

## О РАЗДЕЛЕНИИ ИЗОТОПОВ ТЯЖЕЛЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МЕТОДОМ ИЗОТОПИЧЕСКИ СЕЛЕКТИВНОГО ИЦР-НАГРЕВА

© 1998 г. В. И. Волосов, И. А. Котельников, С. Г. Кузьмин\*

*Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН*

*\*Новосибирский государственный университет*

Поступила в редакцию 24.04.97 г.

Окончательный вариант получен 19.06.97 г.

Излагается теория разделения изотопов тяжелых элементов методом изотопически селективного нагрева плазмы, состоящей из ионов разделяемого элемента. Представлены результаты расчетов индуктивного нагрева плазмы с ионами Gd в поле соленоидальной антенны, возбуждающей ВЧ-поле с азимутальным числом  $m = 0$ .

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Метод разделения изотопов посредством селективного ионно-циклотронного нагрева известен со времен Манхэттенского проекта (см. [1]). Позднее он был признан неконкурентоспособным в сравнении с методом газодиффузионного разделения по причине отсутствия источников плазмы с необходимыми параметрами. Однако некоторые химические элементы, относящиеся к группе лантанидов, не могут быть эффективно переведены в газовую фазу. Между тем потребность в изотопах лантанидов потенциально очень велика, так как, например, изотопы гадолиния  ${}^{64}\text{Gd}^{155}$  и  ${}^{64}\text{Gd}^{157}$  весьма эффективны в качестве выгорающей добавки в перспективных конструкциях реакторов деления, поскольку имеют сечение захвата медленных нейтронов в среднем в 15 раз больше, чем у кадмия, используемого в действующих реакторах.

Суть рассматриваемого нами метода состоит в селективном ИЦР-нагреве струи многоизотопной плазмы, вышедшей из мощного разрядного источника плазмы, с последующим разделением горячих и холодных ионов (рис. 1). Источник плазменной струи тяжелых металлов с высокой плотностью тока разработан в Институте ядерной физики им. Г.И. Будкера [2]. Выделение нагретых ионов предполагается производить в криволинейном магнитном поле за счет выдрейфовывания на стенки вакуумной камеры [3]. В настоящей работе мы проведем анализ процесса нагрева струи, оставляя за рамками описание источника, а также процесс выделения нагретых ионов.

Для достижения необходимой селективности нагрев струи осуществляется на достаточно длинном участке строго однородного магнитного поля. Если через  $k$  обозначить характерное значение продольного волнового числа  $k_{||}$  в спектре

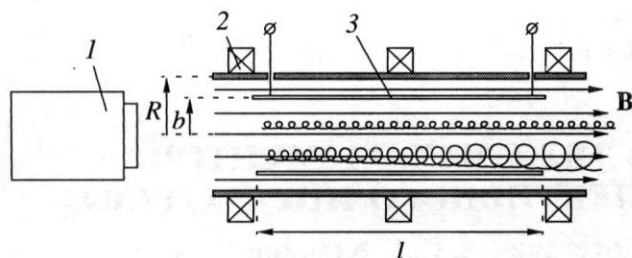
ВЧ-поля, то для того чтобы селективно нагреть только изотоп с атомным числом  $A$ , отделив его от изотопов  $A \pm 1$ , необходимо обеспечить разность циклотронных частот  $\Delta\Omega \approx \Omega_a/A$ , большую, чем доплеровское уширение линии поглощения  $k v_a$ , где  $v_a$  – тепловая скорость выделяемого изотопа, а  $\Omega_a$  – его циклотронная частота:

$$k v_a < \Delta\Omega. \quad (1)$$

Отсюда ясно, что для разделения изотопов следует использовать длинноволновые колебания, у которых на полной длине зоны нагрева  $l$  укладывается не более одной длины волны, т.е.

$$k = 2\pi/l.$$

В этом случае величина доплеровского уширения линии поглощения совпадает с пролетным уширением линии поглощения  $\Delta\omega_\tau = 2\pi/\tau$ , где  $\tau = l/v_a$  – время пролета ионного пучка через зону пролета (предполагаем, что скорость пучка порядка тепловой скорости  $v_a$ ). Уменьшение длины волны по сравнению с  $l$  ухудшает селективность нагрева, в том числе из-за проявления нелинейных эффектов [4]. Однако использование длинноволновых колебаний также встречает серьезные трудности, так как при нагреве на первой гармонике циклотронной частоты циркулярная поляризация ВЧ-поля (вращение в ионную сторону) экранируется током нагреваемых ионов уже при умеренной плотности  $n \sim 10^{12} \text{ см}^{-3}$  (см. ниже). Нагрев на второй гармонике в длинноволновом поле чрезвычайно слаб. По указанным причинам применительно к термоядерным приложениям индукционный нагрев плазмы при помощи длинных соленоидальных антенн принято считать бесперспективным [5]. Укоренившиеся представления были перенесены и на эксперименты по разделению изотопов, для которых наиболее подходящей считалась винтовая антенна [1]. Однако вин-



**Рис. 1.** Схема сепаратора изотопов: 1 – источник плазмы; 2 – катушки, создающие постоянное магнитное поле; 3 – катушка, создающая высокочастотное поле. Область, где производится выделение нагретых ионов, не показана.

товая антенна не обеспечивает необходимой селективности нагрева. Мы покажем, что, несмотря на экранировку поля соленоидальной антенны в плазме, индукционный нагрев тем не менее достаточен для разделения изотопов с массовым числом порядка 150. В этой связи заметим, что антенна, использованная в первых экспериментах по ИЦР-разделению изотопов [6], не была полным эквивалентом рассматриваемой нами соленоидальной антенны, так как содержала хорошо проводящую вставку с продольным разрезом. В указанных экспериментах было успешно проведено разделение изотопов калия с атомными весами 39 и 41 при плотности плазмы, не превышающей  $10^{11} \text{ см}^{-3}$ .

Проникновение длинноволновых колебаний в неоднородную плазму исследовалось в недавней работе [7], где большое внимание было уделено вопросу трансформации магнитозвуковых колебаний в мелкомасштабные электронные вблизи альфвеновского резонанса. Применительно к рассматриваемому нами методу селективного ИЦР-нагрева плазмы, состоящей из ионов гадолиния, анализ эффектов трансформации является избыточным, так как альфвеновский резонанс как таковой отсутствует. Мы увидим, что на циклотронной частоте диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  гадолиниевой плазмы является почти чисто мнимой при выполнении условия (1), обеспечивающего селективность нагрева. По этой причине говорить о наличии альфвеновского резонанса, выделяемого равенством  $k_{\parallel}^2 c^2 / \omega^2 = \epsilon$ , очевидно, не приходится. Отсутствие сложностей, традиционных для описания альфвеновского резонанса, позволяет найти простое решение задачи об отыскании функции распределения нагретых ионов по энергиям.

В данной работе ограничимся анализом нагрева струи гадолиниевой плазмы при помощи соленоидальной антенны, создающей ВЧ-поле с азимутальным числом  $m = 0$ , хотя основные наши результаты без труда обобщаются на поле с

произвольным  $m$ . Рассмотрим прямой нагрев на первой гармонике циклотронной частоты выделяемого изотопа  $\text{Gd}^{157}$ . Недостатком соленоидальной антенны является отсутствие нагрева во внутренней части струи. Однако этот недостаток устраняется вставкой специального экрана между плазмой и антенной, типа того, который был использован в [6]<sup>1</sup>.

Будем придерживаться следующего плана изложения.

В разд. 2 приведем сведения, необходимые для вычисления тензора диэлектрической проницаемости гадолиниевой плазмы. В разд. 3 вычислено ВЧ-поле, создаваемое соленоидальной антенной. В разд. 4 найдена функция распределения ионов на выходе из зоны нагрева. В разд. 5 обсудим приближения, использованные в наших расчетах. Вывод гамильтониана, описывающего взаимодействие ионов с ВЧ-полем, вынесен в Приложение.

## 2. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ ПЛАЗМЫ

Природный состав изотопов гадолиния приведен в таблице по данным, взятым из “Таблиц физических величин” [8].

Если пренебречь эффектами конечного ларморовского радиуса, то тензор диэлектрической проницаемости замагниченной плазмы в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  с осью  $z$ , направленной вдоль магнитного поля, имеет вид

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \epsilon & ig & 0 \\ -ig & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad (2)$$

причем индексы  $\alpha$  и  $\beta$  пробегают значения  $r, \varphi, z$ . Компоненты тензора вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \epsilon &= 1 + \sum_s (\epsilon_-^s + \epsilon_+^s) \equiv 1 + \epsilon_- + \epsilon_+, \\ g &= \sum_s (\epsilon_-^s - \epsilon_+^s) \equiv \epsilon_- - \epsilon_+, \\ \eta &= 1 + \sum_s \eta_s, \end{aligned} \quad (3)$$

где суммирование выполняется по сортам частиц (включая электроны). Парциальный вклад час-

<sup>1</sup> Заметим, что вставка экрана, изменяя топологию ВЧ-поля, по-видимому, затрудняет его проникновение в плазму.

Стабильные изотопы  ${}_{64}\text{Gd}$

Атомный вес, $A_s$	152 <sup>a</sup>	154	155	156	157	158	160
Концентрация, $C_s$	0.002	0.0215	0.147	0.2047	0.1568	0.249	0.219

<sup>a</sup>  $\alpha$ -радиоактивен с периодом полураспада  $1.1 \times 10^{14}$  лет.

тиц сорта  $s$  выражается через их функцию распределения  $f_s$ , которую нормируем на единицу:

$$\epsilon_{\pm}^s = \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \int d^3 v \left[ \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial f_s}{\partial v_{\perp}} (\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) + k_{\parallel} \frac{\partial f_s}{\partial v_{\parallel}} \right] \times \frac{v_{\perp}^2/4}{(\omega \pm \Omega_s - k_{\parallel} v_{\parallel})}, \quad (4a)$$

$$\eta^s = \frac{\omega_{ps}^2}{\omega} \int d^3 v \frac{v_{\parallel}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}} \frac{\partial f_s}{\partial v_{\parallel}}. \quad (4b)$$

Здесь

$$\omega_{ps} = \sqrt{\frac{4\pi n_s Z_s^2 e^2}{m_s}}, \quad \Omega_s = \frac{e Z_s B}{m_s c}$$

суть плазменная и циклотронная частоты частиц сорта  $s$  соответственно;  $m_s$ ,  $Z_s$  и  $n_s$  – их масса, заряд и концентрация, причем для ионов имеем  $m_s = A_s m_p$  и  $n_s = C_s n_i$ , где  $m_p$  – масса одного нуклона,  $n_i$  – плотность плазмы (полное число ионов в единице объема), а коэффициенты  $A_s$  и  $C_s$  приведены в таблице. При низкой температуре плазмы в разрядном источнике ионы, по-видимому, ионизованы однократно, а за время пролета через зону нагрева они просто не успевают дополнительно ионизоваться. Поэтому в дальнейшем будем считать, что средний заряд ионов  $Z$  равен единице, однако сохраним  $Z$  в приводимых оценках, чтобы иметь возможность выяснить последствия многократной ионизации.

Функция распределения меняется в процессе нагрева, по результат вычисления интегралов в (4) в первом приближении не зависит от распределения частиц по поперечным скоростям  $v_{\perp}$ , а продольную скорость частиц  $v_{\parallel}$  можно считать постоянной, когда величина  $k_{\parallel}$  достаточно мала (разд. 5). Таким образом, тензор диэлектрической проницаемости однозначно определяется функцией распределения частиц по продольной скорости на входе в зону нагрева. Она детально не известна, поэтому смоделируем ее максвелловской со средней скоростью  $u$  и температурой

<sup>2</sup> В уравнении (4a) можно пренебречь членами в квадратных скобках, содержащими  $k_{\parallel}$  в качестве множителя.

$T$ , одинаковыми для всех сортов частиц, а именно примем, что

$$f_s(v_{\parallel}) = \frac{1}{\sqrt{\pi} v_s} \exp \left[ -\frac{(v_{\parallel} - u)^2}{v_s^2} \right], \quad (5)$$

где  $v_s = (2T/m_s)^{1/2}$ . В этом случае результат можно выразить через табулированную функцию

$$Z(\xi) = 2\xi \exp(-\xi^2) \left[ \int_0^{\xi} dt \exp(t^2) - i \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right] \quad (6)$$

так, что

$$\epsilon_{\pm}^s = -\frac{\omega_{ps}^2}{2\omega(\omega \pm \Omega_s - k_{\parallel} u)} Z \left( \frac{\omega \pm \Omega_s - k_{\parallel} u}{|k_{\parallel} v_s|} \right), \quad (7)$$

$$\eta^s = \frac{2\omega_{ps}^2}{k_{\parallel}^2 v_s^2} \left[ 1 - Z \left( \frac{\omega - k_{\parallel} u}{|k_{\parallel} v_s|} \right) \right].$$

Зависимости  $\epsilon$  и  $g$  от частоты приведены на рис. 2. Вблизи циклотронной частоты обе зависимости практически совпадают. Если условие (1) выполнено с некоторым запасом, для вычисления  $\epsilon$  и  $g$  вблизи циклотронной частоты  $\Omega_a$  выделяемого изотопа можно использовать следующие формулы:

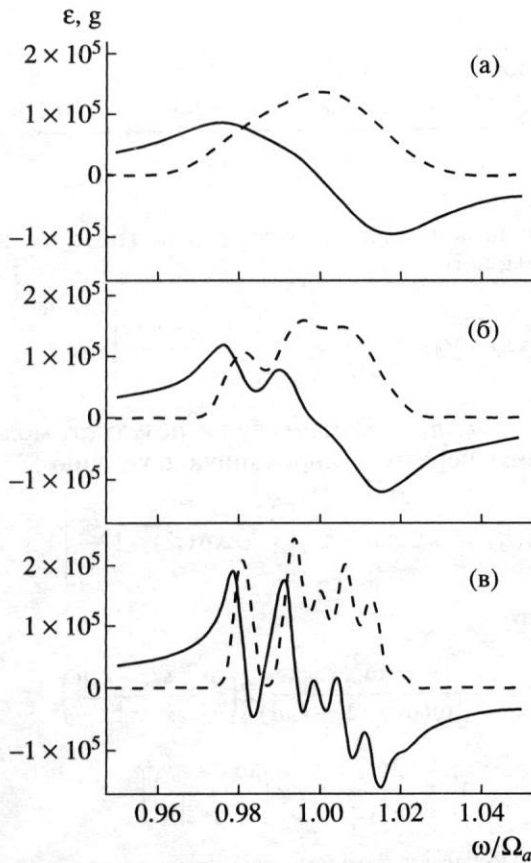
$$\epsilon = \sum_{s \neq a} \frac{\omega_{ps}^2}{\Omega_s^2 - \omega^2} + i \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega |k_{\parallel} v_a|} \exp \left( -\frac{(\omega - \Omega_a - k_{\parallel} u)^2}{k_{\parallel}^2 v_a^2} \right),$$

$$g = \sum_{s \neq a} \frac{\omega}{\Omega_s} \frac{\omega_{ps}^2}{\Omega_s^2 - \omega^2} + i \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega |k_{\parallel} v_a|} \exp \left( -\frac{(\omega - \Omega_a - k_{\parallel} u)^2}{k_{\parallel}^2 v_a^2} \right), \quad (8)$$

$$\eta = 1 + \frac{2\omega_{pe}^2}{k_{\parallel}^2 v_e^2},$$

индексом  $a$  помечены величины, относящиеся к выделяемому изотопу, а штрих у знака суммы указывает, что суммирование идет только по ионам (вклад электронов выражается через параметры ионов при учете квазинейтральности плазмы).

По порядку величины  $\text{Re}(\epsilon) \approx \text{Re}(g) \sim (\omega_{pi}/\Omega)^2 \times (\Omega/\Delta\Omega)$ ,  $\text{Im}(\epsilon) \approx \text{Im}(g) \sim (\omega_{pi}/\Omega)^2 (n_a/n_i) (\Omega/kv_a)$ , где  $\omega_{pi}$  – суммарная плазменная частота ионов.



**Рис. 2.** График зависимости  $\varepsilon(\omega)$  и  $g(\omega)$  вблизи циклотронной частоты  $\Omega_a$  изотопа  $\text{Gd}^{157}$ . Сплошная линия – вещественная часть, пунктирная линия – мнимая часть. В масштабе рисунка различие между  $\varepsilon$  и  $g$  не заметно. Параметры плазмы:  $T = 10$  эВ,  $n = 10^{12}$  см $^{-3}$ ,  $B = 3$  Тл,  $u = 0$ ,  $k_{\parallel} = 2\pi/l$ . Случай а –  $l = 1$  м, условие (1) не выполнено, а именно  $k v_a = 2\Delta\Omega$ ; б –  $l = 2$  м,  $k v_a = \Delta\Omega$ ; в –  $l = 4$  м,  $k v_a = \Delta\Omega/2$ .

Добавка ионов легких атомов (например, водорода) с концентрацией несколько десятков процентов не влияет на величину диэлектрической проницаемости. При выполнении условия селективности нагрева (1) мнимая часть диэлектрической проницаемости автоматически оказывается больше вещественной, несмотря на относительно малую концентрацию  $n_a/n_i$  выделяемого изотопа, так как вещественная часть диэлектрической проницаемости также несколько меньше, чем это следует из приведенной выше грубой оценки, из-за взаимной компенсации вкладов более тяжелых и более легких изотопов, упоминавшейся в [7]. Вследствие компенсации вещественная часть  $\varepsilon$  обращается в нуль вблизи циклотронной частоты изотопа  $\text{Gd}^{157}$ , тогда как результаты расчетов ВЧ-поля, приведенные в [7], относятся, в основном, к случаю, когда малой является мнимая часть  $\varepsilon$ .

Так как отношение  $\omega_{pe}^2/v_e^2$  не зависит от массы, для величины  $\eta$  справедлива оценка  $\eta \sim \omega_{pi}^2/k^2 v_i^2$ , где  $v_i \approx v_a$  – тепловая скорость ионов. В результате оказывается, что при выполнении условия селективности нагрева (1) отношение  $\varepsilon/\eta \sim (n_a/n_i)k v_i/\Omega_i$  не превышает величину  $n_a/n_i A \approx 10^{-3}$ . Это гарантирует экранировку продольной компоненты высокочастотного электрического поля в плазме (см. обсуждение в разд. 5). Заметим также, что доплеровский сдвиг частоты  $k v_e$  для электронной компоненты плазмы при выполнении условия селективности  $k v_a = \Omega_a/A$  в  $\sqrt{m_p/m_e} A \approx 3.4$  раза больше частоты ВЧ-поля  $\omega \approx \Omega_a$ . Иными словами, электроны несколько раз успевают пролететь зону нагрева за период циклотронного вращения ионов. В обратном предельном случае  $\omega \gg k v_e$  было бы  $\eta \approx 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2$ .

### 3. ВЧ-ПОЛЕ

Будем считать, что магнитное поле в необходимой точностью  $\Delta B/B < 1/A$  однородно и направлено вдоль оси симметрии  $z$  цилиндрического плазменного шнура. В цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  решение волнового уравнения для ВЧ-поля удобно искать как суперпозицию колебаний вида

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(r) \exp[i(k_{\parallel} z + m\varphi - \omega t)]. \quad (9)$$

Наличие в спектре колебаний с теми или иными значениями волновых чисел  $k_{\parallel}$  и  $m$  определяется геометрией антенны. Для генерации колебаний с  $m = 0$  используют антенну в виде обычного длинного соленоида. Чтобы исключить  $z$ -компоненту электрического поля, возникающую вследствие конечного напряжения на соленоиде, с внутренней стороны антенны следует разместить экран из проводящих полос, идущих вдоль оси антенны. Этот экран также компенсирует модуляцию поля антенны вдоль оси  $z$  вследствие конечного шага намотки антенного соленоида. В плазме  $z$ -компонента электрического поля оказывается малой из-за большой электронной проводимости плазмы вдоль направления магнитного поля (см. ниже).

Для расчета соленоидальную антенну можно представить как отрезок цилиндра с заданным радиусом  $b$ ; по поверхности цилиндра течет азимутальный ток

$$\mathbf{j} = J(z) \delta(r-b) \exp(-i\omega t) \mathbf{e}_{\varphi}. \quad (10)$$

Амплитуда гармоники тока  $J_k$  с заданным  $k_{\parallel}$  связана с  $J(z)$  интегралом Фурье:

$$J_k = \int dz J(z) \exp(-ik_{\parallel} z). \quad (11)$$

При равномерной намотке

$$J_k = I_0 N \text{sinc}(k_{\parallel} l / 2), \quad (12)$$

где  $I_0$  – ток в намотке,  $N$  – число витков,  $l$  – длина антенны, а  $\text{sinc} x$  обозначает  $\sin(x)/x$ .

Полагая  $E_z = 0$  и тем самым исключая из анализа электронные колебания (см., например, [9, 7]), для амплитуды  $E_{\varphi}(r)$  азимутальной составляющей электрического поля получаем уравнение второго порядка (см., например, [10])

$$\frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r E_{\varphi}(r) - \chi^2 E_{\varphi}(r) = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} J_k \delta(r-b), \quad (13)$$

где

$$\chi^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[ \frac{(N_{\parallel}^2 - \epsilon)^2 - g^2}{N_{\parallel}^2 - \epsilon} \right], \quad N_{\parallel} = k_{\parallel} c / \omega.$$

На оси плазмы амплитуда поля  $E_{\varphi}(0)$  ограничена, а на поверхности хорошо проводящей камеры радиуса  $R > b$  равна нулю,  $E_{\varphi}(R) = 0$ . Радиальная компонента электрического поля выражается через  $E_{\varphi}$ :

$$E_r = \frac{ig}{N_{\parallel}^2 - \epsilon} E_{\varphi}. \quad (14)$$

Решение уравнения (13) представлено на рис. 3. Параметры антенны и плазмы, принятые при расчете, указаны в подписи к рисунку.

Если плотность плазмы не очень велика, приближенное решение уравнения (13) можно получить, положив формально  $\epsilon = 1$ ,  $g = 0$ . Обозначив через  $\kappa^2 = k_{\parallel}^2 - \omega^2/c^2$  величину  $\chi^2$  в вакууме, имеем

$$E_{\varphi} = \frac{4\pi i \omega J_k b}{c^2} \times \quad (15a)$$

$$\times \{K_1(\kappa b) - I_1(\kappa b) K_1(\kappa R) / I_1(\kappa R)\} I_1(\kappa r)$$

при  $r \leq b$  и

$$E_{\varphi} = \frac{4\pi i \omega J_k b}{c^2} \times \quad (15b)$$

$$\times \{I_1(\kappa b) K_1(\kappa r) - [I_1(\kappa b) K_1(\kappa R) / I_1(\kappa R)] I_1(\kappa r)\}$$

при  $r \geq b$ . “Вакуумное” решение также приведено на рис. 3. Для параметров, принятых в наших расчетах, приближенное решение (15) практически совпадает с точным вплоть до значений плотности плазмы порядка  $10^{15} \text{ см}^{-3}$ . Дело в том, что точность приближения зависит от параметра  $|\chi^2 - \kappa^2| a^2$ , который должен быть мал по сравнению с единицей и который тем меньше, чем меньше радиус плазмы (см. [10]). Графики  $|\chi a|^2$  в зависимости от частоты и от плотности плазмы приведены на рис. 4 и 5 для трех значений  $k_{\parallel}$ .

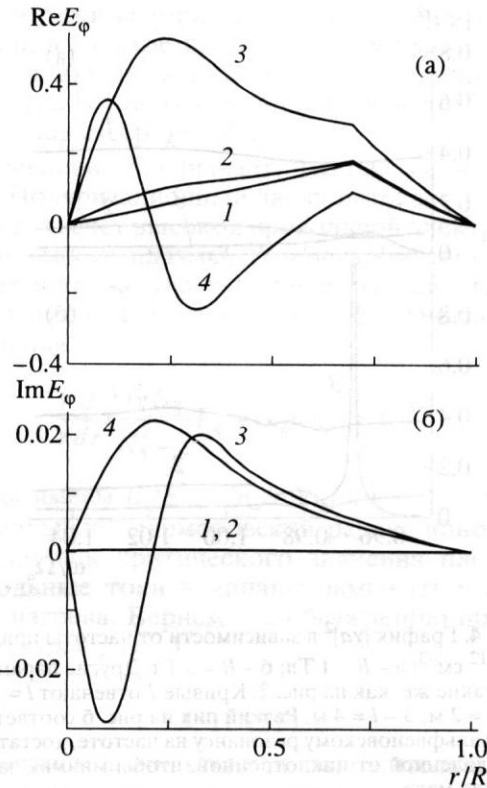


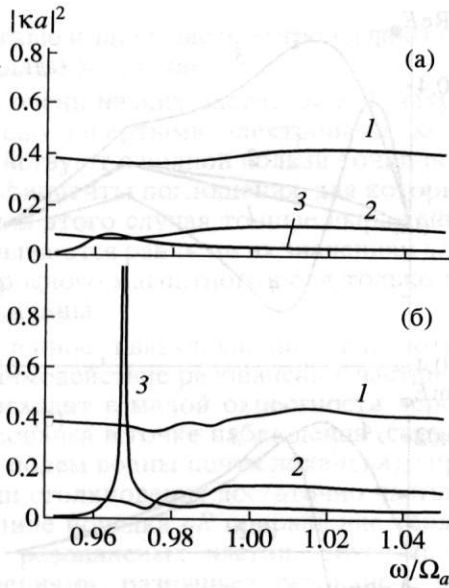
Рис. 3. График зависимости  $E_{\varphi}(r)$  для вынужденных колебаний на циклотронной частоте  $\Omega_a$  изотопа  $\text{Gd}^{157}$ : а – вещественная часть  $E_{\varphi}$ ; б – мнимая часть  $E_{\varphi}$ . Параметры плазмы:  $T = 10$  эВ,  $B = 3$  Тл,  $u = 0$ , радиус плазмы  $a = 10$  см, радиус антенны  $b = 17.5$  см, радиус вакуумной камеры  $R = 25$  см,  $k_{\parallel} = 2\pi/l$ ,  $l = 2$  м. Распределение плотности:  $n(r) = n_0(1 - r^2/a^2)$  при  $r \leq a$  и  $n(r) = 0$  при  $r \geq a$ . Кривые 1 отвечают  $n_0 = 0$  (вакуумное поле); 2 –  $n_0 = 5 \times 10^{15} \text{ см}^{-3}$ ; 3 –  $n_0 = 1 \times 10^{16} \text{ см}^{-3}$ , 4 –  $n_0 = 5 \times 10^{16} \text{ см}^{-3}$ .

Малое отличие азимутальной компоненты электрического поля от вакуумного значения еще не означает, что плазма вообще не влияет на проникновение в нее ВЧ-поля. Как уже отмечалось, в плазме возникает радиальная компонента электрического поля. В результате происходит перераспределение долей энергии ВЧ-поля, содержащихся в вынужденных колебаниях с правой (электронной) и левой (ионной) поляризациями. В вакууме, где  $E_r = 0$ , эти доли одинаковы и равны 1/2. В плазме они характеризуются параметрами

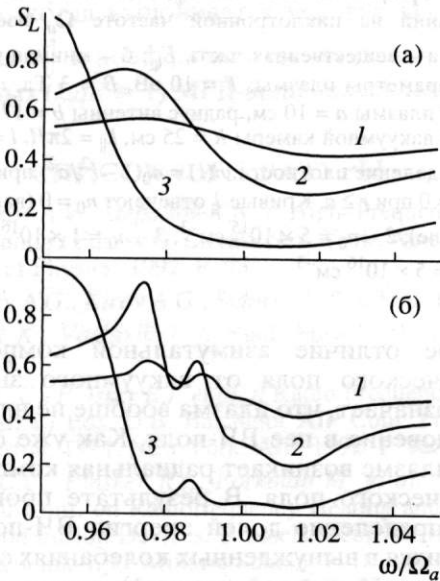
$$S_{L,R} = \frac{|E^{\pm}|^2}{|E^{+}|^2 + |E^{-}|^2}, \quad (16)$$

где

$$E^{\pm} = \frac{E_r \pm i E_{\varphi}}{\sqrt{2}} e^{\pm i \varphi} = \pm \frac{N_{\parallel}^2 - \epsilon \pm g i E_{\varphi}}{N_{\parallel}^2 - \epsilon} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm i \varphi} \quad (17)$$

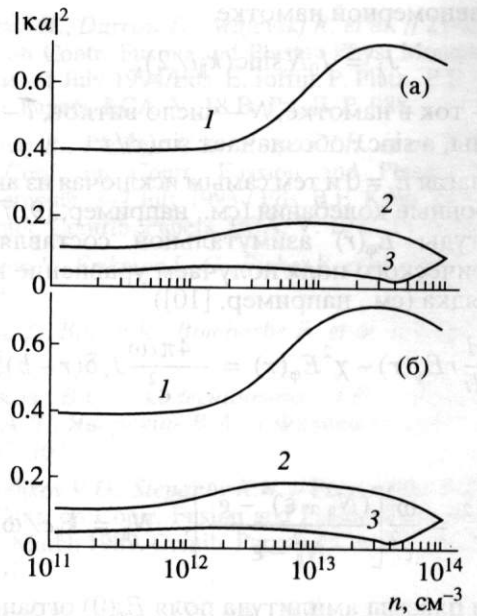


**Рис. 4.** График  $|ka|^2$  в зависимости от частоты при  $n = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ : а -  $B = 1 \text{ Тл}$ ; б -  $B = 3 \text{ Тл}$ . Другие параметры такие же, как на рис. 2. Кривые 1 отвечают  $l = 1 \text{ м}$ ; 2 -  $l = 2 \text{ м}$ ; 3 -  $l = 4 \text{ м}$ . Резкий пик на рис. б соответствует альфвеновскому резонансу на частоте, достаточно удаленной от циклотронной, чтобы мнимая часть  $\epsilon$  была мала.

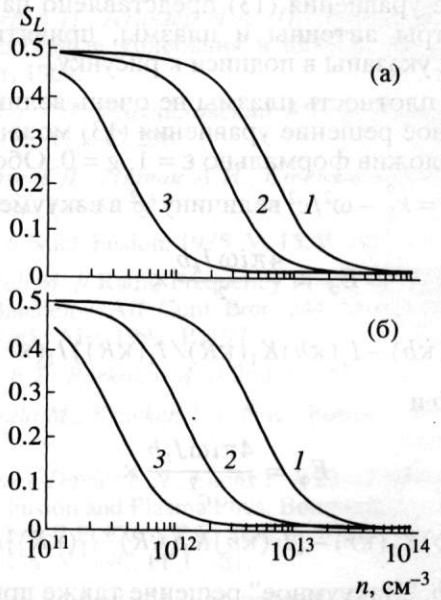


**Рис. 6.** Доля левой поляризации в высокочастотном поле в зависимости от частоты при  $n = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ : а -  $B = 1 \text{ Тл}$ ; б -  $B = 3 \text{ Тл}$ . Другие параметры такие же, как на рис. 2. Кривые 1 отвечают  $l = 1 \text{ м}$ ; 2 -  $l = 2 \text{ м}$ ; 3 -  $l = 4 \text{ м}$ .

суть амплитуды левой ( $E^+$ ) и правой ( $E^-$ ) поляризации. Графики доли левой поляризации  $S_L$ , отвечающей за нагрев ионов, приведены на рис. 6 в зависимости от частоты и на рис. 7 в зависимости от плотности.



**Рис. 5.** График  $|ka|^2$  в зависимости от плотности при  $\omega = \Omega_a$ : а -  $B = 1 \text{ Тл}$ ; б -  $B = 3 \text{ Тл}$ . Другие параметры такие же, как на рис. 2. Кривые 1 отвечают  $l = 1 \text{ м}$ ; 2 -  $l = 2 \text{ м}$ ; 3 -  $l = 4 \text{ м}$ . Параметр  $\chi$  слабо зависит от  $B$ .



**Рис. 7.** Доля левой поляризации в высокочастотном поле в зависимости от плотности при  $\omega = \Omega_a$ : а -  $B = 1 \text{ Тл}$ ; б -  $B = 3 \text{ Тл}$ . Другие параметры такие же, как на рис. 2. Кривые 1 отвечают  $l = 1 \text{ м}$ ; 2 -  $l = 2 \text{ м}$ ; 3 -  $l = 4 \text{ м}$ .

Анализируя уравнение (17), нетрудно видеть, что экранировка левой поляризации наступает при  $N_{||}^2 \leq \text{Im} \epsilon$ . Полагая  $\text{Im} \epsilon = \sqrt{\pi} \omega_{pa}^2 / 2k_{||} v_a \Omega_a$  и  $k_{||} = 2\pi/l$ , находим, что критическая плотность

(ионов)  $n_*$ , при которой возникает экранировка, зависит от начальной температуры плазменной струи  $T$ , среднего заряда ионов  $Z$ , длины зоны нагрева  $l$  и напряженности магнитного поля  $B$  следующим образом:

$$n_* \propto \frac{\sqrt{T}}{Z^3 B l^3}. \quad (18)$$

Заметим, что в обзоре [1] совпадение волнового числа  $k_{||}$ , найденного из условия  $N_{||}^2 \sim \text{Im} \epsilon$ , с волновым числом антенны трактуется как условие резонансного возбуждения циклотронных волн в плазме (см. обсуждение после уравнения (13) в [1]). В рассматриваемой нами задаче малое отличие  $E_\phi$  от вакуумного решения указывает на вынужденный характер колебаний.

Производительность метода разделения изотопов при помощи селективного ИЦР-нагрева определяется предельной величиной тока в плазменной струе  $l a^2 n_* i$  (в расчете на число ионов).

Поскольку критическая плотность не зависит от радиуса струи (покуда он мал по сравнению с длиной волны), радиус можно сделать очень большим. Так, в [7] предлагается  $a = 20$  см. При наличии источника с высокой плотностью тока более простые конструктивные решения обеспечивают выбор меньшего значения радиуса струи. В наших расчетах мы принимаем  $a = 10$  см. При выбранном значении  $a$  предельный поток зависит только от предельной плотности тока  $n_* i \propto T/Z^3 B l^3$ .

Согласно приведенной зависимости, уменьшение  $B$  или  $l$  формально ведет к увеличению производительности системы разделения, однако следует помнить, что и снижение  $B$ , и уменьшение  $l$  ведут к нарушению условия селективности нагрева (1). На границе области параметров, где это условие выполняется, имеем равенство  $\sqrt{T}/ZBl = \text{const}$ . Исключая с его помощью длину  $l$ , находим, что предельная плотность тока пропорциональна  $B^2/\sqrt{T}$ . Таким образом, для повышения производительности необходимо переходить к системам с большим магнитным полем. Что касается начальной температуры плазмы в струе, то ее трудно варьировать в широких пределах. От  $Z$  предельный ток не зависит.

Из рис. 7 видно, что при  $B = 1 - 3$  Тл,  $l = 1 - 4$  м,  $T = 10$  эВ критическая плотность  $n_*$  составляет величину порядка  $10^{12}$  см<sup>-3</sup>. При превышении критической плотности доля левой поляризации и, следовательно, энергия, полученная ионом при пролете через зону нагрева, уменьшаются пропорционально  $(n_*/n_c)^2$ . При наличии запаса по мощности нагрева такое превышение на первый взгляд вполне допустимо и обеспечивает повышение производительности. Однако в надкрити-

ческом режиме теряется селективность нагрева, так как в спектре колебаний вымирают прежде всего длинные волны (при этом радиальная структура ВЧ-поля мало меняется до тех пор, пока мал параметр  $|\chi^2 - \kappa^2| a^2$ ).

Появление  $E_r$  означает, что плазма поляризуется. Поляризационный заряд натекает с торцов плазмы за счет высокой продольной электронной проводимости плазмы. Резервуаром электронов является также участки струи, находящиеся вне зоны нагрева. Продольное поле  $E_z$  оценивается из уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{ig N_{||}^2}{N_{||}^2 - \epsilon} E_\phi + ik_{||} \eta E_z = 0, \quad (19)$$

откуда имеем  $E_z/E^+ \sim (n_a/n_i) \rho_{||}/a$ , где  $\rho_{||} = v_a/\Omega_i$  — “продольный” ларморовский радиус ионов. При превышении критического значения плотности продольные токи начинают замыкаться внутри зоны нагрева. Вернемся к обсуждению продольных токов в разд. 5.

#### 4. НАГРЕВ

Запишем гамильтониан положительно заряженной частицы сорта  $s$ , взаимодействующей с ВЧ-полем на частоте  $\omega$ , близкой к циклотронной частоте  $\Omega_s$ , в переменных действие-угол:

$$\mathcal{H} = \Omega_s J + \frac{\mathcal{P}_{||}^2}{2m_s} + \left\{ \frac{ie}{2\omega} \sqrt{\frac{\Omega_s J}{m_s}} E_\omega^+ e^{i\alpha - i\omega t} + \text{к.с.} \right\} \quad (20)$$

(см. Приложение). Здесь  $J = m_s v_{\perp}^2 / 2\Omega_s$  — момент импульса частицы относительно ларморовского центра (он пропорционален магнитному моменту  $\mu = m_s v_{\perp}^2 / 2B$ ),  $\alpha$  — канонически сопряженная ему фаза,  $p_{||} = m_s v_z$  — проекция импульса на направление ведущего магнитного поля вдоль оси  $z$ . Еще одна пара канонических переменных  $\Psi = m_s \Omega_s r_c^2 / 2$ ,  $\psi$  характеризует положение ларморовского центра частицы (рис. 8). Переменные  $\Psi$ ,  $\psi$ ,  $z$  входят в гамильтониан через зависимость от них амплитуды левополяризованной компоненты электрического поля  $E_\omega^+ = [E_r(r_c) + iE_\phi(r_c)] e^{i\psi} / \sqrt{2}$ . В соответствии с (14) и (15)

$$E_\omega^+ = -\frac{4\pi\omega b}{\sqrt{2}c^2} \int \frac{dk_{||} N_{||}^2 - \epsilon + g}{N_{||}^2 - \epsilon} \times \quad (21)$$

$$\times [K_1(\kappa b) - I_1(\kappa b) K_1(\kappa R) / I_1(\kappa R)] I_1(\kappa r) J_k e^{ik_{||} z + i\psi}.$$

Для простоты будем считать, что аргументы функций Бесселя  $K_1$  и  $I_1$  в (21) малы, так что эти функции можно аппроксимировать степенными. Это предположение не существенно, от него лег-

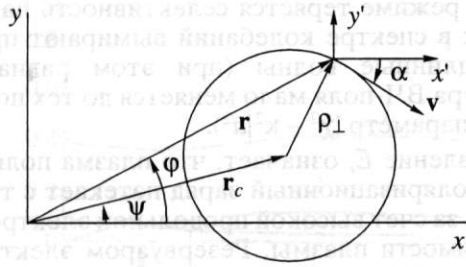


Рис. 8. Система координат.

ко отказаться, но оно позволяет укоротить последующие формулы и к тому же обеспечивает удовлетворительную точность. В результате имеем

$$\mathcal{H} = \Omega_s J + \frac{\mathcal{P}_{\parallel}^2}{2m_s} - \frac{\pi e}{c^2} \sqrt{\frac{\Omega_s J}{2m_s}} \left[ 1 - \frac{b^2}{R^2} \right] r_c \times \\ \times \left\{ i \int \frac{dk_{\parallel} N_{\parallel}^2 - \varepsilon + g}{2\pi N_{\parallel}^2 - \varepsilon} J_k e^{ik_{\parallel} z - i\omega t + i\alpha + i\psi} + \text{к.с.} \right\}. \quad (22)$$

Поскольку гамильтониан зависит от угловых переменных  $\alpha$  и  $\psi$  только в комбинации  $\alpha + \psi$ , разность канонических моментов  $J - \Psi$  есть сохраняющаяся величина. Отсюда сразу следует, что изменением  $r_c$  за время пролета через зону нагрева можно пренебречь. Действительно, допустим, что конечное значение  $J = m_s \Omega_s \rho_{\perp}^2 / 2$  велико по сравнению с начальным, которое порядка  $m_s \Omega_s \rho_{\parallel}^2 / 2$  (в этом и состоит задача нагрева). Тогда за время пролета  $\Psi = m_s \Omega_s r_c^2 / 2$  изменится на величину  $J$ . Следовательно, смещение  $\Delta r_c$  ларморовского центра по радиусу составит величину  $\rho_{\perp}^2 / 2r_c$ , малую по сравнению с  $r_c$  всюду, за исключением малой приосевой области, где  $\Delta r_c \sim r_c \sim \rho_{\perp}$ . Изменение положения ларморовского центра по азимуту  $\psi$  также мало по параметру  $\rho_{\perp} / r_c$ . Ниже мы увидим, что продольная скорость  $v_{\parallel}$  также незначительно меняется за время пролета через зону нагрева. При постоянных  $r_c$ ,  $\psi$  и  $v_{\parallel}$  гамильтонианы уравнения для  $J$  и  $\alpha$  фактически становятся линейными (при переходе к декартовым координатам  $x'y'$  на рис. 8) и легко интегрируются. Энергия иона  $W_s = \Omega_s J$  сорта  $s$  на выходе из зоны нагрева равна

$$W_s = \left| \sqrt{W_{s0}} e^{-i\alpha_0} - \frac{\pi e \Omega_s}{\sqrt{2m_s c^2 v_{\parallel}}} \left[ 1 - \frac{b^2}{R^2} \right] r_c \times \right. \\ \left. \times \int_{-L/2v_{\parallel}}^{+L/2v_{\parallel}} dt \int \frac{dk_{\parallel} N_{\parallel}^2 - \varepsilon + g}{2\pi N_{\parallel}^2 - \varepsilon} J_k e^{i(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega + \Omega_s)t} \right|^2, \quad (23)$$

если он влетел туда, имея (поперечную) энергию  $W_{s0}$  и фазу ларморовского вращения  $\alpha_0$ . При выводе (23) мы учли, что длина зоны нагрева  $L$  может быть больше длины антенны  $l$ ; обращаем внимание на то, что комплексно-сопряженные слагаемые в (23) отсутствуют. Если конечная энергия  $W_s$  значительно больше начальной, то она почти не зависит от начальной фазы ларморовского вращения. Используя для спектра антенны формулу (12), получаем

$$W_s = \frac{\pi^2 e^2 \Omega_s^2 (N I_0)^2}{2m_s c^4 v_{\parallel}^2} \left[ 1 - \frac{b^2}{R^2} \right]^2 r_c^2 \mathcal{F}_s(v_{\parallel}), \quad (24)$$

$$\mathcal{F}_s(v_{\parallel}) = \left| \int \frac{dk_{\parallel} L N_{\parallel}^2 - \varepsilon + g}{2\pi N_{\parallel}^2 - \varepsilon} \text{sinc} \frac{k_{\parallel} l}{2} \times \right. \\ \left. \times \text{sinc} \frac{(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega + \Omega_s) L}{2v_{\parallel}} \right|^2. \quad (25)$$

Точность отбрасывания в (23) слагаемых, зависящих от фазы, невысока. Например, при 30-кратном превышении конечной энергии над начальной поправки к (24), зависящие от фазы вращения, составляют  $\pm 37\%$ ; при 100-кратном —  $\pm 20\%$ .

При плотности плазмы в струе значительно меньше критической,  $n \ll n_*$ , интеграл в (25) удастся вычислить аналитически, так как величиной  $\varepsilon$  и  $g$  можно пренебречь по сравнению с  $N_{\parallel}^2$ . При  $L \geq l$  находим, что

$$\mathcal{F}_s = \text{sinc}^2 \frac{(\Omega_s - \omega) l}{2v_{\parallel}}.$$

Для плотности, близкой к критической, график функции  $\mathcal{F}_s(v_{\parallel})$  приведен на рис. 9 для изотопа  $\text{Gd}^{157}$  и двух его ближайших соседей —  $\text{Gd}^{156}$  и  $\text{Gd}^{158}$ . Как видно из сравнения графиков, приведенных на рис. 9а и 9б, селективность нагрева (которую характеризует отношение значений функции  $\mathcal{F}_s$  для разных изотопов) резко улучшается при увеличении магнитного поля. Для принятого в расчетах набора параметров ( $T = 10$  эВ,  $n = 10^{12}$  см $^{-3}$ ,  $l = 2$  м) удовлетворительная селективность достигается при  $B \approx 3$  Тл. При этом параметр  $k v_a / \Delta \Omega$ , характеризующий выполнение критерия селективности, равен 1.07, а энергия выделяемых изотопов  $\text{Gd}^{157}$  в 2–3 раза превышает энергию ионов  $\text{Gd}^{156}$  и  $\text{Gd}^{158}$ .

К улучшению селективности приводит удлинение зоны нагрева. Однако при плотности струи  $n = 10^{12}$  см $^{-3}$  длина  $l = 2$  м практически является предельной. На это указывает малость абсолютных значений функции  $\mathcal{F}_s$ . При  $B = 3$  Тл,  $n = 10^{12}$  см $^{-3}$  и  $\omega = \Omega_a$  расчет дает  $\mathcal{F}_s = 0.047$ , тогда как при отсутствии экранировки ВЧ-поля в плазме было бы



$\mathcal{F}_a = 1$ . Для сравнения на рис. 10 приведены аналогичные графики для случая, когда плотность струи снижена до  $n = 10^{11} \text{ см}^{-3}$ . При этой плотности  $\mathcal{F}_a = 0.281$ ; при  $n = 3 \times 10^{11} \text{ см}^{-3}$  имеем  $\mathcal{F}_a = 0.147$ . Таким образом, десятикратное повышение производительности установки по разделению изотопов за счет увеличения плотности струи с  $n = 10^{11} \text{ см}^{-3}$  до  $n = 10^{12} \text{ см}^{-3}$  требует шестикратного увеличения мощности, подводимой к антенне (учитываем, что в плазме поглощается только малая часть этой мощности).

5. ОГРАНИЧЕННОСТЬ ТЕОРИИ

Проверим теперь, насколько верно сделанное нами предположение о постоянстве продольной скорости. При этом надо различать суммарное изменение продольной скорости иона за время пролета и модуляцию продольной скорости за период циклотронного вращения. Первый эффект связан с наличием левополяризованной компоненты ВЧ-поля  $E^+$  и описывается гамильтонианом (20). Из гамильтоновых уравнений следует, что  $m \dot{v}_{\parallel} \sim (k_{\parallel} \rho_{\perp}) e E^+$ , тогда как  $m \dot{v}_{\perp} \sim e E^+$ . Поэтому приращение продольной скорости  $\Delta v_{\parallel}$  в  $(k_{\parallel} \rho_{\perp})^{-1}$  меньше, чем приращение поперечной скорости  $\Delta v_{\perp}$ . Так как  $\Delta v_{\perp} / v_{\perp} \sim \rho_{\perp} / \rho_{\parallel}$  (где  $\rho_{\parallel}$  и  $\rho_{\perp}$  — начальное и конечное значения ларморовского радиуса соответственно), относительное изменение продольной скорости можно представить в виде  $\Delta v_{\parallel} / v_{\parallel} \sim (k_{\parallel} \rho_{\perp}) \rho_{\perp} / \rho_{\parallel} \sim (k_{\parallel} \rho_{\parallel}) W_a / T$ . При выполнении условия селективности  $k_{\parallel} \rho_{\parallel} < 1/A$  это оценка означает, что  $\Delta v_{\parallel} / v_{\parallel} < W_a / TA$ . При начальной энергии иона порядка  $T = 10 \text{ эВ}$  и конечной энергии  $W_a = 200 \text{ эВ}$  получаем  $\Delta v_{\parallel} / v_{\parallel} \approx 1/7$ .

Амплитуду осцилляций  $\Delta v_{\parallel} \sim e E_z / m \omega$  продольной скорости, вызванных продольной компонентой электрического поля  $E_z$ , также можно выразить через параметры  $\rho_{\parallel}$  и  $\rho_{\perp}$ . Учитывая, что  $E_z / E^+ \sim (n_a / n_i) \rho_{\parallel} / a$ , а циклотронный период в  $1/k\rho_{\parallel}$  раз меньше, чем время пролета через зону нагрева, получаем:  $\Delta v_{\parallel} / v_{\parallel} \sim (n_a / n_i) (\rho_{\perp} / a) k\rho_{\parallel} < (n_a / n_i) \rho_{\perp} / aA$ . Это маленькая величина.

Как мы уже отмечали, электроны за период колебания ВЧ-поля несколько раз успевают пролететь через зону нагрева. Длина пробега электрона за период колебания  $l_e = 2\pi v_e / \Omega_a$  в 3–4 раза превышает длину зоны нагрева  $l$  на пределе выполнения условия селективности  $k\rho_{\parallel} = 1/A$ . Следовательно, энергия электрона в поле антенны варьируется на величину порядка  $e\phi$ , где  $\phi \sim E_z l$  — перепад электрического потенциала в зоне нагрева. Используя соотношение  $E_z / E^+ \sim (n_a / n_i) \rho_{\parallel} / a$ , за-

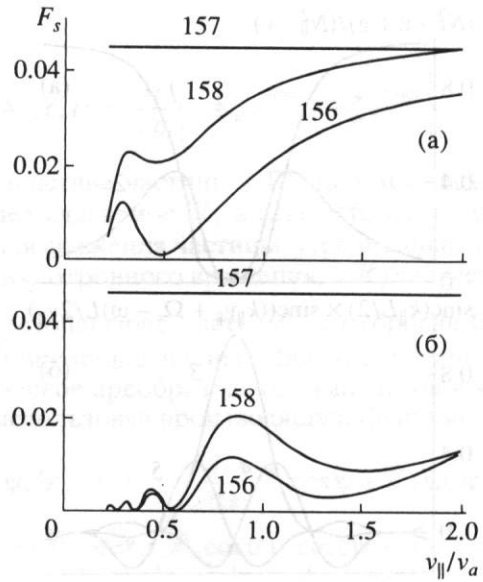


Рис. 9. График функции  $\mathcal{F}_s(v_{\parallel})$  для случая  $\omega = \Omega_a$ ,  $u = v_a$ ,  $l = 2 \text{ м}$ : а —  $B = 1 \text{ Тл}$ ; б —  $B = 3 \text{ Тл}$ . Другие параметры такие же, как на рис. 2. Цифры означают номер изотопа.

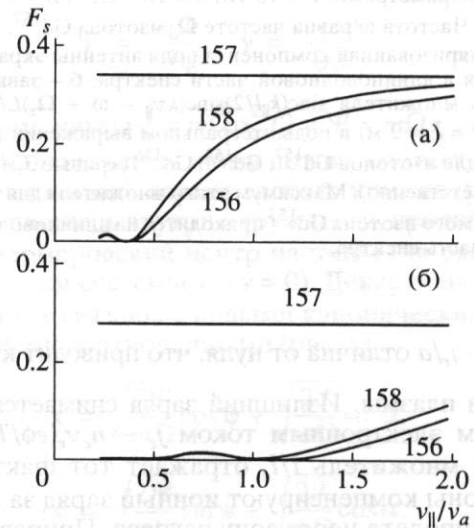
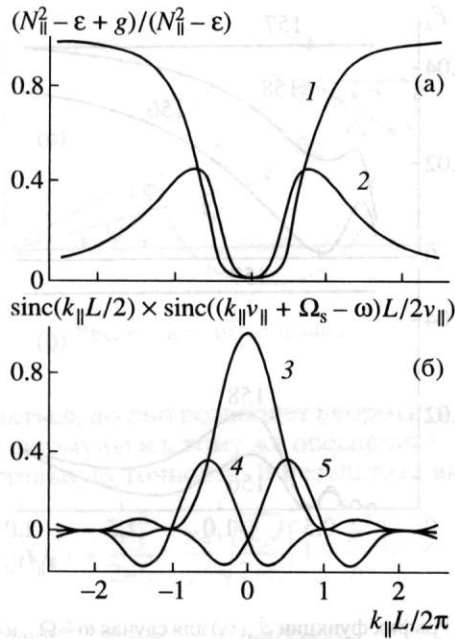


Рис. 10. То же, что и на рис. 9, но при  $n = 10^{11} \text{ см}^{-3}$ .

ключаем, что потенциальная энергия  $e\phi$  мала по сравнению с тепловой, так как

$$\frac{e\phi}{T} \sim \frac{n_a \rho_{\perp}}{n_i a} \quad (26)$$

К той же оценке приходим, рассматривая баланс токов в плазме, находящейся в ВЧ-поле. Поскольку нагретые ионы вращаются синфазно, они создают радиальный ток порядка  $j_r \sim n_a \rho_{\perp} \Omega_a$ . В неоднородной плазме дивергенция этого тока



**Рис. 11.** а – Зависимость вещественной (кривая 1) и мнимой (2) частей  $(N_{\parallel}^2 - \epsilon + g)/(N_{\parallel}^2 - \epsilon)$  от  $k_{\parallel}$  для плазмы с параметрами:  $T = 10$  эВ,  $n = 10^{12}$  см<sup>-3</sup>,  $B = 3$  Тл,  $u = 0$ . Частота  $\omega$  равна частоте  $\Omega_a$  изотопа Gd<sup>157</sup>. Левополяризованная компонента поля антенны экранируется в длинноволновой части спектра, б – зависимость множителя  $\text{sinc}(k_{\parallel}l/2)\text{sinc}(k_{\parallel}v_{\parallel} - \omega + \Omega_s)L/2v_{\parallel}$  (при  $l = L = 2$  м) в подынтегральном выражении (25) от  $k_{\parallel}$  для изотопов Gd<sup>157</sup>, Gd<sup>158</sup>, Gd<sup>156</sup> (кривые 3, 4 и 5 соответственно). Максимум этого множителя для выделяемого изотопа Gd<sup>157</sup> приходится на длинноволновую часть спектра.

$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r j_r \sim j_r/a$  отлична от нуля, что приводит к поляризации плазмы. Излишний заряд снимается продольным электронным током  $j_z \sim n_e v_e (e\phi/T)(l/l_e)$ , причем множитель  $l/l_e$  отражает тот факт, что электроны компенсируют ионный заряд за время одного пролета через зону нагрева. Приравнивая  $j_z$  к  $lj_r/a$ , вновь получаем (26).

Сделаем еще одно важное замечание. В проведенных расчетах был использован стандартный тензор диэлектрической проницаемости. В рамках такого подхода мы сделали вывод, что тензор диэлектрической проницаемости в первом приближении не меняется по направлению движения струи. Однако стандартный тензор диэлектрической проницаемости описывает установившийся отклик плазмы на воздействие ВЧ-поля и вводится при предположении, что плазма не ограничена. В задаче о нагреве струи длина волны порядка длины струи, и поэтому использовавшийся нами традиционный подход имеет ограниченную применимость и, более того, приводит к очевидным

парадоксам. Действительно, из (8) формально следует, что  $\text{Im}\epsilon \rightarrow \infty$  при  $k_{\parallel} \rightarrow 0$ . Как следствие, подынтегральное выражение в (25) обращается в нуль в окрестности точки  $k_{\parallel} = 0$ , что приводит к уменьшению функции  $\mathcal{F}_a$  для выделяемого изотопа, но не его соседей  $s \neq a$ . Рисунок 11 поясняет сказанное. На нем изображены вещественная и мнимая части множителя  $(N_{\parallel}^2 - \epsilon + g)/(N_{\parallel}^2 - \epsilon)$  в подынтегральном выражении и произведение двух других множителей  $\text{sinc}(k_{\parallel}l/2)\text{sinc}(k_{\parallel}v_{\parallel} - \omega + \Omega_s)L/2v_{\parallel}$  для случая, когда  $\omega$  совпадает с циклотронной частотой  $\Omega_a$  изотопа Gd<sup>157</sup>.

В безграничной плазме упомянутая бесконечность диэлектрической проницаемости снимается учетом столкновений. В нашем случае более важен учет конечного времени пролета. Суть дела легко понять, рассмотрев движение отдельной частицы. В высокочастотном поле она совершает осцилляторное движение со скоростью  $v \sim eE^+/m(\omega - \Omega)$ . При  $\omega \rightarrow \Omega$  нужно учесть доплеровский сдвиг частоты, что приводит к оценке  $v \sim eE^+/mk_{\parallel}v_{\parallel}$ . Если теперь формально устремить  $k_{\parallel}$  к нулю, то осцилляторная скорость формально стремится к бесконечности (таково происхождение расходимости в формуле (8) для  $\text{Im}\epsilon$ ). В действительности же скорость частицы  $v \sim eE^+t/m$  линейно растет со временем, пока  $t < 2\pi/k_{\parallel}v_{\parallel}$ . При нагреве струи  $t$  есть время пролета  $l/v_{\parallel}$ , а  $k_{\parallel} \sim 2\pi/l$ , т.е.  $t \sim 2\pi/k_{\parallel}v_{\parallel}$ . Следовательно, использование “стационарного” тензора диэлектрической проницаемости, строго говоря, дает неверный результат при расчете длинноволновой части спектра ВЧ-поля в плазме. Однако уточнение расчета должно только улучшить предсказания теории относительно селективности нагрева. Это следует из предшествующего обсуждения рис. 11. Попытка такого уточнения предпринята в [7].

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные расчеты позволили установить основные параметры системы разделения изотопов гадолиния посредством селективного ионно-циклотронного нагрева. Так, при длине зоны нагрева  $l = 2$  м, начальной температуре плазменной струи  $T = 10$  эВ, радиусе  $a = 10$  см, плотности плазмы в струе  $n = 10^{12}$  см<sup>-3</sup> можно обеспечить достаточно высокую селективность нагрева изотопа Gd<sup>157</sup> при величине внешнего магнитного поля  $B = 3$  Тл. При этом необходимая для разделения энергия ионов  $W = 200 - 300$  эВ достигается, если амплитуда тока в витке антенны равна  $I_0 = 60$  А при полном числе витков  $N = 150$ . Расчетное напряжение на антенне при этом составляет 70 кВ.

При указанных параметрах системы полный эквивалентный ток в плазменной струе примерно равен 10–15 А, обеспечивая производство 100 кг

изотопа Gd<sup>157</sup> в год. Производительность системы можно повысить, если увеличить напряженность ведущего магнитного поля, несколько уменьшив длину нагрева и увеличив плотность струи.

При наличии резерва мощности можно перейти на нагрев на второй гармонике. Хотя из-за малого поглощения нагрева струи на второй гармонике, по-видимому, не будет иметь практического применения, рассмотрим его в нашей второй работе, так как он представляет определенный теоретический интерес. В частности, в критерий селективности входит амплитуда ВЧ-поля, а не только величина доплеровского сдвига частоты.

Авторы благодарят А.А. Бехтенева, А.В. Тимофеева и И.Н. Чуркина за интерес к работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Гамильтониан

Вывод гамильтониана, описывающего взаимодействие заряженной частицы и ВЧ-поля, можно найти во многих публикациях; укажем, в частности, [11–13, 4]. Тем не менее повторим этот вывод, чтобы приспособить его к особенностям рассматриваемой нами задачи. Мы не будем делать предварительных предположений относительно поляризации ВЧ-поля. Чтобы иметь впоследствии возможность сравнить резонансный нагрев на первой и второй гармониках циклотронной частоты, учтем одновременно оба резонанса.

Игнорируя нелинейные эффекты, порождаемые релятивистской зависимостью циклотронной частоты от энергии, исходим из известного выражения для гамильтониана нерелятивистской частицы

$$\mathcal{H} = \left( \mathcal{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}_0 \right)^2 / 2m - \frac{e}{c} \mathbf{v} \mathbf{A}_1 \equiv \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1, \quad (27)$$

где  $\mathcal{P} = m\mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A}_0$  – канонический импульс частицы,  $\mathbf{A}_0 = -\frac{1}{2} [\mathbf{r}, \mathbf{B}]$  – векторный потенциал стационарного (ведущего) магнитного поля. В используемой нами калибровке электрический потенциал равен нулю ( $\phi \equiv 0$ ); при этом переменную часть векторного потенциала  $\mathbf{A}_1$  легко выразить через электрическое поле ВЧ-колебаний. Представив последнее в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_\omega^*(\mathbf{r}) e^{+i\omega t} \right\},$$

имеем

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}, t) = \frac{ic}{2\omega} \left\{ -\mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_\omega^* e^{+i\omega t} \right\}.$$

Взаимодействие частицы с ВЧ-полем описывает последнее слагаемое  $\mathcal{H}_1$  в (27). Чтобы получить уравнения движения частицы, усредненные по периоду циклотронного вращения, в  $\mathcal{H}_1$  следует выделить резонансную часть  $\mathcal{H}_1^{res}$ , отбросив быстросциллирующие члены. Для этого выполним каноническое преобразование импульсов и координат, используя производящую функцию

$$\Phi(\alpha, \psi, \mathcal{P}_x, \mathcal{P}_y) = -\frac{2}{m\Omega} (\mathcal{P}_x \cos \psi + \mathcal{P}_y \sin \psi) \times \\ \times (\mathcal{P}_x \sin \alpha + \mathcal{P}_y \cos \alpha) / \cos(\psi + \alpha).$$

Переход от  $\mathcal{P}_x, x, \mathcal{P}_y, y$  к новым каноническим переменным действие–угол  $J, \alpha, \Psi, \psi$  осуществляется по формулам

$$J = -\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}, \quad x = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathcal{P}_x}, \\ \Psi = -\frac{\partial \Phi}{\partial \psi}, \quad y = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathcal{P}_y}.$$

Новые импульсы  $J = m\Omega \rho_\perp^2 / 2$  и  $\Psi = m\Omega r_c^2 / 2$  пропорциональны магнитному потоку соответственно через площадь ларморовского кружка (радиуса  $\rho_\perp$ ) и площадь внутри окружности, проходящей через ларморовский центр частицы (на расстоянии  $r_c$  от оси системы  $x = y = 0$ ). Декартовы координаты  $x, y$  связаны с новыми каноническими переменными соотношениями (рис. 8)

$$x = \sqrt{\frac{2\Psi}{m\Omega}} \cos \psi + \sqrt{\frac{2J}{m\Omega}} \sin \alpha, \\ y = \sqrt{\frac{2\Psi}{m\Omega}} \sin \psi + \sqrt{\frac{2J}{m\Omega}} \cos \alpha.$$

Поскольку невозмущенная часть гамильтониана

$$\mathcal{H}_0 = \Omega J + \frac{P_\parallel^2}{2m}$$

зависит только от  $J$  и  $\mathcal{P}_\parallel = m v_\parallel$ , в первом приближении  $J, \mathcal{P}_\parallel, \Psi$  и  $\psi$  не изменяются, а  $\dot{\alpha} = \Omega, \dot{z} = p_\parallel / m$ . Напомним, что мы рассматриваем взаимодействие с ВЧ-колебаниями положительно заряженных ионов, полагая  $\Omega > 0$ . Следовательно, чтобы выделить резонансную часть в  $\mathcal{H}_1$ , нужно выразить  $\mathbf{v} \mathbf{A}_1$  через новые переменные и после этого оставить только члены, содержащие медленно меняющиеся фазовые множители  $e^{\pm i(\alpha - \omega t)}$  (при

нагреве на первой гармонике) и  $e^{\pm i(2\alpha - \omega t)}$  (при нагреве на второй гармонике).

Выделение резонансных членов упрощается, если разложить ВЧ-поле на колебания с правой, левой и продольной поляризациями. Для этого введем спиральную систему координат с ортами

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_- &= \frac{\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} = \frac{\mathbf{e}_r + i\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{2}} e^{+i\varphi}, \\ \mathbf{e}_+ &= \frac{\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} = \frac{\mathbf{e}_r - i\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi}, \\ \mathbf{e}_\parallel &= \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Проекции  $E^j = \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}^j = \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_j^*$  на соответствующие орты дадут комплексную амплитуду левой ( $j = +$ ), правой ( $j = -$ ) и продольной ( $j = \parallel$ ) поляризаций:

$$\begin{aligned} E^+ &= \frac{E_r + iE_\varphi}{\sqrt{2}} e^{+i\varphi}, \\ E^- &= \frac{E_r - iE_\varphi}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi}, \\ E^\parallel &= E_z. \end{aligned}$$

В результате находим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \frac{ie}{2\omega} \sqrt{\frac{\Omega J}{m}} \{ E_\omega^+ e^{i\alpha - i\omega t} - E_\omega^- e^{-i\alpha - i\omega t} \} + \\ &+ \frac{ie}{2\omega} v_\parallel E_\omega^\parallel e^{-i\omega t} + \text{к.с.}, \end{aligned}$$

где к.с. символизирует слагаемые, комплексно-сопряженные выписанным явно.

Перед выделением резонансных членов следует учесть, что амплитуды  $E_\omega^j$  также являются функциями координат, и разложить их вблизи положения ларморовского центра частицы по степеням ларморовского радиуса, т.е. по степеням  $\sqrt{J}$ . Это разложение также удобно делать в спиральных координатах, введя обозначения  $r^\pm = (x \pm iy)\sqrt{2}$ . В точке, где расположен ларморовский центр,  $r^\pm = \sqrt{\Omega\Psi/m} e^{\pm i\psi} = r_c e^{\pm i\psi}/\sqrt{2}$ . Для любой из амплитуд при этом имеем

$$\begin{aligned} E_\omega^j(\mathbf{r}) &= E_\omega^j + (-i\sqrt{J/m\Omega} e^{+i\alpha}) \frac{\partial E_\omega^j}{\partial r^-} + \\ &+ (+i\sqrt{J/m\Omega} e^{-i\alpha}) \frac{\partial E_\omega^j}{\partial r^+} + \frac{1}{2} (-i\sqrt{J/m\Omega} e^{+i\alpha}) \frac{\partial^2 E_\omega^j}{\partial r^{-2}} + \\ &+ \frac{1}{2} (+\sqrt{J/m\Omega} e^{-i\alpha}) \frac{\partial^2 E_\omega^j}{\partial r^{+2}} + (-i\sqrt{J/m\Omega} e^{+i\alpha}) \times \\ &\times (+i\sqrt{J/m\Omega} e^{-i\alpha}) \frac{\partial^2 E_\omega^j}{\partial r^- \partial r^+} + \dots, \end{aligned}$$

где в правой части равенства  $E_\omega^j$  и производные вычисляются в точке ларморовского центра.

Оставив наибольший член разложения для каждой поляризации, при  $\omega \approx \Omega$  получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1^{res} &= \frac{ie}{2\omega} \sqrt{\frac{\Omega J}{m}} E_\omega^+ e^{i\alpha - i\omega t} + \\ &+ \frac{e}{2\omega} v_\parallel \sqrt{\frac{J}{m\Omega}} \frac{\partial E_\omega^\parallel}{\partial r^-} e^{i\alpha - i\omega t} + \\ &+ \frac{ie}{4\omega} \sqrt{\frac{J^3}{m^3 \Omega}} \frac{\partial^2 E_\omega^-}{\partial r^{-2}} e^{i\alpha - i\omega t} + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (28)$$

Для ВЧ-поля с заданным значением азимутального числа  $m$  производные вычисляются по следующим правилам:

$$\frac{\partial E_\omega^\parallel}{\partial r^-} = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}} r^m \frac{\partial E_\omega^\parallel}{\partial r^m},$$

$$\frac{\partial E_\omega^\pm}{\partial r^-} = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}} r^{m\pm 1} \frac{\partial E_\omega^\pm}{\partial r^m},$$

и т.д. Наличие всех трех амплитуд  $E_\omega^j$  в (28) означает, что частица может обмениваться энергией с колебаниями любой поляризации. Однако при равных амплитудах поляризаций второе слагаемое меньше первого, а третье меньше второго в  $(k_\perp \rho_\perp)^{-1}$  раз. Практически это означает, что взаимодействием иона с колебаниями правой поляризации  $E_\omega^-$  всегда можно пренебречь, даже если колебания с левой поляризацией  $E_\omega^+$  сильно экранируются. Что касается продольной поляризации  $E_\omega^\parallel$ , то в рассматриваемом нами случае она мала, поэтому можно оставить только первое слагаемое в (28), соответствующее взаимодействию иона с колебаниями левой поляризации  $E_\omega^+$ . Заметим также, что поведение всех слагаемых в правой части в (28) одинаково вблизи оси системы, в частности, все они обращаются в нуль при  $r = 0$  кrome случая, когда  $m = -1$ .

Для резонансного взаимодействия на второй гармонике циклотронной частоты выделение резонансной части гамильтониана проводится совершенно аналогично. Приведем только главный член, описывающий взаимодействие иона с левополяризованными колебаниями:

$$\mathcal{H}_1^{res} = \frac{e}{2\omega m} \frac{J \partial E_\omega^+}{\partial r^-} e^{i2\alpha - i\omega t} + \text{к.с.} \quad (29)$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Муромкин Ю.А. // Итоги науки и техники. Сер. Физика плазмы. М.: ВИНТИ, 1991. Т. 12. С. 83.
2. Волосов В.И., Чуркин И.Н. // Патент РФ № 2071137. Бюллетень изобретений. 1996. № 36.
3. Белавин М.И., Звонков А.В., Тимофеев А.В. Способ разделения изотопов. Патент РФ № 1742900 от 5 июля 1993 г.
4. Панов Д.А., Тимофеев А.В. // Физика плазмы. 1995. Т. 21. С. 1092.
5. Роуз Д.Дж., Кларк М. Физика плазмы и управляемые термоядерные реакции. М.: Госатомиздат, 1963.
6. Dawson J.M., Kim H.C., Arnush D. et al. // Phys. Rev Lett. 1976. V. 37. P. 1547.
7. Устинов А.Л. // Физика плазмы. 1996. Т. 22. С. 170.
8. Таблицы физических величин / Под ред. акад. И.К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976. С. 847.
9. Тимофеев А.В., Харитонов К.Ю. // Физика плазмы. 1989. Т. 15. С. 674.
10. Котельников И.А., Яковченко С.Г. // Там же. 1991. Т. 17. С. 301.
11. Нейштадт А.И., Тимофеев А.В. // ЖЭТФ. 1987. Т. 93.
12. Kotelnikov I.A., Stupakov G.V. // Phys. Fluids B. 1990. V. 2. P. 881.
13. Cohen B.I., Cohen R.H., Nevins W.M., Rognlien T.D. // Rev. Mod. Phys. 1991. V. 63. P. 949.