Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

"Уфимский государственный авиационный технический университет"

Научно - исследовательская лаборатория "Групповой анализ математических моделей естествознания, техники и технологий"

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ MOGRAN-16

СОВРЕМЕННЫЙ ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

28 октября -2 ноября 2013 года

Ufa State Aviation Technical University

Laboratory of Group Analisys of Mathematical Models in Natural and Engineering Sciences

INTERNATIONAL CONFERENCE MOGRAN-16

MOdern GRoup ANalysis

BOOK OF ABSTRACTS

October 28- November 2, 2013

Уфа - 2013

СОДЕРЖАНИЕ

К ГРУППОВОЙ КЛАССИФИКАЦИИ УРАВНЕНИЙ ТРЁХМЕРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ТЕРМИНАХ ТРАЕКТОРИИ–ПОТЕНЦИАЛ ВЕБЕРА

Андреев В.К., Краснова Д.А.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

andr@icm.krasn.ru

Рассматриваются уравнения трёхмерных движений идеальной несжимаемой жидкости в переменных Лагранжа. При условии потенциальности внешних сил они имеют общий интеграл — интеграл Вебера. Начальное поле скоростей непосредственно входит в новую систему уравнений, что делает актуальной задачу групповой классификации. Показано, что преобразования, сохраняющие объём, являются преобразованиями эквивалентности. Оказалось, что классифицирующие уравнения связывают только компоненты начальной завихренности с координатами общего оператора симметрии, допускаемого системой. Установлено, что группа преобразований является бесконечномерной и по пространственным переменным. Получены исключительные выражения начального вектора завихренности, расширяющие основную группу Ли.

Работа выполнена при финансовой поддержке интеграционного проекта СО РАН № 44.

ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА ГИДРОСТАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Андреев В.К., Родионов А.А.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

andr@icm.krasn.ru, aarod@icm.krasn.ru

Часто при изучении процессов в океанологии (Саркисян А.С., 1991; Bowden K.F., 1983) делается предположение о линейном росте давления с глубиной

$$p(x, y, z, t) = -gz + q(x, y, t).$$

Уравнения движения идеальной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести примут вид

$$\begin{gathered} u_t + uu_x + vu_y + wu_z + q_x = 0, \quad v_t + uv_x + vv_y + wu_z + q_y = 0, \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z = 0, \quad u_x + v_y + w_z = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

По функции $q(x, y, t)$, определяемой из уравнений (1), однозначно находится положение свободной границы жидкости. Алгебра Ли для системы (1) образована операторами

$$\partial_t,\ \partial_z,\ t\partial_z + \partial_w,\ t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z,\ x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u + v\partial_v + 2q\partial_q,$$

$$y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v,\ f_1(t)\partial_x + f_1'\partial_u - xf_1''\partial_q,\ f_2(t)\partial_y + f_2'\partial_v - yf_2''\partial_q,\ f_3(t)\partial_q$$

с произвольными функциями $f_j(t)$, $j = 1, 2, 3$.

Для приближенной модели, когда $z \to \varepsilon z$, $w \to \varepsilon w$, в пределе при $\varepsilon \to 0$ рассматриваются первое, второе и четвёртое уравнения системы (1). Алгебра Ли операторов этой модели такова:

$$\partial_t,\ y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v,\ -t\partial_t + u\partial_u + v\partial_v + w\partial_w + 2q\partial_q,\ z\partial_z + w\partial_w,$$

$$f_1(t)\partial_x + f_1'\partial_u - xf_1''\partial_q,\ f_2(t)\partial_y + f_2'\partial_u - xf_2''\partial_q,\ f_3(t)\partial_q,$$

$$f(x,y,t)\partial_z + (f_x'u + f_y'v + f_t')\partial_w,\ 2h(t)\partial_t + h'(x\partial_x + y\partial_y - 2z\partial_z) + (-h'u + h''x)\partial_u +$$

$$+(-h'u + h''x)\partial_u + (-h'v + h''y)\partial_v - (4h'w + 2h''z)\partial_w - \left(2h'q + \frac{x^2+y^2}{2}\,h'''\right)\partial_q.$$

Построены некоторые точные решения системы (1) и приближенной модели.

Работа выполнена при финансовой поддержке интеграционного проекта СО РАН № 44.

О ГРУППОВОЙ КЛАССИФИКАЦИИ НЕКОТОРЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Бабков О.К.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

olegmath@mail.ru

В работе [1] В.А. Байковым была поставлена задача изучения симметрийных свойств нелинейных эволюционных уравнений, в частности, нелинейных уравнений фильтрации и других уравнений. В рамках решения этой задачи автором настоящей заметки были найдены алгебры допускаемых операторов следующих двумерных уравнений.

Теорема 1. *Уравнение* $p_t = (F(p_x^2+p_y^2)p_x)_x + (F(p_x^2+p_y^2)p_y)_y$, $p = p(t,x,y)$, *при произвольной функции* $F = F(r)$ *допускает 6-мерную алгебру операторов* $L_6 = \langle \partial_t,\, \partial_x,\, \partial_y,\, \partial_p,\, y\partial_x - x\partial_y,\, 2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + p\partial_p \rangle$.

Расширение этой алгебры до L_7 *возможно только для степенной функции* $F(r) = Cr^\lambda$, *в этом случае оператор* $2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + p\partial_p$ *расщепляется на операторы:* $2(\lambda+1)t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y$ *и* $2\lambda t\partial_t - p\partial_p$.

Других случаев расширения минимальной алгебры L_6 *нет.*

Теорема 2. *Уравнение* $p_{tt} = (F(p_x^2+p_y^2)p_x)_x + (F(p_x^2+p_y^2)p_y)_y$, $p = p(t,x,y)$, *при произвольной функции* $F = F(r)$ *допускает 7-мерную алгебру операторов* $L_7 = \langle \partial_t,\, \partial_x,\, \partial_y,\, \partial_p,\, y\partial_x - x\partial_y,\, t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + p\partial_p,\, t\partial_p \rangle$.

Расширение этой алгебры до L_8 возможно только для степенной функции $F(r) = Cr^{\lambda}$; в случае $\lambda \neq -2$ оператор $t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + p\partial_p$ расщепляется на операторы $(\lambda+1)t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y$ и $\lambda t\partial_t - p\partial_p$;

При $\lambda = -2$ алгебра допустимых операторов L_8 становится 9-мерной алгеброй L_9 за счет присоединения оператора $t^2\partial_t + tp\partial_p$.

Других случаев расширения минимальной алгебры L_7 нет.

Работа выполнена в НИЛ GAMMET в рамках договора № 11.G34.31.0042 *по постановлению* № 220 *правительства РФ.*

Список литературы

1. *Baikov V.A.* Filtration of a non-Newton liquids in porous media: Models, symmetries and solutions. – Symmetry analysis and mathematical modeling. ISAAM, 1998. – p. 94-103.

НАСЛЕДОВАНИЕ ГРУПП И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Байков В.А., Желтова И.С., Яковлев А.А.
УГАТУ, НИЛ ГАММЕТТ, Уфа
baikov@ufanipi.ru, zheltovais@gmail.com, yakovlevandrey@yandex.ru

Работа посвящена построению законов сохранения, которые являются одним из основных инструментов построения и исследования математических моделей и могут быть использованы для получения некоторых частных решений.

Исследуется частный случай модели одномерной двухфазной фильтрации нефти и воды, когда пористая среда однородна и несжимаема, фильтрующиеся жидкости также несжимаемы, давление в водной и нефтяной фазах считается равным. Система уравнений имеет вид [1]:

$$\varphi\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{K}{\mu_w}\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{rw}(S)\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0, \quad \varphi\frac{\partial(1-S)}{\partial t} + \frac{K}{\mu_o}\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{ro}(S)\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0, \qquad (1)$$

где $p(t,x)$, $S(t,x)$ – давление в жидкостях и водонасыщенность, $K_{rw}(S)$, $K_{ro}(S)$ – относительные фазовые проницаемости по воде и нефти, $\varphi, K, \mu_w, \mu_o - \mathrm{const}$ – характеристики пористой среды, воды и нефти.

Проинтегрировав одно из уравнений системы по пространственной переменной, можно переписать ее в следующем виде:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + f(t)\frac{\partial F(S)}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = Cf(t)\frac{F(S)}{K_{rw}(S)}, \qquad (2)$$

где $F(S) = (K_{rw}(S)/\mu_w)/(K_{rw}(S)/\mu_w + K_{ro}(S)/\mu_o)$, $C = -(\mu_w\varphi)/K$. При этом допускаемая группа системы (2) может быть ассоциирована с подгруппой допускаемой группы уравнения Хопфа.

Кроме того, неточечная замена переменных $v(t,x) = \partial p/\partial x$ приводит к системе полностью наследующей группу уравнения Хопфа.

Используя симметрии упрощенной системы уравнений (2) и ее нелинейную самосопряженность [2], построены новые законы сохранения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Российской Федерации, Постановление № 220, Договор № 11.G34.31.0042.

Список литературы

1. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. – М.: Недра, 1984.

2. N.H. Ibragimov, Nonlinear self-adjointness in constructing conservation laws, Archives of ALGA, vol. 7/8. pp 1-99, 2010–2011.

МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ

Баландин С. П., Черданцев И. Ю.

Уфимский государственный авиационный технический университет , Уфа

Башкирский государственный университет , Уфа

balanse@bk.ru

Спустя сто лет после того, как Пенлеве проклассифицировал скалярные уравнения второго порядка, Баландин и Соколов в 1998 году ввели матричные аналоги первого и второго уравнений Пенлеве. Притом, в отличие от скалярного случая, в первом уравнении появился постоянный матричный параметр. Статья [1] исследует оба уравнения с помощью теста Пенлеве–Ковалевской. Наш доклад посвящен обобщениям обоих матричных аналогов. В скалярном случае тест инвариантен относительно дробно–линейных преобразований, но в матричном неясен даже результат линейного преобразования искомой функции. В работе [2] доказана

Теорема. *Уравнение*

$$u'' = 6u^2 + 60(\alpha(z)u + \beta(z)),$$

где матрицы $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ аналитичны во всей плоскости, обладает решением в виде формального ряда Лорана

$$u = u_0(z - z_0)^{-2} + u_1(z - z_0)^{-1} + u_2 + \dots,$$

зависящим от $2n^2$ *произвольных констант, тогда и только тогда, когда* $\alpha(z)$ *и* $\beta(z) - \beta(0)$ *— скалярные матрицы, связанные соотношением*

$$\beta''(z) = -\frac{1}{12}\alpha^{(4)}(z) + \frac{1}{5}(\alpha(z)^2)'',$$

а $\beta(0)$ *— произвольная матрица. Заменой это уравнение приводится к виду*

$$u'' = 6u^2 + \beta_0 + \beta_1 zE,$$

где β_0 *— произвольная матрица, а* β_1 *– произвольная константа.*

Аналогичным образом исследовано и второе уравнение. Ввиду громоздкости выкладок, авторы пользовались пакетом компьютерной алгебры REDUCE.

Список литературы

1. *Balandin S. P.,and Sokolov V. V.* On the Painlevé test for non– Abelian equations // Phys. Lett. A . 1998. V. 246. № 3-4. P. 267–272.

2. *Баландин С.П., Черданцев И.Ю.* Матричные аналоги первого уравнения Пенлеве// Уфимский математический журнал. 2011. Том 3. № 4. С. 21-27.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ БИОДЕГРАДАЦИИ НЕФТИ И ИХ ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ

Водопьянова Л.Л.

ФГБОУ ВПО "Уфимский государственный авиационный технический университет", Уфа

lia_87@rambler.ru

В работе найдены точечные преобразования модели биодеградации нефти в почве, выполнена групповая классификация модели, построены приближенные симметрии, найдены инвариантные решения, которые описывают поведение микроорганизмов и распределение концентрации нефти в начальной фазе восстановления биосистемы почвы, после ее загрязнения. *Работа выполнена*

при поддержке гранта правительства Российской Федерации по постановлению №220 "О мерах по привлечению ведущих ученых в российские образовательные учреждения высшего профессионального образования" по договору №11.G34.31.0042, заключенным между Министерством образования и науки РФ, ведущим ученым Ибрагимовым Н.Х. и ФГБОУ ВПО "Уфимский государственный авиационный технический университет".

ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ОДУ $y''' = F(x, y, y')$

Гайнетдинова А.А., Ибрагимов Н.Х., Мелешко С.В.
ФГБОУ ВПО "Уфимский государственный авиационный технический университет", Уфа

Групповая классификация уравнения

$$y'' = F(x, y)$$

была проведена в работе С. Ли. По аналогии была проведена групповая классификация уравнения

$$y''' = F(x, y, y').$$

Работа выполнена при поддержке гранта правительства Российской Федерации по постановлению №220 "О мерах по привлечению ведущих ученых в российские образовательные учреждения высшего профессионального образования" по договору №11.G34.31.0042, заключенным между Министерством образования и науки РФ, ведущим ученым Ибрагимовым Н.Х. и ФГБОУ ВПО "Уфимский государственный авиационный технический университет".

МОДЕЛИРОВАНИЕ И СИММЕТРИЙНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНОЙ СВАРКИ ТРЕНИЕМ

Газизов Р.К.[a], Ибрагимов Н. Х.[a], Руденко О. В.[b], Ямилева А. М.[a]
[a]*Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа*
[b]*Физический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Москва*
gazizov@mail.rb.ru

Процесс линейной сварки трением (ЛСТ) представляет собой поверхностное соединение деталей при возвратно-поступательном движении друг относительно друга под действием прижимного давления. Данный процесс применяется прпинеразъемном соединении свариваемых частей сложной формы, например, для приваривания лопаток к дискам турбин ГТД.

Рассмотрены различные компьютерные и математические модели процесса ЛСТ. В частности, предложена новая математическая модель процессанагревания тонких слоев между трущимися поверхностями за счет трения. В рамках этой модели обнаружено существование оптимальных значений коэффициентов вязкости и трения, при которых потери максимальны. Для некоторых моделей проведено исследование симметрийных свойств.

Работа выполнена в рамках договора 11.G34.31.0042 между Министерством образования и науки РФ, ведущим ученым проф. Н. Х. Ибрагимовым и ФГБОУ ВПО «УГАТУ».

ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЙ ТОНКОЙ ПЛЁНКИ

Зотов Игорь Николаевич

Институт математики и фундаментальной информатики

Сибирский федеральный университет, Красноярск

zotovin@rambler.ru

Стекающие пленки широко применяются в технике для охлаждения электронных устройств, для интенсификации теплообмена и т.д. Пусть подложка наклонена к горизонту под углом α. Выберем систему декартовых координат x, y, z так, что ось Oz ортогональна к подложке, а ось Ox направлена в сторону действия скатывающей силы. Пусть жидкость занимает область $\Omega = \{(x, y, z) : -\infty < x, y < \infty, 0 < z < H(t, x, y)\}$, где H – толщина пленки и u, v, ω – компоненты вектора скорости $\mathbf{v}$.

В [1] возникает следующая система уравнений:

$$hD(\theta_t + u\theta_x + v\theta_y + \omega\theta_\xi) = \theta_{\xi\xi}, \tag{1}$$

$$-p = \Delta h - Ah + Cx, \tag{2}$$

$$h_t - (Mh^2\gamma\tilde{\theta}_x + h^3\varphi p_x)_x + (Mh^2\gamma\tilde{\theta}_y - h^3\varphi p_y)_y = 0, \tag{3}$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – оператор Лапласа; координата $\xi = z/H(t, x, y)$, $p(t, x, y)$, $h(t, x, y), \theta(t, x, y, \xi)$ – безразмерные переменные гидродинамического давления, толщины пленки и температуры жидкости соответственно; A, C, D, M – безразмерные критерии подобия. Функции $F(t, x, y, \xi)$, $G(t, x, y, \xi)$, $\Phi(t, x, y, \xi)$, $\Gamma(t, x, y, \xi)$, $\varphi(t, x, y)$, $\gamma(t, x, y)$, $\tilde{\theta}(t, x, y)$ определяются в [1].

В работе рассматриваются случаи однонаправленного движения плёнки, стекающей по наклоненной плоской подложке, с постоянной вязкостью и движения только с постоянной вязкостью. Будем считать, что на поверхности задана температура $\tilde{\theta}(t, x, y)$. Поэтому основной является задача (2)-(3). Для неё решается задача групповой классификации [2]-[3] по отношению к произвольной функции $\tilde{\theta}(t, x, y)$ и трёх постоянных A, C, M.

Список литературы

1. *Кузнецов В.В.* Взаимодействие возмущений стекающей плёнки, вызываемых несколькими локальными нагревателями // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2009. Т. 2. №. 1. С. 91–104.

2. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.

3. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

ГРАФ ВЛОЖЕННЫХ ПОДАЛГЕБР КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Ильясов А.М.
РН-УфаНИПИнефть, Уфа
IlyasovAM@ufanipi.ru

На основе известной точечной группы симметрии квазилинейного уравнения теплопроводности без источника со степенными коэффициентами построена оптимальная система подалгебр (ОСП), состоящей из 117 классов неподобных подалгебр 9-мерной алгебры Ли. Классы из ОСП имеют следующее разбиение по размерностям: ОСП состоит из 10 классов одномерных подалгебр, 22 классов двумерных подалгебр, 26 классов трехмерных подалгебр, 26 классов четырехмерных подалгебр, 18 классов пятимерных подалгебр, 7 классов шестимерных подалгебр, 4 классов семимерных подалгебр, 3 классов восьмимерных подалгебр и самой 9 мерной алгебры. Решена задача о представлении ОСП в виде графа вложенных подалгебр с помощью подграфов. Вложения подалгебр размерностей от 6 до 9 представлены в виде одного подграфа. Вложения подалгебр размерностей 4-5 в шестимерные подалгебры представлены в виде 6 подграфов. Один подграф представляет вложения подалгебр размерностей 4-5 в семимерную подалгебру. Вложения подалгебр размерностей 1-3 в четырехмерные подалгебры представлены в виде 24 подграфов основного графа. Всего построено 32 подграфа. Доказано, что представлен весь граф ОСП, а именно любое вложение двух подалгебр можно найти в представленных подграфах.

THE DATABASE OF GAMMETT LABORATORY

Имамутдинова К.В., Каримова Е.Н.
УГАТУ НИЛ «ГАММЕТТ», Уфа
kimamutdinova@mail.ru, lenchik9191@mail.ru

В рамках лаборатории «Групповой анализ математических моделей, естествознания, техники и технологии» создана база данных по групповому анализу с интерактивным доступом.

База данных содержит математические модели процессов, их симметриийные свойства, инвариантные решения, законы сохранения.

В настоящее время в базе данных описаны более 200 уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта правительства Российской Федерации по постановлению №220 "О мерах по привлечению ведущих ученых в российские образовательные учреждения высшего профессионального образования"по договору №11.G34.31.0042, заключенным между Министерством образования и науки РФ, ведущим ученым Ибрагимовым Н.Х. и ФГБОУ ВПО "Уфимский государственный авиационный технический университет".

О ГРУППОВОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Касаткин А.А.
Уфимский государственный авиационный технический университет, г. Уфа
alexei_kasatkin@mail.ru

Обсуждаются симметрийные свойства уравнения с двумя производными дробного порядка типа Римана-Лиувилля:

$$D^{\alpha+1}y = \varphi(x, y, D^{\alpha}y), \quad y = y(x),\ 0 < \alpha < 1.$$

Адаптированные для уравнений дробного порядка методы группового анализа [1], [2] применяются для поиска симметрий и построения некоторых инвариантных решений данного уравнения при разных φ.

При определённом ограничении класса допускаемых операторов удаётся записать определяющее уравнение в разрешимом виде. Для φ, не зависящего от $D^{\alpha}y$, допускаемые операторы являются некоторыми комбинациями операторов $x\partial_x$, $x^2\partial_x + \alpha xy\partial_y$, $y\partial_y$, $q(x)\partial_y$. Классификация уравнений при этом аналогична проведённой в работе [2]. Если φ зависит от $D^{\alpha}y$ нелинейно, то допускаемые операторы являются комбинациями $x\partial_x$, $x^2\partial_x + (\alpha-1)xy\partial_y$, $y\partial_y$, $q(x)\partial_y$, то есть при каждом таком φ допускается некоторая подалгебра алгебры $L = L_3 + L_\infty$. Стандартный подход к классификации предполагает применение преобразований эквивалентности для упрощения определяющих уравнений. В данном случае каждый оператор из L задаёт преобразование эквивалентности, что позволяет привести допускаемую подалгебру к элементу оптимальной системы подалгебр L малой размерности и сократить вычисления.

Уравнения вида $D^{\alpha+1}y = f(x)D^{\alpha}y + g(x, y)$, кроме уже рассмотренных допускаемых операторов из L, могут иметь и более сложные операторы, при этом их коэффициенты удовлетворяют бесконечной системе линейных уравнений в частных производных. Приводится пример такого оператора.

Работа выполнена в рамках договора 11.G34.31.0042 между Министерством образования и науки РФ, ведущим ученым проф. Н. Х. Ибрагимовым и ФГБОУ ВПО «УГАТУ»

Список литературы

1. *Газизов Р.К., Касаткин А.А., Лукащук С.Ю.* Непрерывные группы преобразований дифференциальных уравнений дробного порядка // Вестник УГАТУ. 2007. Т. 9, № 3(21). С. 125–135.

2. *Gazizov R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk S.Yu.* Group-Invariant Solutions of Fractional Differential Equations. Nonlinear Science and Complexity, J.A.T. Machado et al. (eds). Springer 2011. – P. 51-59.

ПРИНЦИП АПРИОРНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СИММЕТРИЙ В МОДЕЛИРОВАНИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НЕРВНОЙ ТКАНИ

Клебанов И.И.
Челябинский государственный педагогический университет, математический факультет, г. Челябинск
klebanov.igor2010@yandex.ru

Предметом исследования является уравнение, обобщающее основное уравнение модели нервной ткани, предложенное в [1],[2]. В одномерном случае обобщенное уравнение модели нервной ткани имеет вид

$$U_{tt} - U_{xx} + F(x,t,u)u_t + Q(x,t,u) = 0 \tag{1}$$

где $U(x,t)$-компонента напряженности электрического поля, нормальная к поверхности мембраны клетки, а функции F и Q характеризуют электропроводность биологической среды и плотность сторонних токов. Установлено ,что уравнение (1) имеет бесконечномерную алгебру эквивалентности. На основе теоремы Н.Х.Ибрагимова о проекциях и принципа априорного использования симметрий [3] получены уравнения для функций F и Q, при которых уравнение (1) допускает нетривиальные симметрии.
Получены и проанализированы частные инвариантные решения уравнения (1).

Список литературы

1. *Зозуля Ю.И., Марченко С.Ф., Червов В.Г.* Модель информационных процессов в нервной ткани. // Материалы к симпозиуму "Модели структурно-функциональной организации биологических систем". М (Дубна), 1972.

2. *Колесников О.А., Марченко С.Ф.* К моделированию электрического поля в нервной ткани (Сообщение 1 и 2) //Проблемы бионики, вып.12, Харьков, 1974 с. 51–64.

3. *Ибрагимов Н.Х., Руденко О.В.* Принцип априорного использования симметрии в теории нелинейных волн.// Акустический журнал,2004, том 50, с. 1–15

ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЯ СУБДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ФУНКЦИЕЙ ИСТОЧНИКА

Лукащук С.Ю., Макунин А.В.
Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа
amfallen@gmail.com

Решается задача групповой классификации дифференциального уравнения субдиффузии с источником. Уравнение субдиффузии представляет собой уравнение в частных производных с дробной производной по времени типа Римана-Лиувилля порядка $\alpha \in (0;1)$. Классификация проводится с точностью до преобразований эквивалентности по коэффициенту диффузии и функции источника, которые считаются функциями решения.

Работа выполнена в НИЛ ГАММЕТТ в рамках договора №11.G34.31.0042 между Министерством образования и науки РФ, ФГБОУ ВПО УГАТУ и ведущим ученым профессором Н.Х. Ибрагимовым

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРАФА ВЛОЖЕННЫХ ПОДАЛГЕБР, ДОПУСКАЕМЫХ УРАВНЕНИЯМИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ С РАЗДЕЛЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Макаревич Е.В.
НИЛ «ГАММЕТТ», Уфа
makarona_pm@mail.com

Представлен граф всех вложенные подалгебр двенадцатимерной алгебры Ли L_{12}, допускаемых уравнениями газовой динамики с уравнением состояния с разделенной плотностью, построенный по оптимальной системе подалгебр L_{12}. Каждая строка таблицы оптимальной системы задает с помощью базиса подалгебру, которая имеет номер $r.i$, где r – размерность подалгебры, i – порядковый номер подалгебры данной размерности. Граф построен с учетом подобия в классе подобных подалгебр. Приведен алгоритм построения графа-дерева, которые заключается в следующем.

Сначала строится *основной фрагмент*, в котором обозримо прослеживаются все вложения подалгебр размерности больше или равной 7 в L_{12} (или 12.1). Затем для всех 7-мерных подалгебр строятся либо *конечные фрагменты* к основному графу, в которых приведены все вложенные друг в друга подалгебры размерности большей или равной 1; либо *промежуточные фрагменты*, в которых приведены все вложения подалгебр размерности 5, 6 в 7-мерные подалгебры. Далее строятся *конечные фрагменты* к промежуточным фрагментам.

Существуют шестимерные подалгебры, которые не вкладываются ни в одну семимерную подалгебру. Для них так же построены конечные и промежуточные фрагменты к основному фрагменту графа.

Все фрагменты графа вложенных подалгебр построены методом перебора подалгебр из оптимальной системы в несколько этапов. Сначала для подалгебры конечной вершины графа размерности n с номером $n.i$ из оптимальной системы выписываются все подалгебры размерности $k < n$ с номерами $k.j$, вложенные в подалгебру $n.i$. Они являются вершинами строящегося графа. Вершины с номерами $n.i$ и $n-1.j$ соединяются ребрами. Для каждой вершины с номером $n-2.j$ проводятся ребра, связывающие ее с вершинами $n-1.i$. Если вершин $n-1.i$ не найдется для подалгебры $n-2.j$, то она соединяется ребром с вершиной $n.i$. Вершина $n-3.i$ соединяется с вершинами $n-2.j$, если она является их подалгеброй. Вершина $n-3.i$ соединяется с вершинами $n-1.j$ если она не соединяется с ней через подалгебру $n-2.k$ и так далее.

Граф-дерево представлен фрагментами: основной фрагмент, 7 конечных фрагментов к основному фрагменту, 19 промежуточных фрагментов к основному фрагменту и 66 конечных фрагментов к промежуточным фрагментам.

Работа выполнена при поддержке гранта №11.G34.31.0042 правительства РФ по постановлению №220.

АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ НЕПРЕРЫВНЫХ ГРУПП СИММЕТРИИ

Марков П.В.
Тюменский государственный университет, Тюмень
markov.pv@mail.ru

Теория дискретных динамических систем все чаще используется при описании физических, биологических, экономических и многих других процессов. Теория групп Ли непрерывных преобразований за прошедший век показала себя незаменимым инструментом исследования дифференциальных уравнений. Однако успехи этой теории для дискретных систем пока несколько скромнее.

В докладе приводятся результаты группового анализа дискретных динамических систем, которые задаются отображениями вида

$$x_{k+1} = f(x_k), \;\; f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \;\; x_k \in \mathbb{R}^n, \;\; n = 1, 2, 3 \; ,$$

с помощью групп преобразований, которые являются группами симметрии [3] и задаются алгеброй Ли дифференциальных операторов.

На основе результатов по групповой классификации обыкновенных дифференциальных уравнений [2] были получены семейства двумерных и трехмерных систем с двухпараметрическими группами симметрии. В канонических переменных трехмерные системы имеют вид

$$1.\quad \begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + f(z_k),\\ y_{k+1} &= y_k + g(z_k),\\ z_{k+1} &= h(z_k), \end{aligned} \qquad 2.\quad \begin{aligned} x_{k+1} &= x_k,\\ y_{k+1} &= y_k + g(x_k, z_k),\\ z_{k+1} &= h(x_k, z_k), \end{aligned}$$

$$3.\quad \begin{aligned} x_{k+1} &= f(z_k)x_k,\\ y_{k+1} &= g(z_k)x_k + y_k,\\ z_{k+1} &= h(z_k), \end{aligned} \qquad 4.\quad \begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, z_k),\\ y_{k+1} &= y_k,\\ z_{k+1} &= g(x_k, z_k). \end{aligned}$$

Также был проведен анализ трехмерных систем с помощью трехпараметрических групп преобразований на основе результатов [1].

Список литературы

1. *S.V. Khabirov.* Classification of three-dimentional Lie algebras in R^3 and their second-order differential invariants // Lobachevskii Journal of Mathematics: MAIK Nauka. 2010. Vol. 31, № 2. - pp. 152 - 156.

2. *S. Lie.* Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. — Leipzig: B. G. Teubner, 1891.

3. *S. Maeda.* The similarity method for difference equations // J. Appl. Math. 38 (1987), pp. 129–134.

О НОВОМ ПОДХОДЕ К ГРУППОВОМУ АНАЛИЗУ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Насыров Ф.С., Абдуллин М.А.

Уфимский государственный авиационный технический университет, НИЛ «ГАММЕТТ», Уфа

farsagit@yandex.ru, 79marat97@rambler.ru

Рассмотрим на вероятностном пространстве (Ω, F, P) одномерное стохастическое дифференциальное уравнение (в дальнейшем: СДУ)

$$dy(t) = b(t, y(t))dt + \sigma(t, y(t)) * dW(t) \tag{1}$$

где $W(t)$ – стандартный винеровский процесс, дифференциал понимается в смысле Стратоновича.

Предполагается, что коэффициенты уравнения $b(t, y)$ и $\sigma(t, y)$ неслучайны и дважды непрерывно дифференцируемы, σ отделено от нуля. Пусть $\bar{t} =$

$f(t,a), \bar{y} = g(t, W(t), y, a)$ – допустимые преобразования уравнения (1). Существенной особенностью группового анализа к СДУ является тот факт, что исходное броу- новское движение $W(t)$ в (1) должно переходить в новое броуновское движение $\bar{W}(\bar{t})$. Выяснилось, что в силу этих причин преобразование времени, например, порождает преобразование фазовой переменной, то есть эти преобразования связаны. При этом новое броуновское движение $\bar{W}(\bar{t})$ определяется единственным образом.

Ранее (см. подробнее в [1]) была выявлена структура решения уравнения (1):

$$\xi(t) = \phi^*(t, W(t) + C(t)),$$

где $\phi^*(t,v)$ – детерминированная функция, которая полностью определяется функцией $\sigma(t,v)$, а поскольку вид функции $\sigma(t,v)$ при допустимых преобразованиях остается неизменным, то и вид функции $\phi^*(t,v)$ также не изменяется.

Вся вероятностная информация о процессе $\eta(t)$ содержится в винеровском процессе со случайным гладким сносом

$$d\eta(t) = dW(t) + C'(t)dt, \tag{2}$$

где функция $C(t)$ есть решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$C'(t) = \frac{b(t, \phi^*(t, W(t) + C(t))) - (\phi^*)'_t(t,v)|_{W(t)+C(t)}}{\sigma(t, \phi^*(t, W(t) + C(t)))} \tag{3}$$

Но для (3) можно воспользоваться стандартной техникой группового анализа. Оказалось, что группа преобразований допускаемая уравнением (3) однозначным образом связана с соответствующей группой для СДУ (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта №11.G34.31.0042 правительства РФ по постановлению №220.

Список литературы

1. *Насыров Ф.С.* Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ, Москва: Физматлит. 2011. 212 с.

ПОДМОДЕЛИ И НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ГАЗОВЗВЕСИ

Панов А.В., Федоров В.Е.
Челябинский государственный университет, Челябинск
gjd@bk.ru, kar@csu.ru

Рассматривается система уравнений в частных производных, описывающая динамику смеси газа и твердых частиц [1] в случае трех пространственных переменных

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{u}_1 \cdot \nabla \rho_1 + \rho_1 \mathrm{div} \vec{u}_1 = 0, \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \vec{u}_2 \cdot \nabla \rho_2 + \rho_2 \mathrm{div} \vec{u}_2 = 0,$$

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \vec{u}_1 \cdot \nabla \vec{u}_1 \right) + m_1 \nabla P(\rho_1, \rho_2) = -\frac{\rho_2}{\tau} (\vec{u}_1 - \vec{u}_2),$$

$$\rho_2 \left(\frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} + \vec{u}_2 \cdot \nabla \vec{u}_2 \right) + m_2 \nabla P(\rho_1, \rho_2) = \frac{\rho_2}{\tau} (\vec{u}_1 - \vec{u}_2).$$

Неизвестными являются векторы скорости первой и второй фазы, а также плотности фаз. Давление P – функциональный параметр системы. Температурные эффекты не рассматриваются. Для данной системы найдено ядро основных алгебр Ли [2]. Ему соответствует десятимерная группа Галилея. С помощью оптимальной системы подалгебр, полученной в [3], выписаны подмодели рассматриваемой системы уравнений и найдены некоторые точные решения системы.

Список литературы

1. *Федоров А. В., Фомин П. А., Фомин В. М., Тропин Д. А., Чен Дж.-Р.* Физико-математическое моделирование подавления детонации облаками мелких частиц. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2011.

2. *Овсянников Л.В.*Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

3. *Ovsyannikov L.V.* On the optimal system of subalgebras // Lie groups and Their Appl. 1994. V.1. №. 2. P. 18-26.

О НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОМЕРНОГО И ТРЕХМЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА-ГОРДОНА С ПОТЕНЦИАЛОМ ДРОБНОЙ СТЕПЕНИ

Салимов Р.К., Екомасов Е.Г.
Башкирский государственный университет, Уфа
salemsrk@yandex.ru

Изучение нелинейных уравнений Клейна-Гордона $u_{xx} - u_{tt} = F(u)$ для разного вида функций $F(u)$ играет важную роль в исследовании солитонов.Эти уравнения легко обобщить на пространства более высокой размерности, например $\bigtriangledown^2 u - u_{tt} = F(u)$,или для сферической симметрии $u_{rr} + 2\frac{u_r}{r} - u_{tt} = F(u)$. Как известно,не существует стационарных решений Лоренц-инвариантных полевых уравнений для пространственной размерности более одной [1, 3]. Однако это не исключает зависящих от времени осциллирующих решений.

Нами численно исследовались решения уравнений вида $u_{rr}+2\frac{u_r}{r}-u_{tt} = u^{\frac{m}{n}}$ и с правой частью вида $F(u) = sin(u)+u^{\frac{m}{n}}$ (в частности $m/n = 1/3, m/n = 3/5$). При этом были получены интересные долгоживущие бризероподобные решения, аналогичными пульсонам уравнения синус Гордон[2].

Уравнения с правой частью вида $u^{\frac{m}{n}}$ имеют симметрии растяжения по r, t и сдвига по времени и могут быть приведены к одной переменой.Частное решение редуцированного уравнения исследовалось также численно. Далее численно исследовались уравнения вида $u_{rr}+2\frac{u_r}{r}-u_{tt} = u^{\frac{m}{n}}(u_r^2-u_t^2)^{\frac{k}{s}}$, которые также имеют бризероподобные решения и симметрии растяжения и сдвига по времени.

Список литературы

1. *Derrick G.* Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles // J. Math.Phys., 1964.№. 5.P.1252–4.

2. *Боголюбский И.Л., Маханьков В.Г.* Динамика сферически-симметричных пульсонов большой амплитуды // Письма в ЖЭТФ., 1977.Т. 25. №. 2.С. 120–123.

3. *Маханьков В.Г.* Солитоны и численный эксперимент // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 1983. Т. 14 №. 1.С. 124–177.

ОПТИМАЛЬНАЯ СИСТЕМА НЕПОДОБНЫХ ПОДАЛГЕБР СУММЫ ДВУХ ИДЕАЛОВ

Сираева Д. Т.

Научно-исследовательская лаборатория Групповой анализ математических моделей естествознания, техники и технологий, Уфа

sirdilara@gmail.com

Уравнения газовой динамики (УГД) имеют вид [1]:

$$\rho_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\rho + \rho\,\mathrm{div}\vec{u} = 0, \quad \vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \quad S_t + (\vec{u}\cdot\nabla)S = 0. \quad (1)$$

Здесь $\vec{u}$ – скорость, ρ – плотность, S – энтропия, p – давление связаны уравнением состояния $p = f(\rho, S)$.

Уравнения (1) с уравнением состояния общего вида допускают максимальную алгебру Ли L_{11}, для которой оптимальная система неподобных подалгебр построена [1]. Для уравнений состояния специального вида возникают дополнительные операторы, расширяющие допускаемую алгебру до L_k, k — размерность алгебры. Неизоморфные алгебры приведены в работе [2].

Для алгебр Ли, допускаемых УГД с уравнениями состояний специального вида [3], оптимальные системы построены не для всех алгебр. Они не построены для алгебр Ли $L_{11} \oplus \{Y_1\}$, $L_{11} \oplus \{Y_1, Y_p\}$ и $L_{11} \oplus \{Y_1, Y_p, Y_{p^2}\}$, где $Y_1 = \partial_p$, $Y_p = \rho\,\partial_\rho + p\,\partial_p$, $Y_{p^2} = 2\rho p\,\partial_p + p^2\partial_p$. В данной работе будет построена оптимальная система неподобных подалгебр для $L_{11} \oplus \{Y_1\}$, а также правило построения таких подалгебр с помощью оптимальной системы для L_{11} [4, приложение].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта № 11.G34.31.0042 правительства РФ по постановлению №220.

Список литературы

1. *Овсянников Л.В.* Лекции по основам газовой динамики. Москва-Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003. 336 с.

2. *Чиркунов Ю. А., Хабиров С. В.* Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды: монография.

3. *Хабиров С. В.* Неизоморфные алгебры Ли, допускаемые моделями газодинамического типа // УМЖ. 2011. Т. 3, №. 2. С. 87–90. Новосибирск: Издательство НГТУ, 2012. 659 с.

4. *Хабиров С. В.* Аналитические методы в газовой динамике. Уфа: Гилем, 2003. 192 с.

ЧАСТИЧНО ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ И АВТОМОРФНЫЕ СИСТЕМЫ

Талышев А.А.
Новосибирский государственный университет, Новосибирск
tal@academ.org

Пусть система дифференциальных уравнений E допускает конечномерную группу симметрий Ли G. Тогда каждое решение системы E (в том числе и частично-инвариантное) является решением какой-нибудь автоморфной системы относительно группы G. Таким образом, построение частично-инвариантных решений является подзадачей в задаче построения и интегрирования автоморфных систем.

Настоящая работа посвящена сравнению двух алгоритмов построения частично-инвариантных решений: алгоритма с применением понятия «лишних функций» описанного в монографии [1, §22] и алгоритма построения и интегрирования соответствующих автоморфных систем [2], [3].

Перечень всех потенциально возможных типов автоморфных систем данной группы определяется неравенствами:

$$\max\{n, r_k\} \leqslant d_k \leqslant n + r_k, \quad r_k \leqslant r_{k+1} \leqslant r, \quad d_k \leqslant d_{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где n — размерность пространства независимых переменных, r — размерность группы G, r_k — общий ранг k-го продолжения группы G и d_k — размерность орбиты решения в k-ом продолжении пространства.

Каждая автоморфная система характеризуется конечной неубывающей последовательностью размерностей $d_0, \ldots, d_{k_3}$ [2]. Для частично-инвариантных решений дефекта δ размерность $d_0 = n + \delta$. Еще одно ограничение дает теорема о редукции [1, стр. 290], из которой следует, что для нередуцируемых частично-инвариантных решений $d_0 < d_1$. В частности, это означает, что дефект нередуцируемых частично-инвариантных решений в продолженных пространствах всегда выше чем в исходном.

В обоих алгоритмах есть свои достоинства и недостатки. При использовании автоморфных систем нет надобности в понятии «лишних» функций. Вместо алгоритма приведения системы к инволютивному виду используются условия полной интегрируемости. Но требуется вычислять дифференциальные инварианты первого и более высокого порядка. Однако все этапы построения и интегрирования автоморфных систем (включая вычисление дифференциальных инвариантов) легче поддаются автоматизации с помощью компьютерных систем аналитических вычислений.

Список литературы

1. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

2. *Талышев А.А.* Об автоморфных системах конечномерных групп Ли// Уфимский математический журнал. 2012. Т. 4, № 4. С. 130–138.

3. *Талышев А.А.* Об интегрировании автоморфных систем конечномерных групп Ли. Тезисы докладов международной конференции «Дифференциальные уравнения, функциональные пространства, теория приближений», посвященной 105-летию со дня рождения академика С.Л. Соболева (Новосибирск, Россия, 18–24 августа 2013 г.). С. 263.

ДВИЖЕНИЕ ГАЗА КОЛЛАПСИРУЮЩЕГО НА ПЛОСКОСТЬ С ЛИНЕЙНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ

Уразбахтина Л. З.

ФГБОУ ВПО УГАТУ, НИЛ «ГАММЕТТ», Уфа

ylz@yandex.ru

Проведено исследование семейства точных решений уравнений газовой динамики с линейным полем скоростей с диагональной невырожденной матрицей.

Представление решения имеет вид

$$u = \frac{\lambda_1 x + u_{00}}{\lambda_1 t + 1}, \quad v = \frac{\lambda_2 y + v_{00}}{\lambda_2 t + 1}, \quad w = \frac{\lambda_3 z + w_{00}}{\lambda_3 t + 1}, \tag{1}$$

$$k(p) = K\Pi^{-1}(t), \quad \rho = F(\vec{u})\Pi^{-1}(t) \qquad (2),$$

где $\Pi(t) = \prod_{i=1}^{3}(\lambda_i t + 1), \vec{u}_{00} = (u_{00}, v_{00}, w_{00})$ – произвольный постоянный вектор; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – произвольные, не равные друг другу, постоянные ($\lambda_i \neq 0$); $\vec{u} = (u, v, w)$ – вектор скорости частицы; ρ – плотность; $k(p)$ – функция от давления p, взятая из уравнения состояния; $F(\vec{u})$ – произвольная функция; K – постоянная. Уравнение состояния есть уравнение с разделенной плотностью

$$B(S)k(p) = \rho, \tag{3}$$

где $B(S)$ – некоторая функция от энтропии S. Если положить в (3) $B = B_1^{\gamma}, k = p^{1/\gamma}$, то получим уравнение состояния для политропного газа. Квадрат скорости звука вычисляется по формуле (в скобках указан квадрат скорости звука для политропного газа)

$$a^2 = \frac{k(p)}{\rho k'(p)} (a^2 = \gamma\frac{p}{\rho}).$$

С помощью преобразований, допускаемых уравнениями газовой динамики, значительно сокращено количество параметров в представлении (1), что привело к упрощению исследования решений. Выяснено, что частицы летят по прямым линиям. Рассмотрено движение выделенного объма жидкости, звуковой поверхности и звукового коноида.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта №11.G34.31.0042 правительства РФ по постановлению №220.

ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО НЕКЛАССИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Филин Н.В.
Челябинский государственный университет, Челябинск
nikolay_filin@inbox.ru

В работе проведен симметрийный анализ уравнения $\lambda u_t - u_{tx} = u_{xx}$. Была найдена алгебра Ли генераторов его допускаемых групп с базисом

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = u\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = t\frac{\partial}{\partial t} + (2t - x)\frac{\partial}{\partial x} - \lambda x u\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_5 = B(t,x)\frac{\partial}{\partial u},$$

где $B(t,x)$ — любое решение исходного уравнения, а также оптимальная система одномерных подалгебр $\langle X_3\rangle$, $\langle X_4\rangle$, $\langle X_1 + X_4\rangle$, $\langle X_2 + cX_3\rangle$, $\langle X_1 + cX_3\rangle$, $\langle X_1 + X_2 + cX_3\rangle$, $\langle X_1 + 2X_2 + cX_3\rangle$ максимальной конечномерной подалгебры $\langle X_1, X_2, X_3, X_4\rangle$. Оптимальная система использована для поиска инвариантных [1, 2] решений уравнения. Например, найдены решения

$$u(t,x) = C_1 e^{\frac{c^2}{\lambda - c}t + cx}, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda\},$$

$$u(t,x) = C_1 e^{\frac{c^2}{\lambda + c}(t - x) + cx}, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{-\lambda\},$$

$$u(x,t) =$$

$$= e^{2\lambda\ln(1+t) - \lambda(2t - x - 1)} C_1 (x(1+t) - t^2 + 1)^{-\lambda} I_{2\lambda}(2\lambda\sqrt{x(1+t) - t^2 + 1}) +$$

$$+ e^{2\lambda\ln(1+t) - \lambda(2t - x - 1)} C_2 (x(1+t) - t^2 + 1)^{-\lambda} K_{2\lambda}(2\lambda\sqrt{x(1+t) - t^2 + 1}),$$

где

$$I_{2\lambda}(s) = \frac{2^{-2\lambda}s^{2\lambda}}{\sqrt{\pi}\Gamma(2\lambda + \frac{1}{2})}\int_0^{\pi} e^{is\cos\xi}(\sin\xi)^{4\lambda}d\xi, \quad \lambda > -\frac{1}{4},$$

$$K_{2\lambda}(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\operatorname{ch}\xi}\operatorname{ch}2\lambda\xi d\xi, \quad |\mathrm{Arg}(s)| < \frac{\pi}{2},$$

обозначают модифицированные функции Бесселя, соответственно, первого и второго рода.

Список литературы

1. *Овсянников, Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников.– М.: Наука, 1978.

2. *Ибрагимов, Н. Х.* Азбука группового анализа / Н. Х. Ибрагимов.– М.: Знание, 1989.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКИХ ТЕПЛОВЫХ ДВИЖЕНИЙ ГАЗА

Хабиров С.В.
Институт механики УНЦ РАН, Уфа
habirov@anrb.ru

Тепловые движения газа – это изетермические движения без расширений, когда произвольный ограниченный объем не меняет своей величины. Когда свободная энергия i – одна из независимых лагранжевых переменных, плоские тепловые движения частично линеаризуются [1]

$$\vec{x}_j = O\vec{x}_{tt}, \quad \vec{x}_i \cdot O\vec{x}_j = 1.$$

Здесь O – поворот на $-\pi/2$.

Система допускает бесконечную группу G из переносов, галилеевых переносов, вращения, растяжений и отражений.

Приведение в инволюцию переопределенной системы путем составление интегрируемых по t соотношений позволяет получить представления решений по переменной t в виде: полиномов, гармоники, линейно растущей гармоники, экспоненциально растущей гармоники, бигармоники.

Подстановка любого представления в переопределенную систему дает решения. С точностью до групп G получены 8 типов точных решений . Эти решения содержат все решения Л.В. Овсянникова с линейным полем скоростей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (11-01-00026-а, 11-01-00147-а, 12-01-00648), Федерального агентства по науке и инновациям РФ (НШ-6706.2012.1), гранта 11.G34.31.0042 правительства РФ по постановлению 220.

Список литературы

1. *Чиркунов Ю.А., Хабиров С.В.* Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды. Новосибирск: НГТУ, 2012. 659 с.

СИММЕТРИЙНЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ О СОВЕРШЕННОМ КУБОИДЕ

Шарипов Руслан Абдулович
Башкирский Государственный Университет, Уфа
r-sharipov@mail.ru

Совершенный кубоид — это прямоугольный параллелепипед, длины всех рёбер которого, а также длины диагоналей на гранях и длина пространственной диагонали представлены целыми числами. Он описывается системой из шести диофантовых уравнений

$$\begin{aligned} &x_1^2 + x_2^2 = d_3^2, && x_2^2 + x_3^2 = d_1^2, && x_3^2 + x_1^2 = d_2^2, \\ &d_3^2 + x_3^2 = L^2, && d_1^2 + x_1^2 = L^2, && d_2^2 + x_2^2 = L^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Вопрос о существовании совершенного кубоида не решён и остаётся открытым в течение около 300 лет (см. [1]). Отметим, что он был известен Эйлеру (см. [2]).

Автором доклада были предложены два новых подхода к решению задачи о совершенном кубоиде. В первом подходе уравнения (1) сводятся к одному диофантовому уравнению 12-ой степени. При анализе этого уравнения возникает разветвление на три случая, в которых были сформулированы три гипотезы о неприводимости трёх семейств целочисленных полиномов. Задача свелась к доказательству всех трёх этих гипотез одновременно либо к опровержению одной из них и нахождению совершенного кубоида, связанного с решением отвечающего этой гипотезе полиномиального диофантового уравнения (см. [3]).

Второй подход основан на естественной дискретной S_3-симметрии уравнений (1), состоящей в одновременных перестановках переменных x_1, x_2, x_3 и d_1, d_2, d_3. После факторизации по этой симметрии возникает совершенно новая система диофантовых уравнений, которая, тем не менее, сохраняет эквивалентность исходной задаче. Многочисленные результаты, касающиеся этих уравнений, часть из которых была получена в сотрудничестве с Джоном Рамсденом, изложены в серии публикаций [4]. В частности было установлено, что все потенциально возможные совершенные кубоиды связаны с рациональными точками, лежащими в пересечении определённых рациональных и эллиптических кривых.

Доклад посвящён обзору результатов, полученных в рамках второго подхода.

Список литературы

1. *Halcke P.* Deliciae mathematicae oder mathematisches Sinnen-Confect. N. Sauer publishers, 1719, Hamburg, Germany.

2. *Euler L.* Vollständige Anleitung zur Algebra. Kayserliche Akademie der Wissenschaften, St. Petersburg, 1771.

3. *Шарипов Р. А.* Неприводимые полиномы в задаче о совершенном кубоиде. // Уфимский математический журнал. 2012. Т. 4. №. 1. С. 153–160. См. также е-принты arXiv:**1104.1716**, arXiv:**1108.5348**, arXiv:**1109.2534**, arXiv:**1201.1229**, arXiv:**1203.2567** в архиве **http://arXiv.org**.

4. *Ramsden J. R., Sharipov R. A.* Series of e-prints arXiv:**1205.3135**, arXiv:**1206.6769**, arXiv:**1207.2102**, arXiv:**1207.4081**, arXiv:**1207.5339**, arXiv:**1207.6764**, arXiv:**1208.03 08**, arXiv:**1208.1227**, arXiv:**1208.1859**, arXiv:**1208.2587**, arXiv:**1209.0723**, arXiv:**120 9.5706**, arXiv:**1303.0765** in Electronic Archive **http://arXiv.org**.

МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ДВУМЯ КВАНТОВЫМИ ЧАСТИЦАМИ, НАПОМИНАЮЩАЯ АТОМ ВОДОРОДА

Шарипов Руслан Абдулович
Башкирский Государственный Университет, Уфа
r-sharipov@mail.ru

Стандартная модель атома водорода описывается уравнением Шрёдингера, в котором взаимодействие электрона и протона задаётся кулоновским потенциалом. Несмотря на блестящее подтверждение этой модели спектрометрическими экспериментами, есть вопросы к логике этой модели. Кулоновский потенциал соответствует взаимодействию двух неподвижных точечных зарядов. Электрон и протон в атоме водорода являются квантовыми частицами, не имеющими определённого положения в пространстве. Принято говорить об электронном облаке и распределении заряда электрона в этом облаке. Аналогичное облако, хотя и более компактное и плотное, соответствует распределению заряда протона. Так почему же электрон и протон, будучи распределёнными зарядами, создают электромагнитное поле точечных зарядов и взаимодействуют как точечные заряды?

Другой вопрос связан с наложением внешнего электромагнитного поля на атом водорода. При описании эффектов Зеемана и Штарка (см. [1]) внешнее электромагнитное поле вводится в уравнение Шрёдингера принципиально иным способом, отличающимся от прямого написания слагаемого с потенциалом взаимодействия. Этот способ известен как минимальное связывание (minimal coupling, см. [2]). Он более последователен и учитывает калибровочную симметрию электромагнитного поля. Так почему же одно и то же по своей природе поле делится на две части, которые описываются столь по-разному в рамках одного уравнения?

В связи с вышеизложенным в работе [3] автором доклада была предложена к рассмотрению модель с двумя квантовыми противоположно заряженными частицами, в которой электромагнитное поле, описывающее их взаимодействие, вводится только через минимальное связывание. Автору не удалось простыми соображениями свести её к стандартной модели атома водорода ни в точном, ни в каком-либо приближённом смысле. Поэтому модель выносится на суд широкой публики. Доклад посвящён обсуждению предложенной модели и обзору математических результатов, полученных для неё в работе [3].

Список литературы

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. Курс теоретической физики. Том. III. М.: Наука, 1989.

2. Minimal coupling. Wikipedia. Wikimedia Foundation Inc., San Francisco, USA.

3. *Sharipov R. A.* A model with two quantum particles similar to the hydrogen atom. E-print arXiv:**1308.0221** in Electronic Archive **http://arXiv.org**.