Труды Института прикладной астрономии РАН, вып. 18, 2008

ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ И БРАНЫ
(ДОМЕННЫЕ СТЕНКИ)

Квантование черных дыр

И. Б. Хриплович

Институт ядерной физики, Новосибирск, Россия

В достаточно общих предположениях показано, что в классическом пределе максимальная энтропия квантованной поверхности пропорциональна площади этой поверхности. В частном случае петлевой квантовой гравитации получено значение параметра Барберо–Иммирзи. Найдена общая структура дискретного спектра горизонта квантованной черной дыры. Спектр ее температурного излучения имеет виновскую огибающую. Естественная ширина линий излучения оказывается много меньшей расстояния между ними.

1 Введение

Идея квантования поверхности горизонта черных дыр была выдвинута Бекенштейном в пионерской работе [1]. Эта идея была основана на наблюдении Кристодулу и Руффини [2,3], заключающемся в том, что площадь горизонта непредельных черных дыр не меняется при адиабатических процессах, т. е. является адиабатическим инвариантом. А квантование адиабатического инварианта, в силу принципа соответствия, выглядит вполне естественным.

Позднее квантование черных дыр обсуждалось независимо Мухановым [4] и Коганом [5]. В частности, Коган был первым, кто исследовал эту задачу с точки зрения теории струн.

Если принять идею квантования черных дыр, то общая структура поверхности горизонта A для больших квантовых чисел N становится очевидной, с точностью до общего численного множителя (который обычно записывается в виде $8\pi\gamma$). Эта квантованная поверхность должна выглядеть так [6]:

$$A = 8\pi\gamma l_p^2 N. \tag{1}$$

Действительно, присутствие квадрата планковской длины $l_p^2 = k\hbar/c^3$ (здесь и ниже k — ньютоновская гравитационная постоянная) в условии квантования для площади поверхности совершенно естественно. А чтобы площадь оставалась конечной в классическом пределе, степень квантового числа N должна совпадать со степенью $\hbar$ в l_p^2. Этот аргумент можно проверить, рассматривая любое квантово-механическое среднее, имеющее классический предел.

Здесь следует заметить, что, вопреки широко распространенному поверью, нет никаких реальных оснований полагать, что спектр (1) должен быть эквидистантным (см. в этой связи [7])

2 Энтропия и температура черных дыр. Голографический предел

Согласно классическим представлениям, с точки зрения удаленного наблюдателя частица, падающая на черную дыру, асимптотически приближается к горизонту, сфере радиуса $r_g = 2kM/c^2$, достигая его лишь при $t \to \infty$. При этом время распространения любого сигнала от этой частицы к удаленному наблюдателю стремится к бесконечности. Таким образом, горизонт — это односторонний клапан, не пропускающий наружу никаких сигналов. Отсюда и название — черная дыра.

Однако эти представления принципиально неполны. Первым осознал это Уилер. Он рассуждал примерно так. Возьмем ящик, заполненный излучением при некоторой температуре T. Он обладает, естественно, и конечной энтропией. Сбросим этот ящик в черную дыру. Тогда энтропия наблюдаемой части Вселенной навсегда уменьшится. Но это явное нарушение второго начала термодинамики! Для спасения второго начала просто необходимо принять, что сама дыра обладает энтропией, которая возрастает при поглощении этого ящика. А объекту с ненулевой энтропией естественно приписать и конечную температуру. Несмотря на всю неожиданность этого вывода, он достаточно естествен и с несколько иной точки зрения. Ведь черная дыра — идеальный поглотитель, абсолютно черное тело, для которого температура — вполне обычная характеристика.

Оценим сначала эту температуру просто из соображений размерности. Будем использовать для нее энергетические единицы. Кстати, в этих единицах энтропия безразмерна, так что оценить ее по размерности нельзя. Сама черная дыра характеризуется единственным параметром — массой

M. Помимо нее, если оставаться в рамках классической физики, в нашем распоряжении есть еще две мировые константы, k и c, одна из которых, гравитационная постоянная k, по-видимому, должна входить в ответ просто по смыслу задачи. Очевидная комбинация Mc^2 не подходит на роль температуры: она слишком велика, да и не содержит k. Но никакой иной комбинации, имеющей размерность энергии, из M, k и c построить нельзя. Есть, однако, еще одна мировая константа — постоянная Планка $\hbar$. Используя ее, построить требуемую комбинацию размерности энергии уже несложно. Температура черной дыры составляет по порядку величины $\hbar c^3/kM$ или (с точностью до двойки) $\hbar c/r_g$.

Чтобы получить численный коэффициент в соотношении $T \sim \hbar c/r_g$, достаточно рассмотреть следующую задачу [8,9]. Пусть квазиклассический волновой пакет распространяется из точки $r_0 = r_g + \epsilon$, близкой к горизонту, в удаленную точку r ($\epsilon \ll r_g$, $r \gg r_g$). Квазиклассичность пакета позволяет описывать его распространение как движение точечной частицы. И тогда, как показывает прямое вычисление, независимо от исходного спектрального состава волнового пакета (лишь бы выполнялось условие квазиклассичности $\omega r_g \gg 1$ для характерных частот), на больших расстояниях спектральная плотность сигнала совершенно универсальна:

$$|f(\omega)|^2 \sim \frac{\pi}{\omega r_g} \exp(-4\pi\omega r_g/c). \tag{2}$$

Если перейти от частоты ω к энергии $\hbar\omega$, то видно, что ведущий, экспоненциальный, множитель в этом выражении соответствует высокочастотной асимптотике больцмановского распределения с температурой

$$T = \frac{\hbar c}{4\pi r_g} = \frac{\hbar c^3}{8\pi k M}\,. \tag{3}$$

Впервые это выражение для температуры черной дыры было получено Хокингом [10].

Неизбежным следствием конечной температуры черной дыры является вывод о том, что черная дыра на самом деле излучает. Она рождает не только фотоны и нейтрино с энергиями порядка T, но и частицы с ненулевой массой покоя m (если только температура дыры достаточно велика, $T > mc^2$). Итак, одно из самых удивительных свойств черных дыр состоит в том, что они светят!

Этот вывод был впервые сделан Грибовым[1]. Его аргумент был таким. Соотношение неопределенности $\Delta E\, \Delta t \geq \hbar$ позволяет рождение пар ча-

[1] Грибов четко сформулировал утверждение о том, что черные дыры излучают, в обсуждениях, проходивших в 1971 или 1972 году. Это известно мне по независимым рассказам А. Д. Долгова, Д. И. Дьяконова, Л. Б. Окуня, присутствовавших при этих дискуссиях. Остается лишь сожалеть о том, что Грибов не опубликовал свой результат, по-видимому, считая его самоочевидным.

стиц из вакуума на время t, не превышающее $\hbar/E$; здесь E — полная энергия пары (как минимум, $2mc^2$ для частиц с массой). Гравитационное поле в окрестности горизонта очень велико, так что уход одной из родившихся частиц пары в черную дыру, а другой — на бесконечность разрешен по энергии. В квантовой механике за счет туннельного эффекта такого рода процессы рождения частиц становятся возможными. В частности, рождение электрон-позитронных пар в сильных электрических полях не только давно изучается теоретически, но и наблюдалось экспериментально в столкновениях тяжелых ионов. По существу, аналогичное явление может служить объяснением излучения черных дыр.

Теперь, когда температура черной дыры получена, нахождение ее энтропии становится простой задачей. Хорошо известное термодинамическое соотношение $dE = TdS$ связывает приращение энергии тела E с приращением его энтропии S. В нашем случае T задано формулой (3), а $E = Mc^2$. Решая возникшее дифференциальное уравнение

$$dM = \frac{\hbar c}{8\pi k M}\, dS$$

с естественным граничным условием

$$S = 0 \quad \text{при} \quad M = 0,$$

приходим к следующему замечательному соотношению между энтропией черной дыры и площадью ее горизонта $A = 4\pi r_g^2$:

$$S = \frac{4\pi k M^2}{\hbar c} = \frac{\pi r_g^2}{l_p^2} = \frac{A}{4 l_p^2}. \tag{4}$$

Пропорциональность энтропии площади горизонта была установлена Бекенштейном [11].

И наконец, обсудим здесь так называемый голографический предел, сформулированный в [12–14]. Согласно этому пределу, энтропия S любой сферически-симметричной, не вращающейся системы, заключенной внутри сферы с площадью поверхности A, ограничена соотношением

$$S \le \frac{A}{4 l_p^2}, \tag{5}$$

где равенство имеет место лишь в случае, когда система является черной дырой.

Простой интуитивный аргумент, подтверждающий это ограничение, таков [14]. Пусть рассматриваемая система коллапсирует в черную дыру. В ходе коллапса энтропия возрастает от S до S_{bh}, а площадь A_{bh} поверхности горизонта возникшей черной дыры заведомо меньше площади

A поверхности, ограничивающей исходную систему. И тогда, используя соотношение Бекенштейна–Хокинга (4) для черной дыры, мы приходим через очевидную цепочку (не)равенств

$$S \leq S_{bh} = \frac{A_{bh}}{4l_p^2} \leq \frac{A}{4l_p^2}$$

к обсуждаемому ограничению (5).

Следует отметить, что по крайней мере для сферически-симметричных черных дыр справедливость голографического предела твердо установлена путем тщательного анализа различных физических ситуаций.

Результат (5) можно сформулировать иначе: среди сферических поверхностей заданной площади именно поверхность горизонта черной дыры имеет наибольшую энтропию [2].

3 Квантование площади горизонта черной дыры

Условие квантования (1) естественно интерпретировать следующим образом. Вся площадь A горизонта состоит из участков характерного размера $\sim l_p^2$. Каждый из этих участков характеризуется квантовым числом j, таким что вклад a данного участка в площадь поверхности зависит от j, $a = a(j)$. Кроме того, участок может характеризоваться квантовым числом m, от которого a не зависит. (Разумеется, и j, и m могут относиться в принципе не к одному квантовому числу, а к целому набору их.) Тогда формула (1) может быть записана в виде

$$A = 8\pi\gamma\, l_p^2 \sum_{jm} a(j)\, \nu_{jm}\,, \tag{6}$$

где ν_{jm} — число участков с заданными j и m.

Чтобы найти общее выражение для «чисел заполнения» ν_{jm}, воспользуемся соотношением Бекенштейна–Хокинга (4). Мы будем рассматривать «микроканоническую» энтропию S квантованной поверхности, определенную как логарифм числа состояний этой поверхности при заданной ее площади A (вместо заданной энергии в обычных задачах). Очевидно, это число состояний K зависит от предположения, касающегося различимости участков. Поэтому прежде всего обсудим, какие из априори возможных предположений оказываются здесь разумными с физической точки зрения [7].

[2] Даже безотносительно к голографическому пределу, идея о том, что энтропия горизонта черной дыры максимальна, выглядит достаточно естественно; она использовалась, например, в модели возникновения квантованной черной дыры при коллапсе пылевого облака [15].

Начнем с предположения о полной неразличимости всех участков. Это означает, что при заданных ν_{jm} никакая перестановка любых участков не приводит к новым состояниям, т. е. такое состояние вообще единственно. Соответственно, энтропия при этом просто равна нулю.

Рассмотрим теперь обратный предельный случай, когда все участки полностью различимы. В этом случае полное число состояний равно

$$K = \nu\,!\,, \quad \nu = \sum_j \nu_j = \sum_{jm} \nu_{jm}$$

с микроканонической энтропией

$$S = \nu \ln \nu\,.$$

Очевидно, здесь максимальная энтропия при фиксированной величине $A \sim \sum_j a(j)\ \nu_j$ достигается при условии, что все $a(j)$ имеют минимально возможное значение. Тогда в классическом пределе $\nu \gg 1$ энтропия черной дыры растет быстрее, чем площадь горизонта: $A \sim \nu$, но $S = \nu \ln \nu \sim A \ln A$. Таким образом, предположение о полной различимости участков противоречит голографическому пределу и поэтому должно быть отброшено [3].

Теперь третья, в принципе допустимая возможность, которая довольно популярна (см., например, [16]). Эта возможность состоит в том, что полное число состояний и энтропия равны соответственно:

$$K = \prod_j g(j)^{\nu_j} \tag{7}$$

и

$$S = \sum_j \nu_j \ln g(j). \tag{8}$$

Легко видеть, что такое число состояний соответствует следующим предположениям о различимости участков:

неравные j, произвольные m $\longrightarrow$ неразличимы;

равные j, неравные m $\longrightarrow$ различимы;

равные j, равные m $\longrightarrow$ неразличимы.

[3] Нет никакого противоречия между эти выводом и утверждениями, содержащимися в [16–18]: то, что называется полной различимостью там, соответствует последней из возможностей, которая рассматривается нами (и которая является, по нашему мнению, единственно разумной).

Сочетание первых двух предположений выглядит странно и неестественно (за исключением частного случая, когда для всех участков разрешено лишь одно значение j).

Таким образом, единственный разумный набор предположений относительно различимости участков, который мог бы привести к разумным физическим предсказаниям (т. е. мог бы согласоваться с соотношением Бекенштейна–Хокинга и с голографическим пределом) таков:

$$\begin{array}{lll} \text{неравные } j, \text{ произвольные } m & \longrightarrow & \text{различимы;} \\ \text{равные } j, \quad \text{неравные } m & \longrightarrow & \text{различимы;} \\ \text{равные } j, \quad \text{равные } m & \longrightarrow & \text{неразличимы.} \end{array}$$

В этих предположениях число состояний поверхности горизонта при данном числе ν_{jm} участков с квантовыми числами j и m, очевидно, равно

$$K = \nu\,! \prod_{jm} \frac{1}{\nu_{jm}\,!}\,, \quad \text{где} \quad \nu = \sum_{j} \nu_j\,, \quad \nu_j = \sum_{m} \nu_{jm}\,, \tag{9}$$

а соответствующая энтропия составляет

$$S = \ln K = \ln(\nu\,!) - \sum_{jm} \ln(\nu_{jm}\,!)\,. \tag{10}$$

Структура последнего выражения настолько отличается от формулы (6), что в общем случае энтропия, конечно же, не может быть пропорциональна площади. Однако эта пропорциональность существует для максимальной энтропии в классическом пределе.

В этом пределе, когда все эффективные «числа заполнения» велики, $\nu_{jm} \gg 1$, справедливо приближение Стирлинга, так что энтропия равна

$$S = \nu \ln \nu - \sum_{jm} \nu_{jm} \ln \nu_{jm}\,. \tag{11}$$

Мы вычисляем ее максимум при фиксированной площади, т. е. при заданной сумме [4]

$$N = \sum_{jm}^{\infty} a(j)\, \nu_{jm} = \text{const}\,. \tag{12}$$

Задача сводится к решению системы уравнений

$$\ln \nu - \ln \nu_{jm} = \mu\, a(j)\,, \tag{13}$$

[4] Эти вычисления — достаточно очевидное обобщение расчетов, проведенных нами в [7,19,20] в случае определенных структур для $a(j)$ и $g(j)$, следующих из петлевой квантовой гравитации (см. ниже).

где μ — лагранжев множитель для условия связи (12). Эти уравнения можно переписать в виде

$$\nu_{jm} = \nu\, e^{-\mu\, a(j)} \tag{14}$$

или

$$\nu_j = \nu\, g(j)\, e^{-\mu\, a(j)}. \tag{15}$$

Теперь мы суммируем выражения (15) по j и, учитывая, что $\sum_j \nu_j = \nu$, приходим к уравнению для μ:

$$\sum_j g(j)\, e^{-\mu\, a(j)} = 1. \tag{16}$$

Строго говоря, суммирование в формуле (16) ведется не до бесконечности, а до некоторого j, соответствующего максимальному вкладу $a_{\max}$ в площадь горизонта. Значение $a_{\max}$ следует из очевидного условия: ни одно из чисел заполнения ν_{jm} не должно быть меньше единицы. В результате, уравнение (14) дает

$$a_{\max} = \frac{\ln \nu}{\mu}. \tag{17}$$

Хорошо известно, что формула Стирлинга для $n!$ справедлива с разумной точностью даже для $n = 1$. Таким образом, формула (17) для $a_{\max}$ — это не просто оценка, она имеет неплохую численную точность.

С другой стороны, умножая уравнение (13) на ν_{jm} и суммируя по jm, мы получаем с учетом условия связи (12) следующий результат для максимальной энтропии при заданном N:

$$S_{\max} = \mu\, N = \frac{\mu}{8\pi\gamma l_p^2}\, A. \tag{18}$$

Итак, уравнение (6) для квантованной поверхности может быть записано в виде

$$A = 8\pi\gamma\, l_p^2\, \nu \sum_j g(j)\, a(j)\, e^{-\mu a(j)}\,, \tag{19}$$

где $\gamma = \mu/(2\pi)$, а значение μ находится из уравнения (16).

Проиллюстрируем теперь эти общие соотношения на примере конкретной модели так называемой петлевой квантовой гравитации (ПКГ). Квантованная поверхность в ПКГ выглядит так (см., например, [21]). Ей приписывается набор «проколов» (соответствующих нашим «участкам»). Каждому проколу приписывается целое или полуцелое квантовое число j:

$$j = 1/2, 1, 3/2, \ldots\,. \tag{20}$$

Проекции m этих «моментов» пробегают, как обычно, значения от $-j$ до j. Площадь поверхности равна

$$A = 8\pi\gamma\, l_p^2 \sum_{jm} \sqrt{j(j+1)}\,\nu_{jm}. \tag{21}$$

Очевидно, это частный случай общих выражений, полученных выше. Здесь

$$a(j) = \sqrt{j(j+1)}\,, \quad g(j) = 2j+1. \tag{22}$$

Стоит отметить, что хотя спектр площадей (21) неэквидистантный, он не столь уж далек от эквидистантного. Действительно, даже для наименьшего квантового числа $j = 1/2$, радикал $\sqrt{j(j+1)}$ можно приблизить выражением $j + 1/2$ с точностью 13%. И приближение $\sqrt{j(j+1)} \approx j + 1/2$ становится все лучше с ростом j, т. е. спектр (21) приближается к эквидистантному все больше.

Численный множитель γ в (21) (так наз. параметр Барберо–Иммирзи) соответствует в ПКГ семейству неэквивалентных квантовых теорий, причем все они априори, без дополнительных соображений, допустимы [22,23].

Используем общие соотношения, полученные выше для произвольных $a(j)$, $g(j)$ в данном конкретном случае. В частности, «секулярное» уравнение (16) и его решение здесь таковы [19] (см. также [7,20]):

$$\sum_{j=1/2}^{\infty} (2j+1)\, e^{-\mu\sqrt{j(j+1)}} = 1\,, \quad \mu = 1.722. \tag{23}$$

Значение параметра Барберо–Иммирзи в ПКГ равно

$$\gamma = \frac{\mu}{2\pi} = 0.274\,. \tag{24}$$

Можно также найти в замкнутой форме поправки к соотношению Бекенштейна–Хокинга (4). С учетом ведущей поправки это соотношение выглядит как

$$S = \frac{A}{4l_p^2} - \frac{1}{6\mu^2}\,\ln^3\frac{A}{l_p^2}\,. \tag{25}$$

Существование этой поправки порядка $\ln^3$ было впервые указано в [24] (впрочем, с коэффициентом $1/3$ вместо $1/6$).

Заметим в заключение этого раздела, что многочисленные попытки найти спектр поверхности горизонта и значение параметра Барберо–Иммирзи в ПКГ, не использующие голографический предел, начались много лет назад [25]. Однако они привели к успеху лишь недавно [26].

4 Квантование вращающихся черных дыр

Рассматривая излучение квантованных черных дыр, следует учитывать правила отбора по угловому моменту. Например, излучение фотона невозможно, если и начальное, и конечное состояния черной дыры сферически-симметричны. Поэтому, чтобы найти спектр излучения, правило квантования для сферически-симметричной черной дыры нужно обобщить на случай вращающейся черной дыры.

Для этого вернемся к работам [2,3]. В них было показано путем анализа мысленного эксперимента, что при адиабатическом захвате частицы с угловым моментом j момент J вращающейся черной дыры увеличивается на конечную величину j, но поверхность горизонта A не меняется. Разумеется, при некой иной вариации параметров постоянным останется угловой момент J. Иными словами, у вращающейся черной дыры массы M есть два независимых адиабатических инварианта, A и J.

Такая ситуация достаточно знакома в обычной механике. Например, энергия частицы массы m, связанной кулоновским полем $U(r) = -\alpha/r$ равна

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2\,(I_r + I_\phi)^2}\,, \tag{26}$$

где I_r и I_ϕ — адиабатические инварианты для радиальной и угловой степеней свободы соответственно. Разумеется, энергия E — тоже в некотором смысле адиабатический инвариант, она инвариантна, однако, только по отношению к такой вариации параметров, при которой и I_r, и I_ϕ (или, по крайней мере, их сумма) остаются постоянными. Что же касается квантовой механики, в ней формула (26) переходит в

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2\,\hbar^2\,(n_r + 1 + l)^2}\,, \tag{27}$$

где n_r и l — радиальное и орбитальное квантовые числа соответственно.

Приведенный пример подсказывает решение задачи о квантовании вращающейся (керровской) черной дыры. Это решение удобно сформулировать в терминах так называемой неприводимой массы M_{ir} черной дыры, связанной по определению с радиусом r_h и площадью A ее горизонта следующим образом:

$$r_h = 2kM_{ir}\,, \quad A = 16\pi k^2 M_{ir}^2\,. \tag{28}$$

Так же, как и A, неприводимая масса — адиабатический инвариант. Согласно (6) и (12), она квантуется следующим образом:

$$M_{ir}^2 = \frac{1}{2}\,m_p^2\gamma\,N\,, \tag{29}$$

где $m_p^2 = \hbar c/k$ — квадрат планковской массы.

Конечно, для шварцшильдовской черной дыры M_{ir} совпадает с ее обычной массой M. Однако ситуация для керровской черной дыры более интересна. Здесь

$$M^2 = M_{ir}^2 + \frac{J^2}{r_h^2} = M_{ir}^2 + \frac{J^2}{4k^2 M_{ir}^2}, \tag{30}$$

где J — внутренний угловой момент дыры. Смысл этого соотношения становится понятным из его предельного случая

$$M = M_{ir} + \frac{J^2}{2M_{ir} r_h^2} \tag{31}$$

для малых J: M_{ir} играет роль массы покоя ротатора; $M_{ir} r_h^2$ — его момент инерции; $J^2/(2M_{ir} r_h^2)$ — кинетическая энергия нерелятивистского вращения.

Решая уравнение (30) относительно M_{ir}^2, мы находим:

$$M_{ir}^2 = \frac{1}{2}\left(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2/k^2}\right), \tag{32}$$

или

$$A = 8\pi k\left(kM^2 + \sqrt{k^2 M^4 - J^2}\right). \tag{33}$$

Отсюда ясно, что при заданной массе черной дыры ее угловой момент ограничен условием $J \leq kM^2$. Черная дыра, у которой $J = kM^2$, носит название предельной, или экстремальной.

Возвращаясь к уравнению (29), получаем следующее условие квантования для квадрата массы M^2 вращающейся черной дыры:

$$M^2 = \frac{1}{2} m_p^2 \left[\gamma N + \frac{J(J+1)}{\gamma N}\right]. \tag{34}$$

Заметим, что масса и неприводимая масса заряженной черной дыры связаны следующим образом:

$$M = M_{ir} + \frac{q^2}{2r_h}. \tag{35}$$

Здесь q — заряд черной дыры. Эта формула также имеет простую физическую интерпретацию: полная масса (или полная энергия) M заряженной черной дыры состоит из ее неприводимой массы (масса покоя) M_{ir} и энергии $q^2/2r_h$ ее электрического поля во внешней области $r > r_h$. С учетом $r_h = 2kM_{ir}$ соотношение (35) можно переписать в виде

$$M^2 = M_{ir}^2 + \frac{q^4}{16k^2 M_{ir}^2} + \frac{q^2}{2k}. \tag{36}$$

Итак, для заряженной черной дыры M^2 квантуется следующим образом:

$$M^2 = \frac{1}{2} m_p^2 \left[\gamma N + \frac{q^4}{4\gamma N} + q^2 \right]. \tag{37}$$

Соотношения такого рода (даже в более общем случае — для черных дыр Керра–Ньюмена, обладающих и зарядом, и моментом) содержались уже в пионерской работе [1], хотя и при эквидистантном условии квантования поверхности горизонта, т. е. M_{ir}^2 (см. также [27]), а затем в работе [28], использующей понятие так называемых изолированных горизонтов.

5 Спектр излучения квантованной черной дыры

Из выражения (34) следует, что для вращающейся черной дыры частота излучения ω, совпадающая с потерей массы ΔM, равна

$$\omega = \Delta M = T\mu\, \Delta N + \frac{1}{4kM} \frac{2J+1}{\gamma N} \Delta J\,, \tag{38}$$

где ΔN и ΔJ — потери квантового числа площади N и углового момента J соответственно. Мы использовали здесь наряду с (34) следующее тождество:

$$T = \frac{\partial M}{\partial S} = \frac{1}{8\pi k M} \frac{\partial M^2}{\partial M_{ir}^2}, \tag{39}$$

а также формулу (30).

Нетрудно убедиться в том, что пока черная дыра далека от предельной, т. е. пока $\gamma N \gg J$ зависимостью M^2 от J можно пренебречь, так что правила отбора по угловому моменту практически не влияют на спектр излучения черной дыры. В этой области доминирует первое, температурное, слагаемое в (38). Именно такая ситуация рассматривается в дальнейшем.

Что же касается нетемпературного излучения предельной черной дыры, которое описывается слагаемым с ΔJ в (38), этот эффект обусловлен туннелированием (см. относительно недавнее обсуждение этого вопроса в [29,30]). Потеря заряда заряженной предельной черной дырой происходит по существу благодаря кулоновскому отталкиванию между черной дырой и излучаемыми частицами с тем же знаком заряда. Для предельной вращающейся черной дыры причиной излучения служит взаимодействие угловых моментов, так как частицы (главным образом, безмассовые), полный угловой момент которых параллелен моменту черной дыры, отталкиваются от нее.

Вернемся, однако, к температурному излучению. Естественно принять, следуя Бекенштейну [27], что квантовые эффекты приводят к следующему нижнему пределу для изменения площади горизонта ΔA при адиабатическом процессе:

$$(\Delta A)_{\min} = \xi l_p^2\,, \tag{40}$$

где ξ — некоторый численный коэффициент. Действительно, как и следует ожидать, правая часть формулы (40), описывающей нарушение адиабатической инвариантности, пропорциональна $\hbar$ вместе с квадратом планковской длины l_p^2. Наличие щели (40) в процессе захвата означает, что этот процесс сводится эффективно к увеличению на единицу числа заполнения ν_{jm}, соответствующего $a_{\min}$. Если бы захват сопровождался перестройкой нескольких чисел заполнения, изменение площади могло бы быть сколь угодно малым [5].

Естественно предположить, что и в акте излучения уменьшается на единицу одно из чисел заполнения, а изменение нескольких чисел заполнения по крайней мере сильно подавлено. Иными словами, переход при температурном излучении сводится к

$$\Delta N_j = a(j)\,, \quad \omega_j = T\mu\, a(j)\,. \tag{41}$$

Мы приходим, таким образом, к дискретному спектру с минимальной частотой

$$\omega_{\min} = T\mu\, a_{\min}\,, \tag{42}$$

где $a_{\min}$ — минимальное значение $a(j)$. Более того, очевидно, в силу соотношения (17) существует и максимальная частота излучения

$$\omega_{\max} = T\,\ln(A/l_p^2)\,. \tag{43}$$

Впрочем, в силу экспоненциального спада интенсивности излучения с частотой (см. ниже), последнее обстоятельство представляет совсем уж чисто теоретический интерес.

Наше следующее предположение состоит в том, что вероятность излучения кванта с частотой ω_j пропорциональна числу заполнения ν_j. Соответственно интенсивность излучения I_j на этой частоте ω_j пропорциональна $\nu_j\,\omega_j$:

$$I_j \sim \nu_j\,\omega_j \sim \nu\, g(j)\,\omega_j\, e^{-\omega_j/T}\,. \tag{44}$$

Таким образом, дискретный спектр излучения имеет экспоненциальную виновскую огибающую при $\omega_j \gg T$. (Это утверждение было сделано ранее [31] для случая эквидистантного спектра поверхности горизонта.)

Здесь следует заметить, что в отличие от обычного теплового излучения для черной дыры характерные длины волн имеют тот же порядок

[5] Кроме случая целочисленных $a(j)$ и соответственно эквидистантного спектра поверхности. Этот случай, вообще говоря, исключить нельзя.

величины, что и радиус излучателя. Поэтому привычные распределения Планка и Ферми–Дирака здесь неприменимы. В частности, благодаря центробежному барьеру, в излучении черной дыры сильно доминирует парциальная волна с наименьшим возможным моментом, $J_{\min} = 1$ в случае фотона. Тем не менее, как показали расчеты Пэйджа [32], полная интенсивность γ-излучения для (неквантованной) черной дыры близка к полученной по наивной планковской формуле. Для электронов, позитронов и нейтрино минимальный момент $J_{\min} = 1/2$ и соответственно интенсивность излучения выше.

Речь идет здесь фактически о достаточно легких черных дырах с массой $\sim 10^{15}$–10^{16} г и с характерной температурой в интервале 10–1 МэВ соответственно. Электроны и позитроны, испускаемые такими черными дырами, можно с хорошей точностью считать ультрарелятивистскими. Более легкие черные дыры не дожили до нашего времени с момента своего возникновения на ранних стадиях эволюции Вселенной, а интенсивность излучения более тяжелых черных дыр слишком мала.

Возвращаясь к нашей задаче о квантованных черных дырах, заметим прежде всего, что согласно численным оценкам полная интенсивность излучения у квантованных черных дыр примерно такая же, как и у неквантованных.

Из численных оценок следует также замечательный факт: полная естественная ширина линий излучения квантованной черной дыры не превышает $(2-3) \times 10^{-2}$ от расстояния между этими линиями. Таким образом, спектр излучения реально дискретный!

Литература

1. *Bekenstein J. D.* Lett. Nuovo Cimento, 1974, **11**, 467.
2. *Christodoulu D.* Phys. Rev. Lett., 1970, **25**, 1596.
3. *Christodoulu D., Ruffini R.* Phys. Rev., 1971, **D4**, 3552.
4. *Муханов В. Ф.* Письма ЖЭТФ, 1986, **44**, 50.
5. *Коган Я. И.* Письма ЖЭТФ, 1986, **44**, 209.
6. *Khriplovich I. B.* Phys. Lett., 1998, **B431**, 19.
7. *Хриплович И. Б.* ЖЭТФ, 2004, **126**, 527.
8. *Padmanabhan T.* Phys. Rev., 1999, **D59**, 124012.
9. *Хриплович И. Б.* Общая теория относительности. Москва: Институт компьютерных исследований, 2002.
10. *Hawking S. W.* Nature, 1974, **248**, 199.
11. *Bekenstein J. D.* Phys. Rev., 1973, **D7**, 2333.
12. *Bekenstein J. D.* Phys. Rev., 1981, **D23**, 287.
13. *'t Hooft G.* in Salam Festschrift. Singapore: World Scientific, 1993.
14. *Susskind L.* J. Math. Phys., 1995, **36**, 6377.

15. *Vaz C., Witten L.* Phys. Rev., 2001, **D64**, 084005.
16. *Alekseev A., Polychronakos A. P., Smedback M.* Phys. Lett., 2003, **B574**, 296.
17. *Polychronakos A. P.* Phys. Rev., 2004, **D69**, 044010.
18. *Gour G., Suneeta V.* Class. Quant. Grav., 2004, **21**, 3405.
19. *Коркин Р. В., Хриплович И. Б.* ЖЭТФ, 2002, **122**, 1.
20. *Хриплович И. Б.* ЖЭТФ, 2005, **127**, 1223.
21. *Frittelli S., Lehner L., Rovelli C.* Class. Quantum Grav., 1996, **13**, 2921.
22. *Immirzi G.* Class. Quantum Grav., 1997, **14**, L177.
23. *Rovelli C., Thiemann T.* Phys. Rev., 1998, **D57**, 1009.
24. *Ghosh A., Mitra P.* Phys.Lett., 2005, **B616**, 114.
25. *Rovelli C.* Phys. Rev. Lett., 1996, **77**, 3288.
26. *Corichi A., Diaz-Polo J., Fernandez-Borja E.* Class. Quantum Grav., 2006, **24**, 1495.
27. *Bekenstein J. D.* in Cosmology and Gravitation. France: Atlantisciences, 2000.
28. *Ashtekar A., Fairhurst S., Krishnan B.* Phys. Rev., 2000, **D62**, 104025.
29. *Хриплович И. Б.* ЖЭТФ, 1999, **115**, 1539.
30. *Коркин Р. В., Хриплович И. Б.* ЖЭТФ, 2002, **121**, 531.
31. *Bekenstein J. D., Mukhanov V. F.* Phys. Lett., 1995, **B360**, 7.
32. *Page D. N.* Phys. Rev., 1976, **D13**, 198.

Quantization of black holes

I. B. Khriplovich

Under quite general assumptions, we demonstrate that in the classical limit the maximum entropy of a quantized surface is proportional to its area. In the special case of loop quantum gravity the value of the Barbero-Immirzi parameter is found. The general structure of the discrete spectrum of the horizon of a quantized black hole is obtained. The discrete spectrum of its thermal radiation has the Wien envelope. The natural width of the radiation lines is much less than their separation.