

**Аннотация**

Показано, что контактный дарвиновский член имеет ту же природу, как и спин-орбитальное взаимодействие. Поправка порядка $(Z\alpha)^4m^3/M^2$ к лэмбовскому сдвигу найдена для любого ненулевого спина ядра, как полуцелого, так и целого. Имеется вклад такой же природы и в ядерный квадрупольный момент.

## NATURE OF THE DARWIN TERM AND $(Z\alpha)^4m^3/M^2$ CONTRIBUTION TO THE LAMB SHIFT FOR AN ARBITRARY SPIN OF THE NUCLEUS

**I.B. Khriplovich[1], A.I. Milstein[2]**

**Budker Institute of Nuclear Physics, 630090 Novosibirsk, Russia**

**and**

**R.A. Sen'kov[3]**

**Novosibirsk University**

**Abstract**

The contact Darwin term is demonstrated to be of the same origin as the spin-orbit interaction. The $(Z\alpha)^4m^3/M^2$ correction to the Lamb shift, generated by the Darwin term, is found for an arbitrary nonvanishing spin of the nucleus, both half-integer and integer. There is also a contribution of the same structure as that of nuclear quadrupole moment.

[1]e-mail address: khriplovich@inp.nsk.su
[2]e-mail address: milstein@inp.nsk.su
[3]e-mail address: senkov@vxinp.inp.nsk.su

**1.** Литература, в том числе и учебная, изобилует утверждениями о природе дарвиновской поправки, которые представляются по меньшей мере сомнительными. В частности, мы не можем согласиться с заключением об отсутствии дарвиновского взаимодействия для частицы со спином 1, сделанным в работе [1] (см. также [2]). С другой стороны, рассмотрение этих поправок представляет реальный интерес при интерпретации современных экспериментов в атомной спектроскопии [3-5].

Для решения задачи мы рассмотрим борновскую амплитуду рассеяния частицы с произвольным спином во внешнем электромагнитном поле. В случае атома представляет практический интерес задача о взаимодействии ядра с полем электрона. Действуя указанным образом, мы найдем общий вид дарвиновского взаимодействия для ядра с произвольным спином и получим соответствующую поправку порядка $(Z\alpha)^4 m^3/M^2$ к лэмбовскому сдвигу (здесь и ниже $Z$ и $M$ –, соответственно, заряд и масса ядра).

**2.** Волновая функция частицы с произвольным спином может быть записана так (см., например, [6], §31)

$$\Psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Оба спинора,

$$\xi = \left\{ \xi^{\alpha_1 \alpha_2 \,..\, \alpha_p}_{\dot\beta_1 \dot\beta_2 \,..\, \dot\beta_q} \right\}$$

и

$$\eta = \left\{ \eta^{\beta_1 \beta_2 \,..\, \beta_q}_{\dot\alpha_1 \dot\alpha_2 \,..\, \dot\alpha_p} \right\} ,$$

симметричны отдельно по пунктирным и непунктирным индексам;

$$p + q = 2I ,$$

где $I$ — спин частицы. В системе покоя $\xi$ и $\eta$ совпадают между собой и симметричны по всем индексам. Для частицы с полуцелым спином можно выбрать

$$p = I + \frac{1}{2} , \qquad q = I - \frac{1}{2} .$$

В случае целого спина удобно принять

$$p = q = I .$$

Спиноры $\xi$ и $\eta$ выбраны так, что при отражении переходят друг в друга (с точностью до фазового множителя). При $p \neq q$ это различные обьекты, которые преобразуются по разным представлениям группы Лоренца. Если же $p = q$, то оба спинора совпадают. Тем не менее, мы будем использовать выражение (1) для волновой функции произвольного спина, т.е. формально введем спинор $\eta$ для целого спина, помня, что он выражается через $\xi$. Это позволит нам провести вычисления единообразно для целого и полуцелого спина.

Преобразования Лоренца из системы покоя, с точностью до $\sim (v/c)^2$ включительно, записываются так:

$$\xi \;=\; \left(1+\frac{\vec{\Sigma}\vec{v}}{2}+\frac{(\vec{\Sigma}\vec{v})^2}{8}\right)\xi_0\,,$$

$$\eta \;=\; \left(1-\frac{\vec{\Sigma}\vec{v}}{2}+\frac{(\vec{\Sigma}\vec{v})^2}{8}\right)\xi_0\,. \tag{2}$$

Здесь

$$\vec{\Sigma} = \sum_{i=1}^{p}\vec{\sigma}_i - \sum_{i=p+1}^{p+q}\vec{\sigma}_i\,,$$

а $\vec{\sigma}_i$ действует на $i$-ый индекс спинора $\xi_0$ следующим образом:

$$\vec{\sigma}_i\,\xi_0 \;=\; (\vec{\sigma}_i)_{\alpha_i\beta_i}\,(\xi_0)_{\dots\beta_i\dots}\,. \tag{3}$$

По аналогии со спином 1/2, введем, наряду со "спинорным" представлением (1), "стандартное":

$$\phi \;=\; (\xi+\eta)/2\,; \quad\; \chi \;=\; (\xi-\eta)/2\,.$$

В нем волновая функция запишется так:

$$\Psi \;=\; \begin{pmatrix} (1+(\vec{\Sigma}\vec{v})^2/8)\,\xi_0 \\ \vec{\Sigma}\vec{v}/2\,\xi_0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Заметим, что

$$\bar{\Psi}\,\Psi \;=\; \phi^\star\phi - \chi^\star\chi \;=\; \xi_0^\star\,\xi_0$$

– инвариант. Мы будем использовать обычную нековариантную нормировку плотности числа частиц

$$\rho = \;\frac{E}{M}\bar{\psi}\psi \;=\; 1\,, \tag{5}$$

в которой волновая функция $\psi$ равна

$$\psi \;=\; \sqrt{\frac{M}{E}}\begin{pmatrix} \left(1+(\vec{\Sigma}\vec{v})^2/8\right)\,\xi_0 \\ \vec{\Sigma}\vec{v}/2\;\xi_0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

**3.** Рассмотрим непосредственно амплитуду рассеяния. Члены порядка $1/M^2$ появляются только во временной компоненте электромагнитного тока. Ограничиваясь формфакторами низших мультипольностей, электрическим $F_e$ и магнитным $G_m$, эта компонента должна быть записана для произвольного спина так:

$$\jmath_0 \;=\; F_e\,\frac{E+E'}{2M}\,\bar{\psi}'\psi \;+\; \frac{G_m}{2M}\,\psi'^\star\,\vec{\Gamma}\vec{q}\,\psi. \tag{7}$$

Матрица

$$\vec{\Gamma} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \vec{\Sigma} \\ -\vec{\Sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

служит естественным обобщением соответствующего выражения для спина 1/2:

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Это обобщение довольно очевидно в спинорном представлении, где, впрочем, матрицы $\vec{\gamma}$ и $\vec{\Gamma}$ имееют обратный знак. В самом деле, здесь, согласно (9), $\vec{\sigma}$ связывает пунктирные индексы в начальном спиноре $\psi$ с непунктирными в $\bar{\psi}$, а $-\vec{\sigma}$ связывает непунктирные индексы из $\psi$ с пунктирными из $\bar{\psi}$. Это именно то, что делает $\vec{\Gamma}$. Из-за громоздкости мы не будем приводить строгое доказательство выражения (8). Заметим только, что формула (8) подтверждается окончательным результатом, в котором правильно воспроизводится спин-орбитальное взаимодействие; форма последнего хорошо известна для произвольного спина (см., например, [6], §41).

Слагаемое с $G_m$ в плотности тока выглядит так

$$\begin{aligned} j_{0m} &= \frac{G_m}{2M}\xi_0'^{\star}\left(1,\ \vec{\Sigma}\vec{v}\,'/2\right)\begin{pmatrix} 0 & \vec{\Sigma}\vec{q} \\ -\vec{\Sigma}\vec{q} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\Sigma}\vec{v}/2 \end{pmatrix}\xi_0 \\ &= \frac{G_m}{4M^2}\xi_0'^{\star}\left(-(\vec{\Sigma}\vec{q})^2 + 4\,i\,\vec{I}[\vec{q}\times\vec{p}]\right)\xi_0\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Оператор спина здесь равен

$$\vec{I} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2I}\vec{\sigma}_i\,.$$

Первое слагаемое, с $F_e$, в формуле (7) приводится к аналогичной структуре:

$$\begin{aligned} j_{0\,ch} &= F_e\frac{E'+E}{2\sqrt{EE'}}\xi_0'^{\star}\left(1+\frac{(\vec{\Sigma}\vec{v})^2}{8}+\frac{(\vec{\Sigma}\vec{v}')^2}{8}-\frac{(\vec{\Sigma}\vec{v}')(\vec{\Sigma}\vec{v})}{4}\right)\xi_0 \\ &= F_e\,\xi_0'^{\star}\left(1+\frac{(\vec{\Sigma}\vec{q})^2}{8M^2}-i\,\frac{\vec{I}[\vec{q}\times\vec{p}]}{2M^2}\right)\xi_0\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, полная зарядовая плотность равна

$$j_0 = \xi_0'^{\star}\left(F_e-(2G_m-F_e)\frac{(\vec{\Sigma}\vec{q})^2}{8M^2}+(2G_m-F_e)\,i\,\frac{\vec{I}[\vec{q}\times\vec{p}]}{2M^2}\right)\xi_0\,.$$

Мы пренебрежём на время зарядовым радиусом ядра, так что

$$F_e = F_e(0) = 1.$$

Зависимость спин-орбитального взаимодействия от гиромагнитного отношения $g$ универсальна для любого спина, это отношение входит через фактор $g-1$. Следовательно, наш магнитный формфактор нормируется так

$$G_m(0) = \frac{g}{2}\,.$$

Разобьём выражение $(\vec{\Sigma}\vec{q})^2$ на контактную и квадрупольную части:

$$\Sigma_i\Sigma_j\, q_i q_j \;=\; \frac{\vec{q}^{\,2}}{3}\Sigma_i\Sigma_i + (q_i q_j - \frac{1}{3}\vec{q}^{\,2}\delta_{ij})\Sigma_i\Sigma_j\ . \tag{12}$$

Первое контактное слагаемое в (12) равно

$$\begin{aligned}\vec{\Sigma}\vec{\Sigma} \;&=\; \left(\sum_{i=1}^{p}\vec{\sigma}_i\right)^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{p}\vec{\sigma}_i\right)\left(\sum_{i=p+1}^{p+q}\vec{\sigma}_i\right) + \left(\sum_{i=p+1}^{p+q}\vec{\sigma}_i\right)^2 \\ &=\; 3(p+q) + 2\left(\frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2} - pq\right) \;=\; 4I(1+\zeta)\ ;\end{aligned} \tag{13}$$

$$\zeta \;=\; \begin{cases} 0, & \text{целый спин,} \\ 1/(4I), & \text{полуцелый спин.}\end{cases}$$

При получении формулы (13) мы использовали симметрию по любой паре спинорных индексов, $\alpha_1$, $\alpha_2$ (см. (3)). Эта симметрия означает, что соответствующие спины, 1 и 2, складываются в полный спин $S = 1$. Следовательно,

$$(\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2)\,\xi_0 \;=\; \xi_0\ .$$

Оператор взаимодействия пропорционален фурье-образу борновской амплитуды (см., например, [6], §83). Таким образом, мы получим из (13) следующее контактное взаимодействие между ядром с зарядом $Z$ и электроном:

$$(\vec{r}) \;=\; \frac{2\pi}{3}\,\frac{Z\alpha}{M^2}\,(g-1)\,I\,(1+\zeta)\,\delta(\vec{r})\ . \tag{14}$$

Соответствующая поправка к энергии равна

$$\Delta E_n \;=\; \frac{2}{3}\,\frac{m^3}{M^2}\,(g-1)\,I\,(1+\zeta)\,\frac{(Z\alpha)^4}{n^3}\,\delta_{0\ell}\ . \tag{15}$$

Для атома водорода ($I = 1/2$) эта поправка была получена много лет назад в работе [7].

Рассмотрим теперь квадрупольную часть (12). Пользуясь полной симметрией $\xi_0$, легко найти соответствующее квадрупольное взаимодействие:

$$U_2(\vec{r}) \;=\; -\frac{1}{6}\,\nabla_i\nabla_j\frac{e}{r}\,\delta Q_{ij}\ . \tag{16}$$

Здесь

$$\delta Q_{ij} \;=\; -\frac{3}{2}\,\frac{Z\,e\,(g-1)}{M^2}\,\Lambda\left\{I_i\,I_j + I_j\,I_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\,I(I+1)\right\}\ ; \tag{17}$$

$$\Lambda \;=\; \begin{cases} 1/(2I-1), & \text{целый спин ,} \\ 1/(2I), & \text{полуцелый спин .}\end{cases}$$

Выражение (17) – это не что иное, как поправка к квадрупольному моменту ядра. Её наличие для $I = 3/2$ было указано в работе [8], а для $I = 1$ в работе [1].

Поправка к квадрупольному моменту оценивается как

$$\delta Q \;\approx\; -\,0.44\,(g-1)\,\frac{Z\,I}{A^2}\,e\;\text{mbarn}\;.$$

Для дейтрона ($Z = 1,\;\; A = 2,\;\; g = 2\mu_d = 1.714,\;\; Q = 2.86\;e\,\text{mbarn}$) это составляет $-0.08\;e\,\text{mbarn}$.

**4.** Вернёмся к обсуждению контактного взаимодействия. Существует некоторая неопределенность в определении контактного члена, связанная с зарядовым радиусом ядра, т.к. последний тоже генерирует контактное слагаемое и входит в наблюдаемые величины в сумме с выражением $(g-1)\vec{q}^{\,2}\;\;I(1+\zeta)/(6M^2)$. В частности, упругое сечение электрон-ядерного рассеяния при малых $\vec{q}^{\,2}$, с точностью до членов $\vec{q}^{\,2}/M^2$ включительно, равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4\epsilon^2}\,\frac{\cos^2\theta/2}{\sin^4\theta/2}\,\frac{1}{1+2\,\sin^2\theta/2\,\epsilon/M}$$
$$\times\quad\left(\left[1-\frac{1}{6}\,\langle r^2\rangle_F\,\vec{q}^{\,2}-(g-1)\,\frac{\vec{q}^{\,2}}{6M^2}I(1+\zeta)\right]^2\right. \tag{18}$$
$$+\quad\frac{4}{3}\,G_m^2\,I(I+1)(2\,\tan^2\theta/2+1)bigg)\;,$$

где $\langle r^2\rangle_F$ определяется разложением формфактора $F_e$:

$$F_e(q^2)\;\approx\;1-\;\frac{1}{6}\,\langle r^2\rangle_F\,\vec{q}^{\,2}\;. \tag{19}$$

Заметим здесь, что выражение в квадратных скобках в формуле (18) сводится для протона ($I = 1/2$) к

$$1-\;\frac{1}{6}\,\langle r^2\rangle_F\,\vec{q}^{\,2}-(g-1)\,\frac{\vec{q}^{\,2}}{8M^2}\;, \tag{20}$$

а для дейтрона ($I = 1$) — к

$$1-\;\frac{1}{6}\,\langle r^2\rangle_F\,\vec{q}^{\,2}-(g-1)\,\frac{\vec{q}^{\,2}}{6M^2}\;. \tag{21}$$

Тем не менее, обычно зарядовый радиус протона определяется по-другому, чем в формуле (20), а именно, из разложения так называемого саксовского формфактора:

$$G_e\;=\;F_e-\frac{\vec{q}^{\,2}}{4M^2}\,(G_m-F_e)\;.$$

Очевидно, зарядовый радиус, определенный из формфактора $G_e$, равен

$$-\;\frac{1}{6}\;\langle r^2\rangle_G\;=\;\frac{\partial G_e}{\partial\vec{q}^{\,2}}\;=\;-\,\frac{1}{6}\,\langle r^2\rangle_F\;-\;\frac{g-2}{8M^2}\;.$$

Соответственно, выражение (20) перепишется как

$$1-\;\frac{1}{6}\;\langle r^2\rangle_G\;\vec{q}^{\,2}-\frac{\vec{q}^{\,2}}{8M^2}\;, \tag{22}$$

и дарвиновская поправка для протона определяется как

$$-\frac{\vec{q}^2}{8M^2},$$

а не

$$-\frac{(g-1)\vec{q}^2}{8M^2}.$$

Мы могли бы аналогично переопределить электрический формфактор для дейтрона. Вместо $F_e$ использовать $G_e$:

$$-\frac{1}{6}\langle r^2\rangle_G = \frac{\partial G_e}{\partial \vec{q}^2} = \frac{1}{6}\langle r^2\rangle_F - \frac{g-2}{6M^2},$$

так, что дарвиновская поправка для дейтрона станет равна

$$\frac{\vec{q}^2}{6M^2}$$

вместо

$$-\frac{(g-1)\vec{q}^2}{6M^2}.$$

Тем не менее, обычное определение зарядового радиуса дейтрона не совпадает ни с $F_e$, ни с $G_e$, оно таково:

$$-\frac{1}{6}\langle r^2\rangle_D = -\frac{1}{6}\langle r^2\rangle_F - \frac{g-1}{6M^2}.$$

Конечно, при этом определении весь дарвиновский член оказывается включенным в $\langle r^2\rangle_D$. Неудивительно, что авторы работы [1], используя $\langle r^2\rangle_D$ вместо $\langle r^2\rangle_E$ или $\langle r^2\rangle_G$, сделали вывод, что в дейтерии, в противоположность водороду, дарвиновское взаимодействие отсутствует.

Совершенно очевидно, что это различие между дейтроном и протоном — всего лишь результат разных определений зарядового радиуса; это различие не имеет ни физического смысла, ни какого-либо отношения к природе дарвиновской поправки.

**5.** Таким образом, дарвиновское взаимодействие существует для любого ненулевого спина и появляется, подобно спин-орбитальному взаимодействию, при преобразовании Лоренца из системы покоя. В частности, так же, как и спин-орбитальное взаимодействие, дарвиновский член не имеет прямого отношения к так называемому "дрожанию" (Zitterbewegung). Конечно, существует несомненное различие между спин-орбитальными и контактными поправками к энергии. Первые имеют классический предел вместе с $\langle 1/r^3\rangle$, тогда как вторые, пропорциональные $|\psi(0)|^2$, не имеют классического предела. Однако, этот факт не имеет никакого отношения к релятивизму и отрицательным энергиям и, следовательно, не связан с "дрожанием".

# Литература


[1] K. Pachucki and S.G. Karshenboim, J.Phys. B **28** (1995) L221.

[2] K. Pachucki, D. Leibfried, M. Weitz, A. Huber, W. König and T.W. Hänsch, J. Phys. B **29** (1996) 177.

[3] F. Schmidt-Kaler, D. Leibfried, M. Weitz and T.W. Hänsch, Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 2261.

[4] D. Shiner, R. Dixson and V. Vedantham, to be published.

[5] M. Weitz et al., Phys. Rev. A **52** (1995) 2664.

[6] В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1989).

[7] W.A. Barker and F.N. Glover, Phys. Rev. **99** (1955) 317.

[8] R.M. Ryndin, Phys. Rep. **134** (1986) 317.