

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ И ПОЛЯ

ДВУХГЛЮОННЫЙ ВКЛАД В ЯДРО УРАВНЕНИЯ БФКЛ

© 1998 г. М. И. Коцкий, Л. Н. Липатов¹⁾, В. С. Фадин

Институт ядерной физики СО РАН, Новосибирск

Поступила в редакцию 06.08.97 г.

Дифференциальное сечение рождения двух глюонов с фиксированной инвариантной массой в высокоэнергетических партонных соударениях выражено через соответствующее сечение реджеон-реджеонного взаимодействия. Двухглюонный вклад в ядро уравнения БФКЛ получен интегрированием этого сечения по импульсам рожденных частиц. Для устранения инфракрасных расходимостей использована размерностная регуляризация.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема вычисления партонных распределений в области малых значений бьеркеновской переменной $x = Q^2/s$ приобрела особую значимость в последнее время в связи с результатами недавних экспериментов по глубоконеупругому ep -рассеянию [1]. В главном логарифмическом приближении (ГЛП) квантовой хромодинамики (КХД), когда учитываются только члены, содержащие большой логарифм $\ln(1/x)$ на каждую степень константы связи α_s , для этой цели используют уравнение Балицкого–Фадиной–Кураева–Липатова (БФКЛ) [2], которое может быть представлено в форме уравнения эволюции по переменной $\ln(1/x)$:

$$\frac{\partial}{\partial \ln(1/x)} \mathcal{F}(x, \mathbf{q}_1^2) = \int d^2 q_2 \mathcal{H}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \mathcal{F}(x, \mathbf{q}_2^2), \quad (1.1)$$

где $\mathcal{F}(x, \mathbf{k}^2)$ – глюонная плотность, связанная с распределением глюонов $g(x, Q^2)$ (квадраты поперечных импульсов принимают значения вплоть до Q^2) соотношением

$$xg(x, Q^2) = \int_0^{Q^2} d(\mathbf{k}^2) \mathcal{F}(x, \mathbf{k}^2). \quad (1.2)$$

В ГЛП ядро этого уравнения имеет форму [2]

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = -\frac{g^2 N}{(2\pi)^3} \mathbf{q}_1^2 \times \int \frac{d^2 k}{\mathbf{k}^2(\mathbf{q}_1 - \mathbf{k})^2} \delta^{(2)}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + \frac{g^2 N}{4\pi^3} \frac{1}{(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)^2}. \quad (1.3)$$

Здесь g – калибровочная константа связи ($\alpha_s = g^2/4\pi$), N – число цветов (для КХД $N = 3$) и векторные обозначения использованы для составляющих 4-импульсов, поперечных по отношению к

плоскости импульсов начальных частиц (p_A, p_B). Два вклада в ядро (1.3) имеют инфракрасные сингулярности, которые сокращают друг друга в уравнении (1.1). В ГЛП это легко продемонстрировать, выполняя угловое интегрирование в правой части соотношения (1.1) [2]:

$$\frac{\partial}{\partial \ln(1/x)} \mathcal{F}(x, \mathbf{q}_1^2) = \frac{\alpha_s N}{\pi} \int_0^\infty d(\mathbf{q}_2^2) \left[\frac{\mathcal{F}(x, \mathbf{q}_2^2)}{|\mathbf{q}_1^2 - \mathbf{q}_2^2|} - \mathcal{F}(x, \mathbf{q}_1^2) \frac{\mathbf{q}_1^2}{\mathbf{q}_2^2} \left(\frac{1}{|\mathbf{q}_1^2 - \mathbf{q}_2^2|} - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{q}_1^4 + 4\mathbf{q}_2^4}} \right) \right]. \quad (1.4)$$

В нелидирующем приближении, которое будет обсуждаться ниже, сокращение инфракрасных расходимостей не является столь очевидным. Чтобы устранить эти расходимости из промежуточных выражений, мы будем в дальнейшем использовать размерностную регуляризацию

$$\frac{d^2 k}{(2\pi)^3} \rightarrow \frac{d^{D-2} k}{(2\pi)^{D-1}}, \quad (1.5)$$

где $D = 4 + 2\epsilon$ – размерность пространства-времени.

Главное логарифмическое приближение приводит к резкому степенному росту сечений с энергией \sqrt{s} . Для партонных распределений это означает быстрый рост глюонной плотности $g(x, Q^2)$ в области малых x :

$$g(x, Q^2) \sim x^{-j_0}, \quad (1.6)$$

где j_0 – положение сингулярности t -канальной парциальной амплитуды с вакуумными квантовыми числами в j -плоскости [2]:

$$j_0 = 1 + \frac{4\alpha_s}{\pi} N \ln 2, \quad (1.7)$$

с $N = 3$ для КХД. Такое поведение противоречит ограничению Фруассара $\sigma_{tot} < \text{const}(\ln s)^2$, и, следо-

¹⁾ Петербургский институт ядерной физики РАН, Гатчина.

вательно, ГЛП не может использоваться в области асимптотически малых x . Тем не менее для доступных современным экспериментам параметров экранирующие поправки пренебрежимы [3], и мы не будем здесь обсуждать проблему унитаризации, возникающую при асимптотически высоких энергиях. С практической точки зрения представляется более важным определить область энергий и передач импульсов, где названный подход применим. Для этой цели необходимо вычислить радиационные поправки к ГЛП. Важность таких поправок подчеркивается тем обстоятельством, что численный коэффициент в линейной зависимости аргумента бегущей константы связи КХД α_s от виртуальности глюона находится вне точности ГЛП. Это существенно уменьшает предсказательную силу ГЛП, поскольку численные результаты могут сильно модифицироваться с изменением данного коэффициента.

В следующем за главным логарифмическим приближении, когда суммируются также все вклады типа $\alpha_s [\alpha_s \ln(1/x)]^n$, форма уравнения для $\mathcal{F}(x, k^2)$ остается прежней [4], так что проблема заключается в вычислении поправок к ядру уравнения $\mathcal{H}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$. В этом приближении ядро может быть представлено в следующей форме:

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = 2\omega(t_1)\delta^{(D-2)}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + \mathcal{H}_{real}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2). \quad (1.8)$$

Здесь $t_1 = -\mathbf{q}_1^2$, величина $\omega(t_1)$ определяется отличием реджевской траектории глюона $j(t_1) = 1 + \omega(t_1)$ от единицы, а $\mathcal{H}_{real}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ выражается через вероятности рождения реальных частиц при столкновении двух реджезованных глюонов с импульсами $q_1 = \beta p_A + q_{1\perp}$ и $-q_2 = \alpha p_B - q_{2\perp}$, где $\alpha, \beta \ll 1$ и $q_{1,2\perp}$ — их судакоские параметры и поперечные компоненты соответственно. Более определенно:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{real}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = & \frac{1}{2\mathbf{q}_1^2 \cdot \mathbf{q}_2^2 (N^2 - 1)} \sum_{i_1, i_2, f} \int d\mathbf{k} d\rho_f \times \\ & \times \delta^{(D)}\left(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \sum_{n \in \{f\}} \mathbf{k}_n\right) \times \\ & \times \left[\left| \gamma_{i_1 i_2}^{\{f\}}(q_1, q_2) \right|^2 - \left| \gamma_{i_1 i_2}^{\{f\}}(q_1, q_2) \right|_{asymp}^2 \right], \end{aligned} \quad (1.9)$$

где суммирование выполняется по цветовым индексам реджезованных глюонов i_1, i_2 и по всем типам реальных конечных состояний $\{f\}$, учет которых необходим в данном приближении. В нашем случае следующего за ГЛП приближения это могут быть одноглюонное, двухглюонное состояния и кварк-антикварковая пара. Интегрирование в (1.9) выполняется по квадрату инвариантной мас-

сы двух реджеонов $k = (q_1 - q_2)^2$ и по импульсам k_n рожденных частиц с учетом следующего выражения для элемента их фазового объема в D -мерном пространстве:

$$d\rho_f = \prod_{n \in \{f\}} \frac{d^{D-1} k_n}{(2\pi)^{D-1} \cdot 2\omega_n}. \quad (1.10)$$

Величины $\gamma_{i_1 i_2}^{\{f\}}(q_1, q_2)$ являются эффективными амплитудами рождения системы $\{f\}$ в реджеон-реджеонном столкновении. В случае рождения пары глюонов в правой части (1.9) необходимо произвести вычитание квадрата амплитуды, обозначенного индексом "asymp", при асимптотически больших значениях инвариантной массы реджеонов k . Вычитание выполняется, чтобы избежать двойного учета области больших k , так как в этой области амплитуда $\gamma_{i_1 i_2}^{\{GG\}}(q_1, q_2)$ факторизуется в произведение двух простых эффективных одноглюонных вершин, вклад которых уже учтен лидирующим членом в ядре уравнения БФКЛ в ГЛП. В случае рождения одного глюона или кварк-антикварковой пары вычитание отсутствует: для одного глюона инвариантная масса вообще фиксирована: $k = 0$; рождение кварк-антикварковой пары с большой инвариантной массой вклада в ядро уравнения БФКЛ не дает, так что следует положить $\left| \gamma_{i_1 i_2}^{\{Q\bar{Q}\}}(q_1, q_2) \right|_{asymp}^2 = 0$.

В главном порядке для реджевской траектории глюона имеем [2]

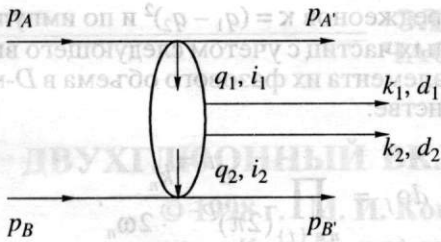
$$\omega^{LLA}(t_1) = \frac{g^2 t_1}{(2\pi)^{D-1}} \frac{N}{2} \int \frac{d^{D-2} k}{\mathbf{k}^2 (\mathbf{q}_1 - \mathbf{k})^2}, \quad (1.11)$$

и в столкновении двух реджеонов может рождаться только один глюон. Эффективная реджеон-реджеон-глюонная (РРГ) вершина в борновском приближении имеет вид

$$\gamma_{i_1 i_2}^d(q_1, q_2) = g T_{i_2 i_1}^d e_{\mu}^*(k) C^{\mu}(q_2, q_1), \quad (1.12)$$

где $T_{i_2 i_1}^d$ — матричные элементы генераторов цветовой группы $SU(N)$ в присоединенном представлении, $e(k)$ — вектор поляризации рожденного глюона, $k = q_1 - q_2$ — его импульс, а вектор C может быть представлен в следующей форме [2]:

$$\begin{aligned} C(q_2, q_1) = & -q_1 - q_2 + p_A \left(\frac{q_1^2}{k p_A} + 2 \frac{k p_B}{p_A p_B} \right) - \\ & - p_B \left(\frac{q_2^2}{k p_B} + 2 \frac{k p_A}{p_A p_B} \right). \end{aligned} \quad (1.13)$$



Схематическое изображение рождения глюонной пары в квазимультиреджевской кинематике.

Поэтому в данном приближении

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{real}^{LLA}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) &= \frac{1}{2(2\pi)^{D-1}(N^2-1)\mathbf{q}_1^2\mathbf{q}_2^2} \times \\
 &\times \sum_{i_1, i_2, d, \lambda} |\gamma_{i_1 i_2}^d(q_1, q_2)|^2 = \frac{g^2 N}{(2\pi)^{D-1}} \frac{2}{(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)^2}.
 \end{aligned}
 \tag{1.14}$$

Здесь символом λ обозначена спиральность рожденного глюона. Подставляя (1.11), (1.14) в (1.8) и полагая $D = 4$, получаем (1.3).

Нелидирующие поправки к ядру выражаются [4] через двухпетлевой вклад $\omega^{(2)}(t)$ в реджевскую траекторию глюона, однопетлевую поправку к РРГ-вершине $\gamma_{i_1 i_2}^d(q_1, q_2)$ и через вклады от рождения двух глюонов и кварк-антикварковой пары в квазимультиреджевской кинематике (КМРК), которые в свою очередь выражаются через упоминавшиеся выше реджеон-реджеон-глюон-глюонную (РРГГ) и реджеон-реджеон-кварк-антикварковую (РРКА) эффективные амплитуды. Поправки к РРГ-вершине и к реджевской глюонной траектории были вычислены соответственно в работах [5] и [6]. Рождение реальных кварк-антикварковых пар рассматривалось в работах [7]. Исследование вклада от рождения пары глюонов в КМРК было начато в [4], где найдены амплитуда этого процесса и соответственно эффективная РРГГ-амплитуда. Следующий шаг был сделан в работе [8], где амплитуды рождения двух глюонов и кварк-антикварковых пар в КМРК упрощены с использованием спирального представления, соответствующие поправки к ядру уравнения БФКЛ выражены через интегралы от квадратов этих спиральных амплитуд по относительным продольным и поперечным импульсам рожденных частиц, все инфракрасные расходимости выделены в точной форме и проверено сокращение таких расходимостей для суммарного вклада в ядро уравнения БФКЛ от реальных и виртуальных кварк-антикварковых пар. В общем случае такое сокращение было продемонстрировано в работе [9].

В настоящей работе мы вычисляем полностью дифференциальное сечение рождения пары глю-

онов в КМРК и выражаем его через сечение взаимодействия реджеон-реджеон \rightarrow глюон-глюон. Интегрируя затем это сечение по относительным продольным и поперечным импульсам рожденных глюонов, находим двухглюонную поправку к ядру уравнения БФКЛ.

В разд. 2 представлено выражение для амплитуды рождения пары глюонов в КМРК в глюон-глюонных столкновениях. В разд. 3 сечение этого процесса выражено через сечение взаимодействия реджеон-реджеон \rightarrow глюон-глюон и представлено полностью дифференциальное распределение для рожденных глюонов. Окончательный результат для двухглюонной поправки к ядру уравнения БФКЛ приведен в разд. 4. Раздел 5 содержит краткое обсуждение полученных результатов. Детали вычислений изложены в Приложениях А–В.

2. АМПЛИТУДА РОЖДЕНИЯ ДВУХ ГЛЮОНОВ В КМРК

Рассмотрим амплитуду рождения двух глюонов с фиксированной инвариантной массой в КМРК. Так как в данной кинематической области амплитуды имеют факторизованную форму [4], ограничимся, без потери общности, случаем, когда только одна пара глюонов рождается в глюон-глюонном столкновении. Этот процесс изображен схематически на рисунке, где также приведены обозначения всех импульсов и цветовых индексов глюонов, которые будут использованы ниже.

Для импульсов рожденных глюонов используем судаковскую параметризацию:

$$k_i = \beta_i p_A + \alpha_i p_B + k_{i\perp}, \quad s\alpha_i\beta_i = -k_{i\perp}^2, \tag{2.1}$$

где $s = (p_A + p_B)^2$ – квадрат полной энергии в с. ц. и., который предполагается стремящимся к бесконечности, и учтено условие массовой поверхности для рожденных глюонов. КМРК означает, что все $k_{i\perp}$ фиксированы (т.е. не увеличиваются с ростом s) и

$$\beta_A \gg \beta_1 \sim \beta_2 \gg \beta_B, \quad \alpha_A \ll \alpha_1 \sim \alpha_2 \ll \alpha_B. \tag{2.2}$$

Квадрат инвариантной массы рожденной пары $k = (q_1 - q_2)^2 = (k_1 + k_2)^2$ в КМРК имеет тот же порядок величины, что и $|k_{i\perp}^2|$.

Амплитуда рассматриваемого процесса была вычислена в работе [4], она имеет следующую факторизованную форму:

$$\begin{aligned}
 A_{2 \rightarrow 4} &= 2s g^2 \delta_{\lambda_A, \lambda_B} T_{A'A}^i \frac{1}{q_{1\perp}} \times \\
 &\times \gamma_{i_1 i_2}^{d_1 d_2}(q_1, q_2) \frac{1}{q_{2\perp}} T_{B'B}^j \delta_{\lambda_B, \lambda_B},
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

где λ_i – спиральности соответствующих частиц. Эффективная РРГГ-амплитуда $\gamma_{i_1 i_2}^{d_1 d_2}(q_1, q_2)$ дается выражением

$$\gamma_{i_1 i_2}^{d_1 d_2}(q_1, q_2) = g^2 e_{\alpha_1}^*(k_1) e_{\alpha_2}^*(k_2) \times \quad (2.4)$$

$$\times [T_{i_1 j_1}^{d_1} T_{j_2 i_2}^{d_2} A^{\alpha_1 \alpha_2}(k_1, k_2) + T_{i_1 j_1}^{d_2} T_{j_2 i_2}^{d_1} A^{\alpha_2 \alpha_1}(k_2, k_1)],$$

в котором тензор $A^{\alpha_1 \alpha_2}(k_1, k_2)$, полученный в [4], удовлетворяет условиям поперечности к соответствующим импульсам:

$$k_1^{\alpha_1} A_{\alpha_1 \alpha_2}(k_1, k_2) = k_2^{\alpha_2} A_{\alpha_1 \alpha_2}(k_1, k_2) = 0. \quad (2.5)$$

Благодаря соотношениям (2.5), каждое из двух слагаемых в правой части (2.4) является инвариантом относительно независимых калибровочных преобразований векторов поляризации глюонов $e^{\alpha_i}(k_i) \rightarrow e^{\alpha_i}(k_i) + c k_i^{\alpha_i}$, что позволяет нам выбирать удобную калибровку для каждого из рожденных глюонов без введения духов Фаддеева-Попова. Следуя работе [8], будем использовать для каждого из глюонов свою светоконусную калибровку:

$$e_{\alpha}(k_1) k_1^{\alpha} = e_{\alpha}(k_1) p_A^{\alpha} = 0, \quad (2.6)$$

$$e_{\alpha}(k_2) k_2^{\alpha} = e_{\alpha}(k_2) p_B^{\alpha} = 0.$$

Тогда векторы поляризации могут быть представлены в форме

$$e(k_1) = e_{\perp}(k_1) - \frac{(k_1 e_{\perp}(k_1))}{k_1 p_A} p_A, \quad (2.7)$$

$$e(k_2) = e_{\perp}(k_2) - \frac{(k_2 e_{\perp}(k_2))}{k_2 p_B} p_B,$$

и их свертки с тензором $A_{\alpha_1 \alpha_2}(k_1, k_2)$ могут быть выражены через тензор $c_{\alpha_1 \alpha_2}(k_1, k_2)$, определенный следующим образом:

$$e_{\alpha_1}^*(k_1) e_{\alpha_2}^*(k_2) A^{\alpha_1 \alpha_2}(k_1, k_2) \equiv \quad (2.8)$$

$$\equiv 4 e_{\perp \alpha_1}^*(k_1) e_{\perp \alpha_2}^*(k_2) c^{\alpha_1 \alpha_2}(k_1, k_2),$$

и имеющий только поперечные компоненты. В соответствии с этим определением получим [8]

$$c^{\mu\nu}(k_1, k_2) = \frac{(q_1 - k_1)_{\perp}^{\mu} (q_1 - k_1)_{\perp}^{\nu}}{t} -$$

$$- \frac{(q_1 - k_1)_{\perp}^{\mu}}{\kappa} \left(k_1 - \frac{x}{1-x} k_2 \right)_{\perp}^{\nu} +$$

$$+ \left(k_2 - \frac{x k_{2\perp}^2}{(1-x) k_{1\perp}^2} k_1 \right)_{\perp}^{\mu} \frac{(q_1 - k_1)_{\perp}^{\nu}}{\kappa} - \frac{k_{1\perp}^{\mu} k_{1\perp}^{\nu} x t_2}{\kappa k_{1\perp}^2} \quad (2.9)$$

$$- \frac{k_{2\perp}^{\mu} k_{2\perp}^{\nu} x t_1}{\kappa Z} - \frac{k_{1\perp}^{\mu} k_{2\perp}^{\nu}}{\kappa} \left(1 - \frac{x t}{(1-x) k_{1\perp}^2} \right) + \frac{k_{2\perp}^{\mu} k_{1\perp}^{\nu}}{\kappa} -$$

$$- \frac{1}{2} g_{\perp\perp}^{\mu\nu} \left(1 + \frac{t}{\kappa} - \frac{(1-x) k_{1\perp}^2}{x t} + \frac{x k_{2\perp}^2}{(1-x) \kappa} - \right.$$

$$\left. - \frac{(1-x) k_{1\perp}^2}{x \kappa} - \frac{x t_1 k_{2\perp}^2}{\kappa Z} - \frac{x t_2}{\kappa} \right).$$

Нами использованы следующие обозначения (так как бьеркеновская переменная ниже не появляется, использование символа x для другой величины не может привести к недоразумениям):

$$x = \frac{\beta_1}{\beta} = 1 - \frac{\beta_2}{\beta}, \quad \beta = \beta_1 + \beta_2,$$

$$t = (q_1 - k_1)^2 = \frac{1}{x} ((k_1 - x q_1)_{\perp}^2 + x(1-x) q_{1\perp}^2),$$

$$\kappa = (k_1 + k_2)^2 = - \frac{((1-x) k_1 - x k_2)_{\perp}^2}{x(1-x)}, \quad (2.10)$$

$$Z = (1-x) k_{1\perp}^2 + x k_{2\perp}^2,$$

$$t_1 = q_{1\perp}^2, \quad t_2 = q_{2\perp}^2,$$

$$\Delta_{\perp} = (q_1 - q_2)_{\perp} = (k_1 + k_2)_{\perp},$$

а $g_{\perp\perp}^{\mu\nu}$ является метрическим тензором в подпространстве, поперечном к плоскости (p_A, p_B) :

$$g_{\perp\perp}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{p_A^{\mu} p_B^{\nu} + p_B^{\mu} p_A^{\nu}}{(p_A p_B)}. \quad (2.11)$$

Следует заметить, что, так как мы применяем различные калибровки для двух рожденных глюонов, второе слагаемое в правой части (2.4) не может быть получено простой заменой $k_1 \leftrightarrow k_2$ из равенства (2.8). Вместо этого имеем [8, 10]

$$e_{\alpha_1}^*(k_1) e_{\alpha_2}^*(k_2) A^{\alpha_2 \alpha_1}(k_2, k_1) \equiv 4 e_{\perp \alpha_1}^*(k_1) e_{\perp \alpha_2}^*(k_2) \times \quad (2.12)$$

$$\times \Omega^{\alpha_1 \beta_1}(k_1) \Omega^{\alpha_2 \beta_2}(k_2) c_{\beta_2 \beta_1}(k_2, k_1),$$

где

$$\Omega^{\alpha\beta}(k) = g_{\perp\perp}^{\alpha\beta} - 2 \frac{k_{\perp}^{\alpha} k_{\perp}^{\beta}}{k_{\perp}^2}. \quad (2.13)$$

Тензор $\Omega^{\alpha\beta}(k)$ служит для преобразования от калибровки $(e(k) p_A) = 0$ к калибровке $(e(k) p_B) = 0$ и наоборот.

Напомним, что выражение для амплитуды (2.3) с РРГГ-амплитудой, определенной соотношениями (2.4), (2.7)–(2.13), справедливо не только в КМРК, где $\beta_1 \sim \beta_2$, но также и в мультiredжевской кинематике, когда $\beta_1 \gg \beta_2$ (или $\beta_2 \gg \beta_1$). Эта кинематика соответствует случаю большой инвариантной массы рожденных глюонов, когда, как уже упоминалось выше, РРГГ-амплитуда факторизуется в произведение двух РРГ-вершин. Например, если $\beta_1 \gg \beta_2$, имеем

$$\begin{aligned} \gamma_{i_1 i_2}^{d_1 d_2}(q_1, q_2) &= \gamma_{i_1 j}^{d_1}(q_1, q_1 - k_1) \times \\ &\times \frac{1}{(q_1 - k_1)_\perp} \gamma_{j i_2}^{d_2}(q_1 - k_1, q_2). \end{aligned} \quad (2.14)$$

3. СЕЧЕНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РЕДЖЕОН-РЕДЖЕОН \rightarrow ГЛЮОН-ГЛЮОН

Сечение процесса, изображенного на рисунке, усредненное по цветам и поляризациям начальных частиц и просуммированное по квантовым числам конечных глюонов, может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} d\sigma_{2 \rightarrow 4} &= \frac{4N^2 \alpha_s^2}{(N^2 - 1)(2\pi)^{2D-4}} \times \\ &\times \frac{d^{D-2} q_{1\perp} d^{D-2} q_{2\perp} d\beta}{(q_{1\perp}^2 q_{2\perp}^2)^2} \frac{d\beta}{\beta} \kappa d\kappa d\sigma_{RRGG}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В последнем равенстве мы ввели сечение взаимодействия РРГГ, определенное следующим образом:

$$\begin{aligned} d\sigma_{RRGG} &= \frac{1}{2!} \frac{1}{(N^2 - 1) \cdot 2\kappa} \sum_{i_1, i_2, d_1, d_2, \lambda_1, \lambda_2} |\gamma_{i_1 i_2}^{d_1 d_2}(q_1, q_2)|^2 \times \\ &\times (2\pi)^D \delta^{(D)}(q_1 - q_2 - k_1 - k_2) d\rho_2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $d\rho_2$ – элемент двухчастичного фазового объема, определяемый соотношением (1.10), а множитель $1/2!$ возник из-за тождественности глюонов.

Заметим, что в случае двухглюонной поправки к ядру $\mathcal{H}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ подразумевалось, что тождественность конечных частиц учитывается в равенстве (1.9) подходящим ограничением на фазовый объем, по которому производится интегрирование. Теперь эта поправка может быть представлена в виде интеграла от РРГГ-сечения взаимодействия (3.2) по квадрату инвариантной массы реджеонов:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{RRGG}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) &= \\ &= \int \frac{\kappa d\kappa}{q_{1\perp}^2 q_{2\perp}^2 (2\pi)^D} [d\sigma_{RRGG} - d\sigma_{RRGG}^{asympt}] \end{aligned} \quad (3.3)$$

без ограничений на область интегрирования.

В переменных $x, k_{1\perp}$ из определения (3.2) с использованием соотношений (2.4), (2.8) и (2.12) получаем

$$\begin{aligned} \kappa d\kappa d\sigma_{RRGG} &= \frac{2g^4 N^2}{(2\pi)^{D-2}} \frac{dx}{x(1-x)} d^{D-2} k_{1\perp} \times \\ &\times [(c^{\alpha_1 \alpha_2}(k_1, k_2))^2 + (c^{\alpha_1 \alpha_2}(k_2, k_1))^2 + \\ &+ c^{\alpha_1 \alpha_2}(k_1, k_2) \Omega_{\alpha_1 \beta_1}(k_1) \Omega_{\alpha_2 \beta_2}(k_2) c^{\beta_2 \beta_1}(k_2, k_1)]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь тензор $c^{\alpha_1 \alpha_2}(k_1, k_2)$ определяется формулой (2.9), $c^{\alpha_1 \alpha_2}(k_2, k_1)$ получается из него в результате замены $x \longleftrightarrow 1-x, k_{1\perp} \longleftrightarrow k_{2\perp}$, а тензор $\Omega_{\alpha\beta}(k)$ определяется равенством (2.13); кроме того, использованы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} T_{i_1 j}^{d_1} T_{j i_2}^{d_2} T_{i_1 k}^{d_1} T_{k i_2}^{d_2} &= (N^2 - 1) N^2, \\ T_{i_1 j}^{d_1} T_{j i_2}^{d_2} T_{i_1 k}^{d_1} T_{k i_2}^{d_1} &= (N^2 - 1) N^2 / 2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Так как все векторы, входящие в (3.4), (2.9), являются поперечными, в дальнейшем будем опускать знак ортогональности.

Вычисление свертки тензоров в правой части равенства (3.4) довольно громоздко, хотя результат сравнительно прост. Основные этапы этой процедуры приведены в Приложении А. Используя представленные там результаты, получаем

$$\begin{aligned} \kappa d\kappa d\sigma_{RRGG} &= \frac{g^4 N^2}{(2\pi)^{D-2}} \frac{dx d^{D-2} k_1}{x(1-x)} \left[\left[\frac{1}{\kappa t} \left[2xq_1^2 q_2^2 - \right. \right. \right. \\ &- \left. \left. \left(\frac{1+\epsilon}{2} \right) (1-x) ((q_1^2 - 2xq_1 \Delta)^2 + (q_1^2)^2) + \right. \right. \\ &+ \left. \left. (1+\epsilon)(1-x)^2 q_1^2 (q_1^2 - 2k_1 q_1) \right] + \right. \\ &+ 4(1+\epsilon)(1-x)(q_1^2 - x\Delta^2 - 2k_1 q_2) \frac{(k_1 q_1)^2}{\kappa t^2} + \\ &+ 2(1+\epsilon)(q_1^2 - x\Delta^2 - 2k_1 q_2) \frac{(q_1(k_1 - x\Delta))^2}{\kappa^2 t} - \\ &- 2(1+\epsilon)(1-x)(q_2^2 + x\Delta^2 + 2k_1 q_2) \frac{(k_1 q_1)^2}{\kappa t} - \\ &- \left. \left. \frac{2xq_1^2}{\kappa z t} \left[\left(\frac{q_2^2}{2} - (1-x)(q_1^2 - 2k_1 q_1) \right)^2 - \right. \right. \right. \\ &- \left. \left. \left. \left(\frac{1-\epsilon}{2} \right) (1-x)^2 (q_1^2 - 2k_1 q_1)^2 \right] \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2it} \left[-2q_1^2 q_2^2 + \left(\frac{1+\epsilon}{2} \right) x(1-x) ((q_1^2)^2 + (\Delta^2 - q_2^2)^2) \right] + \\
 & + \frac{x(1-x)q_1^2}{2\kappa Z} [(1+\epsilon)(1-2x(1-x))q_1^2 - \\
 & - 2\epsilon x(1-x)(\Delta^2 - q_2^2)] + \left(\frac{x(1-x)q_1^2}{Z} \right)^2 \times \\
 & \times \left[\left(\frac{1+\epsilon}{2} \right) - (3+2\epsilon)x(1-x) \right] + (1+\epsilon)(1-4x) \times \\
 & \times \left(\frac{(1-x)q_1^2}{t} \right)^2 + \frac{(1-x)q_1^2 q_2^2 (2k_1 q_1 - q_1^2)}{2tk_1^2 k_2^2} - \\
 & - \frac{x(q_1^2)^2 q_2^2}{2\kappa t k_1^2} + \frac{(q_1^2)^2 (q_2^2)^2}{4t\tilde{t} k_1^2 k_2^2} - \frac{xq_1^2 q_2^2}{2(1-x)\kappa k_1^2} + \frac{x^2 q_1^2 q_2^2}{2Zk_1^2} + \\
 & + \frac{q_1^2 q_2^2}{2k_1^2 k_2^2} + \left\{ -4(1+\epsilon)(1-x)^2 q_1^2 \frac{(q_1(k_1 - xq_1))}{t^2} + \right. \\
 & + (1+\epsilon)(1-2x)x(1-x)q_1^2 \frac{(q_1(k_1 - x\Delta))}{\kappa Z} - \\
 & - 2(1+\epsilon)(1-2x)x(1-x)q_1^2 \frac{(\Delta(k_1 - x\Delta))}{\kappa Z^2} + \\
 & \left. + \left(\frac{x(1-x)q_1^2}{\kappa Z} \right)^2 \Delta^\mu \Delta^\nu - \frac{2x(1-x)q_1^2}{\kappa^2 Z} \Delta^\mu q_1^\nu \right\} \times \\
 & \times \left. \left(2(1+\epsilon)(k_1 - x\Delta)_\mu (k_1 - x\Delta)_\nu - (k_1 - x\Delta)^2 g_{\mu\nu} \right) \right\} + \\
 & + (x \longleftrightarrow 1-x, k_1 \longleftrightarrow k_2) \Big],
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

где введено новое определение

$$\begin{aligned}
 \tilde{t} & = t(x \longleftrightarrow 1-x, k_1 \longleftrightarrow k_2) = \frac{1}{1-x} \times \\
 & \times ((k_2 - (1-x)q_1)^2 + x(1-x)q_1^2) = \frac{1}{1-x} \times \\
 & \times ((k_1 + (q_2 - xq_1))^2 + x(1-x)q_1^2) = \\
 & = q_1^2 + q_2^2 - \kappa - t = q_1^2 + q_2^2 - \Delta^2 + \frac{Z}{x(1-x)} - t.
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

Члены в фигурных скобках в выражении (3.6) исчезают при интегрировании по k_1 . Относительно других членов заметим следующее. Если обозначить через I_n интегралы по $d^{D-2}k_1$ с весовым множителем $(2\pi)^{1-D} \mu^{4-D}$ от последовательных чле-

нов с различными знаменателями в круглых скобках в правой части соотношения (3.6), где μ — точка нормировки, то получим, что

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{\kappa d\kappa d\sigma_{RRGG}}{dx d^{D-2}k_1} d^{D-2}k_1 = \\
 & = \frac{2\pi g^4 \mu^{2\epsilon} N^2}{x(1-x)} \left[\sum_{n=1}^{15} I_n + (x \longleftrightarrow 1-x) \right].
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

Все I_n сходятся при больших k_1 для $D < 5$ и имеют в физическом пределе $D \rightarrow 4$ не более чем логарифмические расходимости в инфракрасной области. Некоторые из этих интегралов вычислены нами для произвольной размерности пространства D , для других получено только несколько необходимых для наших целей членов разложения в ряд по степеням $\epsilon = (D-4)/2$. Так как уравнение БФКЛ (1.1) содержит интегрирование по q_2 или, что эквивалентно, по Δ и ядро сингулярно при $\Delta = 0$, то при выполнении разложения по ϵ необходимо быть осторожными и удерживать все члены, дающие ненулевой вклад в физическом пределе $\epsilon \rightarrow 0$ после интегрирования по x и по Δ . Результаты вычисления интегралов I_n представлены в Приложении Б. Используя приведенные там выражения для этих интегралов, можно получить распределение по x для рождения пары глюонов в КМРК. Хотя нашей главной задачей является вычисление двухглюонного вклада в ядро уравнения БФКЛ, мы приводим здесь также результаты для полностью дифференциального распределения и для распределения по x , так как они могут быть использованы при описании экспериментов по двухструйному рождению адронов в КМРК.

4. ВКЛАД В ЯДРО УРАВНЕНИЯ БФКЛ

В соответствии с равенством (3.3), чтобы получить двухглюонный вклад в ядро уравнения БФКЛ из соотношения (3.8), нам необходимо выполнить интегрирование по x , используя выражения для интегралов I_n из Приложения Б. Но это не лучший способ добиться поставленной цели, так как данные выражения очень громоздки. На самом деле удобнее сделать шаг назад и вернуться к полностью дифференциальному распределению. Дело в том, что после интегрирования по k_1 с использованием фейнмановской параметризации возникают дополнительные интегрирования по фейнмановским переменным. При вычислении распределения по x , в конечных выражениях Приложения Б, мы были вынуждены выполнить эти интегрирования при фиксированном значении переменной x . Но при вычислении вклада в ядро уравнения БФКЛ можно менять порядки интегрирования по x и по фейнмановским параметрам таким образом, что интегрирование диффе-

ренциального распределения будет выполнено намного проще.

После незначительных преобразований легко получить из равенства (3.6) следующее удобное выражение для интеграла от РРГГ-сечения взаимодействия σ_{RRGG} по квадрату инвариантной массы реджеонов K :

$$\int \frac{\kappa d\kappa d\sigma_{RRGG}}{4\pi g^4 \mu^{2\epsilon} N^2} = \int_{\delta_R}^{1-\delta_R} \frac{dx}{x(1-x)} \int \mu^{-2\epsilon} \frac{d^{D-2} k_1}{(2\pi)^{D-1}} \times$$

$$\times \left\{ (1+\epsilon)(1-x) \frac{4(k_1 q_1)^2 + (1-4x)(q_1^2)^2}{t^2} + \right.$$

$$+ \frac{x(1-x)q_1^2}{\kappa Z} [2q_2^2 + (1+\epsilon)(2(1-x)(k_1 q_1) -$$

$$- x(1-x)q_1^2 - k_2^2) - \epsilon x(1-x)(\Delta^2 - q_2^2)] +$$

$$+ \left(\frac{x(1-x)q_1^2}{Z} \right)^2 \left[\frac{(1+\epsilon)}{2} - (3+2\epsilon)x(1-x) \right] +$$

$$+ \left(\frac{-xq_1^2 q_2^2}{2(1-x)\kappa k_1^2} + \frac{x^2 q_1^2 q_2^2}{2k_1^2 Z} + \frac{xq_1^2 q_2^2}{k_1^2 k_2^2} \right) +$$

$$+ \frac{1}{\kappa t} [-2(1-x)q_1^2 q_2^2 + (1+\epsilon)(1-x)(q_1^2)^2 +$$

$$+ \frac{(1+\epsilon)}{2} x(1-x)(2(1-x)q_1^2(\Delta^2 - q_2^2) - x(q_1^2)^2 -$$

$$- x(\Delta^2 - q_2^2)^2) - 2(1+\epsilon)(2-x)(1-x)q_1^2(k_1 q_1) +$$

$$+ 2(1+\epsilon)(1-x)((k_1 q_1)^2 + ((k_1 - x\Delta)q_1)^2) +$$

$$+ (1+\epsilon)q_1^2 k_2^2] - \frac{xq_1^2 k_2^2((1+\epsilon)k_2^2 - 2q_2^2)}{\kappa Z t}$$

$$- \frac{xq_1^2(q_2^2)^2}{2\kappa Z t} - \frac{xq_2^2(q_1^2)^2}{2\kappa t k_1^2} + \frac{(1-x)(2(k_1 q_1) - q_1^2)q_1^2 q_2^2}{2tk_1^2 k_2^2} +$$

$$+ \frac{1}{2it} \left[-2q_1^2 q_2^2 + \frac{(1+\epsilon)}{2} x(1-x)((\Delta^2 - q_2^2)^2 + (q_1^2)^2) - \right.$$

$$\left. - 4(1+\epsilon)x(1-x)(k_1 q_1)^2 \right] + \left. \frac{(q_1^2)^2 (q_2^2)^2}{4it k_1^2 k_2^2} \right\}.$$

Малый промежуточный параметр δ_R введен для устранения вклада мультiredжевской кинематики, который, как это уже отмечалось, учитывается главным членом в ядре уравнения БФКЛ. При вычислении интеграла в правой части соотношения (4.1) порядок предельных переходов должен быть следующим: сначала при фиксированном,

отличном от нуля значении параметра ϵ берется предел $\delta_R \rightarrow 0$, который существует только для вклада в ядро (3.3) после вычитания асимптотики подынтегрального выражения при больших инвариантных массах реджеонов; затем в выражении для двухглюонного вклада в ядро уравнения БФКЛ, в котором зависимость от промежуточного параметра δ_R уже устранена, выполняется с необходимой точностью разложение в ряд вблизи $\epsilon \rightarrow 0$. Технически описанная выше процедура сводится к отбрасыванию членов, пропорциональных $\ln(\delta_R)$, возникающих при интегрировании в правой части равенства (4.1), и выполнению предельного перехода $\delta_R \rightarrow 0$ в оставшемся выражении до разложения в ряд по степеням ϵ . Что касается самого разложения по $\epsilon \rightarrow 0$, разумеется, оно вовсе не является обязательным на данном этапе БФКЛ-анализа, а связано просто с невозможностью точного вычисления интеграла (4.1) при произвольной размерности пространства-времени $D = 4 + 2\epsilon$.

Здесь необходимо объяснить происхождение ультрафиолетовой расходимости при больших k_1 в интеграле (4.1) при $D \rightarrow 4$, которая является фиктивной, как это следует из полностью дифференциального распределения (3.6), обеспечивающего, очевидно, ультрафиолетовую сходимость интеграла по поперечным импульсам. Дело в том, что при упрощении дифференциального распределения (3.6) с целью получения формулы (4.1) нами были отброшены члены, исчезающие при интегрировании по k_1 . Некоторые из отброшенных членов имели такую структуру, что при их интегрировании по импульсу с использованием регуляризации как ультрафиолетовых, так и инфракрасных расходимостей одним и тем же параметром ϵ эти два различных типа расходимостей формально сокращались между собой, порождая явную ультрафиолетовую расходимость в оставшемся интеграле. Из изложенного ясно, что все особенности при $\epsilon \rightarrow 0$ конечного выражения для двухглюонного вклада в ядро уравнения БФКЛ имеют чисто инфракрасное происхождение.

Теперь обозначим вклад n -го слагаемого в подынтегральном выражении в правую часть равенства (4.1) как J_n и будем вычислять эти интегралы отдельно. Результаты вычисления интегралов J_n представлены в Приложении В. Используя приведенные там выражения и соотношение (3.3), связывающее РРГГ-сечение взаимодействия с соответствующим вкладом в ядро уравнения БФКЛ, а также учитывая, что технически вычитание асимптотического выражения в (3.3) сводится к отбрасыванию членов, содержащих $\ln(\delta_R)$,

получаем окончательный ответ для двухглюонного вклада в ядро уравнения БФКЛ:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{RRGG}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) &= \frac{4g_\mu^4 \mu^{-2\epsilon}}{\pi^{1+\epsilon} \Gamma(1-\epsilon) \mathbf{q}_1^2 \cdot \mathbf{q}_2^2} \times \\
 &\times \left\{ \frac{2\mathbf{q}_1^2 \cdot \mathbf{q}_2^2 (\Delta^2)^\epsilon}{\Delta^2 (\mu^2)^\epsilon} \left[\frac{1}{\epsilon^2} - \frac{111}{6\epsilon} - \frac{2\pi^2}{3} + \frac{67}{18} + \right. \right. \\
 &\left. \left. + \epsilon \left(\frac{11\pi^2}{36} - \frac{202}{27} + 9\zeta(3) \right) \right] - \frac{(\mathbf{q}_1^2 + \mathbf{q}_2^2)(2\mathbf{q}_1^2 \cdot \mathbf{q}_2^2 - 3(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)^2)}{8\mathbf{q}_1^2 \cdot \mathbf{q}_2^2} - \right. \\
 &\left. - \left(\frac{11}{3} \frac{\mathbf{q}_1^2 \cdot \mathbf{q}_2^2}{(\mathbf{q}_1^2 - \mathbf{q}_2^2)} + \frac{(2\mathbf{q}_1^2 \cdot \mathbf{q}_2^2 - 3(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)^2)}{16\mathbf{q}_1^2 \cdot \mathbf{q}_2^2} (\mathbf{q}_1^2 - \mathbf{q}_2^2) \right) \times \right. \\
 &\times \ln \left(\frac{\mathbf{q}_1^2}{\mathbf{q}_2^2} \right) - \frac{2}{3} \frac{\mathbf{q}_1^2 \cdot \mathbf{q}_2^2}{(\mathbf{q}_1^2 - \mathbf{q}_2^2)^2} \left[\left(1 - \frac{2(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)^2}{\mathbf{q}_1^2 \cdot \mathbf{q}_2^2} \right)^2 \right] \times \\
 &\times \left(\mathbf{q}_1^4 - \mathbf{q}_2^4 - 2\mathbf{q}_1^2 \cdot \mathbf{q}_2^2 \ln \left(\frac{\mathbf{q}_1^2}{\mathbf{q}_2^2} \right) \right) + \\
 &+ (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2) \left(2\mathbf{q}_1^2 - 2\mathbf{q}_2^2 - (\mathbf{q}_1^2 + \mathbf{q}_2^2) \ln \left(\frac{\mathbf{q}_1^2}{\mathbf{q}_2^2} \right) \right) \Bigg] + \\
 &+ \frac{2\mathbf{q}_1^2 \cdot \mathbf{q}_2^2 (\Delta \cdot (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2))}{\Delta^2 \cdot (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)^2} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\mathbf{q}_1^2}{\mathbf{q}_2^2} \right) \ln \left(\frac{\mathbf{q}_1^2 \cdot \mathbf{q}_2^2 \cdot \Delta^4}{(\mathbf{q}_1^2 + \mathbf{q}_2^2)^4} \right) + \right. \\
 &+ L \left(\frac{\mathbf{q}_1^2}{\mathbf{q}_2^2} \right) - L \left(\frac{\mathbf{q}_2^2}{\mathbf{q}_1^2} \right) \Bigg] - \left[4\mathbf{q}_1^2 \cdot \mathbf{q}_2^2 + \frac{(\mathbf{q}_1^2 - \mathbf{q}_2^2)^2}{4} + \right. \\
 &+ \left. (2\mathbf{q}_1^2 \cdot \mathbf{q}_2^2 - 3\mathbf{q}_1^4 - 3\mathbf{q}_2^4) \frac{(2\mathbf{q}_1^2 \cdot \mathbf{q}_2^2 - (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)^2)}{16\mathbf{q}_1^2 \cdot \mathbf{q}_2^2} \right] \times \\
 &\times \int_0^\infty \frac{dx}{(\mathbf{q}_1^2 + x^2 \mathbf{q}_2^2)} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - \\
 &- \mathbf{q}_1^2 \cdot \mathbf{q}_2^2 \left(1 - \frac{(\Delta \cdot (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2))^2}{\Delta^2 \cdot (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)^2} \right) \times \\
 &\times \left(\int_0^1 - \int_1^\infty \right) dz \frac{\ln((z\mathbf{q}_1)^2 / \mathbf{q}_2^2)}{(\mathbf{q}_2 - z\mathbf{q}_1)^2}.
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

Здесь $\zeta(z)$ – функция Римана,

$$\bar{g}_\mu^2 = \frac{g_\mu^2 N \Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{2+\epsilon}}, \quad g_\mu = g_\mu^\epsilon, \quad \psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)},
 \tag{4.3}$$

$$L(z) = \int_0^z \frac{dt}{t} \ln(1-t),$$

и мы перешли к $(D-2)$ -мерным евклидовым векторам.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Правая часть равенства (4.2) при $\mathbf{q}_1^2 - \mathbf{q}_2^2 = 0$ и $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = 0$ содержит несколько членов с нефизическими особенностями. Несложно проверить, что единственной реальной особенностью является сингулярность при $\Delta^2 = 0$, а все другие сокращаются между собой. Что касается особенности при $\Delta^2 = 0$, то выражение (4.2) справедливо с точностью, позволяющей вычислить регулярный в физическом пределе $\epsilon \rightarrow 0$ вклад в интегральную часть уравнения БФКЛ (1.1). Для членов, инфракрасно расходящихся при $\Delta = 0$ в интеграле по Δ в правой части (1.1), область таких малых значений $|\Delta|$, где $\ln(\mu/|\Delta|) \sim 1/\epsilon$, дает существенный вклад при интегрировании, и, следовательно, мы не можем разложить $(\Delta^2/\mu^2)^\epsilon$ в ряд по степеням ϵ в этих слагаемых.

Заметим, что вычисленный двухглюонный вклад в ядро уравнения БФКЛ симметричен по отношению к замене $\mathbf{q}_1 \leftrightarrow -\mathbf{q}_2$. В стартовом выражении (4.1) причину этой симметрии увидеть не так просто. Тем не менее симметрия существует, отражая инвариантность выражения (3.4) и области интегрирования относительно преобразований “лево-правой симметрии” [8]:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}_1 &\leftrightarrow -\mathbf{q}_2, \quad \mathbf{k}_1 \leftrightarrow \mathbf{k}_2, \\
 x &\leftrightarrow \frac{x\mathbf{k}_2^2}{((1-x)\mathbf{k}_1^2 + x\mathbf{k}_2^2)}.
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

Члены в поправке к ядру (4.2), дающие в уравнение БФКЛ сингулярный в физическом пределе $\epsilon \rightarrow 0$ вклад, совпадают с соответствующими членами, вычисленными в работе [8]. В уравнении БФКЛ они сокращаются с сингулярными частями поправок к эффективной РРГ-вершине и к реджевской траектории глюона, как это было продемонстрировано в [9].

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 95-02-04609 и 96-02-19299а).

Приложение А

Для нахождения свертков тензоров в правой части равенства (3.4) удобно представить тензор $c^{\mu\nu}(k_1, k_2)$ (2.9) в следующей форме:

$$c^{\mu\nu}(k_1, k_2) = l_1^{\mu\nu} + l_2^{\mu\nu} + l_3^{\mu\nu}, \quad (\text{П.1})$$

где

$$l_1^{\mu\nu} = \frac{xq_1^2}{\kappa} \left[\frac{k_2^\mu k_2^\nu}{Z} + \frac{k_1^\mu ((1-x)k_1 - k_2)^\nu}{(1-x)k_1^2} - \frac{g^{\mu\nu}(1-x)}{2} \left(\frac{Z}{(1-x)} - \frac{k_1^2}{x} \right) \right], \quad (\text{П.2})$$

$$l_2^{\mu\nu} = \frac{1}{\kappa} \left[-\frac{q_1^\mu \Delta^\nu}{(1-x)} + \left(\Delta - \frac{x\Delta^2}{k_1^2} k_1 \right)^\mu q_1^\nu - \frac{2x}{k_1^2} k_1^\mu \left(\frac{(q_1 k_1)}{(1-x)} k_2 - (q_1 \Delta) k_1 \right)^\nu + (q_1 \Delta) g^{\mu\nu} \right], \quad (\text{П.3})$$

$$\Delta = k_1 - x\Delta, \quad (\text{П.4})$$

$$l_3^{\mu\nu} = \frac{xk_1^\mu (q_1 - k_1)^\nu}{k_1^2} + \frac{(q_1 - k_1)^\mu (q_1 - k_1)^\nu}{t} - \frac{g^{\mu\nu}(1-x)}{2-t} (q_1^2 - 2k_1 q_1). \quad (\text{П.5})$$

Вычисление отдельных произведений $l_i^{\mu\nu} l_{j\mu\nu}$ существенно проще вычисления всей свертки $c^{\mu\nu}(k_1, k_2) c_{\mu\nu}(k_1, k_2)$, хотя и остается по-прежнему довольно громоздким. Результаты могут быть представлены в следующем виде:

$$l_1^{\mu\nu} l_{1\mu\nu} = \frac{x^2 (q_1^2)^2}{\kappa^2} \left\{ \kappa \left(\frac{(k_1 k_2)}{k_1^2 Z} + \frac{(1-x)}{xZ} - \frac{1}{x(1-x)k_1^2} \right) + \left(\frac{1+\epsilon}{2} \right) \left[\frac{(1-x)}{Z} \kappa \left(1 - 2x - \frac{(2\Lambda\Delta)}{\kappa} \right) \right]^2 \right\}, \quad (\text{П.6})$$

$$l_2^{\mu\nu} l_{2\mu\nu} = \frac{1}{\kappa^2} \left\{ x(1-x)\kappa \left(-\frac{q_1^2}{(1-x)^2} - \frac{q_1^2 \Delta^2}{k_1^2} + \frac{2(q_1 k_1)(q_1 \Delta)}{(1-x)k_1^2} \right) + 2(1+\epsilon)(q_1 \Delta)^2 \right\}, \quad (\text{П.7})$$

$$l_3^{\mu\nu} l_{3\mu\nu} = \frac{x^2 q_1^2}{k_1^2} + \frac{x(1-x)(q_1 k_1)(q_1^2 - 2k_1 q_1)}{k_1^2 t} + \left(\frac{1+\epsilon}{2} \right) \left(\frac{(1-x)(q_1^2 - 2k_1 q_1)}{t} \right)^2, \quad (\text{П.8})$$

$$2l_1^{\mu\nu} l_{2\mu\nu} = -\frac{xq_1^2}{\kappa^2} \times \left\{ -2(1+\epsilon)(1-x) \left(1 - 2x - \frac{(2\Lambda\Delta)}{\kappa} \right) \frac{(q_1 \Delta) \kappa}{Z} + \kappa(q_1 k_1) \left(\frac{x\kappa}{k_1^2 Z} + \frac{(1-x)}{Z} + \frac{(1-3x+x^2)}{(1-x)k_1^2} \right) + \kappa(q_1 \Delta) \left(\frac{(1-2x)}{Z} - \frac{2}{k_1^2} \right) \right\}, \quad (\text{П.9})$$

$$2l_1^{\mu\nu} l_{3\mu\nu} = -\frac{xq_1^2}{\kappa} \left\{ (1+\epsilon)(1-x)^2 \frac{\kappa}{Zt} \times (q_1^2 - 2k_1 q_1) \left(1 - 2x - \frac{(2\Lambda\Delta)}{\kappa} \right) + \frac{1}{2(1-x)k_1^2 t} \times (q_1^2 (q_2^2 + (1-x)(q_1^2 - \Delta^2)) + 2(1-x)\kappa(q_1^2 - k_1 q_1)) + \frac{q_2^2}{2Zt} (q_2^2 - 4(1-x)(q_1^2 - 2k_1 q_1)) + \frac{4(1-x)q_1^2 - q_2^2}{2x(1-x)t} + \frac{x\Delta^2(2q_1 k_2 - \Delta^2)}{2k_1^2 Z} + \frac{1}{Z} \left((1-x)(q_1^2 - k_1 q_1) + \frac{(1-2x)}{2} (q_2^2 - \Delta^2) \right) + \frac{1}{2(1-x)k_1^2} \times (-2(1-3x+x^2)(q_1 k_1) + (1-x)\Delta^2 + xq_2^2 - 2q_1^2) \right\}, \quad (\text{П.10})$$

$$2l_2^{\mu\nu} l_{3\mu\nu} = \frac{1}{\kappa} \left\{ -2(1+\epsilon)(1-x)(q_1^2 - 2k_1 q_1) \frac{(q_1 \Delta)}{t} - x(1-x)(q_1^2 - 2k_1 q_1) \frac{(q_1 k_1) \kappa}{k_1^2 t} - \frac{x^2 q_1^2 \kappa}{k_1^2} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2x(q_1 k_1)(q_1 \Lambda)}{k_1^2} + \frac{xq_1^2}{(1-x)} + \frac{xq_1^2}{2(1-x)k_1^2 t} \times \\
 & \times (2(1-x)(q_1^2 - q_1 k_1) \kappa + q_1^2(q_2^2 + 2(1-x)q_2 \Delta)) + \\
 & + \frac{q_1^2}{2(1-x)t} (4(1-x)^2 q_1^2 - (1-2x)^2 q_2^2) + \frac{xq_1^2}{2(1-x)k_1^2} \times \\
 & \times (-2q_1 k_1 - q_1^2 + 2xq_1 \Delta + (1-4x+2x^2)\Delta^2) \}.
 \end{aligned}
 \tag{П.11}$$

После сложения и приведения подобных получаем

$$\begin{aligned}
 (c^{\mu\nu}(k_1, k_2))^2 &= \frac{1}{\kappa t} \left[2xq_1^2 q_2^2 - \left(\frac{1+\epsilon}{2} \right) (1-x) \times \right. \\
 & \times ((q_1^2 - 2xq_1 \Delta)^2 + (q_1^2)^2) + (1+\epsilon)(1-x)^2 \times \\
 & \times q_1^2 (q_1^2 - 2k_1 q_1) \left. \right] + \frac{x(1-x)q_1^2}{\kappa Z} [(1+\epsilon)(1-x)^2 q_1^2 - \\
 & - \epsilon x(1-x)(\Delta^2 - q_2^2) - 2(1+\epsilon)x(q_1 \Lambda)] + \\
 & + \left(\frac{x(1-x)q_1^2}{Z} \right)^2 \left[\left(\frac{1+\epsilon}{2} \right) - (3+2\epsilon)x(1-x) \right] + \\
 & + \left(\frac{1+\epsilon}{2} \right) \frac{(1-x)^2 q_1^2}{t^2} [(1-4x)q_1^2 - 4(q_1(k_1 - xq_1))] - \\
 & - \frac{xq_1^2 q_2^2}{2(1-x)\kappa k_1^2} + \frac{xq_1^2 q_2^2}{2k_1^2 Z} - \frac{x(q_1^2)^2 q_2^2}{2\kappa t k_1^2} - \frac{2xq_1^2}{\kappa Z t} \times \\
 & \times \left[\left(\frac{q_2^2}{2} - (1-x)(q_1^2 - 2k_1 q_1) \right)^2 - \right. \\
 & - \left. \left(\frac{1-\epsilon}{2} \right) (1-x)^2 (q_1^2 - 2k_1 q_1)^2 \right] + 2(1+\epsilon) \times \\
 & \times \left(\frac{q_1^2 - x\Delta^2 - 2k_1 q_2}{\kappa t} \right) \left(\frac{(1-x)(k_1 q_1)^2}{t} + \frac{(q_1 \Lambda)^2}{\kappa} \right) - \\
 & - 2(1+\epsilon)(1-2x)(x(1-x)q_1^2)^2 \frac{(\Lambda \Delta)}{\kappa Z^2} + \\
 & + \left(\frac{x(1-x)q_1^2}{\kappa Z} \right)^2 \Delta^\mu \Delta^\nu - \frac{2x(1-x)q_1^2}{\kappa^2 Z} \Delta^\mu q_1^\nu \times \\
 & \times (2(1+\epsilon)\Lambda_\mu \Lambda_\nu - \Lambda^2 g_{\mu\nu}).
 \end{aligned}
 \tag{П.12}$$

Для вычисления $\tilde{c}^{\mu\nu} \tilde{c}'_{\nu\mu}$, где

$$\tilde{c}^{\mu\nu} = \left(g^{\mu\rho} - 2 \frac{k_1^\mu k_1^\rho}{k_1^2} \right) c_\rho^\nu(k_1, k_2)
 \tag{П.13}$$

и штрих означает замену $x \longleftrightarrow 1-x$, $k_1 \longleftrightarrow k_2$, удобно воспользоваться следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
 2\tilde{c}^{\mu\nu} \tilde{c}'_{\nu\mu} &= (\tilde{c}^{\mu\nu} + \tilde{c}'^{\nu\mu})(\tilde{c}_{\mu\nu} + \tilde{c}'_{\nu\mu}) - \\
 & - \tilde{c}^{\mu\nu} \tilde{c}_{\mu\nu} - (\tilde{c}'^{\mu\nu} \tilde{c}'_{\mu\nu})
 \end{aligned}
 \tag{П.14}$$

и

$$\tilde{c}^{\mu\nu} \tilde{c}'_{\mu\nu} = c^{\mu\nu} c_{\mu\nu}.
 \tag{П.15}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
 2\tilde{c}^{\mu\nu} \tilde{c}'_{\nu\mu} &= (\tilde{c}^{\mu\nu} + \tilde{c}'^{\nu\mu})(\tilde{c}_{\mu\nu} + \tilde{c}'_{\nu\mu}) - \\
 & - c^{\mu\nu} c_{\mu\nu} - (c'^{\mu\nu} c'_{\mu\nu})'.
 \end{aligned}
 \tag{П.16}$$

Используя также

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}^{\mu\nu} + \tilde{c}'^{\nu\mu} &= b^{\mu\nu} + b'^{\nu\mu}, \\
 b^{\mu\nu} &= \frac{q_1^2}{2k_1^2 k_2^2} k_1^\mu k_2^\nu - \frac{(1-x)}{xt} k_1^\mu q_1^\nu + \frac{q_1^\mu (q_1 - k_1)^\nu}{t} - \\
 & - \frac{q_1^2}{k_1^2 t} k_1^\mu (q_1 - k_1)^\nu - \frac{g^{\mu\nu} (1-x)}{2t} (q_1^2 - 2k_1 q_1),
 \end{aligned}
 \tag{П.17}$$

получаем после сравнительно простого расчета

$$\begin{aligned}
 (\tilde{c}^{\mu\nu} + \tilde{c}'^{\nu\mu})(\tilde{c}_{\mu\nu} + \tilde{c}'_{\nu\mu}) &= \frac{(q_1^2)^2 (q_2^2)^2}{2it k_1^2 k_2^2} + \frac{q_1^2 q_2^2}{2k_1^2 k_2^2} - \\
 & - \frac{2q_1^2 q_2^2}{it} + \frac{xq_1^2 q_2^2}{2(1-x)k_1^2 t} + \frac{(1-x)q_1^2 q_2^2}{2xk_2^2 t} + \\
 & + \left(\frac{1+\epsilon}{2} \right) \left(\frac{(1-x)}{t} (q_1^2 - 2k_1 q_1) + \frac{x}{t} (q_1^2 - 2k_2 q_1) \right)^2.
 \end{aligned}
 \tag{П.18}$$

Подставляя теперь (П.18) в (П.16) и приводя подобные, приходим к следующему результату:

$$\begin{aligned}
 2\tilde{c}^{\mu\nu} \tilde{c}'_{\nu\mu} &= \left\{ -c^{\mu\nu} c_{\mu\nu} + \frac{q_1^2 q_2^2}{2k_1^2 k_2^2} + \frac{1}{2it} \times \right. \\
 & \times \left[-2q_1^2 q_2^2 + \left(\frac{1+\epsilon}{2} \right) x(1-x)((\Delta^2 - q_2^2)^2 + (q_1^2)^2) \right] + \\
 & + \left. \left(\frac{1+\epsilon}{2} \right) \frac{(1-x)^2 q_1^2}{t^2} [(1-4x)q_1^2 - 4(q_1(k_1 - xq_1))] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2(1 + \epsilon)(1 - x)(q_1^2 - x\Delta^2 - 2k_1q_2) \frac{(k_1q_1)^2}{\kappa t^2} + \quad (\text{П.19}) \\
 &+ \frac{(1 - x)(2k_1q_1 - q_1^2)q_1^2q_2^2}{2tk_1^2k_2^2} - \\
 &- 2(1 + \epsilon)(1 - x)(q_2^2 + x\Delta^2 + 2k_1q_2) \frac{(k_1q_1)^2}{\kappa \tilde{t}} + \\
 &+ \left. \frac{(q_1^2)^2 (q_2^2)^2}{4i\tilde{t}k_1^2k_2^2} \right\} + \{x \leftrightarrow 1 - x, k_1 \leftrightarrow k_2\}.
 \end{aligned}$$

Теперь, используя соотношения (П.12) и (П.19), легко получить выражение (3.6) для полностью дифференциального распределения рожденной в КМРК глюонной пары.

Приложение Б

Здесь мы вычисляем интегралы по поперечным импульсам, возникающие в (3.8). Так как поперечные импульсы пространственноподобны, в конечных выражениях переходим к $(D - 2)$ -мерным евклидовым векторам. Напомним, что выражения для инвариантов κ, Z, t, \tilde{t} через переменные интегрирования даны соотношениями (2.10), (3.7) и $\epsilon = (D - 4)/2$. Результаты вычисления интегралов I_n следующие:

$$\begin{aligned}
 I_1 = &\int \mu^{-2\epsilon} \frac{d^{D-2}k_1}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{\kappa t} \left[2xq_1^2q_2^2 - \left(\frac{1+\epsilon}{2}\right)(1-x) \times \right. \\
 &\times ((q_1^2 - 2xq_1\Delta)^2 + (q_1^2)^2) + (1+\epsilon)(1-x)^2 \times \\
 &\times q_1^2(q_1^2 - 2k_1q_1) \left. \right] = \frac{2\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{2+\epsilon}} (-x^2(1-x)) \times \\
 &\times \left(\frac{x(1-x)q_1^2}{\mu^2} \right)^\epsilon \left\{ \frac{1}{((1-x)q_1^2 + xq_2^2)} \left[2q_1^2 \cdot q_2^2 + \right. \right. \\
 &+ \left. \frac{(1+\epsilon)}{2}(1-x)((x-2)q_1^4 - x(\Delta^2 - q_2^2)^2) \right] \times \\
 &\times \left(\frac{1}{\epsilon} + 2 \ln \left(\frac{(1-x)q_1^2 + xq_2^2}{(1-x)q_1^2} \right) \right) - \\
 &\left. \left[- \frac{(1-x)^2(2q_1 \cdot q_2) \cdot q_1^2}{x q_2^2} \ln \left(\frac{(1-x)q_1^2 + xq_2^2}{(1-x)q_1^2} \right) \right] \right\};
 \end{aligned}$$

$$I_2 = \int \mu^{-2\epsilon} \frac{d^{D-2}k_1}{(2\pi)^{D-1}} 4(1 + \epsilon)(1 - x) \times$$

$$\begin{aligned}
 &\times (q_1^2 - x\Delta^2 - 2k_1q_2) \frac{(k_1q_1)^2}{\kappa t^2} = \frac{2\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{2+\epsilon}} \times \\
 &\times (-4x^2(1-x)^2) \left\{ \frac{x(q_1 \cdot \Delta)^2}{((1-x)q_1^2 + xq_2^2)} \times \right. \\
 &\times \left(\frac{1}{\epsilon} + 1 + \ln \left(\frac{x((1-x)q_1^2 + xq_2^2)^2}{(1-x)q_1^2\mu^2} \right) \right) + \quad (\text{П.21}) \\
 &+ \left((q_1 \cdot q_2)^2 - \frac{q_1^2 \cdot q_2^2}{2} \right) \left(\frac{(1-x)q_1^2 + xq_2^2}{xq_2^4} \right) \times \\
 &\times \ln \left(\frac{(1-x)q_1^2 + xq_2^2}{(1-x)q_1^2} \right) + \frac{2(q_1 \cdot \Delta)(q_1 \cdot q_2)}{q_2^2} \times \\
 &\times \ln \left(\frac{(1-x)q_1^2 + xq_2^2}{(1-x)q_1^2} \right) - \frac{(q_1 \cdot q_2)^2}{q_2^2} + \frac{(1-2x)q_1^2}{(1-x)} \left. \right\};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_3 = &\int \mu^{-2\epsilon} \frac{d^{D-2}k_1}{(2\pi)^{D-1}} 2(1 + \epsilon)(q_1^2 - x\Delta^2 - 2k_1q_2) \times \\
 &\times \frac{(q_1(k_1 - x\Delta))^2}{\kappa^2 t} = \frac{2\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{2+\epsilon}} (2x^2(1-x)^2) \times \\
 &\times \left\{ q_1^2 \left(\frac{1}{2\epsilon} - \frac{1}{2} + \frac{(q_1 \cdot q_2)^2}{q_1^2 \cdot q_2^2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x(1-x)q_1^2}{\mu^2} \right) \right) + \right. \\
 &+ \frac{q_1^2((1-x)q_1^2 + xq_2^2)}{xq_2^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{(q_1 \cdot q_2)^2}{q_1^2 \cdot q_2^2} \right) \times \\
 &\times \ln \left(\frac{(1-x)q_1^2 + xq_2^2}{(1-x)q_1^2} \right) \left. \right\};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_4 = &\int \mu^{-2\epsilon} \frac{d^{D-2}k_1}{(2\pi)^{D-1}} (-2(1 + \epsilon)(1 - x) \times \\
 &\times (q_2^2 + x\Delta^2 + 2k_1q_2) \frac{(k_1q_1)^2}{\kappa \tilde{t}} = \frac{2\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{2+\epsilon}} (x^2(1-x)^2) \times \\
 &\times \left\{ \frac{2x(q_1 \cdot \Delta)^2}{((1-x)q_1^2 + xq_2^2)} \left(\frac{1}{\epsilon} + 1 + \ln \left(\frac{x(1-x)q_1^2}{\mu^2} \right) \right) + \right. \\
 &+ \left(\frac{4x(q_1 \cdot \Delta)^2}{((1-x)q_1^2 + xq_2^2)} - q_1^2 + \right.
 \end{aligned}$$

$$\times \left[\frac{(2\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)}{\mathbf{q}_2^2} (2\mathbf{q}_1^2 - (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)) + \right. \quad (\text{П.23})$$

$$\left. + \frac{(1-x)\mathbf{q}_1^4 (2(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)^2 - 1)}{x\mathbf{q}_2^2} \ln \left(\frac{(1-x)\mathbf{q}_1^2 + x\mathbf{q}_2^2}{(1-x)\mathbf{q}_1^2} \right) + \right. \\ \left. + \left(\mathbf{q}_1^2 \cdot \mathbf{q}_2^2 + 4x(1-2x)\mathbf{q}_1^4 - \right. \quad (\text{П.33})$$

$$\left. - 2(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)^2 \left(1 + \frac{2x(1-x)\mathbf{q}_1^2}{\mathbf{q}_2^2} \right) + 4x\mathbf{q}_1^2 \cdot (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2) \right) \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\sqrt{\mathbf{q}_2^2(\mathbf{q}_2^2 + 4x(1-x)\mathbf{q}_1^2)}} \times \right. \\ \left. \times \ln \left(\frac{\sqrt{\mathbf{q}_2^2 + 4x(1-x)\mathbf{q}_1^2} + \sqrt{\mathbf{q}_2^2}}{\sqrt{\mathbf{q}_2^2 + 4x(1-x)\mathbf{q}_1^2} - \sqrt{\mathbf{q}_2^2}} \right) \right\}; \quad (\text{П.34})$$

$$I_5 = \int \mu^{-2\epsilon} \frac{d^{D-2}k_1}{(2\pi)^{D-1}} \frac{(-2)x\mathbf{q}_1^2}{\kappa Z t} \times$$

$$\times \left[\left(\frac{\mathbf{q}_2^2}{2} - (1-x)(\mathbf{q}_1^2 - 2k_1 q_1) \right)^2 - \right. \\ \left. - \left(\frac{1-\epsilon}{2} \right) (1-x)^2 (\mathbf{q}_1^2 - 2k_1 q_1)^2 \right] = \frac{2\Gamma(1-\epsilon)2x\mathbf{q}_1^2}{(4\pi)^{2+\epsilon} \Delta^2} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{((1-x)\mathbf{q}_1^2 + x\mathbf{q}_2^2)^\epsilon} \left(\frac{x(1-x)\Delta^2}{\mu^2} \right)^\epsilon \times \right. \\ \times \left[\frac{\mathbf{q}_2^4}{4} - (1-x)\mathbf{q}_2^2(\mathbf{q}_1^2 - 2x(\mathbf{q}_1 \cdot \Delta)) + \right. \\ \left. + \frac{(1+\epsilon)}{2} (1-x)^2 (\mathbf{q}_1^2 - 2x(\mathbf{q}_1 \cdot \Delta))^2 \right] +$$

$$\left. + \left[-\frac{\mathbf{q}_2^4}{4} + (1-x)\mathbf{q}_2^2(\mathbf{q}_1^2 - 2x(\mathbf{q}_1 \cdot \Delta)) - \right. \right. \\ \left. - \frac{(1-x)^2}{2} (\mathbf{q}_1^2 - 2x(\mathbf{q}_1 \cdot \Delta))^2 - 2x(1-x) \frac{3\Delta^2}{2} \times \right. \\ \left. \times ((\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)^2 - \mathbf{q}_1^2 \cdot \mathbf{q}_2^2) - \frac{(1-x)}{\mathbf{q}_2^2} \times \right. \\ \left. \times (x\mathbf{q}_2^2 + (1-x)(\mathbf{q}_1^2 - \Delta^2)) \right] \left\{ (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2) \times \right. \\ \left. \times (x\mathbf{q}_2^2 + (1-x)(\mathbf{q}_1^2 - \Delta^2)) \right\} \times$$

$$\times \left\{ (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)(\mathbf{q}_2^2 - (1-x)(\mathbf{q}_1^2 - 2x(\mathbf{q}_1 \cdot \Delta))) + \right. \\ \left. + \frac{(1-x)}{2\mathbf{q}_2^2} (x\mathbf{q}_2^2 + (1-x)\mathbf{q}_1^2)(2(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)^2 - \mathbf{q}_1^2 \cdot \mathbf{q}_2^2) \right\} \times$$

$$\times \ln \left(\frac{((1-x)\mathbf{q}_1^2 + x\mathbf{q}_2^2)^2}{(1-x)\mathbf{q}_1^2 \cdot \Delta^2} - \frac{(1-x)^3 \Delta^2}{2\mathbf{q}_2^4} \times \right. \\ \left. \times (2(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)^2 - \mathbf{q}_1^2 \cdot \mathbf{q}_2^2) \ln \left(\frac{\mathbf{q}_1^2}{\Delta^2} \right) \right\};$$

$$I_6 = \int \mu^{-2\epsilon} \frac{d^{D-2}k_1}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{2t t} \left[-2\mathbf{q}_1^2 \mathbf{q}_2^2 + \left(\frac{1+\epsilon}{2} \right) x(1-x) \times \right. \\ \left. \times ((\mathbf{q}_1^2)^2 + (\Delta^2 - \mathbf{q}_2^2)^2) \right] = \frac{2\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{2+\epsilon}} \times$$

$$\times \frac{x(1-x)}{\sqrt{\mathbf{q}_2^2(\mathbf{q}_2^2 + 4x(1-x)\mathbf{q}_1^2)}} \times \quad (\text{П.25})$$

$$\times (\mathbf{q}_2^2 - (1-x)(\mathbf{q}_1^2 - 2x(\mathbf{q}_1 \cdot \Delta))) + \frac{(1-x)}{2\mathbf{q}_2^2} \times \\ \times (x\mathbf{q}_2^2 + (1-x)(\mathbf{q}_1^2 - \Delta^2))(2(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)^2 - (\mathbf{q}_1^2 \cdot \mathbf{q}_2^2)) \left. \right\} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{(x\mathbf{q}_2^2 + (1-x)(\mathbf{q}_1^2 + \Delta^2))^2 - 4(1-x)^2 \mathbf{q}_1^2 \cdot \Delta^2}} \times \\ \times \ln \left(\left(x\mathbf{q}_2^2 + (1-x)(\mathbf{q}_1^2 + \Delta^2) + \right. \quad (\text{П.24}) \right.$$

$$\left. + \sqrt{(x\mathbf{q}_2^2 + (1-x)(\mathbf{q}_1^2 + \Delta^2))^2 - 4(1-x)^2 \mathbf{q}_1^2 \cdot \Delta^2} \right) / (x\mathbf{q}_2^2 + \\ + (1-x)(\mathbf{q}_1^2 + \Delta^2) - \\ - \sqrt{(x\mathbf{q}_2^2 + (1-x)(\mathbf{q}_1^2 + \Delta^2))^2 - 4(1-x)^2 \mathbf{q}_1^2 \cdot \Delta^2}) \left. \right) +$$

$$\left. + \left[\frac{1}{((1-x)\mathbf{q}_1^2 + x\mathbf{q}_2^2)} \left\{ \frac{\mathbf{q}_2^4}{4} - (1-x)\mathbf{q}_2^2(\mathbf{q}_1^2 - 2x(\mathbf{q}_1 \cdot \Delta)) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(1-x)^2}{2} (\mathbf{q}_1^2 - 2x(\mathbf{q}_1 \cdot \Delta))^2 \right\} + \frac{(1-x)}{\mathbf{q}_2^2} \times \right. \\ \left. \times \left\{ (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)(\mathbf{q}_2^2 - (1-x)(\mathbf{q}_1^2 - 2x(\mathbf{q}_1 \cdot \Delta))) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(1-x)}{2\mathbf{q}_2^2} (x\mathbf{q}_2^2 + (1-x)\mathbf{q}_1^2)(2(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)^2 - \mathbf{q}_1^2 \cdot \mathbf{q}_2^2) \right\} \right] \times$$

$$\times \ln \left(\frac{((1-x)\mathbf{q}_1^2 + x\mathbf{q}_2^2)^2}{(1-x)\mathbf{q}_1^2 \cdot \Delta^2} - \frac{(1-x)^3 \Delta^2}{2\mathbf{q}_2^4} \times \right. \\ \left. \times (2(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)^2 - \mathbf{q}_1^2 \cdot \mathbf{q}_2^2) \ln \left(\frac{\mathbf{q}_1^2}{\Delta^2} \right) \right\};$$

$$I_6 = \int \mu^{-2\epsilon} \frac{d^{D-2}k_1}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{2t t} \left[-2\mathbf{q}_1^2 \mathbf{q}_2^2 + \left(\frac{1+\epsilon}{2} \right) x(1-x) \times \right. \\ \left. \times ((\mathbf{q}_1^2)^2 + (\Delta^2 - \mathbf{q}_2^2)^2) \right] = \frac{2\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{2+\epsilon}} \times$$

$$\times \frac{x(1-x)}{\sqrt{\mathbf{q}_2^2(\mathbf{q}_2^2 + 4x(1-x)\mathbf{q}_1^2)}} \times \quad (\text{П.25})$$

$$\times \left[-2\mathbf{q}_1^2 \cdot \mathbf{q}_2^2 + \frac{x(1-x)}{2} (\mathbf{q}_1^4 + (\Delta^2 - \mathbf{q}_2^2)^2) \right] \times$$

$$\times \ln \left(\frac{\sqrt{\mathbf{q}_2^2 + 4x(1-x)\mathbf{q}_1^2} + \sqrt{\mathbf{q}_2^2}}{\sqrt{\mathbf{q}_2^2 + 4x(1-x)\mathbf{q}_1^2} - \sqrt{\mathbf{q}_2^2}} \right);$$

$$I_7 = \int \mu^{-2\epsilon} \frac{d^{D-2}k_1}{(2\pi)^{D-1}} \frac{x(1-x)q_1^2}{2\kappa Z} \times$$

$$\times [(1+\epsilon)(1-2x(1-x))q_1^2 - 2\epsilon x(1-x)(\Delta^2 - q_2^2)] =$$

$$= \frac{2\Gamma(1-\epsilon)x(1-x)q_1^2}{(4\pi)^{2+\epsilon}} \frac{1}{2\Delta^2} \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{x(1-x)\Delta^2}{\mu^2} \right)^\epsilon \times$$

$$\times [-(1+\epsilon)(1-2x(1-x))q_1^2 + 2\epsilon x(1-x)(\Delta^2 - q_2^2)];$$

$$I_8 = \int \mu^{-2\epsilon} \frac{d^{D-2}k_1}{(2\pi)^{D-1}} \left(\frac{x(1-x)q_1^2}{Z} \right)^2 \times$$

$$\times \left[\left(\frac{1+\epsilon}{2} \right) - (3+2\epsilon)x(1-x) \right] =$$

$$= \frac{2\Gamma(1-\epsilon)x(1-x)q_1^4}{(4\pi)^{2+\epsilon}} \frac{1}{2\Delta} \left(\frac{x(1-x)\Delta^2}{\mu^2} \right)^\epsilon \times$$

$$\times \left(\frac{1+\epsilon}{2} - (3+2\epsilon)x(1-x) \right);$$

$$I_9 = \int \mu^{-2\epsilon} \frac{d^{D-2}k_1}{(2\pi)^{D-1}} (1+\epsilon)(1-4x) \left(\frac{(1-x)q_1^2}{t} \right)^2 =$$

$$= \frac{2\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{2+\epsilon}} x(1-x)(1-4x)q_1^2(1+\epsilon) \left(\frac{x(1-x)q_1^2}{\mu^2} \right)^\epsilon,$$

интегралы I_7, I_8 и I_9 вычислены для произвольной размерности пространства-времени D ;

$$I_{10} = \int \mu^{-2\epsilon} \frac{d^{D-2}k_1}{(2\pi)^{D-1}} \frac{(1-x)q_1^2 q_2^2 (2k_1 q_1 - q_1^2)}{2tk_1^2 k_2^2} =$$

$$= \frac{2\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{2+\epsilon}} \mu^{-2\epsilon} \frac{(1-x)q_1^2 \cdot q_2^2}{2} \left[\frac{1}{\epsilon} \frac{(x(1-x)q_1^2)^\epsilon}{(xq_2^2 + (1-x)\Delta^2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\Gamma^2(\epsilon)}{\Gamma(2\epsilon)} \left(\frac{1}{(xq_2^2 + (1-x)\Delta^2)^{1-\epsilon}} - \frac{1}{(\Delta^2)^{1-\epsilon}} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{2\epsilon(\Delta^2)^\epsilon}{(xq_2^2 + \Delta^2)} \int_{\Delta^2/(xq_2^2 + \Delta^2)}^1 \frac{dz}{z} \ln(1-z) \right];$$

$$I_{11} = \int \mu^{-2\epsilon} \frac{d^{D-2}k_1}{(2\pi)^{D-1}} \frac{(-x)(q_1^2)^2 q_2^2}{2\kappa t k_1^2} = \frac{2\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{2+\epsilon}} \times$$

$$\times \frac{x(1-x)q_1^2 \cdot q_2^2}{2} \left[\frac{\Gamma^2(\epsilon)}{\Gamma(2\epsilon)} \frac{(x^2 \Delta^2 / \mu^2)^\epsilon}{x \Delta^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(2(\mathbf{q}_1 \cdot \Delta) - \Delta^2)}{\Delta^2(xq_2^2 + (1-x)q_1^2)} \right] \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln \left(\frac{x((1-x)q_1^2 + xq_2^2)^2}{(1-x)q_1^2 \mu^2} \right) \right) -$$

$$- \frac{2(\Delta(\mathbf{q}_1 - x\Delta))}{\Delta^2(\mathbf{q}_1 - x\Delta)^2} \ln \left(\frac{(1-x)q_1^2 + xq_2^2}{x(1-x)\Delta^2} \right);$$

$$I_{12} = \int \mu^{-2\epsilon} \frac{d^{D-2}k_1}{(2\pi)^{D-1}} \frac{(q_1^2)^2 (q_2^2)^2}{4\tilde{t}k_1^2 k_2^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[-I_{10} + \frac{2\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{2+\epsilon}} (1-x)q_1^2 \cdot q_2^2 \times \right.$$

$$\times \left. \frac{((q_2^2 \cdot (\Delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)) - 2x(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)(\mathbf{q}_2 \cdot \Delta))}{\mathcal{D}(x)\Delta^2} \times \right.$$

$$\times \ln \left(\frac{(1-x)q_2^2 + x\Delta^2}{xq_1^2} \right) -$$

$$\left. - 4x(1-x)(2q_1^2 \cdot q_2^2 - (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)^2) / (\mathcal{D}(x) \times \right.$$

$$\times \mathcal{D}(1-x) \sqrt{q_2^2(q_2^2 + 4x(1-x)q_1^2)} \times$$

$$\left. \times \ln \left(\frac{\sqrt{q_2^2 + 4x(1-x)q_1^2} + \sqrt{q_2^2}}{\sqrt{q_2^2 + 4x(1-x)q_1^2} - \sqrt{q_2^2}} \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} [x \leftrightarrow (1-x)],$$

$$\mathcal{D}(z) = \frac{((q_2^2 - 2z\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)q_1 + q_1^2 \cdot q_2)^2}{q_1^2};$$

$$I_{13} = \int \mu^{-2\epsilon} \frac{d^{D-2}k_1}{(2\pi)^{D-1}} \frac{(-x)q_1^2 q_2^2}{2(1-x)\kappa k_1^2} =$$

$$= \frac{2\Gamma(1-\epsilon)q_1^2 \cdot q_2^2}{(4\pi)^{2+\epsilon}} \frac{\Gamma^2(\epsilon)}{2\Delta^2} \left(\frac{x^2 \Delta^2}{\mu^2} \right)^\epsilon,$$

последнее выражение справедливо для любого D ;

$$\begin{aligned}
 I_{14} &= \int \mu^{-2\epsilon} \frac{d^{D-2} k_1 x^2 q_1^2 q_2^2}{(2\pi)^{D-1} 2k_1^2 Z} = \frac{2\Gamma(1-\epsilon) q_1^2 \cdot q_2^2}{(4\pi)^{2+\epsilon} 2\Delta^2} \times \\
 &\times \left(\frac{\Delta^2}{\mu^2}\right)^\epsilon x^2 \int_0^1 \frac{dz}{(xz(1-xz))^{1-\epsilon}} \approx \frac{2\Gamma(1-\epsilon)}{(4\pi)^{2+\epsilon}} \times \\
 &\times \frac{q_1^2 \cdot q_2^2 (\Delta^2)^\epsilon}{2\Delta^2 (\mu^2)^\epsilon} x \left[\frac{\Gamma^2(\epsilon)}{\Gamma(2\epsilon)} - \frac{(1-x)^\epsilon}{\epsilon} + \ln(x) + \right. \\
 &\left. + \frac{\epsilon}{2} \ln(x) \ln(x(1-x)^2) - 2\epsilon \int_0^{1-x} \frac{dz}{z} \ln(1-z) \right], \tag{П.33}
 \end{aligned}$$

первое равенство здесь является точным, а во втором мы выполнили с необходимой точностью разложение по ϵ ;

$$\begin{aligned}
 I_{15} &= \int \mu^{-2\epsilon} \frac{d^{D-2} k_1 q_1^2 q_2^2}{(2\pi)^{D-1} 2k_1^2 k_2^2} = \frac{2\Gamma(1-\epsilon) q_1^2 \cdot q_2^2}{(4\pi)^{2+\epsilon} 2\Delta^2} \times \\
 &\times \frac{\Gamma^2(\epsilon) (\Delta^2)^\epsilon}{\Gamma(2\epsilon) (\mu^2)^\epsilon}, \tag{П.34}
 \end{aligned}$$

последнее соотношение является точным.

Приложение В

Здесь мы вычисляем интегралы, возникающие в (4.1). Вычисление первых шести интегралов несложно и может быть выполнено в точной форме (без разложения по ϵ). Для них получаем следующий результат:

$$\begin{aligned}
 J_1 + \dots + J_6 &= \int_{\delta_R}^{1-\delta_R} \frac{dx}{x(1-x)} \int \mu^{-2\epsilon} \frac{d^{D-2} k_1}{(2\pi)^{D-1}} \times \\
 &\times \left\{ (1+\epsilon)(1-x)^2 \frac{4(k_1 q_1)^2 + (1-4x)(q_1^2)^2}{t^2} + \right. \\
 &+ \frac{x(1-x)q_1^2}{\kappa Z} [2q_2^2 + (1+\epsilon)(2(1-x)(k_1 q_1) - \\
 &- x(1-x)q_1^2 - k_2^2) - \epsilon x(1-x)(\Delta^2 - q_2^2)] + \\
 &+ \left(\frac{x(1-x)q_1^2}{Z} \right)^2 \left[\frac{(1+\epsilon)}{2} - (3+2\epsilon)x(1-x) \right] + \tag{П.35} \\
 &+ \left(\frac{-xq_1^2 q_2^2}{2(1-x)\kappa k_1^2} + \frac{x^2 q_1^2 q_2^2}{2k_1^2 Z} + \frac{xq_1^2 q_2^2}{k_1^2 k_2^2} \right) \Big\} =
 \end{aligned}$$

Все остальные интегралы не зависят от δ_R при $\delta_R \rightarrow 0$, поэтому ниже положим $\delta_R = 0$. Следующие два интеграла не имеют особенностей при $|\Delta| \rightarrow 0$. Кроме того, используя замену переменных интегрирования, соответствующую “лево-правой симметрии” (5.1),

$$\mathbf{k}_1 \longleftrightarrow \mathbf{k}_2, \quad x \longleftrightarrow \frac{xk_2^2}{((1-x)k_1^2 + xk_2^2)}, \tag{П.36}$$

получаем

$$\begin{aligned}
 J_8 &= \int_0^1 \frac{dx}{x(1-x)} \int \mu^{-2\epsilon} \frac{d^{D-2} k_1}{(2\pi)^{D-1}} \times \\
 &\times \frac{(-x)q_1^2 k_2^2 ((1+\epsilon)k_2^2 - 2q_2^2)}{\kappa Z t} = \left[\int_0^1 \frac{dx}{x(1-x)} \right] \times \tag{П.37} \\
 &\times \int \mu^{-2\epsilon} \frac{d^{D-2} k_1 (-x)q_2^2 ((1+\epsilon)k_1^2 - 2q_1^2)}{(2\pi)^{D-1} \kappa t} (q_1 \longleftrightarrow -q_2),
 \end{aligned}$$

следовательно, J_8 имеет такую же структуру, как J_7 , и удобно рассматривать эти два интеграла вместе. После довольно громоздкого вычисления получаем

$$\begin{aligned}
 J_7 + J_8 &= \int_0^1 \frac{dx}{x(1-x)} \int \mu^{-2\epsilon} \frac{d^{D-2} k_1}{(2\pi)^{D-1}} \times \\
 &\times \left\{ \frac{1}{\kappa t} \left[-2(1-x)q_1^2 q_2^2 + (1+\epsilon)(1-x)(q_1^2)^2 + \right. \right. \\
 &+ \frac{(1+\epsilon)}{2} x(1-x)(2(1-x)q_1^2(\Delta^2 - q_2^2) - \\
 &- x(q_1^2)^2 - x(\Delta^2 - q_2^2)^2) - 2(1+\epsilon)(2-x)(1-x) \times \\
 &\left. \left. \times q_1^2(k_1 q_1) + 2(1+\epsilon)(1-x)((k_1 q_1)^2 + ((k_1 - x\Delta)q_1)^2) + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. + (1 + \epsilon)q_1^2 k_2^2 \right] - \frac{xq_1^2 k_2^2 ((1 + \epsilon)k_2^2 - 2q_2^2)}{\kappa Z t} \Big\} = \\
 & = \frac{\Gamma(1 - \epsilon) 2\Gamma^2(1 + \epsilon)}{(4\pi)^{2+\epsilon} \epsilon \Gamma(1 + 2\epsilon) (1 + 2\epsilon) (3 + 2\epsilon)} \times \\
 & \times \left(\left(\frac{q_1^2}{\mu^2} \right)^\epsilon - \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \right) \left(\frac{q_2^2}{\mu^2} \right)^\epsilon \right) q_1^2 - \frac{\Gamma(1 - \epsilon)}{(4\pi)^{2+\epsilon}} \times \\
 & \times \left[\frac{2}{3} \left(q_1^2 - 2 \frac{(q_1 \cdot q_2)^2}{q_2^2} \right) - \frac{q_1^2}{3} \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln \left(\frac{q_1^2}{\mu^2} \right) - \frac{2}{3} \right) + \right. \\
 & \left. + (2q_1 \cdot \Delta) \left(\frac{2}{3} \ln \left(\frac{q_1^2}{q_2^2} \right) + 1 \right) - 2\Delta^2 + \frac{2q_1^2 (6q_2^2 - \Delta^2)}{3(q_1^2 - q_2^2)} \times \right. \\
 & \left. \times \ln \left(\frac{q_1^2}{q_2^2} \right) + \frac{\Delta^2 \cdot q_2^2}{(q_1^2 - q_2^2)^3} \left(q_1^2 (q_1^2 - 3q_2^2) \ln \left(\frac{q_1^2}{q_2^2} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2q_2^2 (q_1^2 - q_2^2) \right) + \frac{2}{3(q_1^2 - q_2^2)^3} \times \right. \\
 & \left. \times \left(q_1^2 (3q_2^2 - q_1^2) - (q_1 \cdot q_2) (3q_1^2 + q_2^2) + 2q_1^2 \frac{(q_1 \cdot q_2)^2}{q_2^2} \right) \times \right. \\
 & \left. \times \left(2q_2^4 \ln \left(\frac{q_1^2}{q_2^2} \right) - 2q_2^2 (q_1^2 - q_2^2) + (q_1^2 - q_2^2)^2 \right) \right].
 \end{aligned}
 \tag{П.38}$$

Используя замену переменных (П.36), легко показать, что

$$J_{10} = J_9(q_1 \longleftrightarrow -q_2), \tag{П.39}$$

и достаточно вычислить только один из этих интегралов. Для суммы J_9 и J_{10} , получаем

$$\begin{aligned}
 J_9 + J_{10} &= \int_0^1 \frac{dx}{x(1-x)} \int \mu^{-2\epsilon} \frac{d^{D-2} k_1}{(2\pi)^{D-1}} \times \\
 & \times \left\{ -\frac{xq_1^2 (q_2^2)^2}{2\kappa Z t} - \frac{xq_2^2 (q_1^2)^2}{2\kappa t k_1^2} \right\} = \frac{\Gamma(1 - \epsilon)}{(4\pi)^{2+\epsilon}} \times \tag{П.40}
 \end{aligned}$$

$$\times \frac{\Gamma^2(1 + \epsilon) 2}{\Gamma(1 + 2\epsilon) \epsilon^2} \left(\frac{\Delta^2}{\mu^2} \right)^\epsilon \frac{q_1^2 \cdot q_2^2}{\Delta^2};$$

$$J_{11} = \int_0^1 \frac{dx}{x(1-x)} \int \mu^{-2\epsilon} \frac{d^{D-2} k_1}{(2\pi)^{D-1}} \times$$

$$\times \frac{(1-x)(2(k_1 q_1) - q_1^2) q_1^2 q_2^2}{2tk_1^2 k_2^2} = -\frac{\Gamma(1 - \epsilon) \Gamma^2(1 + \epsilon)}{(4\pi)^{2+\epsilon} \Gamma(1 + 2\epsilon)} \times \tag{П.41}$$

$$\times \left[\frac{1}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \ln \left(\frac{q_1^2 \cdot q_2^2}{\Delta^4} \right) + \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{q_1^2}{q_2^2} \right) + 4\epsilon \psi''(1) \right] \times$$

$$\times \left(\frac{\Delta^2}{\mu^2} \right)^\epsilon \frac{q_1^2 \cdot q_2^2}{\Delta^2};$$

$$J_{12} = \int_0^1 \frac{dx}{x(1-x)} \int \mu^{-2\epsilon} \frac{d^{D-2} k_1}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{2it} \times$$

$$\times \left[-2q_1^2 q_2^2 + \frac{(1 + \epsilon)}{2} x(1-x) ((\Delta^2 - q_2^2)^2 + (q_1^2)^2) - \right. \\
 \left. - 4(1 + \epsilon)x(1-x)(k_1 q_1)^2 \right] = \frac{\Gamma(1 - \epsilon)}{(4\pi)^{2+\epsilon}} \times$$

$$\times \left[\frac{q_1^2}{3} \left(\frac{1}{\epsilon} + \ln \left(\frac{q_1^2}{\mu^2} \right) - \frac{1}{6} \right) + \frac{q_2^2}{2} \right] - \frac{\Gamma(1 - \epsilon)}{(4\pi)^{2+\epsilon}} \times \tag{П.42}$$

$$\times \left\{ \frac{3(2q_1^2 \cdot q_2^2 - (q_1 \cdot q_2)^2)}{8} \frac{(q_1^2 + q_2^2)}{q_1^2 \cdot q_2^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(2q_1^2 \cdot q_2^2 - 3(q_1 \cdot q_2)^2)}{16q_1^2 \cdot q_2^2} (q_1^2 - q_2^2) \ln \left(\frac{q_1^2}{q_2^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \left[4q_1^2 \cdot q_2^2 + \frac{(q_1^2 - q_2^2)^2}{4} + (2q_1^2 \cdot q_2^2 - 3q_1^4 - 3q_2^4) \times \right. \right.$$

$$\left. \times \frac{(2q_1^2 \cdot q_2^2 - (q_1 \cdot q_2)^2)}{16q_1^2 \cdot q_2^2} \right] \int_0^\infty \frac{dx}{(q_1^2 + x^2 q_2^2)} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \Big\};$$

$$J_{13} = \int_0^1 \frac{dx}{x(1-x)} \int \mu^{-2\epsilon} \frac{d^{D-2} k_1}{(2\pi)^{D-1}} \frac{(q_1^2)^2 (q_2^2)^2}{4it k_1^2 k_2^2} =$$

$$= \frac{\Gamma(1 - \epsilon)}{(4\pi)^{2+\epsilon}} \left\{ \frac{q_1^2 \cdot q_2^2}{\Delta^2} \left(\frac{\Delta^2}{\mu^2} \right)^\epsilon \frac{\Gamma^2(1 + \epsilon)}{\Gamma(1 + 2\epsilon)} \times \right.$$

$$\times \left[\frac{1}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \ln \left(\frac{q_1^2 \cdot q_2^2}{\Delta^4} \right) + \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{q_1^2}{q_2^2} \right) + 4\epsilon \psi''(1) \right] + \tag{П.43}$$

$$+ \frac{2q_1^2 \cdot q_2^2 \cdot (\Delta(q_1 + q_2))}{\Delta^2 (q_1 + q_2)^2} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{q_1^2}{q_2^2} \right) \ln \left(\frac{q_1^2 \cdot q_2^2 \cdot \Delta^4}{(q_1^2 + q_2^2)^4} \right) + \right.$$

$$+L\left(\frac{-\mathbf{q}_1^2}{\mathbf{q}_2^2}\right) - L\left(\frac{-\mathbf{q}_2^2}{\mathbf{q}_1^2}\right) - \mathbf{q}_1^2 \cdot \mathbf{q}_2^2 \left(1 - \frac{(\Delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2))^2}{\Delta^2(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)}\right) \times$$

$$\times \left\{ \int_0^1 \int_1^\infty dz \frac{\ln((z\mathbf{q}_1)^2/\mathbf{q}_2^2)}{(\mathbf{q}_2 - z\mathbf{q}_1)^2} \right\},$$

где

$$L(x) = \int_0^x \frac{dt}{t} \ln(1-t). \quad (\text{П.44})$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abe I. et al. (H1 Collab.) // Nucl. Phys. 1993. V. B407. P. 515. Ahmed T. et al. (H1 Collab.) // Nucl. Phys. 1995. V. B439. P. 471. Derrick M. et al. (ZEUS Collab.) // Phys. Lett. 1993. V. B316. P. 412; Z. Phys. 1995. V. C65. P. 379.
2. Fadin V.S., Kuraev E.A., Lipatov L.N. // Phys. Lett. 1975. V. B60. P. 50. Кираев Э.А., Липатов Л.Н., Фадин В.С. // ЖЭТФ. 1976. Т. 71. С. 840; 1977. Т. 72. С. 377. Балицкий Я.Я., Липатов Л.Н. // ЯФ. 1978. Т. 28. С. 1597.

3. Askew A.J., Kwiecinski J., Martin A.D., Sutton P.J. // Phys. Rev. 1994. V. D49. P. 4402. Askew A.J., Golec-biernat K., Kwiecinski J. et al. // Phys. Lett. 1994. V. B325. P. 212.
4. Липатов Л.Н., Фадин В.С. // Письма в ЖЭТФ. 1989. Т. 49. С. 311; ЯФ. 1989. Т. 50. С. 1141.
5. Fadin V.S., Lipatov L.N. // Nucl. Phys. 1993. V. B406. P. 259. Fadin V.S., Fiore R., Quartarolo A. // Phys. Rev. 1994. V. D50. P. 5893. Fadin V.S., Fiore R., Kotsky M.I. // Phys. Lett. 1996. V. B389. P. 737.
6. Фадин В.С. // Письма в ЖЭТФ. 1995. Т. 61. С. 342. Fadin V.S., Fiore R., Quartarolo A. // Phys. Rev. 1996. V. D53. P. 2729. Коцкий М.И., Фадин В.С. // ЯФ. 1996. Т. 59. С. 1080. Fadin V.S., Fiore R., Kotsky M.I. // Phys. Lett. 1995. V. B359. P. 181; 1996. V. B387. P. 593.
7. Catani S., Ciafaloni M., Hautmann F. // Phys. Lett. 1990. V. B242. P. 97; Nucl. Phys. 1991. V. B366. P. 135. Camici G., Ciafaloni M. // Phys. Lett. 1996. V. B386. P. 341; preprint DFF 264/01/97, 1997; HEP-PH 9701303.
8. Fadin V.S., Lipatov L.N. // Nucl. Phys. 1996. V. B477. P. 767.
9. Fadin V.S. // Talk given at the Int. Conf. "Deep Inelastic Scattering 96", Rome, Italy, 14-19 Apr., 1996 / Eds. G. D'Agostini, A. Nigro. World Sci., 1996. P. 627.
10. Lipatov L.N. // Nucl. Phys. 1991. V. B365. P. 64; 1995. V. B452. P. 369.

TWO-GLUON CONTRIBUTION TO THE BFKL KERNEL

M. I. Kotsky, L. N. Lipatov, V. S. Fadin

The differential cross section for the production of two gluons with a fixed invariant mass at collisions of high-energy partons is expressed in terms of the corresponding cross section for the Reggeon-Reggeon interactions. The infrared divergencies are removed with the use of the dimensional regularization. Performing the integration over relative momenta of the produced gluons we calculate two-gluon correction to the integral kernel of the BFKL equation.

Наконец, вносятся данные по полной множественности с LEP-2 (W = 161 GeV) [10, 11].
 DELPHI: $\langle n \rangle_{had} = 22.78 \pm 0.42 \pm 0.23$
 OPAL: $\langle n \rangle_{had} = 24.46 \pm 0.42 \pm 0.44$
 Как видно из таблицы, полученные нами значения $\langle n \rangle_{had}(133 \text{ GeV}) = 24.10$ и $\langle n \rangle_{had}(161 \text{ GeV}) = 26.00$ хорошо согласуются с экспериментальными данными (4)-(6). Отметим, что расчеты по Монте-Карло, учитывающие массы кварков, да-

Множественности адронов при энергиях LEP

W, TeV	$\langle n \rangle_{had}$	$\langle n \rangle_c$	$\langle n \rangle_{had}$	$\langle n \rangle_c$
133	24.10	24.13	24.13	24.13
161	26.00	26.02	26.02	26.02
172	26.82	26.88	26.87	26.88
192	27.82	27.82	27.82	27.82

В работе [4] в рамках КХД нами подробно рассмотрено выражение для $\langle n \rangle_c$ (подробно см. в [4]):

$$\langle n \rangle_c = \langle n \rangle_c^0 + C_1 \left[\frac{d\sigma^2(k_1, k_2)}{dW^2 d^2k_1 d^2k_2} \right]_{k_1^2 = k_2^2 = 0} \quad (3)$$
 Здесь $\langle n \rangle_c^0$ - среднее число продуктов фрагментации инвариантного кварка q (W^2, k_1^2) описываемый спектром глюонных струй по их инвариантным массам k_2^2 , в то время как $\langle n \rangle_c^0$ есть множественность в глюонной струе с инвариантно-массой k_2^2 .
 Формулы (3) позволяют хорошо описать адронные множественности $\langle n \rangle_c$ в e^+e^- -соударениях инвариантных кварков, и предсказывать значения адронных множественностей $\langle n \rangle_c$ в соударениях инвариантных кварков. В частности, наш результат $\langle n \rangle_c(m_q^2) = 1.01$, где