

**НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
ПРАВИТЕЛЬСТВО НОВОСИБИРСКОЙ ОБЛАСТИ**

**МАТЕРИАЛЫ  
54-Й МЕЖДУНАРОДНОЙ  
НАУЧНОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ**

**МНСК–2016**

**16–20 апреля 2016 г.**

**МАТЕМАТИКА**

Новосибирск  
2016

УДК 51  
ББК В1я431

Материалы 54-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2016: Математика / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2016. 236 с.

ISBN 978-5-4437-0487-6

Конференция проводится при поддержке Сибирского отделения Российской академии наук, Правительства Новосибирской области, инновационных компаний России и мира, Ассоциации выпускников «СОЮЗ НГУ».

**Научный руководитель секции –**  
д-р физ.-мат. наук, чл.- корр. РАН Гончаров С. С.

**Председатель секции –**д-р физ.-мат. наук, Шелухин В. В.

**Ответственный секретарь секции –** Неверов В. В.

**Экспертный совет секции:**

д-р физ.-мат.наук Васкевич В. Л., д-р физ.-мат.наук Ткачев Д. Л.,  
д-р физ.-мат.наук Трахинин Ю. Л., д-р физ.-мат.наук Бериков В. Б.,  
д-р физ.-мат.наук Саханенко А. И., д-р физ.-мат.наук Лотов В. И.,  
д-р физ.-мат.наук Фосс С. Г., канд. физ.-мат.наук Чирков Д. В.,  
канд. физ.-мат.наук Лапин В. Н., канд. физ.-мат.наук Редюк А. А.,  
д-р физ.-мат.наук Веснин А. Ю., канд. физ.-мат.наук Абросимов Н. В.,  
к. физ.-мат.наук Малькович Е. Г., д-р физ.-мат.наук Одинцов С. П.,  
д-р физ.-мат.наук Гречкосеева М. А., канд. физ.-мат.наук Карабут Е. А.,  
д-р физ.-мат.наук Саженов С. А., канд. физ.-мат.наук Давыдов М. Н.,  
канд. физ.-мат.наук Шутов А. В., д-р физ.-мат.наук Качуровский А.Г.,  
канд. техн.наук Анцыз С. М., канд. физ.-мат.наук Быкадоров И. А.,  
канд. физ.-мат.наук Рапопорт Э. О., канд. физ.-мат.наук Бульонков М. А.,  
д-р физ.-мат.наук Войтишек А. В., канд. физ.-мат.наук Ануреев И. С.,  
канд. физ.-мат.наук Емельянов П. Г., канд. техн. наук Шелехов В. И.,  
канд. физ.-мат. наук Черемушкин Е. С.

ISBN 978-5-4437-0487-6

© Новосибирский государственный  
университет, 2016

**NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY  
SIBERIAN BRANCH OF RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES  
NOVOSIBIRSK OBLAST GOVERNMENT**

**PROCEEDINGS  
OF THE 54th INTERNATIONAL STUDENTS  
SCIENTIFIC CONFERENCE**

**ISSC-2016**

**April, 16–20, 2016**

**MATHEMATICS**

**Novosibirsk, Russian Federation  
2016**

Proceedings of the 54<sup>th</sup> International Students Scientific Conference.  
Mathematics/ Novosibirsk State University. Novosibirsk, Russian Federation.  
2016. 236 pp.

ISBN 978-5-4437-0487-6

The conference is held with the significant support of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk Oblast Government, innovative companies of Russia, NSU Alumni Union.

**Section scientific supervisor –**

Dr. Phys. Math., Corr. Member. RAS Goncharov S. S.

**Section head –** Dr. Phys. Math., Shelukhin V. V.

**Responsible secretary –** Neverov V. V.

**Section scientific committee**

Dr. Phys. Math. Vaskevich V. L., Dr. Phys. Math. Tkahev D. L.,  
Dr. Phys. Math. Trakhinin Yu. L., Dr. Phys. Math. Berikov V. B.,  
Dr. Phys. Math. Sakhanenko A. I., Dr. Phys. Math. Lotov V. I.,  
Dr. Phys. Math. Foss S.G., Cand. Phys. Math. Chirkov D. V.,  
Cand. Phys. Math. Lapin V. N., Cand. Phys. Math. Redyuk A. A.,  
Dr. Phys. Math. Vasin Yu. A., Cand. Phys. Math. Abrosimov N. V.,  
Cand. Phys. Math. Malkovich E. G., Dr. Phys. Math. Odintsov S. P.,  
Dr. Phys. Math. Grechkoseeva M. A., Cand. Phys. Math. Karabut E.A.,  
Dr. Phys. Math. Sazhenkov S. A., Cand. Phys. Math. Davydov M. N.,  
Cand. Phys. Math. Shutov A. V., Dr. Phys. Math. Kachurovskii A.G.,  
Cand. Eng. Antsyz S. M., Cand. Phys. Math. Bykadorov I. A.,  
Cand. Phys. Math. Rapoport E. O, Cand. Phys. Math. Bulyonkov M. A.,  
Dr. Phys. Math. Voitishchek A. V., Cand. Phys. Math. Anureev I. S.,  
Cand. Phys. Math. Emelyanov P. G., Cand. Eng. Shelekhov V. I.,  
Cand. Phys. Math. Sheremushkin E. S.

# АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

УДК 512.542

## О пересечении разрешимых сопряженных подгрупп в конечной линейной группе

Байкалов А. А.

Новосибирский государственный университет

Пусть группа  $G$  действует на множестве  $\Omega$ . Элемент  $x$  множества  $\Omega$  называется *регулярной точкой*, если  $|xG|=|G|$ , т.е. если  $G$ -орбита элемента  $x$  регулярна.

Определим действие группы  $G$  на  $\Omega^k$  правилом:

$$g: (i_1, \dots, i_k) \mapsto (i_1g, \dots, i_kg).$$

Если группа  $G$  действует точно и транзитивно на  $\Omega$ , то минимальное  $k$  такое, что  $\Omega^k$  имеет регулярную точку, называется *базой* группы  $G$  и обозначается через  $b(G)$ .

Для любого натурального  $m$  число  $G$ -регулярных орбит обозначается через  $Reg(G, m)$  (это число равно нулю, если  $m < b(G)$ ).

Если  $H$  - подгруппа группы  $G$  и группа  $G$  действует на множестве  $\Omega$  правых смежных классов по  $H$  умножением справа, то  $G/H_G$  действует точно и транзитивно на  $\Omega$ , где  $H_G$  есть пересечение всех сопряженных с  $H$  подгрупп. В этом случае обозначим  $b(G/H_G)$  и  $Reg(G/H_G, m)$  через  $b_H(G)$  и  $Reg_H(G, m)$  соответственно.

В данной работе доказаны следующие теоремы:

**Теорема 1.** Пусть группа  $G$  изоморфна группе  $GL_n(q)$ , где  $q$  - степень простого числа, а подгруппа  $H$  группы  $G$  состоит из блочно-диагональных матриц таких, что подгруппа  $H$  изоморфна прямому произведению групп

$$Sin_{n_i}(q) \times \langle \varphi_{n_i} \rangle; \quad i = 1, \dots, k; \quad \sum_{i=1}^k n_i = n,$$

где  $Sin_{n_i}(q)$  - это цикл Зингера степени  $n_i$  и  $\varphi_{n_i}$  - автоморфизм группы  $Sin_{n_i}(q)$  такой, что  $\varphi_{n_i}: g \mapsto g^q$ . Тогда  $b_H(G) \leq 4$ .

**Теорема 2.** Пусть группа  $G$  изоморфна группе  $GL_n(q) \times \langle \tau \rangle$ , где  $q$  равно 2 или 3, а  $n$  чётно, подгруппа  $H$  группы  $G$  является нормализатором в  $G$  параболической подгруппы  $P$  группы  $GL_n(q)$  стабилизирующей цепочку подпространств:

$$L(v_1, v_2) < L(v_1, v_2, v_3, v_4) < \dots < L(v_1, \dots, v_n),$$

коразмерность на каждом шагу равна двум. Тогда  $Reg_H(G, 5) \geq 5$ .

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, доцент Вдовин Е. П.

## Унификация в многомодальной логике LTK

Башмаков С. И.

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск

Унификационная проблема в данной работе рассматривается как вопрос возможности преобразования формулы в теорему после замены переменных. В [1] были предложены подходы к определению всех неунифицируемых формул для расширений  $S4$  и  $[K4 + \Box \perp \equiv \perp]$ . В данной работе нами построен критерий для всех неунифицируемых формул в многомодальной логике знания и линейного времени LTK.

**Определение 1.** Формула  $\alpha(p_1, \dots, p_n)$  унифицируема в логике L тогда и только тогда, когда существует набор формул  $\delta_1, \dots, \delta_n$  такой, что  $\vdash_{\lambda} \alpha(\delta_1, \dots, \delta_n)$ .

**Определение 3.** LTK-фрейм Крипке это  $k + 2$ -модальный фрейм  $F = \langle W_F, R_1, \dots, R_k, R_e, R_{\leq} \rangle$ , где:

a.  $W_F$  является объединением непустых непересекающихся множеств  $C^t, t \in N: W_F := \bigcup_{t \in N} C^t$ ;

b.  $R_1, \dots, R_k$  – некоторые отношения эквивалентности внутри каждого сгустка  $C^t$ ;

c.  $R_e$  – универсальное S5-отношение эквивалентности на  $\forall C^t \in W_F$ :  

$$\forall w, z \in W_F (wR_e z \Leftrightarrow (w \in C^t) \& (z \in C^t));$$

d.  $R_{\leq}$  – линейное, рефлексивное, транзитивное бинарное отношение по времени на  $W_F$ :

$$\forall v, z \in W_F (vR_{\leq} z \Leftrightarrow \exists i, j \in N ((v \in C^i) \& (z \in C^j) \& (i \leq j)));$$

Класс всех таких фреймов обозначим LTK.

**Определение 4.** Моделью  $M_F$  на  $F$ -фрейме  $F$  называют двойки  $M_F = \langle F, V \rangle$ , где  $V$  это означивание множества пропозициональных переменных  $p \in P$  на фрейм. Тогда  $\forall w \in W_F$ :

a.  $\langle F, w \rangle \Vdash_V p \Leftrightarrow w \in V(p)$ ;

b.  $\langle F, w \rangle \Vdash_V \Box_{\leq} A \Leftrightarrow \forall z \in W_F (wR_{\leq} z \Rightarrow \langle F, z \rangle \Vdash_V A)$ ;

c.  $\langle F, w \rangle \Vdash_V \Box_e A \Leftrightarrow \forall z \in W_F (wR_e z \Rightarrow \langle F, z \rangle \Vdash_V A)$ ;

d.  $\forall i \in I, \langle F, w \rangle \Vdash_V \Box_i A \Leftrightarrow \forall z \in W_F (wR_i z \Rightarrow \langle F, z \rangle \Vdash_V A)$ .

**Теорема 1.** Любая модальная формула  $A$  не унифицируема в LTK тогда и только тогда, когда формула  $\Box_{\leq} A \rightarrow [\bigvee_{p \in Var(A)} \Diamond_{\leq} p \wedge \Diamond_{\leq} \neg p] \in LTK$ .

---

1. Rybakov V., Terziler M., Gencer C. An essay on unification and inference rules for modal logics // Bulletin of the Section of Logic. Vol.28/3, 1999, pp.145–157.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Рыбаков В. В.

## Об алгебрах бинарных изолирующих формул для теорий решеточно упорядоченных отношений эквивалентности

Емельянов Д. Ю.

Новосибирский государственный университет

В статье [1] общий подход исследования алгебр бинарных изолирующих формул элементарной теории [2, 3] применяется к теориям с цепями вложенных отношений эквивалентности. Для конечных цепей эти алгебры образуются некоторыми ограничениями алгебр для счетно-категоричных слабо  $\omega$ -минимальных теорий [4].

Данная работа является продолжением статьи [1]: при некоторых естественных предположениях результаты для вложенных отношений эквивалентности обобщены на решеточно упорядоченные отношения эквивалентности и описаны алгебры для этих отношений эквивалентности.

**Теорема.** Для любых теорий отношений эквивалентности, имеющих элиминацию кванторов и образующих конечные решетки на множестве реализаций некоторых данных 1-типов, следующие условия эквивалентны:

- 1) решетки, обогащенные индикаторами для пар отношений эквивалентности с индексом 2, изоморфны;
- 2) соответствующие алгебры бинарных изолирующих формул изоморфны.

Для доказательства теоремы используются алгебры распределения бинарных изолирующих формул для линейно упорядоченных отношений эквивалентности [1], а также критерий включения одного отношения эквивалентности в другое в терминах меток из рассматриваемых алгебр.

---

1. Емельянов Д.Ю. Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для вложенных отношений эквивалентности // *Algebra and Model Theory 10: Collection of papers*. Novosibirsk: NSTU Publisher, 2015. P. 59-70.

2. Shulepov I.V., Sudoplatov S.V. Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory // *Siberian Electronic Mathematical Reports*. - 2014. - Vol. 11. - P. 380-407.

3. Судоплатов С.В. Классификация счетных моделей полных теорий. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2014.

4. Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V., Yemelyanov D.Yu. On algebras of distributions for binary formulas of countably categorical weakly  $\omega$ -minimal theories // *Logic Colloquium 2015, Helsinki 3-8 August 2015*. University of Helsinki, 2015. P. 663.

Научные руководители – д-р физ.-мат. наук, проф. Кулпешов Б.Ш.,  
д-р физ.-мат. наук, доцент Судоплатов С.В.

## Гибридные логики с сильным отрицанием

Каушан К. А.

Новосибирский государственный университет

В работе рассматривается гибридная логика  $\mathcal{H}ubBK$  с сильным отрицанием, которая введена автором в [1], где была также введена ее семантика и доказана теорема полноты с помощью вложения  $\mathcal{H}ubBK$  в логику  $\mathcal{H}(\{\forall, \downarrow\})$  (см. [2, § 2.5]).

Описана четырехзначная семантика логики первого порядка, в которой одноместные предикаты задаются парой  $(P^+, P^-)$ , состоящей из экстенционала и коэкстенционала, а двухместное отношение достижимости интерпретируется классически. Определены стандартная трансляция  $ST_a^*$  из  $\mathcal{H}ubBK$  в язык первого порядка с сильным отрицанием и трансляция  $HT^*$ , действующая в обратном направлении, при этом номиналы отождествляются с индивидуальными переменными. Доказаны следующие утверждения:

**Предложение 1.** Пусть  $\mathfrak{M}$  – модель  $\mathcal{H}ubBK$ ,  $\mathfrak{M}^*$  – соответствующая первопорядковая модель и  $\varphi$  – формула  $\mathcal{H}ubBK$ , в которую не входит номинал  $a$ . Для любой функции именованя  $g$  выполнено:

1.  $\mathfrak{M}, g, g(a) \vDash^+ \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{M}^*, g \vDash^+ ST_a^*(\varphi)$ ;
2.  $\mathfrak{M}, g, g(a) \vDash^- \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{M}^*, g \vDash^- ST_a^*(\varphi)$ ;

**Предложение 2.** Пусть  $\mathfrak{M}$  – модель  $\mathcal{H}ubBK$ ,  $\mathfrak{M}^*$  – соответствующая первопорядковая модель и  $\varphi$  – первопорядковая формула. Для любой функции именованя  $g$  выполнено:

1.  $\mathfrak{M}^*, g \vDash^+ \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{M}, g \vDash^+ HT^*(\varphi)$ ;
2.  $\mathfrak{M}^*, g \vDash^- \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{M}, g \vDash^- HT^*(\varphi)$ ;

Кроме того, определено исчисление естественного вывода и доказана его полнота относительно семантики  $\mathcal{H}ubBK$  методом Хенкина.

---

1. Каушан К.А. Гибридная версия белнаповской модальной логики // Материалы 53-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2015: Математика / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2015. 8 с.

2. Torben Brauner Hybrid Logic and Its Proof-Theory // Roskilde University, Match 2009.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, Одинцов С. П.

**О  $\Delta$ -подпространствах в  $\mathbb{R}^n$** 

Короткова Р. М.

Новосибирский государственный университет

Теория допустимых множеств — один из важнейших современных разделов математики, который является синтезом математической логики, теории моделей и теории вычислимости. Основные определения по этой теме содержатся в [1,2].

Юрий Леонидович Ершов в [1] рассматривает проблему определимости различных систем.

В рамках данной работы были сформулированы и доказаны следующие теоремы.

**Теорема 1.** Всякое  $\Delta$ -подпространство в  $\mathbb{R}^n$  над  $\mathbb{Q}$  является подпространством также и над  $\mathbb{R}$ .

**Теорема 2.** Всякое подпространство в  $\mathbb{R}^n$  над  $\mathbb{R}$  является  $\Delta$ -подпространством.

Из этих теорем следует, что класс  $\Delta$ -подпространств над  $\mathbb{Q}$  в  $\mathbb{R}^n$  совпадает с классом подпространств в  $\mathbb{R}^n$  над  $\mathbb{R}$ .

---

1. Ершов Ю. Л. Определимость и Вычислимость // Новосибирск: Сибирская школа алгебры и логики, 1996.

2. Barwise J. Admissible Set and Structures // Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1975.

Научный руководитель — д-р физ.-мат. наук, проф. Морозов А. С.

**Булевы алгебры, порожденные деревьями, вычислимыми за полиномиальное время**

Маткин Е. А.

Новосибирский государственный университет

Пусть  $C$  – множество всех слов алфавита  $\{0,1\}$ . Булевым деревом назовём множество  $D \subseteq C$ , удовлетворяющее следующим свойствам:

$$(\forall \omega \in C) (\omega 0 \in D) \Leftrightarrow (\omega 1 \in D)$$

$$(\forall \omega \in C) (\omega 0 \in D) \Rightarrow (\omega \in D)$$

Под деревом, порождающим булеву алгебру  $\langle A, \wedge, \vee, \neg \rangle$ , мы понимаем пару  $\langle D, \varphi \rangle$ , где  $D$  – булево дерево, а  $\varphi$  – однозначное отображение  $D$  в  $A$  такое, что

$$\varphi(\lambda) = 1$$

$$(\forall \omega \in D) (\varphi(\omega 0) \vee \varphi(\omega 1) = \varphi(\omega) \ \& \ (\varphi(\omega 0) \wedge \varphi(\omega 1) = 0) \ \& \ \varphi(\omega) \neq 0)$$

$$(\forall a \neq 0) (\exists \omega_1, \dots, \omega_k \in D) (\varphi(\omega_1) \vee \dots \vee \varphi(\omega_k) = a)$$

Говорим, что булева алгебра  $\langle A, \wedge, \vee, \neg \rangle$  порождается деревом  $D$ , если существует отображение  $\varphi$  из  $D$  в  $A$  такие, что пара  $\langle D, \varphi \rangle$  порождает данную булеву алгебру.

**Теорема.** Пусть дана булева алгебра  $\langle A, \wedge, \vee, \neg \rangle$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1)  $\langle A, \wedge, \vee, \neg \rangle$  порождается деревом, вычислимым за полиномиальное время;
- 2)  $\langle A, \wedge, \vee, \neg \rangle$  изоморфна вычислимой булевой алгебре с вычислимым множеством атомов.

---

1. Гончаров С.С. Счётные булевы алгебры и разрешимость // Сибирская Школа Алгебры и Логики. Новосибирск, Научная книга, 1996

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук Алаев П. Е.

## О ниль-идеалах конечной коразмерности в альтернативных нетеровых алгебрах

Панасенко А. С.

Новосибирский государственный университет

Алгебра  $A$  над полем  $F$  называется альтернативной, если для любых элементов  $x, y \in A$  выполняются следующие тождества:

$$(x, x, y) = 0, (x, y, y) = 0.$$

В середине прошлого века была доказана известная теорема Левицкого, утверждающая, что в нетеровом справа ассоциативном кольце всякий односторонний ниль-идеал нильпотентен. Аналогичное утверждение для альтернативных колец над полями характеристики не 3 доказано К.А.Жевлаковым [1]. Так же им доказана нильпотентность локально-нильпотентных нетеровых колец [2]

В работе доказана следующая теорема:

**Теорема.** Пусть  $A$  – нетерова справа альтернативная алгебра,  $I$  – ее односторонний ниль идеал конечной коразмерности. Тогда  $I$  – нильпотентен.

**Определение.** Алгебра  $A$  называется почти конечномерной, если  $\dim(A) = \infty$  и  $\dim(A/I) < \infty$  для любого ненулевого идеала  $I$ .

**Следствие.** Почти конечномерная альтернативная алгебра невырождена.

С учетом результатов, изложенных в [3], получаем описание почти конечномерных альтернативных неассоциативных алгебр.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00014).

1. Жевлаков К. А., Ниль-идеалы альтернативного кольца, удовлетворяющего условию максимальности, Алгебра и логика, 6, №4 (1967), 19–26.

2. Жевлаков К. А., Замечания о локально нильпотентных кольцах с условиями обрыва, Матем. заметки, 12:2 (1972), 121–126.

3. Панасенко А. С., Почти конечномерные альтернативные алгебры, Матем. заметки, 98:5 (2015), 747–755.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, доцент Желябин В. Н.

## Представления простых некоммутативных йордановых супералгебр

Попов Ю. С.

Новосибирский государственный университет

Супералгебра  $U$  называется некоммутативной йордановой, если она является эластичной супералгеброй и ее симметризованная супералгебра  $U^{(+)}$  является йордановой. Класс некоммутативных йордановых супералгебр чрезвычайно обширен: он включает в себя альтернативные супералгебры, йордановы супералгебры, квазиассоциативные супералгебры, квадратичные эластичные супералгебры и суперантикоммутативные супералгебры.

Представления конечномерных йордановых и альтернативных супералгебр рассматривались в работах Е. И. Зельманова, К. Мартинес, Н. А. Писаренко, М. Н. Трушиной, И. П. Шестакова и других ученых. Можно сказать, что на данный момент в этих классах супералгебр построена исчерпывающая теория представлений.

Простые центральные конечномерные йордановы супералгебры были описаны в работах А. П. Пожидаева и И. П. Шестакова. Однако, до недавнего времени представления этих супералгебр не были изучены. В настоящей работе мы классифицируем неприводимые представления над этими супералгебрами, а также выясняем вопросы о полной приводимости бимодулей над ними.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, доцент Пожидаев А. П.

**О проблеме изоморфизма графов Кэли над абелевыми  $r$ -группами**

Рябов Г. К.

Новосибирский государственный университет

Графы  $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$  и  $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$  называются *изоморфными*, если существует биекция  $f: V_1 \rightarrow V_2$ , сохраняющая ребра. Проблема изоморфизма графов состоит в нахождении наиболее эффективного алгоритма, распознающего являются ли два данных графа изоморфными. Эта проблема принадлежит классу NP. Однако до настоящего времени неизвестно, принадлежит ли она классу P проблем, для которых существует алгоритм полиномиальной сложности; неизвестно также, является ли она NP-полной проблемой.

В 70-х годах двадцатого века Пешель и Клин предложили алгоритм полиномиальной сложности, решающий проблему изоморфизма графов Кэли над циклическими  $r$ -группами. Решение проблемы опиралось на результат Пешеля, утверждающий, что любая циклическая  $r$ -группа является *шуровой*, т.е. все шуровы кольца над ней могут быть построены с помощью подходящих групп подстановок.

Недавно для  $p = 2$  Музычуком и Пономаренко, а для  $p = 3$  Рябовым было доказано, что группы  $D = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^k}$ ,  $k \geq 1$ , являются шуровыми. Используя данный результат, мы доказываем следующее утверждение.

**Теорема.** Пусть  $n = p^{k+1}$ ,  $p \in \{2, 3\}$ ,  $k \geq 1$ . Пусть  $G_n$  - класс всех графов на  $n$  вершинах,  $P_n$  - класс всех графов Кэли над  $D = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^k}$ .

Тогда следующие проблемы разрешимы за полиномиальное от  $n$  время.

1. Для  $\Gamma \in G_n$  проверить, принадлежит ли  $\Gamma$  классу  $P_n$ .
2. Для  $\Gamma_1 \in P_n$  и  $\Gamma_2 \in G_n$  определить изоморфны ли они и, если изоморфны, то найти изоморфизм между ними.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Васильев А.В.

## О 2-замыканиях конечных разрешимых групп

Чуриков Д. В.

Новосибирский государственный университет

Пусть  $G$  – группа подстановок множества  $\Omega$  мощности  $n$ . Действие  $G$  на  $\Omega$  индуцирует действие  $G$  на декартовом квадрате  $\Omega \times \Omega$  по правилу  $(\alpha, \beta)g = (\alpha g, \beta g)$ . Множество орбит  $\text{Orb}_2(G)$  этого действия является разбиением множества  $\Omega \times \Omega$ . Группа  $G(2) = \text{Aut}(\text{Orb}_2(G))$  называется 2-замыканием группы  $G$ . Здесь под группой  $\text{Aut}(P)$  автоморфизмов разбиения  $P$  множества  $\Omega \times \Omega$  понимается подгруппа симметрической группы  $\text{Sym}(\Omega)$ , элементы которой оставляют на месте все классы разбиения  $P$ . Иначе говоря, 2-замыкание это максимальная по включению группа в  $\text{Sym}(\Omega)$ , обладающая такими же 2-орбитами, что и  $G$ .

**Основная проблема.** Для данной группы подстановок  $G$  найти порождающее множество для  $G(2)$ .

Известно, что если группа  $G(2)$  разрешима, то эта проблема может быть решена эффективно, т.е. за полиномиальное от  $n$  время.

Доказано, что 2-замыкание примарной группы – примарная группа, 2-замыкание группы нечетного порядка – группа нечетного порядка, а значит, данные 2-замыкания разрешимы. Поэтому в этих случаях проблема 2-замыканий решена.

Если  $G$  – произвольная разрешимая группа, то ее 2-замыкание не обязательно разрешимая группа: 2-замыкание разрешимой 2-транзитивной группы, очевидно, совпадает с группой  $\text{Sym}(\Omega)$ .

В работе мы рассматриваем вопрос о 2-замыканиях метабелевых групп.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Васильев А. В.

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

UDC 519.622.2

## A variational approach for solving a problem of parameter identification in the mathematical model of HIV dynamics

Yermolenko D. V.  
Novosibirsk State University

Mathematical models in immunology (in particular the mathematical model of the human immunodeficiency viruses (HIV)) are described by systems of nonlinear ordinary differential equations. It is important to determine parameters of these systems that characterize features of immunity and disease. It is necessary to find these parameters for constructing an individual treatment plan.

In this paper the problem of determining the vector of parameters  $q$  (inverse problem) in mathematical model of HIV dynamics using additional measurements of system states at fixed times  $t_k$ ,  $k=1, \dots, K$  is numerically investigated. The mathematical model describes the dynamics of the concentration of infected and uninfected cells, viruses in the body and CD8+ T lymphocytes. Inverse problem can be represented in operator form:

$$A(q) = F. \quad (1)$$

Here  $q$  is a vector of parameters that characterize features of immunity and disease,  $F = (F_1, \dots, F_K)^T$  is additional information about concentrations.

Numerical analysis of the inverse problem solution (1) based on a study of spectral portraits behavior of discrete analogues of the Frechet derivative  $A'(q)$  [2] is carried out. An algorithm of inverse problem (1) regularization based on spectral analysis of Frechet derivative matrix is constructed. The numerical solution of the inverse problem is obtained with the help of the gradient method that consists in determining of an approximate solution of the variational problem:

$$\min_q J(q), \quad J(q) = \|A(q) - F\|^2.$$

The explicit formula of a gradient of the misfit function  $J(q)$  is obtained. The results of the numerical calculations are presented and discussed.

---

1. Kabanikhin S. I. Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications. Berlin/Boston: de Gruyter, 2012. – 459 p.

2. Godunov S. K. Modern Aspects of Linear Algebra. Novosibirsk: Nauchnaya kniga, 1997. – 416 p.

Scientific advisers – Corr. Member of RAS, Prof. Kabanikhin S. I.,  
Cand. Phys. Math. Krivorotko O. I.

## Численное решение обратной задачи для линейных систем дифференциальных уравнений

Белоног А. Ю.

Новосибирский государственный университет

Рассмотрена задача Коши для системы линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{X} = QX + f(t) \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

где  $X \in R^N$  - вектор переменных системы,  $Q$  - матрица размерности  $N \times N$ , элементы которой  $q_{ij} = \text{const}$  - параметры системы.

Обратная задача состоит в нахождении параметров  $q_{ij}$  по дополнительным информации о решении задачи (1) вида:

$$X_i(t_k) = X_i^k, \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, K_i. \quad (2)$$

Рассмотрена вариационная постановка обратной задачи (1)-(2), которая заключается в минимизации функционала (3).

$$(Q) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{K_j} (X_j(t^k, Q) - X_j^k)^2 \quad (3)$$

Задача минимизации функционала была решена с использованием градиентного подхода. Исследована точность решения обратной задачи в зависимости от структуры данных (2). Представлены результаты численных расчетов в случае добавления ошибок в данные (2). Рассмотрен вопрос выбора начальных приближений.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00382 мол\_а.

---

1. Ильин А. И., Кабанихин С. И., Воронов Д. А., Универсальный подход к решению обратной задачи фармакокинетики в случае произвольного количества камер // Сибирские электронные математические известия. В «Труды V международной молодежной школы-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач". 2014. Т. 11. С. С41-С49

Научные руководители - чл.-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, проф.  
Кабанихин С. И., Воронов Д. А.

## Приложение метода дихотомии матричного спектра к исследованию устойчивости течений жидкости

Блинова М. А.

Новосибирский государственный университет

Исследование турбулентности - одна из наиболее масштабных и актуальных задач современной физики. Данное явление распространено в различных областях: аэро- и гидродинамика, оптика и многих других. Изучение турбулентности проводится как экспериментально, так и при помощи различных теоретических подходов: критические системы, теория бифуркаций и т.д. Большое значение имеют и численные исследования.

Исследование устойчивости течений и, в частности, условий развития турбулентности, как правило, проводятся с помощью дискретизации соответствующей дифференциальной задачи с дальнейшим решением ее при помощи традиционных алгоритмов линейной алгебры (см. [1]). Метод дихотомии матричного спектра разрабатывался именно для решения задач устойчивости (см. [2]) и может быть весьма эффективным в данном случае. При этом необходимо учитывать, что после дискретизации дифференциальных операторов получаются матрицы больших размеров, а также их комплекснозначность.

Цель данного исследования – апробация метода дихотомии матричного спектра при изучении процесса формирования турбулентного течения.

Основными итогами проведённого исследования являются:

- дискретизация уравнения Орра-Зоммерфельда, описывающего устойчивость плоскопараллельного потока вязкой несжимаемой жидкости;
- разработка программы дихотомии матричного спектра для комплексных матриц, зависящих от параметра;
- численное исследование условий формирования турбулентности плоского течения Пуазейля, в частности, зависимость от числа Рейнольдса.

---

1. Бойко А.В., Грек Г.Р., Довгаль А.В., Козлов В.В. Физические механизмы перехода к турбулентности в открытых течениях // Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». Институт компьютерных исследований. 2006. С.304

2. Годунов С.К. Современные аспекты линейной алгебры. // Новосибирск: Научная книга. 1997. С.390

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Бибердорф Э. А.

**Нелокальные задачи с интегральными условиями  
для эллиптических уравнений**

Викентьева Н. А.

Новосибирский государственный университет

Пусть  $\Omega$  есть ограниченная область пространства  $R^n$  переменных  $(x_1, \dots, x_n)$ ,  $Q = \{(x, y): x \in \Omega, 0 < y < a\}$  – цилиндр пространства  $R^{n+1}$ ,  $\Gamma = \partial\Omega, S = \Gamma \times (0, a)$ . Далее, пусть  $c(x, y), f(x, y), N(y)$  есть заданные функции, определенные при  $x \in \bar{\Omega}, y \in [0, a]$ .

Нелокальная задача: найти функцию  $u(x, y)$ , являющуюся в цилиндре  $Q$  решением уравнения

$$\Delta_{n+1} u + c(x, y)u = f(x, y) \quad (1)$$

и такую, что для неё выполняются условия

$$u(x, y)|_S = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \int_0^a N(y)u(x, y)dy = 0, x \in \Omega. \quad (3)$$

Задачи с интегральными условиями для параболических, гиперболических и некоторых других нестационарных уравнений достаточно хорошо изучены (А. Bouziani, Л.С. Пулькина, А.И. Кожанов и др.), что же касается эллиптических уравнений, то здесь можно отметить лишь работу Г.Авалишвили, М.Авалишвили, Д.Гордезиани, в которой для некоторого класса задач вида (1) – (3) доказано существование обобщенного решения.

В настоящей работе доказываются теоремы существования регулярных (имеющих все обобщенные по С.Л.Соболеву производные, входящие в уравнение) решений, приводятся условия несуществования решений, указываются возможные обобщения.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Кожанов А. И.

## Анализ идентифицируемости динамических систем

Гродзь А. А.

Новосибирский государственный университет

В докладе рассмотрены динамические процессы, характеризующиеся системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t), p) \\ y(t) = g(u(t), x(t), p), \end{cases}$$

**Определение:** Описанная выше модель является априорно идентифицируемой, если её параметры  $p = [p_1, \dots, p_s]$  можно однозначно определить по входным данным  $u(t)$  и данным измерений  $y(t) = g(t, p)$ .

В работе представлен сравнительный анализ методов идентифицируемости динамических систем. Подходы к определению идентифицируемости основаны на фундаментальной математической теории: разложение в ряд Тейлора, преобразование Лапласа, построение базисов Гребнера, производные Ли, теория графов, функция правдоподобия, решение алгебраических систем, матрица Якоби. Приведен обзор программных комплексов анализа идентифицируемости: AMIGO, GenSSI, DAISY, PottersWheel, COMBOS, IdentifiabilityAnalysis. Рассмотрены примеры анализа идентифицируемости.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00382 мол\_а.

Научные руководители - чл.-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, проф.  
Кабанихин С. И., Воронов Д. А.

## Вырожденная система интегральных уравнений Абеля

Грюнвальд Л. А.

Иркутский государственный университет

В работе рассматривается система линейных интегральных уравнений Вольтерра типа свертки

$$Bu(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Au(s) ds = f(t), \quad t \geq 0,$$

где  $B, A$  – квадратные матрицы порядка  $n$ ,  $\Gamma(\alpha)$  – гамма-функция Эйлера,  $0 < \alpha < 1$  – параметр,  $u = u(t)$ ,  $f = f(t)$  – неизвестная и заданная  $n$ -мерные вектор-функции неотрицательного действительного аргумента  $t$ . Система имеет две отличительные черты: слабую особенность интегральных слагаемых и матрицу  $B$  коэффициентов в главной части, которая может быть как обратимой, так и необратимой. В зависимости от последнего условия рассмотрены два случая. При  $\det B \neq 0$  доказано, что решение рассматриваемой системы уравнений единственно в классе непрерывных на луче  $[0; +\infty)$  вектор-функций при любой непрерывной правой части  $f = f(t)$ , причем оно имеет вид

$$u(t) = B^{-1} f(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(k\alpha)} \int_0^t (t-s)^{k\alpha-1} B^{-1} (AB^{-1})^k f(s) ds.$$

Случай  $\det B = 0$  рассмотрен для  $\dim N(B) = 1$ , т. е.  $\text{rang } B = n - 1$ . В этих предположениях показано, что система интегральных уравнений имеет непрерывное решение не при любой правой части. Например, помимо непрерывности  $f = f(t)$ , требуется ее “ослабленная” гладкость некоторого порядка. Наиболее простую формулировку теорема существования и единственности непрерывного на  $[0; +\infty)$  решения имеет при  $(A\varphi, \psi) = 1$ . Здесь  $\varphi$  и  $\psi$  – базисные элементы в  $N(B)$  и  $N(B')$  соответственно.

**Теорема.** Пусть функция  $(f(t), \psi)$  непрерывно дифференцируема на  $(0; +\infty)$ , тогда, если  $(f(0), \psi) = 0$ , то рассматриваемая система интегральных уравнений имеет единственное непрерывное на  $[0; +\infty)$  решение

$$u(t) = \tilde{B}^{-1} f(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(k\alpha)} \int_0^t (t-s)^{k\alpha-1} \tilde{B}^{-1} (A\tilde{B}^{-1})^k f(s) ds - \left[ (f(t), \psi) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(k\alpha)} \int_0^t (t-s)^{k\alpha-1} (f(s), \psi) ds + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{(f(s), \psi)'}{(t-s)^\alpha} ds \right] \varphi,$$

где линейный оператор  $\tilde{B}^{-1} = (B + (\cdot, A'\psi) A\varphi)^{-1}$  – регуляризатор Треногина.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Орлов С. С.

## **Сравнительное исследование моделей кровеносных сосудов цилиндрической и конической формы**

Давыдова С. Г.

Новосибирский государственный университет

Согласно статистике, сердечно-сосудистые заболевания остаются главной причиной смертности в развитых странах. Поэтому актуальными являются работы, направленные на улучшение лечебных и диагностических средств.

Результатом сотрудничества ИМ и КТИ ВТ СО РАН стала комплексная математическая модель сердечно-сосудистой системы, реализованная на платформе BioUML и показавшая себя эффективно во многих экспериментах [1]. Однако она предполагает, что все сосуды имеют цилиндрическую форму, тогда как ряд крупных сосудов, например аорта, имеет коническую форму.

Цель данного исследования — построение и исследование одномерной модели гемодинамики, учитывающей коническую форму сосудов.

Основными итогами проведённого исследования являются:

- система уравнений гемодинамики для сосудов конической формы;
- численное исследование скорости течения крови в коническом сосуде и в системе из трёх конических сосудов при разных значениях параметров, сравнение с сосудами цилиндрической формы;
- численное исследование скорости распространения пульсовой волны в коническом сосуде и в системе из трёх конических сосудов при разных значениях параметров, сравнение с цилиндрическими сосудами, а также со значениями, полученными по формуле Моенса—Кортевега;
- построение упрощённой одномерной модели артериальной системы, сравнение результатов численного моделирования с результатами, полученными при моделировании на платформе BioUML.

По итогам исследования полученные результаты планируется использовать для усовершенствования существующей модели на платформе BioUML.

---

1. Киселев И. Н., Бибердорф Э. А., Баранов В. И., Комлягина Т. Г., Мельников В. Н., Суворова С. Ю., Кривошеков С. Г., Колпаков Ф. А. Персонализация параметров и валидация модели сердечно-сосудистой системы человека. // Математическая биология и биоинформатика. 2015. Т. 10, № 2. С. 526—547.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Бибердорф Э. А.

## **Задача интегральной геометрии о неизвестной границе для обобщенного преобразования Радона**

Киприянов Я. А.

Новосибирский государственный университет

Работа Радона 1917 г., в которой он решил задачу о восстановлении функции на плоскости по набору интегралов от этой функции вдоль всевозможных прямых, по праву считается началом развития интегральной геометрии как науки. В традиционной задаче интегральной геометрии даны интегралы от функции по некоторому семейству многообразий и требуется найти неизвестную подынтегральную функцию. В частности, если даны интегралы от функции по всем гиперплоскостям, т. е. задано преобразование Радона, то задача интегральной геометрии состоит в обращении этого преобразования. Полученные результаты успешно применялись в исследовании дифференциальных уравнений и в рентгеновской томографии. В данной работе рассматривается следующая задача интегральной геометрии. В трёхмерном евклидовом пространстве рассматриваются всевозможные плоскости. Известными данными являются интегралы (обобщенное преобразование Радона) по всем таким плоскостям от неизвестной кусочно-гладкой функции, зависящей как от пространственных переменных, так и от переменных, характеризующих плоскости. Искомым объектом в данной работе является поверхность разрыва подынтегральной функции, ввиду явной недоопределенности задачи о нахождении значений подынтегральной функции в каждой точке пространства при условиях, приведенных выше. Основным результатом работы – построение семейства специальных функций, определяемых данными задачи, каждая из которых имеет разрывы лишь в строго определённых точках, по которым искомую поверхность можно восстановить. Единственность решения сравнительно легко следует из свойств построенного семейства функций. Полученный результат является новым. Рассмотренная в данной работе задача интегральной геометрии представляет, прежде всего, самостоятельный интерес, однако автор нашел возможность использовать примененные в работе идеи при решении задач математической физики.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16–31–00112 мол\_а).

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Аниконов Д. С.

## **К неустойчивости состояний динамического равновесия газа Власова-Пуассона**

Кисатов М. А.

Новосибирский государственный университет

Изучаются радиальные движения бесконечного бесстолкновительного самогравитирующего газа Власова-Пуассона нейтральных частиц в сферической системе координат.

Цель данной работы – доказать абсолютную линейную неустойчивость радиальных состояний динамического равновесия газа Власова-Пуассона относительно радиальных же возмущений.

В ходе доказательства обращено известное достаточное условие устойчивости этих состояний равновесия по отношению к малым возмущениям той же симметрии. Также получено дифференциальное неравенство, из которого при выполнении найденных в работе достаточных условий линейной практической неустойчивости исследуемых состояний динамического равновесия вытекает априорная экспоненциальная оценка снизу роста малых радиальных возмущений. Поскольку данная оценка выведена без каких бы то ни было дополнительных ограничений на изучаемые состояния равновесия, то, тем самым, как раз и доказана абсолютная линейная неустойчивость исследуемых радиальных состояний динамического равновесия газа Власова-Пуассона относительно изучаемых возмущений того же типа симметрии.

Установленным здесь достаточным условиям линейной практической неустойчивости присуща конструктивность, позволяющая применять их в качестве механизма тестирования и контроля при проведении физических экспериментов и выполнении численных расчетов. Более того, эти условия неустойчивости могут трактоваться как численная процедура, которая построена без дискретизации соответствующих определяющих дифференциальных уравнений. Данный факт говорит о том, что с этими условиями можно получать численные результаты, по степени своей точности, надежности и достоверности ни в чем не уступающие отвечающим им аналитическим результатам. Таким образом, впервые в истории стираются всякие различия между численными и аналитическими результатами.

Научный руководитель – к.ф.-м.н., доц. Губарев Ю. Г.

**Разрешимость одной нелокальной краевой задачи для  
псевдопараболического уравнения**

Николаев И. В.

Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,  
г. Якутск

Работа представляет собой исследование регулярной разрешимости пространственно нелокальных краевых задач с граничным условием интегрального вида по временной переменной для одномерных псевдопараболических уравнений третьего порядка.

Пусть  $\Omega$  — интервал  $(0, 1)$  оси  $Ox$ ,  $Q = \Omega \times (0, T)$ ,  $0 < T < +\infty$ ,  $f(x, t)$  — заданная в прямоугольнике  $Q$  функция,  $K(t)$  — функция, заданная при  $t \in [0, T]$ ,  $\alpha, \beta, \gamma$  — постоянные действительные числа.

Краевая задача. Найти функцию  $u(x, t)$  являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения

$$u_t - \alpha u_{xx} - \beta u_{xxt} = \mu u + f(x, t), (x, t) \in Q \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, t \in (0, T) \quad (2)$$

$$\int_0^T K(t)u(x, t)dt = 0, x \in \Omega \quad (3)$$

В настоящей работе с помощью метода Фурье доказывается существование и несуществование регулярных решений краевой задачи (1)—(3), а также существование собственных чисел. По применяемой технике работа близка к работам А.И. Кожанова [1, 2].

1. Кожанов А. И. Задачи с условиями интегрального вида для некоторых классов нестационарных уравнений // Доклады Академии Наук. — 2014. — Т. 457, № 2— С. 152–156.

2. Кожанов А. И. Разрешимость краевых задач для линейных параболических уравнений в случае задания интегрального по временной переменной условия // Математические заметки СВФУ. — 2014. — Т. 21. № 4 (84). — С. 20–30.

Научный руководитель — д-р физ.-мат. наук, проф. Кожанов А. И.

## Краевые задачи с нелокальными условиями для уравнений с кратными характеристиками

Носкова Ю. О.

Новосибирский государственный университет

Пусть  $x \in (0,1)$ ,  $t \in (0,T)$ ,  $0 < T < +\infty$ ,  $Q = (0,1) \times (0,T)$ ,  $c(x,t)$ ,  $\alpha(t)$ ,  $N_1(x)$ ,  $N_2(x)$ ,  $f(x,t)$ ,  $u_0(x)$  – заданные функции, определенные при  $x \in [0,1]$ ,  $t \in [0,T]$ .

Нелокальная задача I: найти функцию  $u(x,t)$  являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения

$$u_t + u_{xxx} + c(x,t)u = f(x,t) \quad (1)$$

и такую, что для неё выполняются условия

$$u(x, 0) = u_0(x), 0 < x < 1 \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, 0 < t < T \quad (3)$$

$$u_x(1, t) = \alpha(t)u_x(0, t), 0 < t < T \quad (4)$$

Нелокальная задача II: найти функцию  $u(x,t)$  являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения (1) и такую, что для неё выполняются условия (2) и (3), а также условие

$$u_x(1, t) = \int_0^1 N_1(x)u(x, t)dx + \int_0^1 N_2(x)u_x(x, t)dx, 0 < t < T \quad (5)$$

Ранее для уравнений с кратными характеристиками вида (1) задачи с нелокальными условиями (4) или (5) не изучались.

В настоящей работе доказываются теоремы существования регулярных решений, указываются возможные обобщения (в том числе не многомерный случай).

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Кожанов А. И.

## Нелокальные подходы к асимптотическим методам теории возмущений

Санков И. И.

Новосибирский государственный университет

При изучении интегрируемых систем с малыми возмущениями методом усреднения Крылова – Боголюбова получаются автономные дифференциальные уравнения, зависящие от малого параметра и приближенно описывающие интересующие нас особенности точных решений. Эти особенности тоже зависят от параметра и при его уменьшении, вообще говоря, могут «выходить» за пределы областей, в которых установлены оценки погрешностей приближений, приводя к потере эффективности методов усреднения.

Данную проблему можно преодолеть, если так модифицировать метод, чтобы фазовый портрет усредненного уравнения не зависел от малого параметра, но по-прежнему отражал соответствующие особенности точных решений. Подобная модификация предложена В.С. Белоносовым для обобщенного уравнения Матье–Хилла  $\mathbf{u}''(\mathbf{t}) = -\mathbf{A}\mathbf{u}(\mathbf{t}) + \varepsilon\mathbf{F}(\mathbf{t},\mathbf{u})$ , где  $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ ,  $\varepsilon$  – малый параметр,  $\mathbf{F}(\mathbf{t},\mathbf{u})$  – многочлен по переменной  $\mathbf{u}$  с почти периодическими по  $\mathbf{t}$  коэффициентами. Если перейти к новой переменной  $\mathbf{v} = \varepsilon^{\alpha}\mathbf{u}$ , то при подходящем выборе  $\alpha$  фазовый портрет усредненной по Крылову – Боголюбову системы действительно не будет зависеть от  $\varepsilon$ .

В настоящем докладе приведены итоги новых исследований в указанном направлении. Установлено, что для широкого класса нелинейностей  $\mathbf{F}(\mathbf{t},\mathbf{u})$  к точно такому же результату, как и выше, можно прийти, действуя в обратном порядке – сначала применить метод усреднения, а затем выполнить замену переменных. Тем самым, для этого класса задач получено обоснование нелокального характера классического метода Крылова – Боголюбова.

Научный руководитель: д-р физ.-мат. наук, проф. Белоносов В. С.

**Уравнения осцилляции среды в областях сложной формы в терминах композитных интегральных поверхностных операторов**

Таранин Н. А.

Новосибирский государственный университет

Постановка начально-краевой задачи в терминах теории операторов прохождения-распространения волн в областях сложной формы содержит композитные интегральные поверхностные операторы распространения. Эти операторы состоят из поверхностного интегрального оператора типа Кирхгофа, обобщающего потенциалы простого и двойного слоя, интегрального оператора разложения по аналогам плоских волн и обратного к нему. Матричные ядра операторов разложения составлены из собственных векторов дифференциального оператора  $t$ -гиперболической системы уравнений колебаний.

В работе строится обобщение операторов распространения и операндов искомого решения в терминах редуцированного (по рангу) тензорного формализма, инвариантного к типу эффективных моделей сред, которое реализуется перезаписью исходной  $t$ -гиперболической системы уравнений колебаний с использованием теоремы взаимности. Обобщение операторов типа Кирхгофа представляет их ядра в виде фундаментального решения, физически реализуемого в конкретной области [1].

---

1. Aizenberg A. M., Ayzenberg A. A., Feasible fundamental solution of the multiphysics wave equation in inhomogeneous domains of complex shape, *Wave Motion*, 2015, 53, 66-79.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доцент Айзенберг А. М.

**Краевые задачи с интегральными условиями для квазигиперболических уравнений.**

Хлыстова И. В.

Новосибирский государственный университет

Пусть  $\Omega$  есть ограниченная область пространства  $R^n$ ,  $0 < t < T < +\infty$ ,  $Q = \Omega \times (0, T)$ ,  $\Gamma = \partial\Omega$ ,  $S = \Gamma \times (0, T)$ ,  $L$  есть дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции  $v(x, t)$  определяется равенством

$$Lv = v_{\text{итт}} + \Delta v$$

( $\Delta$  – оператор Лапласа в пространстве  $R^n$ ).

В работе изучается разрешимость краевых задач в цилиндре  $Q$  для уравнения

$$Lu = f(x, t) \tag{1}$$

( $f(x, t)$  – заданная функция) с заданием на боковой границе  $S$  нелокальных условий интегрального вида.

Подобные задачи изучались для параболических и гиперболических уравнений второго порядка, для некоторых других нестационарных уравнений, для уравнений же (1) ранее задачи с интегральными условиями не изучались.

Для изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных (имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение) решений. Указываются возможные обобщения.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Кожанов А. И.

## Моделирование процесса синтеза ароматических аминокислот у *E. coli*

Цыганова А. И.

Новосибирский государственный университет

Для исследования живых систем в биологии применяется два основных подхода: редукционистский и системный. В рамках редукционистского подхода любая живая система рассматривается как набор элементарных компонентов, которые можно исследовать независимо от остальных. Данный подход имеет важнейшее значение для метаболической инженерии.[1]

Большой прикладной и научный интерес представляет путь синтеза ароматических аминокислот у *E. coli*, состоящий из 8 ферментативных реакций. Для описания этого процесса используется следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = V_i - V_{i+1}, x_i(0) = 0, i = 1, 2, \dots, 8, \text{ где}$$

$$V_1 = \frac{p_1}{p_2 + (p_3 x_8)^{p_4}}, V_2 = \frac{p_5 x_1}{1 + p_6 x_1 + p_7 x_2}, V_3 = \frac{p_8 x_2}{1 + p_9 x_2 + p_{10} x_3},$$

$$V_4 = \frac{p_{11} x_3}{1 + p_{12} x_3 + p_{13} x_4}, V_5 = \frac{p_{14} x_4}{1 + p_{15} x_4 + p_{16} x_5}, V_6 = \frac{p_{17} x_5}{1 + p_{18} x_5 + p_{19} x_6},$$

$$V_7 = \frac{p_{20} x_6}{1 + p_{21} x_6 + p_{22} x_7}, V_8 = \frac{p_{23} x_7}{1 + p_{24} x_7 + (p_{25} x_8)^{p_{26}}}, V_9 = p_{27} x_8.$$

Здесь  $x_i$  — концентрации метаболитов,  $V_i$  — скорости реакций,  $p_i$  — параметры системы.

Модель была исследована с помощью пакета программ STEP+, разработанного в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН. Итогом проведенного численного анализа модели является определение областей значения ключевых параметров, при которых возникают автоколебания, стационарный режим функционирования. Полученные результаты позволяют понять механизм регулирования процесса синтеза ароматических кислот, описываемого рассматриваемой моделью.

---

1. Акбердин И. Р., Казанцев Ф. В., Ермак Т. В., Тимонов В. С., Хлебодарова Т. М., Лихошвай В. А. Электронная клетка: проблемы и перспективы // Математическая биология и биоинформатика, 2013. 8(1), С. 295-315;

Научные руководители – д-р физ.-мат. наук, проф. Фадеев С. И.,  
канд. биол. наук Акбердин И. Р.

## Восстановление полей регионального загрязнения территорий в окрестностях площадных источников примеси

Юртина Ю. Ю.

Новосибирский государственный университет

Важнейшим направлением в охране окружающей среды является система контроля техногенных выбросов газовых и аэрозольных примесей в атмосферу. Проблема численного моделирования распространения загрязняющих веществ в атмосфере от площадных источников относится к числу наиболее сложных. Целью работы является построение моделей оценивания длительного регионального загрязнения местности от площадных источников.

Поле концентрации в атмосфере от стационарного точечного источника представляется в виде

$$q(x, y, z) = \frac{C(x, z) \cdot e^{-\frac{y^2}{4k_0 x}}}{2\sqrt{\pi k_0 x}},$$

где  $q(x, y, z)$ ,  $C(x, z)$  - концентрации примеси от точечного и линейного источника соответственно,  $k_0$  - коэффициент пропорциональности между скоростью ветра и горизонтальным турбулентным обменом, ось  $x$  совпадает со средним направлением ветра, ось  $y$  поперечно расположена вектору скорости ветра, ось  $z$  направлена вертикально вверх.

Для описания процессов распространения примесей от линейного источника используется следующее уравнение турбулентной диффузии

$$u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial C}{\partial z} \right)$$

с соответствующими граничными условиями. Здесь  $u$  – горизонтальная компонента скорости ветра,  $K_z$  – коэффициент турбулентной диффузии.

В работе решение данного уравнения представлено в виде ряда Фурье по полиномам Лежандра, на основе которого с помощью методов асимптотических разложений получены малопараметрические представления и предложена модель оценивания полей концентраций от площадных источников.

Апробация модели восстановления полей проведена на данных экспедиционных исследований загрязнения снежного покрова в окрестностях г. Новосибирска. Выполнено сравнение результатов численного моделирования с данными наблюдений.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук Рапуга В. Ф.

# ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

УДК 515.1

## Полиномиальные инварианты виртуальных зацеплений

Готин К. С.

Новосибирский государственный университет

Теория виртуальных зацеплений является одним из наиболее активно развивающихся направлений в современной маломерной топологии.

Одной из основных задач теории является задача классификации виртуальных зацеплений, с этой целью строятся различные инварианты.

Теорию кос с теорией узлов связывают теоремы Александра и Маркова, а так же их аналоги (см.[1]). Такой взгляд позволяет строить инварианты зацеплений, используя представления групп кос.

В [2] построено представление группы виртуальных кос  $VB_n$  в ладейную алгебру  $CR_n$ . В докладе будут продемонстрированы полиномиальные инварианты виртуальных зацеплений, построенные с помощью этого представления. Так же для случая  $VB_2$  построена бесконечная серия инвариантов.

---

1. Kauffman L., Lambropoulou S., Virtual Braids and the L-Move // Journal of Knot Theory and Its Ramifications, Vol. 15, No. 6 (2006)

2. Материалы 52-й международной научной студенческой конференции МНСК-2014 Математика, стр. 51.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН Веснин А.Ю.

**О количестве приводимых многочленов в общей линейной системе**

Кажымурат А. А.

Назарбаев Интеллектуальная школа физико-математического направления  
г. Алматы, Казахстан

Основные определения содержатся в [1,2,3,4,5]. Пусть:

$$k = \binom{n+2}{n} - \binom{n+1}{n-1} - 2, n \geq 1.$$

$F_0, \dots, F_k \in C[X, Y, Z]$ ;  $\deg(F_0) = \deg(F_1) = \dots = \deg(F_k) = n$   
для некоторых достаточно общих однородных многочленов. Применяя  
методы теории пересечений мы доказываем следующее:

Теорема 1. В линейной системе заданной параметрически как:

$$t_0 F_0 + \dots + t_k F_k; t_0, \dots, t_k \in C.$$

ровно:

$$\binom{\binom{n+1}{n-1} + 1}{2}$$

приводимых многочленов. В частности, для кубических многочленов  
ответ 21, что является известным фактом алгебраической геометрии.

---

1. Fulton W. Intersection theory, vol. 2, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Berlin, 1984, Springer, pp. 140-144, 254-263.

2. Hartshorne R. Algebraic geometry, Grad. Texts in Math., vol. 52 (Springer-Verlag, New York – Heidelberg, 1977), pp. 424-434.

3. Harris J. and Eisenbud D. 3264 & All That Intersection Theory in Algebraic Geometry. <http://isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic720403.files/book.pdf>

4. Vakil R. The Rising Sea: Foundations of Algebraic Geometry, 2015, pp. 539-551.

5. Grothendieck A. Éléments de géométrie algébrique (rédigé avec la collaboration de Jean Dieudonné): IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schemas, Quatrième partie. Publications Mathématiques de l'IHÉS 32: 5–361.

Научный руководитель – Айтмухамет Д. А.

## О предписанных значениях операторов кривизны на трехмерных локально однородных лоренцевых многообразиях

Клепиков П. Н., Клепикова С. В.

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

Задача об установлении связей между топологией и кривизной (псевдо)риманова многообразия является одной из важных проблем (псевдо)римановой геометрии. Один из возможных вариантов — исследовать спектр различных операторов кривизны.

Пусть  $(M, g)$  —  $n$ -мерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие,  $R$  — тензор кривизны Римана,  $\rho$  — оператор Риччи,  $s$  — скалярная кривизна метрики  $g$ .

При исследовании (псевдо)римановых многообразий важную роль играет оператор одномерной кривизны, определяемый формулой

$$\mathcal{A} = \frac{1}{n-2} \left( \rho - \frac{s}{2(n-1)} \text{Id} \right).$$

Риманову тензору кривизны  $R$  в любой точке многообразия  $M$  можно поставить в соответствие оператор секционной кривизны  $\mathcal{R}: \Lambda_x^2 M \rightarrow \Lambda_x^2 M$ , определяемый равенством

$$\langle X \wedge Y, \mathcal{R}(T \wedge V) \rangle_x = R_x(X, Y, T, V),$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — индуцированное скалярное произведение в слоях пространства расслоения  $\Lambda_x^2 M$ , определяемое правилом

$$\langle X_1 \wedge X_2, Y_1 \wedge Y_2 \rangle = \det(g_x(X_i, Y_j)).$$

В отличие от случая римановой метрики, где всегда существует базис, в котором матрица самосопряженного оператора (например  $\mathcal{A}$  или  $\mathcal{R}$ ) диагональна, в псевдоримановом случае приходится учитывать не только сами собственные значения (которые могут быть и комплексными, и действительными), но и их алгебраическую и геометрическую кратность.

В данной работе исследована задача о существовании локально однородного лоренцева многообразия с заданными операторами одномерной или секционной кривизны.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты: № 16-01-00336А, № 16-31-00048мол\_а), Минобрнауки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» (код проекта: 1148).

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доцент Хромова О. П.

## Вычисление группы Тураева преобразований димерных покрытий

Рожков Д. С.

Новосибирский государственный университет

В теории графов *парасочетания* изучаются обычно с точки зрения числовых инвариантов графов. В работе [1] В.Г.Тураев предложил новый подход к изучению парасочетаний: с каждым парасочетанием в графе он связал группу, называемую *группой парасочетания*  $\pi_A(\Gamma)$ . Группа парасочетания отнесенная к *совершенному парасочетанию*, также называемому *димерным покрытием*, называется *группой димеров*.

В.Г.Тураев показал, что группа димеров имеет естественное описание на языке алгебраической топологии – она может быть определена как фундаментальная группа некоторого *кубического комплекса неположительной кривизны*. Вычисление группы димеров достаточно громоздко, в связи с чем в [1] были рассмотрены лишь простейшие примеры. Там же был поставлен вопрос о нахождении групп димеров более сложного вида.

В качестве ответа на этот вопрос в докладе будут представлены новые примеры групп димеров полученные, в том числе с использованием системы компьютерной алгебры GAP.

Полученные примеры групп димеров, а также построенные *комплексы димеров* дают возможность исследовать вопрос о возникновении соотношений в группе. Хорошо известный факт из теории CAT(0)-пространств состоит в том, что плоские торы в пространстве неположительной кривизны соответствуют абелевым подгруппам фундаментальной группы. Более точно (см. [2]), если  $\mathbf{X}$  – компактное пространство неположительной кривизны и  $\pi_1(\mathbf{X})$  содержит абелеву подгруппу  $\mathbf{G}$  ранга  $k > 1$ , то  $\mathbf{X}$  содержит выпуклое подмножество, изометричное  $k$  – мерному плоскому тору.

Для комплексов димеров некоторых графов нам удалось дать комбинаторное описание такого подмножества, отвечающего абелевой подгруппе ранга 2. Это позволило выдвинуть гипотезу о причинах возникновения в группе нетривиальных соотношений.

---

1. Turaev V., Matching groups and gliding systems, Journal of Geometry and Physics 81 (2014) 128–144

2. Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д, Иванов С. В. Курс метрической геометрии. — Москва — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. — 512 с. — (Современная математика)

Научный руководитель – чл.-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук Веснин А.Ю.

**Свойства перспективных треугольников и тетраэдров. Конфигурации**

Саблин Н. А.

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Проективная геометрия является одним из важнейших направлений современной геометрии. В ней исследуются свойства фигур, которые сохраняются при любых проективных преобразованиях. Важным примером служит свойство двух перспективных треугольников (теорема Дезарга), помогающее решать различные задачи и выводить новые теоремы как на плоскости, так и в пространстве.

В ходе исследований были выдвинуты и доказаны следующие теоремы:

**Теорема 1.** Даны три треугольника, имеющие общий центр перспективы. Каждые два из них задают ось перспективы (по теореме Дезарга). Все три оси перспективы, заданные данными треугольниками, пересекутся в одной точке.

**Теорема 2.** Даны четыре тетраэдра, имеющие общий центр перспективы. Каждая тройка таких тетраэдров задаёт прямую. Четыре такие прямые всегда пересекаются в одной точке.

**Теорема 3.** Даны два перспективных тетраэдра  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$  с общей описанной сферой  $S$ . Точка  $P$  – центр перспективы данных тетраэдров. Прямая  $l$  соединяет две вершины, не проходя при этом через точку  $P$ . Прямая  $l'$  соединяет соответствующие вершины. Пересекаясь, прямые  $l$  и  $l'$ , задают точку. Двенадцать точек, заданных таким способом, лежат в одной плоскости  $\alpha$ , которая является полярной плоскостью точки  $P$  относительно сферы  $S$ .

**Теорема 4.** Пространства любых  $n$  перспективных  $m$ -мерных симплексов, имеющих общий центр перспективы, задают конфигурацию точек и прямых, структура которой имеет следующий вид:

$(C_{m+n+1}^{n+1} (n+1); C_{m+n+1}^{m+1} (m+1))$ , где  $C_n^k$  – число сочетаний из  $n$  по  $k$ .

**Теорема 5.** Пространства любых  $n$  перспективных  $m$ -мерных симплексов, имеющих общий центр перспективы, задают конфигурацию прямых и плоскостей, структура которой имеет следующий вид:

$(C_{m+n+1}^n (n); C_{m+n+1}^{m+2} (m+2))$ , где  $C_n^k$  – число сочетаний из  $n$  по  $k$ .

Научный руководитель – Прозоровский А. А.

## Гомеоморфность прямой Зоргенфрея и ее модификаций

Сухачева Е. С.

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Прямая Зоргенфрея (или «стрелка»), обозначаемая  $S$ , представляет из себя числовую прямую  $\mathbb{R}$  с топологией, базу которой образуют все полуинтервалы вида  $(a, b]$ . В данной работе рассматриваются модификации прямой Зоргенфрея  $S$  полученные усилением топологии на вещественной прямой  $\mathbb{R}$ . Под модификацией прямой Зоргенфрея понимаем множество вещественных чисел  $\mathbb{R}$  с топологией порождаемой базой точки  $x \in S$  и определенной следующим образом:

если  $x \in S \setminus A$ , то  $\{(a, x]: a \in \mathbb{R}, a < x\}$ ,

если  $x \in A$ , то  $\{[x, b): b \in \mathbb{R}, x < b\}$ ,

для произвольного подмножества  $A \subset \mathbb{R}$ . Пространство, топология которого задается описанной выше базой окрестностей, обозначается символом  $S_A$ . В частности, если  $A = \emptyset$ , то  $S_A = S$ , а если  $A = S$ , то  $S_A$  – прямая Зоргенфрея с топологией «правой стрелки». Исследуется вопрос, для каких множеств  $A \subset \mathbb{R}$  пространство  $S_A$  гомеоморфно  $S$ .

**Теорема 1.** Пусть  $A$  – подмножество вещественно прямой  $\mathbb{R}$ . Тогда  $S_A$  гомеоморфно  $S_{A \setminus \text{int } A}$ .

**Теорема 2.** Пусть подмножество  $A \subset \mathbb{R}$  и не существует такого подмножества  $V \subset A$ , замкнутого в  $A$ , для которого

$$\bar{V} = \overline{V/V}.$$

Тогда пространства  $S_A$  и  $S$  гомеоморфны.

**Следствие 3.** Пусть  $F$  счетное замкнутое подмножество вещественной прямой  $\mathbb{R}$  и  $A \subset F$ . Тогда пространства  $S_A$  и  $S$  гомеоморфны.

**Следствие 4.** Пусть  $F$  замкнутое подмножество вещественной прямой  $\mathbb{R}$ . Тогда пространства  $S_F$  и  $S$  гомеоморфны.

**Следствие 5.** Пусть  $A$  дискретное подмножество вещественной прямой  $\mathbb{R}$ . Тогда пространства  $S_A$  и  $S$  гомеоморфны.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доцент Хмылева Т. Е.

## О линейных гомеоморфизмах пространств непрерывных функций на «длинных прямых»

Трофименко Н. Н.

Национальный исследовательский Томский государственный университет

В работе рассматриваются пространства непрерывных функций  $C(L_\alpha)$ , заданных на «длинных прямых»  $L_\alpha$ , где  $\alpha$  – произвольный ординал. Пространства непрерывных функций  $C(L_\alpha)$ , наделяются топологией поточечной сходимости и обозначаются  $C_p(L_\alpha)$ .

**Определение 1.** Пусть  $\alpha$  – произвольный ординал. Рассмотрим линейное упорядочение  $<$  на множестве  $L_\alpha = [1, \alpha] \times [0, 1)$  определенное так:  $(\mu_1, t_1) < (\mu_2, t_2)$ , если  $\mu_1 < \mu_2$  или  $\mu_1 = \mu_2$ ,  $t_1 < t_2$ . Будем называть «длинной прямой» множество  $L_\alpha$  с топологией, порожденной линейным упорядочением  $<$ .

Заметим, что топологическое пространство  $L_\alpha$  является компактным.

Будем говорить, что точка  $x = (\xi, t) \in L_\alpha$ , конфинальна ординалу  $\eta$ , если в интервале  $((1, 0), (\xi, t))$  существует конфинальное подмножество, подобное отрезку ординалов  $[0, \eta)$ .

Напомним, что ординал  $\alpha$  называется начальным, если  $\alpha$  – наименьший среди всех ординалов  $\lambda$  таких, что  $|\alpha| = |\lambda|$ . Начальный ординал  $\alpha$  называется регулярным, если не существует  $\lambda < \alpha$ , конфинального  $\alpha$ .

В работе доказаны следующие теоремы.

**Теорема 1.** Пусть  $\tau$  – регулярный начальный несчетный ординал и  $\alpha, \beta$  начальные ординалы, такие что  $\alpha < \beta \leq \tau$ . Тогда пространства  $C_p(L_{\tau\alpha})$  и  $C_p(L_{\tau\beta})$  не линейно гомеоморфны.

**Теорема 2.** Пусть  $\tau$  – регулярный начальный несчетный ординал,  $\sigma$  – начальный ординал,  $1 \leq \sigma < \tau$  и  $\alpha \in [\tau\sigma, \tau\sigma_+)$ . Тогда пространства  $C_p(L_\alpha)$  и  $C_p(L_{\tau\sigma})$  линейно гомеоморфны.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доцент Хмылева Т. Е.

# ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

УДК 517.54+519.6

## Квадратно-линейное отношение для кривой Пеано для треугольника

Адатова А. А.

Горно-Алтайский государственный университет

Система  $\mathbf{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$  сжимающих подобий в  $\mathbb{R}^n$  называется циппером с вершинами  $\{z_0, \dots, z_m\}$  и сигнатурой  $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$ ,  $\varepsilon_i = 0, 1$ , если для любого  $i = 1, \dots, m$  выполняется равенство  $S_i\{z_0, z_m\} = \{z_{i-1+\varepsilon_i}, z_{i-\varepsilon_i}\}$ . Непустое компактное множество  $K \subset \mathbb{R}^n$  называется аттрактором циппера  $\mathbf{S}$ , если  $K = S_1(K) \cup \dots \cup S_m(K)$ . Такой аттрактор существует и однозначно определяется системой  $\mathbf{S}$ .

Как было показано В.В.Асеевым (2003), аттрактор всякого циппера связан и линейно связан. Более того, если  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = 1$  - разбиение отрезка  $[0, 1]$ , а  $\mathbf{T} = \{T_1, \dots, T_m\}$  - циппер с вершинами  $\{x_0, \dots, x_m\}$  и сигнатурой  $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$ , то существует единственное непрерывное отображение  $\varphi: [0, 1] \rightarrow K$ , удовлетворяющее соотношению  $\varphi(T_i(x)) = S_i(\varphi(x))$  для любых  $i = 1, \dots, m$  и  $x \in [0, 1]$ . Это отображение  $\varphi$  непрерывно по Гельдеру и задает самоподобную кривую, пробегающую все множество  $K$ . В частности, всякая самоподобная кривая Пеано, пробегающая все точки квадрата, задается некоторым циппером в  $\mathbb{R}^2$ .

Одной из важных характеристик самоподобной кривой Пеано для квадрата является ее квадратно-линейное отношение.

$$k = \max_{t,s} \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{(t-s)^2}$$

Его свойства были изучены Е.В.Щепиным и К.Е.Бауманом в 2004-2012гг.

**Целью** работы является получение нижних оценок квадратно-линейного отношения самоподобных кривых Пеано в случае когда множество  $K$  есть треугольник. Нами доказывается следующая

**Теорема** Квадратно-линейное отношение для самоподобных кривых Пеано фрактального рода 4 на треугольнике превосходит  $3\sqrt{3}$ .

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, доцент Тетенов А. В.

## Конформное отображение на верхнюю полуплоскость с исключенными пятиугольниками

Бакчанина Е. М.

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Известна формула (типа формулы Кристоффеля–Шварца) для отображения  $f$ , переводящего верхнюю полуплоскость в счетноугольник с симметрией сдвига

$$f(z) = C_1 \int_{z_0}^z \prod_{k=1}^n \left( \sin \frac{a_k - \xi}{2} \right)^{\alpha_k - 1} d\xi + C_2,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – комплексные постоянные,  $a_k \in (0, 2\pi)$  – прообразы вершин счетноугольника с углами  $\alpha_k \pi$  из «основного периода».

Изучаются два частных случая.

Счетноугольник есть верхняя полуплоскость с исключенными правильными пятиугольниками. Конформное отображение записывается в виде

$$f(z) = C_3 \int_0^{tg \frac{z}{2}} \frac{(t^2 + \gamma)^{\frac{2}{5}}}{(t^2 + \beta)^{\frac{3}{5}}(1 + t^2)} dt + C_4,$$

где  $C_3$  и  $C_4$  – комплексные постоянные,  $\beta$  и  $\gamma$  – вещественные постоянные, определяемые прообразами вершин.

Счетноугольник есть верхняя полуплоскость с исключенными пятиугольниками с углами  $\alpha_1 \pi = \alpha_5 \pi = \pi/2$ ,  $\alpha_2 \pi = \alpha_4 \pi = 5\pi/4$ ,  $\alpha_3 \pi = 3\pi/4$ . Конформное отображение записывается в виде

$$f(z) = C_3 \int_0^{tg \frac{z}{2}} \frac{(t^2 - \gamma)^{\frac{1}{4}}}{(t^2 - \beta)^{\frac{1}{2}}(1 + t^2)^{\frac{3}{4}}} dt + C_4,$$

где  $C_3$  и  $C_4$  – комплексные постоянные,  $\beta$  и  $\gamma$  – вещественные постоянные, определяемые прообразами вершин.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доцент Копанева Л. С.

## Дискретное уравнение Шредингера для квантовой точки с нелокальным потенциалом

Бахматов А. Н.

Удмуртский государственный университет, г. Ижевск

В данной работе изучается математическая модель, описывающая электрон в физической системе, состоящей из квантовой точки (точка имеет три узла), соединенной с двумя проводниками (квантовыми проволоками).

Определим неориентированный граф с вершинами  $\Gamma = Z \cup M$ , где вершины  $M = \{1, 2, 3\}$ , соединенные в треугольник, соответствуют квантовой точке, а подмножества  $Z$  вида  $\{-1, -2, \dots\}$  и  $\{0, 1, 2, \dots\}$ , где соседние вершины соединены ребрами, левому и правому проводникам соответственно.

Функции  $\psi$ , определенные на  $\Gamma$ , отождествим с парами функций  $\psi = (\psi_1(n), \psi_2(m))$ , где  $\psi_1(n)$  определена на  $Z$ , а  $\psi_2(m)$  на  $M$ . Рассматривается оператор Шредингера (гамильтониан)  $H$  действующий в  $l^2(\Gamma) \cong l^2(Z) \times l^2(M) \cong l^2(Z) \times C^3$ , по формуле

$$(H\psi)_1(n) = (H_1\psi_1)(n) + (\psi_2(1) - \psi_1(0))\delta_{n,-1} + (\psi_2(3) - \psi_1(-1))\delta_{n,0},$$

$$(H\psi)_2(m) = (H_2\psi_2)(m) + \psi_1(-1)\delta_{m,1} + \psi_1(0)\delta_{m,3},$$

Где  $\delta_{i,j}$  — символ Кронекера,  $H_1$  — оператор в  $l^2(Z)$  вида

$$(H_1\psi_1)(n) = \psi_1(n+1) + \psi_1(n-1),$$

$H_2$  — оператор в  $C^3$  — матрица, элементы на главной диагонали которой нули, а остальные элементы равны  $v$ .

**Теорема 1.** Оператор  $H$  ограничен, самосопряжен. Отрезок  $[-2, 2]$  является существенным спектром этого оператора.

Найдена в явном виде резольвента оператора  $H$ .

**Определение 1.** Будем говорить, что функция Грина  $G$  оператора  $H$  (ядро резольвенты) имеет полюс в точке  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ , если имеет полюс в этой точке хотя бы одна из функций (матричных элементов)  $G((n, m), (n', m'), \lambda)$ , где  $(n, m), (n', m') \in \Gamma$ . Полюс функции  $G$  на втором листе поверхности  $P$  назовем резонансом оператора  $H$ . В точках отрезка  $[-2, 2]$ , в которых листы отождествляются, резонансом будем называть полюс, не являющимся собственным значением. Квазиуровнем оператора  $H$  будем называть его собственное значение или резонанс.

**Теорема 2.** Оператор  $H$  имеет квазиуровень в точке  $\lambda = 2v$  (резонанс).

Рассматривается задача рассеяния. Найдены формулы, определяющие коэффициенты прохождения и отражения.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Коробейникова Н. И.

## Восстановление функции по интегральным данным на линиях специального вида

Бектемиров И.Т

Новосибирский государственный технический университет

Рассматривается задача восстановления функции по известным интегралам от нее на линиях специального вида в полосе. Такая постановка относится к задачам интегральной геометрии вольтерровского типа [1]. В работе получена новая формула обращения для явно заданной весовой функции, а также исследована устойчивость решения задачи.

Изучается также задача восстановления функции по данным с возмущением, которое представляет собой интеграл с весовой функцией по части полосы, ограниченной линией рассмотренного семейства (см. [2]). Доказана теорема единственности решения задачи для весовой функции достаточно общего вида, получены условия, при которых первоначальная оценка устойчивости переносится на случай с возмущением.

---

1. Бегматов А.Х. О единственности решения задачи интегральной геометрии вольтерровского типа // Доклады Академии Наук. 2009. Т. 427. № 4. С. 439-441.

2. Бегматов А.Х., Петрова Н.Н. Задача интегральной геометрии с возмущением на кривых эллиптического типа в полосе. // Доклады Академии Наук. 2011. Т. 436. № 2. С.151-154.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук Бегматов А. Х.

## Свойство периодичности интеграла $n$ -го порядка

Малютина М. В.

Иркутский государственный университет

При построении непрерывных периодических решений интегральных уравнений Вольтерра естественным образом возникает вопрос об условиях на функции  $y=f(x)$  и  $y=g(x)$ , при которых их свертка Лапласа

$$h(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt$$

является периодической функцией. Оказывается, что периодичность этих функций не доставляет ни достаточного, ни необходимого условий, как показывают следующие примеры. Свертка

$$h(x) = \frac{1}{2}x \sin x$$

$2\pi$ -периодических функций  $f(x)=\sin x$  и  $g(x)=\cos x$ , очевидно, не является периодической. Одновременно с этим неперiodические функции

$$f(x) = 3x + \sin x \text{ и } g(x) = \frac{1}{26} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{6}{13} \cos 2x$$

имеют сверткой  $\pi$ -периодическую функцию  $h(x)=\sin^2 x$ . В работе проблема периодичности свертки Лапласа решена для одного важного частного случая – *интеграла порядка  $n \in \mathbb{N}$*  непрерывной на  $\mathbb{R}$  функции  $y=f(x)$ , т. е.

$$F_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt,$$

где  $a, x \in \mathbb{R}$ . Доказаны следующие утверждения.

**Теорема 1 (необходимое условие периодичности интеграла  $n$ -ого порядка).** Если  $y=F_n(x)$  является периодической с периодом  $T$  функцией, то функция  $f(x) \in C(\mathbb{R})$  также является периодической с периодом  $T$ .

**Теорема 2 (критерий периодичности интеграла  $n$ -ого порядка).** Для того чтобы функция  $y=F_n(x)$  была периодической с периодом  $T$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\int_a^{a+T} t^{i-1} f(t)dt = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Показано, что в случае периодичности интеграл  $n$ -го порядка  $y=F_n(x)$  периодической функции  $f(x) \in C(\mathbb{R})$  наследует ее основной период.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00291 мол\_а.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Орлов С. С.

## Архимедовы незамкнутые конусы

Матюхин А. В.

Новосибирский государственный университет

Объектом исследования работы являются архимедовы конусы в топологических векторных пространствах. (Под *конусом* понимается выпуклое множество  $K$  в векторном пространстве, удовлетворяющее условиям  $(\forall \alpha \geq 0)(\forall x \in K)(\alpha x \in K)$  и  $K \cap (-K) = \{0\}$ .) Очевидно, что любой замкнутый (и даже секвенциально замкнутый) конус архимедов. Обратное же верно не в любом пространстве. Основной целью работы является описание класса топологических векторных пространств, содержащих архимедовы незамкнутые конусы.

Как несложно понять, существование архимедова незамкнутого конуса в топологическом векторном пространстве равносильно существованию на нем (согласованного с векторными операциями) архимедова порядка с незамкнутым множеством положительных элементов.

Понятие архимедовости конуса удобно обобщить для произвольных выпуклых множеств: выпуклое подмножество  $C$  векторного пространства  $X$  называется *архимедовым* при выполнении следующего условия: если  $x, y \in X$  и  $x + \frac{1}{n}y \in C$  для всех натуральных  $n$ , то  $x \in C$ . Большинство фактов, справедливых для архимедовых конусов, имеют место и для произвольных архимедовых выпуклых множеств.

В общем случае вопрос о существовании архимедовых незамкнутых конусов остается открытым. В работе ответ на этот вопрос дается для широкого класса топологических векторных пространств. Были получены следующие результаты:

**Теорема 1.** В любом локально выпуклом пространстве несчетной размерности существует архимедов незамкнутый конус.

**Теорема 2.** В топологическом векторном пространстве, содержащем незамкнутое линейно независимое множество, существует архимедов незамкнутый конус.

**Теорема 3.** В топологическом векторном пространстве счетной размерности, на котором все линейные функционалы непрерывны, все архимедовы выпуклые множества замкнуты.

Приведены примеры пространств счетной размерности, не удовлетворяющих условиям теорем 2 и 3.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Гутман А. Е.

**Семейство отображений на верхнюю полуплоскость с разрезами**

Мельникова И. А.

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Найдем решение уравнения типа Левнера при  $\lambda(\tau)=\mu\tau$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ 

$$\frac{d\zeta(\tau, z)}{d\tau} = ctg \frac{\mu\tau - \zeta(\tau, z)}{2}$$

с начальным условием  $\zeta(0)=z$ .

Решение этого уравнения неявно определяется равенством

$$\frac{1}{1+\mu^2} \ln\left(\mu \sin \frac{\mu\tau - \zeta}{2} - \cos \frac{\mu\tau - \zeta}{2}\right) + \frac{\mu(\mu\tau - \zeta)}{2(1+\mu^2)} = \frac{\tau}{2} + \frac{1}{1+\mu^2} \ln\left(-\mu \sin \frac{z}{2} - \cos \frac{z}{2}\right) - \frac{\mu z}{2(1+\mu^2)}.$$

В результате предельного перехода при  $\tau \rightarrow +\infty$  получим семейство отображений, зависящее от параметра  $\mu$ 

$$f(z) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} (\zeta(\tau) - i\tau) = \frac{1}{\mu+i} (\mu z - 2 \ln(\mu \sin \frac{z}{2} + \cos \frac{z}{2})) + \frac{2}{\mu+i} \ln \frac{1+\mu i}{2}.$$

Образом верхней полуплоскости при полученном отображении будет плоскость с разрезами по параллельным лучам, выходящим из точек

$$w_k = \frac{2}{\mu+i} \ln \frac{1+\mu i}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

под углом  $\alpha = \text{arctg} 1/\mu$  к вещественной оси.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доцент Копанева Л. С.

## Результант для некоторых типов целых функций

Наприенко Я. М.

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск

В алгебре многочленов широко известен метод исключения неизвестных, позволяющий при помощи результата сводить решение системы уравнений от нескольких переменных к решению одного уравнения с одной переменной.

Подобного метода нет для системы неалгебраических уравнений. Потребность в таком методе следует, например, из уравнений химической кинетики, где возникают функции и уравнения, являющиеся экспоненциальными полиномами (см. [1]).

Для построения метода необходим результат для целых функций, позволяющий определить наличие (и условие) общих корней у функций. На данный момент с помощью методов комплексного анализа, был получен результат для пары целых функций, на одну из которых наложено условие конечного порядка роста и конечного числа нулей. Также был получен метод факторизации функции, позволяющий из функции с конечным числом нулей получать многочлен, содержащий нули функции, и только их. В ходе работы были получены суммы значений функции в нулях функции с конечным числом нулей, алгоритм для отыскания результата и доказательство существования предельного перехода в классическом определителе Сильвестра.

Таким образом, понятие результата было существенно расширено на пары целых функций с ограничениями, что уже позволяет использовать метод исключения для некоторых систем неалгебраических уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-31-00173)

---

1. Быков В. И., Цыбенова С. Б. Нелинейные модели химической кинетики, КРАСАНД, Москва, 2011.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Кытманов А. М

## Применение диаграмм Найквиста для анализа релаксационных колебаний в гемодинамике головного мозга

Борд Е. Е.

Новосибирский государственный университет

Релаксационные колебания в сложной составной системе «пульсирующий поток крови – упругие стенки сосудов – окружающая среда мозга» описываются уравнением нелинейного осциллятора Ван-дер-Поля – Дуффинга

$$\varepsilon q''(t) + P_2(q)q' + P_3(q) = ku(t).$$

В уравнении  $q(t)$  и  $u(t)$  – гемодинамические параметры. Коэффициенты  $a_i, b_i, k \in R$  функций  $P_2, P_3$  определяют демпфирующие и упругие свойства системы,  $\varepsilon$  – малый параметр. Эти коэффициенты определяются индивидуально для каждого пациента на основе экспериментальных данных. Уравнение имеет решения различной структуры, которая определяется коэффициентами  $\{a_i, b_i, k\}$  и правой частью.

Уравнения, построенные по клиническим данным, обладают, как правило, устойчивым периодическим решением. Диаграммы Найквиста (ДН) являются удобным инструментом исследования решений уравнения с гармонической правой частью  $u(t)=A\sin(\omega t)$  при различных  $A$  и  $\omega$ . ДН связывают параметры внешней силы ( $A$  и  $\omega$ ) и параметры возбуждаемых в системе колебаний. Такой подход существенно дополняет экспериментальные данные и позволяет расширить так исследуемый диапазон возможных внешних воздействий на гемодинамическую систему мозга.

Был проведен анализ ДН для уравнений, описывающих пять систем сосудов головного мозга при наличии церебральных аневризм. Обнаружено конечное число паттернов, представляющих динамику изменения решения уравнения, начиная с появления систем субгармоник и заканчивая разрушением периодического решения. Применительно к живой системе, последнее может означать нарушение ее функционирования.

Научные руководители: д-р физ.-мат. наук, проф. Чупахин А. П.,  
канд. физ.-мат. наук Черевко А. А.

**Стационарные стратифицированные течения над комбинированным препятствием**

Галичкина М. А.

Новосибирский государственный университет

Одним из известных режимов течений тяжелой неоднородной жидкости, формирующихся в окрестности обтекаемого рельефа, является стационарная волновая конфигурация с периодической асимптотикой вниз по потоку. Такие волновые следы, образующиеся при набегании докритического потока на финитную неровность дна, называются подветренными волнами. В настоящее время малоизученным является вопрос о поведении волнового поля в переходной области над комбинированным препятствием в виде системы нескольких возвышений. В данной работе с помощью полуаналитических методов исследуется влияние формы дна и параметров набегающего потока на возникающие волновые структуры в ближнем поле. Проведены серии численных экспериментов, в которых рассмотрены формы рельефа, отличающиеся количеством препятствий, их высотой и расстоянием между ними. Показано, что взаимное расположение препятствий существенно влияет на структуру течения в придонном слое и общую интерференционную картину волн.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Макаренко Н. И.

## **Моделирование и оптимизация эмболизации артериовенозной мальформации на основе модели двухфазной фильтрации**

Гологуш Т. С.

Новосибирский государственный университет

Артериовенозная мальформация (АВМ) может адекватно моделироваться пористой средой в силу хаотического неупорядоченного расположения вырожденных сосудов различных малых диаметров (от 0.01см до 1см), осуществляющих шунтирование крови из артерии в вену. Процесс эмболизации описывается в этой модели внедрением в пористую среду, заполненную жидкостью (кровью), другой жидкости (эмболизата), несмешивающейся с первой.

Предложенная модель имеет две новые принципиальные особенности.

1. На процесс эмболизации накладывается требование об ограничении удельной нагрузки на узел АВМ при эмболизации. Это требование следует из нейрохирургической практики и обосновано на гидравлической модели эмболизации АВМ. Оно формулируется в виде ограничения

$$\Delta E/V \leq W_{max},$$

где  $\Delta E$  - энергия, рассеиваемая в АВМ за единицу времени. Она равна разности потоков энергии на входе в АВМ и выходе из неё,  $V$  - объём АВМ,  $W_{max}$  - предельное допустимое значение удельной нагрузки.

2. Процесс эмболизации описывается как процесс оптимального управления, в котором, управляя концентрацией эмболизата на входе в АВМ, нужно добиться максимально возможной её эмболизации за конечное время при выполнении ограничения.

Показано, что оптимальное управление состоит из интервалов, на которых либо (а) насыщенность крови на входе в АВМ достигает минимального допустимого значения, что означает максимальную подачу эмболизата, либо (б) в процессе эмболизации постоянно поддерживается предельно допустимая нагрузка  $W_{max}$ .

Конструктивное построение такого управления осуществляется в виде численного решения исходной задачи.

Научные руководители – д-р физ.-мат. наук, проф. Чупахин А. П.,  
канд. физ.-мат. наук Черевко А. А.

**Аналитическое решение для конвективного течения вязкой несжимаемой жидкости в сферической емкости при нагреве излучением**

Корепанова Е. В.

Удмуртский государственный университет, г. Ижевск

Сферическая емкость с жидкостью нагревается сверху потоком излучения. Распределение температуры в емкости определяется решением стационарного уравнения теплопроводности и представлено в виде:

$$T(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{j_l r^l}{h+l} P_l(\theta), \text{ где } P_l(\theta) - \text{полиномы Лежандра.}$$

Неоднородное распределение температуры в объеме приводит к конвективному перемешиванию жидкости, которая считается вязкой и несжимаемой. В линейном приближении стационарное поле скоростей и давление в жидкости определяется решением линеаризованного уравнения Навье-Стокса с источником в правой части:

$$\begin{cases} -\nabla p(r, \theta) + \Delta \vec{V}(r, \theta) = \vec{e}_z T(r, \theta) \\ \operatorname{div}(\vec{V}(r, \theta)) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\vec{e}_z = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta.$$

На границе сферической емкости выполняются условия прилипания:

$$V_r(1, \theta) = 0, \quad V_\theta(1, \theta) = 0.$$

Уравнения (1) решаются аналитически с помощью разложения в ряд по сферическим функциям для давления и по векторным шаровым функциям для поля скоростей. В силу аксиальной симметрии задачи функции зависят только от радиуса  $r$  и полярного угла  $\theta$ .

Решение системы (1) ищется в виде

$$p(r, \theta) = \sum P_j(r) P_j(\theta),$$

$$\vec{V} = \sum u_j(r) \vec{Y}_j^+( \theta) + v_j(r) \vec{Y}_j^-( \theta) + w_j(r) \vec{Y}_j^0( \theta),$$

где  $\vec{Y}_j^+, \vec{Y}_j^-, \vec{Y}_j^0$  – сферические функции.

В ходе работы построены распределения температуры и скоростей жидкости в сечении сферической емкости и проанализирована зависимость полученных решений от параметров задачи.

Научные руководители - канд. физ.-мат. наук, доцент Васькин В. В.,  
канд. физ.-мат. наук, доцент Лебедев В. Г.

## **Численный анализ свойств неизотермического течения полимерной жидкости в цилиндрическом канале с тонким нагревательным элементом**

Круглова Е. А.

Новосибирский государственный университет

Стремительное развитие современных технологий 3D печати с использованием полимерных материалов требует разработки новых математических моделей, описывающих с высокой степенью достоверности течения растворов и расплавов полимеров в каналах печатающих устройств. Задача учета запутанной макромолекулярной структуры полимеров для обеспечения хорошего соответствия экспериментальным данным довольно трудна.

Одним из перспективных решений проблемы видится применение мезоскопического подхода [1], представляющего разумный компромисс между моделями, учитывающими микроструктуру полимера, и феноменологическими моделями, описывающими его свойства, наблюдаемые в эксперименте на макроуровне.

В данной работе за основу берётся модификация мезоскопической реологической модели Покровского-Виноградова [2], описывающая стационарные неизотермические течения несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости. Модель учитывает важнейшие характеристики течений, определяющие параметры технологического процесса 3D печати. В работе поставлена нелинейная краевая задача для определения скорости течения жидкости в цилиндрическом канале с тонким нагревательным элементом (нитью) в центре. Приближённые решения краевой задачи найдены с помощью нелокального алгоритма, основанного на применении приближений без насыщения К.И. Бабенко [3]. Приведены результаты расчётов различных режимов течения. Получены решения для предельно малых значений радиуса нагревательного элемента.

---

1. Pokrovskii V. N. The Mesoscopic Theory of Polymer Dynamics. 2nd ed. Berlin: Springer, 2010. doi:10.1007/978-90-481-2231-8

2. Блохин А.М., Семисалов Б.В. Стационарное течение несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости в канале с эллиптическим сечением // СибЖИМ. 2014. Т. XVII. №4(60). С. 38-47.

3. Семисалов Б. В. Нелокальный алгоритм поиска решений уравнения Пуассона и его приложения // Журн. выч. мат. и мат. физ. 2014. Т. 54. № 7. С. 1110–1135.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Семисалов Б. В.

**Разрешимость задачи о форме свободной поверхности идеальной жидкости над сингулярным стоком.**

Местникова А. А.

Новосибирский государственный университет

Рассматривается двумерная задача о потенциальном течении идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью сверху и прямолинейным горизонтальным дном снизу. Нижняя граница предполагается непроницаемой всюду кроме одной точки, в которой расположен сингулярный точечный сток заданной интенсивности. Верхняя граница является неизвестной и должна быть определена в процессе решения задачи. Эта граница свободна от напряжений (динамическое условие) и вектор поля скорости жидкости направлен по касательной к ней (кинематическое условие). Поле скорости внутри области течения находится из условия, что его потенциал и функция тока являются сопряжёнными гармоническими функциями.

С помощью конформных отображений и обобщенного метода Леви-Чивита выведено уравнение типа Некрасова на единичной окружности. Это уравнение точно описывает форму свободной поверхности. Показано, что для чисел Фруда, превышающих некоторое критическое значение, существует единственное решение задачи. В этом решении поле скорости стремится на бесконечности к скорости равномерного потока. Свободная поверхность монотонно снижается при движении от бесконечных удаленных точек и в точке над стоком образует касп, то есть, касательная к ней становится вертикальной.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук Старовойтов В. Н.

**О методе расчета поля течения в вязком ударном слое**

Помогаева С. В.

Национальный исследовательский Томский государственный университет.

Предметом исследования в данной работе является сверхзвуковой невязкий поток, обтекающий осесимметричное затупленное тело.

Результаты исследования могут быть использованы в таких областях науки и техники как баллистика, ракетостроение, метеорная физика, самолетостроение и пр.

Задача решается на основе уравнений Эйлера, записанных в системе координат, связанной с поверхностью тела. Граничными условиями для системы служат условие непротекания на поверхности тела, условия симметрии на оси течения и соотношения Ренкина-Гюгонио на поверхности головной ударной волны [1].

В настоящей работе предлагается новый численный метод для решения задач такого типа, основанный на методе глобальных итераций [2]. Суть метода состоит в выводе и решении интегро-дифференциального уравнения относительно отхода ударной волны

$$\frac{d}{dz} \left[ a(z) \frac{df}{dz}(z) \right] + b(z) \left[ \frac{df}{d\xi} \right] + c(z) [f(\xi)] = d(z),$$

где  $z$  - осевая координата ( $z \geq 0$ ),  $f(z)$  – функция отхода ударной волны,  $a(z)$ ,  $b(z)$  и  $c(z)$  – интегральные операторы, действующие на функции  $f(\xi)$  и  $\frac{df}{d\xi}$  при  $\xi \leq z$ .

Анализ коэффициентов уравнения на известных решениях показывает, что коэффициент при старшей производной  $a(z)$  равен нулю при  $z=0$  и при некотором  $z^*>0$ . Условием, замыкающим алгоритм, является условие гладкости решения в окрестности точки  $z^*$ .

Работа выполнена в соответствии с госзаданием № 9.1024.2014/к Минобрнауки РФ.

---

1. Лунев В.В. Течение реальных газов с большими скоростями // М.: Физматлит 2007. 759 с.

2. Гиперзвуковая аэродинамика и теплообмен спускаемых космических аппаратов и планетных зондов / под ред. Г. А. Тирского // М. : Физматлит. 2011. - 546 с.

Научный руководитель – Гольдин В. Д.

## Теплообмен вблизи линии излома нагревателя

Сарычева Е. В.

Новосибирский государственный университет

Развитие электронной техники требует проектирование и разработку систем теплоотвода. Установлено, что движущиеся пленки жидкости эффективно отводят тепло. В настоящей работе рассматривается плоская задача, описывающая установившееся стекание под действием сил тяжести пленки вязкой несжимаемой жидкости. Подложка, по которой движется пленка - пересекающиеся под некоторым углом твердые стенки. Цель данной работы - исследование теплообмена вблизи угловой точки. Математическая постановка задачи включает уравнения Навье-Стокса и переноса энергии с граничными условиями на твердой стенке и на свободной границе. На свободной границе ставятся кинематическое, динамические условия и условие на теплообмен. Решение таких задач рассматривалось в работах [1,2]. В данной работе постановка имеет особенность в том, что подложка имеет угловой излом. Решение поставленной задачи осуществляется переходом в специальную криволинейную систему координат, в которой всё твердое основание расположено вдоль одной из координат. В полученных уравнениях и граничных условиях проведено приближение тонкого слоя. Задача была сведена к решению одного уравнения третьего порядка, и одного – второго. Проведены численные расчеты, исследована зависимость коэффициента теплоотдачи вблизи угла от управляющих параметров задачи.

---

1. Кабова Ю.О., Кузнецов В.В. Стеkanie неизотермического тонкого слоя жидкости с непостоянной вязкостью. ПМТФ. 2002. № 6. С. 134–141.

2. Kabova Yu.O., Kuznetsov V.V., Kabov O.A. Evaporation of a thin viscous liquid film sheared by gas in a microchannel. International Journal of Heat and Mass Transfer. V. 68 Iss. 1. 2014. P. 527–541.

Научный руководитель – д-р. физ.-мат. наук Кузнецов В.В

## **Влияние изменения скорости кровотока на гидродинамические параметры течения в сосудах при наличии множественных аневризм**

Старикова А. А.

Новосибирский государственный университет

Работа посвящена моделированию течения крови в сосудах головного мозга человека при наличии множественных аневризм. Изучение аневризм на сегодняшний день является актуальной задачей, так как одновременно с достаточно высокой частотой заболевания среди взрослого населения нет четкого научного обоснования появления, роста и разрыва аневризм.

Задача математического моделирования движения жидкости по системе трубок имеет широкую область научного и практического применения. Исследования в области гемодинамики требуют как построения и разработки собственно физических моделей, так и усилий по созданию численных методов решения соответствующих задач. Особое место занимает подготовка вычислительного эксперимента и обработка его результатов. Увеличение производительности вычислительной техники сделало возможным численное исследование гидродинамики крови в сосуде в трехмерной геометрии, близкой к реальной. В данной работе по реальным клиническим данным построены модели переднего и заднего бассейнов сосудов головного мозга при наличии артериальных аневризм.

### **Цель работы:**

- Построение 3D геометрической модели сосудов головного мозга при наличии множественных аневризм переднего и заднего бассейнов (*клинические данные НИИ нейрохирургии им. акад. Н. Н. Бурденко, Москва*)
- Проведение численного моделирования кровотока и исследование влияния изменения скорости во входящих артериях на гидродинамические параметры в аневризмах разных бассейнов, таких как давление, скорость и касательные напряжения на стенке сосуда.

Численная реализация данного алгоритма опирается на возможности пакета программ ANSYS (ИВЦ НГУ). Расчеты проведены для стационарного режима течения при средних значениях скорости и давления на входах и выходах. Результаты работы могут быть использованы как в дальнейших исследованиях по математическому моделированию гемодинамики сосудов головного мозга, так для решения задач практической медицины.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Хе А. К.

**Неустановившиеся волны в слое жидкости над подвижным дном**

Ткаченко С. Д.

Новосибирский государственный университет

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск

В рамках второго приближения теории мелкой воды рассматривается нестационарная задача о генерации поверхностных волн в результате быстрой деформации дна. Используемые для этого нелинейные дисперсионные уравнения Грина–Нагди впервые были выведены в работе [1]. Одна из наиболее интересных и важных постановок задачи о волнах на воде связана с моделированием волн типа цунами. В поршневой модели генерации волн цунами [2] рассматривается механизм образования нестационарных волн, происходящего результате мгновенного поднятия или опускания локального участка дна.

В настоящей работе рассматриваются гладкие по времени и по пространственной переменной симметричные законы деформации дна. Построена начальная по времени асимптотика решений уравнений Грина–Нагди и уравнений первого приближения теории мелкой воды. Полученные результаты описывают раннюю стадию процесса генерации поверхностных волн в результате быстрого поднятия локализованного участка дна. Показано, что качественные режимы волнообразования существенно зависят от геометрических свойств рельефа дна.

---

1. Green, A. E., Naghdi, P. M. A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth. *J. Fluid Mech.* 1976. V. 78. P. 237-246.

2. Пелиновский, Е. Н. Гидродинамика волн цунами. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1996.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Макаренко Н. И.

## Обобщенный осциллятор Ван-дер-Поля-Дуффинга как уравнение описания гемодинамики в различных сосудах головного мозга

Уфимцева И. В.

Новосибирский государственный университет

Необычайная сложность сосудистой системы мозга, необходимость учета большого числа параметров кровотока обуславливает отсутствие в настоящее время единой корректной модели, описывающей движение крови в сосудах головного мозга. В данной работе реализован подход, основанный на методе построения дифференциального уравнения нелинейного осциллятора, описывающего релаксационные колебания в сложной многофазной системе “поток крови — упругая стенка сосуда — окружающая среда мозга” на основе теории обратных задач для дифференциальных уравнений. Обоснована применимость модели для сосудов следующих типов: церебральных вен, синусов и для силиконовой модели бифуркации сонной артерии. Построены сравнительные диаграммы коэффициентов упругости и демпфирования, иллюстрирующие тенденции изменения гемодинамических параметров у одного пациента в ходе операции и при повторных операциях, и у разных пациентов в одной и той же точке кровеносной сети.

Уравнение обобщенного нелинейного осциллятора Ван-дер-Поля-Дуффинга

$$\varepsilon y'' + P_2(y)y' + Q_3(y) = kz(t)$$

является своеобразным уравнением состояния, описывающим реологию этой среды;  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  — параметры кровотока,  $\varepsilon$  — релаксационный параметр. Функции  $P_2(y) = a_0 + a_1y + a_2y^2$ ,  $Q_3(y) = b_1y + d_2y^2 + b_3y^3$  характеризуют вязкие и упругие свойства системы. Коэффициенты ( $a_i$ ,  $b_i$ ) индивидуальны для каждого пациента и определяются по данным мониторинга кровотока.

Модель опробована на массивах 137 измерений в артериях, 6 — в синусах, 17 — в венах головного мозга. Она точно описывает релаксационные колебания в упругой модели тройника при различных нестационарных режимах течения (40 измерений).

Модель имеет прикладное значение в практической медицине.

Научные руководители – д-р физ.-мат. наук, проф. Чупахин А. П.,  
канд. физ.-мат. наук Черевко А. А..

## Равновесные формы капли, лежащей на подложке в поле силы тяжести

Фролов А. С.

Национальный исследовательский Томский государственный университет

В природе и технике существуют множество процессы, в которых поверхностные силы играют большую роль. В данной работе представлены результаты исследований равновесной формы капли жидкости, лежащей на горизонтальной подложке в поле силы тяжести, описываемой уравнением Лапласа

$$\Delta P = \sigma_{LG} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где  $\Delta P$  – разность давления внутри жидкости и давления газа снаружи,  $R_1$  и  $R_2$  – главные радиусы кривизны поверхности,  $\sigma_{LG}$  – коэффициент поверхностного натяжения на границе жидкость-газ. Определяющими параметрами рассматриваемой задачи являются: число Бонда  $Bo$ , показывающее соотношение поверхностных и гравитационных сил, и краевой угол смачивания  $\theta$  – это угол, образованный между касательной к поверхности в точке контакта и твердой стенкой. В основе решения лежит численный метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

Проведены параметрические исследования равновесной формы капли и выписаны аппроксимирующие зависимости высоты  $h$  и радиуса пятна смачивания  $r$  в зависимости от  $Bo$  и  $\theta$  (Рис. 1).

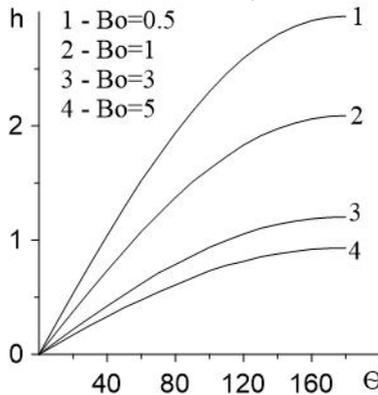


Рис.1. График зависимости высоты капли от её угла смачивания.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 15-08-02256).

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Борзенко Е. И.

**Пространственная задача о движении деформирующегося включения  
в колеблющейся идеальной жидкости**

Цой Н. Г.

Новосибирский государственный университет

В настоящее время представляют интерес исследования, направленные на выявление закономерностей силового взаимодействия и совместного движения твердых тел и жидкостей в различных гидромеханических условиях.

В данной работе рассматривается задача о движении деформирующейся однородной твердой частицы в колеблющейся неограниченной извне идеальной несжимаемой жидкости. Исследовано поведение частицы, периодически изменяющей свою форму, но не изменяющей объем.

Решение задачи находится при помощи метода возмущений; строится асимптотическое представление решения при стремлении к нулю параметра, входящего в уравнение границы частицы. Найдено точное выражение для объема частицы; показано отсутствие изменения объема частицы в заданном приближении. Решены задачи нулевого и первого приближений.

Обнаружен и проанализирован эффект монотонного перемещения частицы; найдены условия присутствия и отсутствия эффекта. Установлено, что наличие и отсутствие эффекта монотонного перемещения частицы зависит от вида функции, которой определяется зависимость формы частицы от времени.

Полученные в работе результаты могут быть полезны для изучения поведений капель одной жидкости в другой в случае, когда жидкости являются несмешивающимися.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, доцент Сенницкий В. Л.

## **Квазисобственные колебания и фигуры Хладни круглых пластин, плавающих на мелкой воде**

Шемелина В. О.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск

В работе представлена методика численно-аналитических исследований собственных и квазисобственных изгибно-гравитационных колебаний плавающих круглых пластин в рамках линейной теории в приближении длинных волн на мелкой воде. Проведены сравнения собственных частот ограниченного бассейна и квазисобственных частот неограниченного бассейна, изучено влияние геометрических размеров бассейна и формы дна на частоты и фигуры Хладни.

Граница пластины свободна от перерезывающих сил и изгибного момента; жидкость однородная, несжимаемая и невязкая; между пластиной и свободной поверхностью пространства нет. Область воды делится на область под пластиной и открытую воду. Для установившихся колебаний основное уравнение в области пластины имеет вид:

$$\left[ D\Delta^3 + \rho g \left( 1 - \frac{\omega^2 M}{\rho g} \right) \Delta + \rho g K^2 \right] \varphi = 0,$$

где  $\omega$  – собственная частота,  $\varphi$  – потенциал скорости,  $D$  – изгибная жесткость пластины,  $M$  – масса на единицу поверхности,  $g$  – гравитационное ускорение,  $K$  – волновое число. В области открытой воды потенциал скорости удовлетворяет уравнению Гельмгольца при условии излучения. Используются представления решений в виде рядов Фурье.

Получена зависимость собственных частот от геометрических размеров бассейна и от изменения радиуса пластины. Проведены исследования зависимости собственных и квазисобственных частот от размеров неровности дна. Найдены выражения для изгибного поля в пластине и волнового поля в жидкости. При увеличении номера решения (гармоники) и углового порядка моды увеличивается количество точек перегиба, соответственно изгибно-гравитационные формы колебания становятся более рифлеными. Пучности изгибных моментов позволяют прогнозировать возможные разрушения. Получен вид собственных и квазисобственных изгибно-гравитационных колебаний для первых мод.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук Сухинин С. В.

**Изучение вариабельности строения 3D сети сосудов головного мозга по данным МРТ методом варьирования сканирующей плоскости**

Янькова Г. С.

Новосибирский государственный университет

Кровеносная система головного мозга является чрезвычайно важной для функционирования организма, ее характеризует высокая интенсивность работы. Как и любой части живого организма, ей присуща вариабельность, при сохранении основных параметров отдельные особи или даже линии особей имеют отличия в геометрии сети, значениях ее параметров. Важной задачей является исследование вариабельности строения кровеносной системы мозга и ее гемодинамических параметров для оценки эффективности гемодинамики мозга.

Для изучения гемодинамики необходимо иметь реальную конфигурацию сосудистой системы головного мозга. Для построения таких конфигураций успешно применяется магнитно-резонансная томография (МРТ). Однако, при наличии сильных извитостей и сужений сосудов в восстановленных трехмерных конфигурациях, наблюдаются прерывания сосудов в тех местах, где поток в сосуде параллелен плоскости сканирования. Для преодоления описанной проблемы прерывания сосудов недавно был предложен метод варьирования наклона сканирующей плоскости.

Метод вариации сканирующей плоскости был применен к 12 мышам двух различных генетических линий: контрольной и с нокаутом по ФНО (TNFKO) на основе генома линии C57Bl/6(WT). Он показал свою эффективность и позволил восстановить артериальную часть сосудистого русла без разрывов. (ИЦиГ СО РАН, томограф Bruker BioSpec 117/16).

На основе построенных конфигураций можно сделать достоверный вывод, что у животных с нокаутом по ФНО объем мозгового кровеносного русла меньше, чем у животных контрольной группы.

Для построенных конфигураций проведены гемодинамические расчеты с помощью пакета ANSYS/CFX на базе компьютерного центра НГУ, показавшие различия в гемодинамике мозгового кровотока при различном строении сосудистой системы.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Черевко А. А.

# МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

УДК 539.3

## Исследование напряженно-деформированного состояния структурно-неоднородных образцов горных пород на основе эволюционного подхода

Ахметов А. Ж.

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Изучение эволюции напряженно-деформированного состояния образцов и сред, а также выявление зародышей трещин, влекущие к образованию катастрофических разрушений, являются значимой задачей в механике твердого тела. В основе эволюционного подхода лежит рассмотрение объекта исследования как нелинейной динамической системы с заданными прямыми и обратными связями. Математическую основу эволюционного подхода для деформируемых твердых тел составляют фундаментальные уравнения математической физики, отражающие общие законы сохранения массы, импульса, моментов импульса и энергии, и определяющие соотношения, записанные в форме эволюционных уравнений [1].

Так как физико-механические свойства горных пород обусловлены текстурно-структурными особенностями, пористостью и поврежденностью, то для изучения напряженно-деформированного состояния образцов горных пород предварительно была определена их структура методами оптической микроскопии и рентгеновской томографии.

По результатам этих исследований были построены двумерные и трехмерные компьютерные модели образцов горных пород. Для компьютерного моделирования напряженно-деформированного состояния изучаемых образцов при одноосном сжатии была использована собственная компьютерная программа на основе конечно-разностного метода.

В результате расчёта были выявлены очаги зарождения неупругой деформации и разрушения, а также проведен анализ эволюции интенсивности тензора неупругой деформации и поврежденности в ходе нагружения образцов.

Данная работа выполнена в рамках проекта РФФ№14-17-00198.

---

1. Макаров П.В. Математическая теория эволюции нагружаемых твердых тел и сред // Физ. мезомех. – 2008. – Т. 11. – № 3. – С. 19–35.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, доцент Смолин И. Ю.

## Расчет подпорной стенки на структурно-неустойчивых грунтах

Ахметов А. Ж.

Национальный исследовательский Томский государственный университет

По принципам районирования, с учётом инженерно-геологических и гидрогеологических условий, территория Казахстана подразделена на регионы: Складчатые Юга Казахстана (Тянь-Шань; Зайсан; Алтай; межгорные, предгорные низменности); Туранская плита ( Предгорные равнины Чуйской впадины и равнины Шымкента и Каратау), где в предгорных низменностях преобладают толщи структурно-неустойчивых грунтов. В результате проведённых комплексных, региональных инженерно-геологических изысканий территорий было установлено, что просадочные грунты представляют нижнечетвертичные эоловые отложения, представленные лессовидными суглинками. Анализ показывает, что большинство сооружений развитых регионов возводятся на грунтах, главным образом четвертичного возраста. Данные грунты отличаются изменчивостью физического состояния и разнообразием механических свойств. Поэтому предметом исследований была выбрана устойчивость просадочных грунтов. Согласно результатам компрессионных испытаний, суглинки, залегающие до глубины 15,5-21,0м, при замачивании проявляют просадочные свойства. Величина суммарной просадки составляет 8,8-73,51см. Тип грунтовых условий по просадочности второй.

Результаты расчётов устойчивости склона с применением программы PLAXIS показали, что подпорные стенки из монолитного железобетона является недостаточными для обеспечения устойчивости всего массива склона. Самыми неблагоприятными для устойчивости склона по физическим свойствам являются структурно-неустойчивые суглинки в состоянии полного водонасыщения грунтов. Проведенное исследование показало, что конструктивные решения подпорных стенок требует усиления в виде устройства анкеров и закрепления откосов склона.

Научный руководитель – д-р техн. наук, проф. Жакулин А. С.

## **Использование нестационарной закачки для определения параметров трещины гидроразрыва пласта**

Валов А. В.

Новосибирский государственный университет

Одной из важных компонент производства трещины гидроразрыва пласта (ГРП) с целью интенсификации добычи углеводородов является контроль трещины ГРП, состоящий в определении её основных геометрических параметров. Контроль трещины обычно осуществляется в момент её производства на основе данных микросейсмического мониторинга. Однако данный подход даёт только приблизительную информацию о параметрах трещины, поэтому другие способы контроля трещины ГРП являются крайне актуальными.

В данной работе дано теоретическое обоснование возможности использования нестационарной закачки жидкости для определения параметров трещины ГРП. Предполагается, что закачка жидкости в скважину с трещиной ГРП организована с периодически меняющимся по времени расходом. Показано, что при этом будет наблюдаться фазовый сдвиг между волнами давления и расхода жидкости. Фазовый сдвиг зависит от параметров пласта, а также от длины трещины ГРП.

Математическое моделирование процесса основывается на модели поропругой среды Био с условиями на трещине, аналогичными используемым в работе [1]. Предполагается что длина и ширина трещины фиксированы. Для случая бесконечно длинной трещины найдено точное решение в виде волновых пакетов, что позволяет определить фазовый сдвиг явно. В численном счёте фазовый сдвиг между волнами расхода и давления найден для трещины конечной длины. Показано, что в обоих случаях величина фазового сдвига зависит от физических параметров задачи. Это даёт возможность определять параметры трещины по измеряемому фазовому сдвигу.

---

1. Shelukhin V. V., Baikov V. A., Golovin S. V., Davletbaev A. Y., Starovoirov V. N. Fractured water injection wells: Pressure transient analysis. Int. J. Sol. Struct. 2014. Vol. 51. № 11. pp. 2116-2122

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Головин С. В.

## **Моделирования особенностей эластомерного связующего около наночастиц технического углерода**

Елисеева А. Ю.

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Наиболее распространенный в резиновой промышленности наполнитель – технический углерод (ТУ), оказывает огромное влияние на формирование свойств эластомеров. Усиливающее действие ТУ в составе эластомеров обычно связывают с особенностями строения и физико-химического взаимодействия связующего с частицами ТУ.

В ходе работы, при использовании распределение Гиббса, метода Монте-Карло и модели свободно-сочлененной цепи было показано, что взаимодействие атомов углерода с атомами полимерной цепи не существенно на расстоянии больше одного нанометра от поверхности частицы. То есть невозможно объяснить эффекты повышения прочности эластомера при введении в него нанонаполнителя влиянием потенциального поля около частиц на поведение полимерных цепей.

В работе рассматривается другая гипотеза. Появление особых свойств наполненных эластомеров объясняется следующим образом. На границе частицы ТУ имеются участки, на которых выходит углерод в аморфном состоянии. Имеются также выступающие фрагменты с графитоподобной структурой, на границе которых имеются сколы с очень высокой химической активностью. Это участки, на которых располагаются атомы углерода с незаполненными валентностями. Они могут вступать в химическую связь с полимерными цепями. В этом случае на полимерной цепи появляется свободный радикал, который может привести к формированию химической связи со следующей полимерной цепью. В результате появления такой связи на новой полимерной цепи появляется свободный радикал, и процесс повторяется снова.

В работе был разработан алгоритм построения геометрии частицы ТУ учитывающей шероховатость и активность поверхности частиц. В рамках вычислительного эксперимента осуществлен анализ процесса образования химических сшивок между полимерными цепями.

Проведенные компьютерные эксперименты показали, что особые свойства эластомера могут появиться за счет химического взаимодействия полимерных цепей со свободными радикалами на сколах графитоподобных областей, выступающих на поверхности наполнителя.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Свистков А. Л.

**О структуре зоны внедрения с учётом сжимаемости флюидов**

Колдаев Д. А.

Новосибирский государственный университет

При бурении скважин нарушается естественное состояние пластов, содержащих углеводороды. В частности, происходит проникновение буровой жидкости в прискваженную зону с образованием, так называемой зоны внедрения. На данный момент достаточно детально исследованы процессы формирования зоны внедрения, следуя классической модели фильтрации Маскета-Леверетта в условиях несжимаемости фильтрующихся жидкостей.

В данной работе, методом численного моделирования, исследуется влияние сжимаемости флюидов на структуру зоны внедрения. Исследуется модификация классической модели Баклея-Леверетта, без учета капиллярных сил, на случай сжимаемости фаз.

Уравнения состояния углеводородных смесей весьма разнообразны. В работе рассматривается модельный случай линейных зависимостей плотностей от давления

$$\rho_i = \rho_i^0(1 + \varepsilon_i p), i = 1, 2,$$

где параметр  $\varepsilon_i$  характеризуют сжимаемость  $i$ -ой фазы.

Система уравнений Баклея-Леверетта в случае несжимаемых пласта и флюидов представляет сложный объект для исследования, так как имеет смешанный тип. В нашей работе используется SS-метод – полностью неявный метод [1].

Решена одномерная осесимметричная задача формирования зоны внедрения вокруг скважины на фиксированный момент времени, при заданном превышении давления в скважине. Сравняются решения при различных сочетаниях свойств сжимаемости внедряющегося и пластового флюидов.

---

1. Азиз Х., Сеттари Э., Математическое моделирование пластовых систем, М.: Недра. 1982. 416 с.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доцент, Бочаров О. Б.

## Численное моделирование квазихрупкого разрушения твердого тела

Кутищева А. Ю.

Новосибирский государственный технический университет

Существует две основные модели хрупкого и квазихрупкого разрушения твердого тела под действием постоянного внешнего разрушения. Наиболее простая основана на предположении о мгновенном разрушении при достижении напряженно-деформированным состоянием априорно известного критического значения, которое определяется экспериментально. Другая модель вводит промежуточное состояние – предразрушение (рассматривается процесс зарождения и распространения трещин в образце). Такой подход позволяет исследовать влияние сложных внутренних структур на трещиностойкость материалов.

Таким образом, возникает необходимость решения задачи во временной области в деформирующихся образцах. В случае применения классических подходов таких, как метод конечных элементов [1], изменение геометрии области моделирования (например, развитие трещин) приводит к необходимости перестраивать конечноэлементные сетки на каждом шаге по времени, что значительно усложняет процедуру численного моделирования. В [2] было предложено расширение метода конечных элементов, позволяющее учитывать внутренние особенности образцов на функциональном уровне без изменений сетки. Такой подход дает возможность значительно упростить процедуру моделирования, однако требует разработки адаптивных алгоритмов для построения специальных функций формы, учитывающих разрывность решения (трещины) и зоны пластической деформации (фронт трещины).

В данной работе рассматривается задача о численном моделировании процесса квазихрупкого разрушения твердых трехмерных образцов под действием постоянного нагружения.

---

1. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. – 318 с.

2. Belytschko T., Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1999. vol. 45, no. 5. P. 601–620.

Научный руководитель – д-р техн. наук, проф. Шурина Э. П.

**Задача о сопряжении тонких упругого и жесткого включений  
в упругом теле**

Пурис В. А.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск

В данной работе рассматривается задача о равновесии тонкого упругого и тонкого жесткого включений, которые сопряжены в одной точке и помещены в упругое тело. Изучаются два случая в зависимости от условий сопряжения: случай без излома, где в качестве условий сопряжения взяты совпадение перемещений в точке контакта и сохранение угла между включениями, а также случай с изломом, где имеет место лишь совпадение перемещений. Для каждого случая получены краевые условия в точке сопряжения включений. На одном из берегов жесткого включения предполагается отслоение. Для предотвращения взаимного проникания берегов трещины друг в друга задаются нелинейные краевые условия типа неравенств. Упругое включение моделируется балкой Бернулли-Эйлера. Доказаны теоремы существования и единственности решения задачи равновесия для каждого случая.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 15-11-10000).

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Хлуднев А. М.

## Акустическое течение в прямоугольной полости

Семенова А. С.

Тюменский государственный университет

Акустическое течение – это направленный средний по времени перенос массы устойчивыми вихрями, возникающими помимо периодического движения среды в звуковом поле [1]. Акустические течения достаточно широко исследуются в настоящее время. Особенности акустических процессов необходимо учитывать при разработке различных термоакустических устройств.

В данной работе исследуется акустическое течение в прямоугольной полости, подверженной вибрационному воздействию с частотой  $\omega$  и амплитудой  $A$ , см. Рис. 1. Полость заполнена совершенным вязким газом (воздухом). В силу симметрии задача решена в половине области.

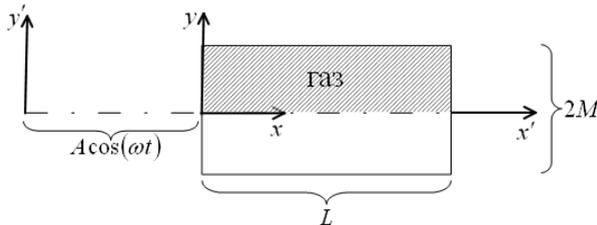


Рис.1. Исследуемая область

Задача решена численно, расчёты проведены с использованием неявной численной схемы первого порядка точности по времени и пространству, описание которой в одномерной постановке приведено в [2]. Получены картины акустического течения при малой амплитуде вибрации и широком диапазоне частот вибрации. Проведено сравнение полученных результатов с результатами расчета схожей задачи в осесимметричной постановке [3].

1. Ниборг В. Акустические течения. Физическая акустика. Т. 2 // Под ред. У. Мэзона. М.: Мир, 1969. С. 302–377.

2. Зубков П. Т., Яковенко А. В. Влияние вибрации на область с газом при адиабатических и изотермических граничных условиях // Теплофизика и аэромеханика. 2013. Т. 20, № 3. С. 283–294.

3. Губайдуллин А. А., Пяткова А. В. Особенности акустического течения при учете теплообмена // Акустический журнал, 2016. Т. 62, № 3.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Пяткова А. В.

## Течение неньютоновской жидкости в поперечном направлении канала одношнекового экструдера

Филина М. П.

Национальный исследовательский Томский государственный университет

В настоящее время широкое применение среди экструзионных машин для переработки высоковязких полимерных материалов нашли одношнековые экструдеры. Частицы находящегося в шнековом канале вещества совершают сложное движение, которое трудно описать. Поэтому течение продукта принято представлять в виде двух независимых движений: течения вдоль канала шнека и поперек. Последнее и рассматривается в настоящей работе. При построении плоской модели принято считать, что глубина канала много меньше его ширины. Это позволяет пренебречь влиянием боковых стенок на профиль скорости поперечного течения в серединном сечении канала.

Работа посвящена определению величины отношения ширины к глубине шнекового канала, при которой допустимо предположение об отсутствии влияния боковых стенок. Полимерная среда считается неньютоновской жидкостью, для описания реологического поведения которой используется степенной закон. Математическая постановка задачи включает уравнения Навье-Стокса в приближении ползущего течения и уравнение неразрывности. Граничные условия состоят в задании компонент скорости на стенках канала, который считается прямоугольным. Приводится методика получения решения для профиля вектора скорости без учета влияния боковых стенок. Для численного решения с учетом влияния боковых стенок применяется непрямой метод граничных элементов. Значение показателя нелинейности варьируется в диапазоне от 0.4 до 1.0. Построены профили скорости  $u_1(x_2)$ . Относительное отклонение решений, полученных с учетом влияния боковых стенок и без него, рассчитано в норме  $L_2$ . Показано, что влиянием боковых стенок на поперечное течение в середине канала можно пренебречь при значении отношения ширины к глубине равном 3 и более. При этом относительное отклонение будет гарантированно менее 1 %.

Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта Президента РФ (МК-3687.2014.1) и РФФИ в рамках научного проекта № 14-08-31579 мол\_а и проекта № 12-08-00313а.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Якутенок В. А.

## **Решение нелинейной задачи о статическом расширении цилиндрической полости в полупространстве**

Хасанов А. Р.

Пермский государственный национальный исследовательский университет

В работе представлена новая постановка задачи о расширении цилиндрической полости в упругопластическом нелинейно сжимаемом полупространстве с целью определения сопротивления среды на границе полости. Рассматриваемая задача актуальна в связи с ее возможным применением в области прикладной теории проникания.

В постановку задачи, помимо известных соотношений неразрывности и равновесия в условиях цилиндрической симметрии [1], входит уравнение состояния в виде [2], позволяющее описывать поведение как металлов, так и сжимаемых (пористых) сред.

Процесс построения аналитического решения включает в себя два этапа. На первом этапе при учете закона текучести Мизеса-Шлейхера получено выражение для распределения давления во внутренней (пластической) зоне. На втором этапе получено решение во внешней (упругой) области. С учетом требования непрерывности напряжений и радиального перемещения получены конечные соотношения для нормального напряжения на границе полости и давления во всем упругопластическом диапазоне. Для определения последнего неизвестного параметра – радиуса внешней границы пластической области – получено нелинейное интегральное уравнение.

Представленные аналитические соотношения позволяют сделать ряд качественных выводов о степени расширения, а также характере и величине зоны пластических деформаций в среде. Кроме того, была проведена серия численных расчетов с заданными механическими характеристиками ряда металлических сплавов и мягких грунтов. С помощью численного анализа дана оценка сопротивления расширению и размера пластической зоны деформации для различных упругопластических материалов.

---

1. Рахматулин Х.А., Сагомоян А.Я., Алексеев Н.А. Вопросы динамики грунтов. М.: МГУ, 1964.

2. Аптуков В.Н., Мурзакаев Р.Т., Фонарев А.В. Прикладная теория проникания. М: Наука, 1992.

Научный руководитель – д-р техн. наук, проф. Аптуков В. Н.

## **Моделирование роста трещины в квазихрупком материале при малоцикловом нагружении**

Чебакова М. П.

Новосибирский государственный университет

Институт гидродинамики имени М.А. Лаврентьева, г. Новосибирск

Тематика работы актуальна для широкого круга практических задач, так как результаты анализа разрушения квазихрупких материалов применимы к прогнозированию роста трещин в различных элементах конструкций на момент исчерпания ими пластического ресурса. Анализ роста трещин при малоцикловой усталости в таких материалах позволяет предсказывать безопасные диапазоны нагрузок элементов конструкций с зародышами трещин.

В ходе работы были проведены испытания по разрушению образцов из дюралюминия и определены основные константы материала, далее был подготовлен квазихрупкий материал путем растяжением образцов до таких степеней деформации, чтобы остаточная деформация составляла 3% до разрушения.

Проведена серия испытания на малоцикловую усталость полученных квазихрупких образцов с трещиной, с максимальным усилием в цикле близким к пределу прочности. По результатам испытаний можно сделать вывод: бурный рост трещины наступает после достижения кончиком трещины пластической области. Экспериментально установлено, что полученный материал попадает в область применимости модели роста трещины, предложенной В.М. Корневым [1].

Написана программа, прогнозирующая распространение линейной трещины с помощью уравнения типа Пэриса, которое описывает подрастание трещины с увеличением номера цикла степенной зависимостью.

Экспериментально обоснована модель роста трещин в квазихрупких материалах при малоцикловом нагружении, предложенная В. М. Корневым. Найденные параметры модели хорошо коррелируют со справочными данными.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (16-08-00483, 14-08-00113)

---

1. Корнев В.М. Критические кривые разрушения и эффективный диаметр структуры хрупких и квазихрупких материалов // Физическая мезомеханика. – 2013. – Т. 16. – № 5. – С. 25-34.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Ларичкин А. Ю.

## Модифицированный алгоритм Крайгинга построения трехмерных моделей геологических сред

Шестаков В. В.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет

В наши дни наиболее эффективным методом исследования геологической среды является сейсморазведка. В комплекс методов сейсморазведки входят геофизические методы исследования скважин (ГИС), позволяющие с высокой детальностью оценить параметры среды вдоль ствола скважины, и методы наземной сейсморазведки, позволяющие охватить регулярной сеткой сейсмоакустических измерений большие площади (2D и 3D МОГТ). Для решения одной из основных задач сейсморазведки – прогноза вещественного состава геологических сред, требуется построить модели параметров, измеряемых точно ГИС. На данный момент такие модели строятся в линейном приближении только в межскважинном пространстве.

Предлагаемый алгоритм базируется на совместной интерпретации данных не только ГИС, но и МОГТ, атрибуты которого косвенно несут в себе информацию об изменении параметра ГИС. В основе алгоритма лежит уравнение Крайгинга:

$$\hat{\Phi} = \sum_{\eta=1}^N \omega_{\eta} \phi_{\eta}$$

где  $\hat{\Phi}$  – моделируемый параметр ГИС;  $N$  – количество скважин;  $\omega_{\eta}$  – весовые функции скважин;  $\phi_{\eta}$  – набор известных значений ГИС. В отличие от общепринятого подхода в геостатистическом моделировании:

- для расчета весовых функций используется не ковариограммное моделирование, а анализ корреляционных зависимостей сейсмических атрибутов и их взаимнокорреляционных связей,
- вводится ограничение на значение прогнозируемого параметра, позволяющее исключить «нереальные результаты», за счет введения дополнительных решающих правил отбора исходных данных,
- прогноз осуществляется не по принципу ближайших скважин, а по принципу независимости атрибутов МОГТ и образования из них полной группы.

Алгоритм реализован и апробирован на реальных материалах восьми месторождений Томской области. Результаты использованы при выполнении геолого-геофизических работ.

Научный руководитель – канд. техн. наук, доцент Степанов Д. Ю.

**Multiplicities of eigenvalues of the Star graph**

Khomyakova E. N.  
Novosibirsk State University

The objects of our research are spectra of Star graphs. The Star graph  $S_n$  is the Cayley graph on the symmetric group  $Sym_n$  generated by the set of transpositions  $\{(12), (13), \dots, (1n)\}$ . The spectrum of  $S_n$  contains all integers from  $-(n-1)$  to  $n-1$ . In this talk we present analytic formulas for multiplicities of eigenvalues  $\pm (n-k)$  for  $k = 2, 3, 4$  in the Star graph. The formulas are based on the representation theory of the symmetric group.

**Theorem 1.** *Let  $n \geq 2$  and for each integer  $1 \leq k \leq n$  the values  $\pm (n-k)$  are eigenvalues of the Star graph  $S_n$ . The multiplicities  $mul(n-k)$  for  $k = 2, 3, 4$  of eigenvalues of  $S_n$  are given by the following formulas:*

$$mul(n-2) = (n-1)(n-2), n \geq 3;$$

$$mul(n-3) = \frac{(n-3)(n-1)}{2}(n^2 - 4n + 2), n \geq 4;$$

$$mul(n-4) = \frac{(n-2)(n-1)}{6}(n^4 - 12n^3 + 47n^2 - 62n + 12), n \geq 4.$$

We also give a lower bound on multiplicity of eigenvalues of the Star graph.

**Theorem 2.** *In the Star graph  $S_n$  for sufficiently large  $n$  and for fixed  $t := (n-k)$  the multiplicity  $mul(t)$  of eigenvalue  $t$  is at least  $\frac{1}{2}n^{\log n(1-o(1))}$ .*

The obtained result show us that for all fixed eigenvalues  $t$  of the  $S_n$  the order of logarithm of multiplicity is the same that  $n$ !

The work has been supported by RFBS Grant 15-01-05867.

Scientific adviser – PhD Konstantinova E. V.

## Generalized threshold functions recovery algorithms in discrete dynamic systems

Prytkov N. V.

Novosibirsk State University

Discrete dynamic system is a pair  $(S, \delta)$ , where  $S$  is non-empty set, which elements are known as *states of the system*; mapping  $\delta: S \rightarrow S$  determines functionality of the system. This study considers dynamic systems of  $n$ -dimensional vectors with integer values from 0 to  $p-1$ . They function in the following way: let  $s = (x_0, \dots, x_{n-1})$  be a state of the system, then the next state can be found as  $s' = \delta(s) = (f_0(x_0, \dots, x_{n-1}), \dots, f_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1}))$ , where each  $f_i$  is a threshold integer weights function. Two subsequent states are called a *test pair*.

In order to recover the threshold function, we need to find a test pair set, which determines all weights and threshold value of this function, using the experimental data on the system functioning. Let a recovery algorithm be *conditional* if it requests some data while working. If it obtains all the necessary data before starting, then it is *unconditional*.

Several threshold function recovery algorithms were developed in this study. Their properties were investigated and the following theorems were proved:

**Theorem 1.** *To find all arbitrary threshold function significant variables no more than*

$$n + \lceil \log_2(n(p-1)) \rceil + 1$$

*test pairs are necessary if the testing is conditional.*

**Theorem 2.** *To find all threshold function significant variables of system  $(S, \delta)$  no more than*

$$n^2(p-1) - n + 1$$

*test pairs are necessary if the testing is unconditional.*

Scientific advisor – Cand. Phys. Math. Perezhogin A. L.

## Исследование матрицы весов расстояний и кластеризация множеств формул $n$ -значной логики

Авилов М. С.

Новосибирский государственный университет

Рассматривается задача кластеризации множеств формул  $n$ -значной логики  $L_n$ . Для решения этой задачи используются алгоритмы кластеризации, основывающиеся на расстоянии между формулами  $L_n$  [1]. Это расстояние задаётся следующим образом:

$$\rho(\varphi, \psi) = \frac{1}{n^{|\Sigma|}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \lambda_{kl} \cdot M\left(\frac{k}{n-1}, \frac{l}{n-1}\right)$$

В данной работе проведены кластеризации множеств формул для различных  $n$ -значных логик  $L_n$  с использованием расстояния  $\rho$  с фиксированными весами  $\lambda_{kl}$ . Исследована связь выбора наилучшей кластеризации с матрицей  $\Lambda$ , составленной из весов  $\lambda_{kl}$ , и логикой  $L_n$ . Найдены свойства матрицы весов расстояний  $\Lambda$ .

---

1. Авилов М. С. Программный комплекс вычислений расстояний, мер нетривиальности и кластеризации множеств высказываний  $n$ -значной логики. Материалы 53-ей МНСК, Математика, 2015, с. 6.

Научные руководители – д-р техн. наук Бериков В. Б.,  
канд. физ.-мат. наук, доцент Викентьев А. А..

## **Разработка математической модели работы электростанции промышленного предприятия для оптимизации режимов в условиях неполной исходной информации**

Агапитов А. Е.

Магнитогорский государственный технический университет  
им. Г. И. Носова

Информационно-вычислительные системы, позволяющие решать технико-экономические задачи и поиск компромиссных решений для энергетических объектов, называются интеллектуальными Smart Grid системами. На многих тепловых электростанциях (ТЭС) промышленных предприятий установлено устаревшее оборудование, поэтому построение интеллектуальной системы является лишь надстройкой и из-за невозможности или дороговизны установки дополнительных датчиков получаемая исходная информация со станции оказывается неполной. Сейчас наиболее актуальной задачей для Smart Grid системы электростанции является построение математической модели её технико-экономической работы с целью планирования потребления и оптимизации расхода топлива, а также оперативного принятия решения по режимам работы энергооборудования, в зависимости от решаемых локальных задач в условиях неполной исходной информации.

Предлагается подход, согласно которому, на первом этапе рассматриваются следующие задачи: минимизация расхода топлива котлами ТЭС при заданных тепловой и электрической нагрузках; максимизация электрической мощности ТЭС при фиксированной тепловой нагрузке; максимизация тепловой нагрузки одного потребителя при фиксированной тепловой нагрузке остальных потребителей и электрической нагрузке станции.

Для решения этих задач, в виде эмпирических уравнений описывается поэлементно работа оборудования в точечном приближении на основе законов сохранения массы, энергии и импульса. На основе этих уравнений составляется математическая модель по методу Бокса-Уилсона для всего объекта, где каждая технологическая связь соединяет два элемента оборудования и описывается тремя параметрами рабочего тела: расходом, давлением и удельной энтальпией. Данная модель была разработана для электростанции металлургического предприятия, на основе анализа статистических данных её работы за последние два года. Погрешность прогноза составила 4%, планируется внедрение функции «обучения» для улучшения точности функционала.

Научный руководитель – д-р. техн. наук, проф., Агапитов Е. Б.

**Магистральное решение в задаче управления лечебным воздействием**

Асланян П. А.

Бурятский государственный университет, г. Улан-Удэ

Рассматривается задача управления лечебным воздействием на основе простейшей модели иммунного процесса при вирусном заболевании [1]:

$$\dot{V} = h_1 V - h_2 F V - u V, \quad \dot{C} = h_3 F V - h_5 (C - 1), \quad 0 \leq u(t) \leq u_{\max},$$

$$\dot{F} = h_4 (C - F) - h_8 F V, \quad \dot{m} = h_6 V - h_7 m, \quad t \in \mathbf{T} = [0, t_F].$$

Здесь  $V$  – инфекционное начало (вирус),  $C$ ,  $F$  – защитные силы организма (плазматические клетки, антитела),  $0 \leq m \leq 1$  – степень поражения организма,  $h_i \geq 0$ ,  $i = \overline{1,8}$  – постоянные коэффициенты. Управление  $u$  характеризует интенсивность введения иммуноглобулинов. Начальные условия  $V(0) = V_0 > 0$ ,  $F(0) = F_0$ ,  $C(0) = C_0$ ,  $m(0) = m_0$  имитируют заражение организма в момент  $t = 0$  начальной дозой вируса  $V_0 > 0$ . Моделируется ситуация перехода острого заболевания в затяжную устойчивую хроническую форму течения, обусловленную вялым иммунным ответом на вирус:  $J = V(t_F) \rightarrow \min$ . Расчеты проводились для данных:  $V_0 = 10^{-6}$ ,  $F_0 = 1$ ,  $C_0 = 1$ ,  $m_0 = 0$ ,  $h_1 = 1$ ,  $h_2 = 0.8$ ,  $h_3 = 10^3$ ,  $h_4 = 0.17$ ,  $h_5 = 0.5$ ,  $h_6 = 10$ ,  $h_7 = 0.12$ ,  $h_8 = 8$ ,  $t_F = 100$ ,  $u_{\max} = 0.1$ . К решению задачи применялась описанная в [2] процедура преобразования модели, основанная на магистральных решениях [3]. Полученное магистральное решение принималось в качестве начального приближения и уточнялось итерационным методом. В результате было найдено приближенное глобально-оптимальное решение со значением функционала:  $I = 2.4907 \cdot 10^{-5}$  (при начальном управлении  $I = 5.6302 \cdot 10^{-5}$ ).

1. Булдаев А. С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем / А. С. Булдаев. – Улан-Удэ : Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2008. – 259 с.

2. Гурман В. И. Преобразования дифференциальных управляемых систем для поиска приближенно-оптимального управления / В. И. Гурман, И. В. Расина, И. С. Гусева // Программные системы: теория и приложения. – 2014. – Т. 5. – №4(22). – С. 123-157.

3. Гурман В. И. Магистральные решения в процедурах поиска оптимальных управлений / В. И. Гурман // Автомат. и телемех. – 2003. – №3. – С. 61-71.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Гусева И. С.

**Точный псевдополиномиальный алгоритм  
для одной задачи 2-кластеризации**

Беляева А. А.

Новосибирский государственный университет

Рассматривается следующая задача дискретной оптимизации:

**Задача 1:** Дано: множество  $Y = \{y_1, \dots, y_N\}$  точек из  $R^q$  и натуральное число  $M$ . Найти: разбиение множества  $Y$  на два непустых кластера  $C$  и  $Y \setminus C$  такое, что

$$F(C) = \frac{1}{|C|} \sum_{y \in C} \|y - \bar{y}(C)\|^2 + \frac{1}{|Y \setminus C|} \sum_{y \in Y \setminus C} \|y\|^2 \rightarrow \min,$$

где  $\bar{y}(C) = \frac{1}{|C|} \sum_{y \in C} y$  – геометрический центр (центроид) кластера  $C$ , при ограничении  $|C| = M$ .

Гипотеза о труднорешаемости этой задачи остается недоказанной. Тем не менее, в работе обоснован точный алгоритм для случая задачи с целочисленными координатами точек входного множества. Трудоемкость алгоритма есть величина  $O(qN(2MD + 1)^q)$ , где  $D$  – максимальное абсолютное значение координат точек входного множества. При фиксированной размерности  $q$  пространства алгоритм псевдополиномиален, а время его работы оценивается величиной  $O(N(MD)^q)$ .

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук Кельманов А. В.

## **Конкурентная трёхуровневая задача с равномерным ценообразованием**

Бовкун О. Р.

Новосибирский государственный университет

В статье рассматривается обобщение двухуровневой задачи с равномерным ценообразованием [1].

Сформулируем содержательную постановку данной задачи в виде игры Штакельберга для трёх игроков. На первом уровне лидер устанавливает цену на продукцию своих предприятий. На втором уровне конкурент устанавливает цену на продукцию своих предприятий, учитывая ход лидера. Рассматривается случай равномерного ценообразования – то есть на всех своих предприятиях каждый из игроков устанавливает одну цену. На третьем уровне каждый из клиентов выбирает то предприятие, на котором его суммарные затраты будут минимальны и не превышают его бюджета. Требуется определить такую цену на предприятиях лидера, при которой его доход будет максимальный.

Для построения математической модели задачи необходимо уточнить характер взаимоотношений лидера с конкурентом. В случае равных затрат клиента на предприятиях лидера и конкурента возникает 2 постановки: оптимистическая постановка – клиент подыгрывает лидеру, и пессимистическая постановка – клиент подыгрывает конкуренту.

Приводится два примера, которые показывают, что в приведённых постановках цены не могут быть непрерывными. Учитывая это свойство, для каждой постановки предложен точный алгоритм с псевдополиномиальным временем работы.

---

1. Плясунов А. В., Панин А. А., Задача ценообразования, часть 1. Точные и приближенные алгоритмы решения // Дискретный анализ и исследование операций. Сентябрь–октябрь 2012. Том 19, №5. С. 83–100.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доцент Плясунов А. В.

## Алгоритм упорядоченного предпочтения букв алфавита для построения циклов

Визнер Н. Ю.

Новосибирский государственный университет

*Алфавит* - множество символов какого-либо формального языка. *Слово* длины  $n$  - произвольная последовательность из  $n$  символов данного алфавита. Последовательность, содержащая в себе в качестве подслов, все слова длины  $n$  в точности по одному разу, называется *последовательностью де Брёйна*. Эти последовательности изображаются путями в *графах перекрытия слов* (иначе называемыми *графами де Брёйна*).

В работе были изучены известные способы конструктивного порождения последовательностей типа де Брёйна, их сравнение и применение к задачам представления генетических текстов. Описан класс алгоритмов упорядоченного предпочтения букв для порождения циклов без самопересечений в графах де Брёйна. Выбирается начальная вершина пути и затем осуществляется переход к следующей вершине согласно заранее заданной перестановке букв алфавита. Для некоторой модификации алгоритма было показано, как выбор первой вершины влияет на получающиеся в итоге циклы и их длину.

---

1. Яглом А. М. и Яглом И. М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении М., Гостехиздат, 1954 - 544 с.

2 Sawada J., Williams A., Wong D. A surprisingly simple de Bruijn sequence construction // Discrete Mathematics 339 (2016), С. 127 - 131.

3. Компо Ф., Певзнер. П. Реконструкция генома: головоломка из миллиарда кусочков. // Квант №3 (2014), С. 2 - 13.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, проф. Евдокимов А. А.

**Точный псевдополиномиальный алгоритм для задачи поиска семейства непересекающихся подмножеств**

Галашов А. Е.

Новосибирский государственный университет

Рассматривается следующая NP-трудная в сильном смысле [1] задача.

*Дано:* множество  $Y = \{y_1, \dots, y_N\}$  точек из  $R^q$  и натуральные числа  $M_j > 1, j = 1, \dots, J$ . *Найти:* непересекающиеся подмножества  $C_1, \dots, C_J$  множества  $Y$  такие, что

$$\sum_{j=1}^J \sum_{y \in C_j} \|y - \bar{y}(C_j)\|^2 \rightarrow \min,$$

где  $\bar{y}(C_j) = \frac{1}{|C_j|} \sum_{y \in C_j} y$ , при ограничениях  $|C_j| = M_j, j = 1, \dots, J$ , на мощности искоемых подмножеств.

В [2] для этой задачи был предложен 2-приближенный алгоритм с трудоёмкостью  $\mathcal{O}(N^2(N^{J+1} + q))$ , полиномиальный в случае, когда число  $J$  искоемых подмножеств фиксировано (не является частью входа).

В настоящей работе для случая задачи с целочисленными координатами входных точек предложен точный алгоритм, временная сложность которого есть величина  $\mathcal{O}(N(N^2 + q)(2MB + 1)^{qJ})$ , где  $B$  – максимальное абсолютное значение координат входных точек, а  $M$  – наименьшее общее кратное чисел  $M_1, \dots, M_J$ . При фиксированных размерности  $q$  пространства и числе  $J$  искоемых подмножеств алгоритм псевдополиномиален и имеет трудоёмкость  $\mathcal{O}(N^3(MB)^{qJ})$ .

1. Кельманов А.В., Пяткин А.В. NP-полнота некоторых задач выбора подмножества векторов // Дискретный анализ и исследование операций. 2010. Т. 17. № 5. С. 37-45.

2. Галашов А.Е., Кельманов А.В. 2-приближённый алгоритм для одной задачи поиска семейства непересекающихся подмножеств векторов // Автоматика и телемеханика. 2014. № 4. С. 5-19.

Научный руководитель работы – д-р физ.-мат. наук Кельманов А. В.

## **Задачи нечёткого моделирования сетей**

Гарбузов К.Е.

Новосибирский государственный университет

Задача оценки надежности телекоммуникационной сети по известным параметрам занимает очень важную нишу в современном проектировании. В подавляющем большинстве случаев используется вероятностный подход, который, однако, имеет некоторые ограничения. В частности, иногда объем доступных статистических данных бывает недостаточным, или же приходится полагаться на мнение экспертов, которые не готовы предоставить точную информацию. Кроме того, другие классические задачи, связанные с транспортными сетями, тоже опираются на точные значения входных параметров (пропускные способности, стоимости), что не всегда можно сопоставить реальной ситуации, если речь идёт о моделировании конкретной транспортной сети.

Другим подходом является использование нечётких чисел, которые позволяют использовать богатый инструментарий нечёткой логики при решении таких задач. Различные виды представления нечёткости дают удобные способы задания параметров модели в рамках конкретной задачи. Кроме того, такой метод позволяет ставить новые задачи, которые, вообще говоря, не имеют смысла в классическом подходе.

В данной работе проводится краткий анализ уже решенных задач и разработанных методов, а также подробнее рассматривается задача "нечёткой замены" компонентов телекоммуникационной сети на примере модели транспортной сети с потоками.

В рамках данной задачи требуется "предсказать" конфигурацию сети, для которой задаются новые нечёткие значения компонентов (пропускные способности и потоки на отдельных элементах). Поскольку новые значения представлены в виде нечётких чисел, то и вся сеть поддается "возмущению", которое необходимо исследовать.

Возможным направлением дальнейшей работы может быть разработка новых алгоритмов для решения представленной задачи, а также усложнение самой модели (например, рассмотрение гиперсетей). Кроме того, в рамках данной тематики можно рассматривать новые задачи, например, задачу определения наиболее информативных элементов сети или задачу нечёткой укладки в гиперсетях.

Научный руководитель – д-р техн. наук, доцент Родионов А. С.

**Алгоритм распознавания изображений, основанный на сочетании  
коллективного кластерного анализа и ядерных методов  
распознавания образов**

Гильмутдинов И. Х.

Новосибирский государственный университет

Одно из направлений в теории коллективного кластерного анализа основано на вычислении коассоциативной матрицы (матрицы смежности, co-association matrix), определяющей, как часто пара объектов оказывается в одном и том же кластере в разных вариантах разбиения.

В основе ядерных методов лежит замена скалярного произведения ядром (kernel function). Этот подход называется kernel trick.

В данной работе предлагается алгоритм распознавания образов, основанный на использовании усредненной коассоциативной матрицы в качестве ядра. Доказывается выполнение условий теоремы Мерсера для усредненной коассоциативной матрицы, полученной в результате применения методов коллективного кластерного анализа. Проведены эксперименты с применением данного алгоритма.

Научный руководитель – д-р техн. наук, доцент Бериков В. Б.

## **Локализация оптимума длины расписания в задаче передачи данных в компьютерной сети**

Гордеев А. С.

Новосибирский государственный университет

Рассматривается задача оптимизации передачи данных в компьютерной сети, состоящей из произвольным образом соединенных серверов. Для каждого пакета данных указан маршрут его передачи, в процессе которой используются все серверы маршрута. Считается, что сервер одновременно может обрабатывать только один пакет данных. Множество пакетов и их размеры известны заранее. Скорость передачи постоянная, поэтому для каждого пакета известно время передачи, пропорциональное его размеру. Прерывания в процессе передачи пакета не разрешены. Требуется найти порядок передачи пакетов, при котором все данные будут переданы за минимальное время.

В терминах теории расписаний задача формулируется таким образом: каждому серверу соответствует машина, множество машин упорядочено. Каждому пакету сопоставлена работа, которая должна быть выполнена одновременно на заданном множестве последовательных машин. Длительность каждой работы равна времени передачи соответствующего пакета. Требуется найти расписание работ минимальной длины.

Типом работы назовем множество всех машин, на которых данная работа должна выполняться. Нижняя оценка на длину расписания конструируется на основе графа конфликтов над типами работ, в котором ребра существуют только между типами работ, пересечение которых непусто.

В данной работе реализован алгоритм, позволяющий для любого примера задачи получить точную верхнюю оценку на оптимум длины расписания в терминах нижней оценки. Также с помощью алгоритма выделены полиномиально разрешимые случаи.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, доцент Кононов А. В.

## Существование гамильтоновых циклов типа Закса и Вильямса в Star графе

Долгов П. И.

Новосибирский государственный университет

В работе исследуются графы Кэли на симметрической группе  $Sym_n$  с порождающим множеством транспозиций  $t_i = (1, i)$ ,  $2 \leq i \leq n$ . Такие графы называют Star графами и обозначают  $S_n$ ,  $n \geq 2$ . Известно, что граф  $S_n$  является связным двудольным  $(n-1)$ -регулярным порядка  $n!$  диаметра  $\frac{3n-3}{2}$ .

Граф  $S_n$  является рёберно-транзитивным, но не является дистанционно регулярным и, следовательно, не является дистанционно-транзитивным. Особый интерес вызывает вопрос гамильтоновости Star графа  $S_n$ .

*Циклом* в графе будем называть связный 2-регулярный подграф. Цикл называется *гамильтоновым*, если он содержит каждую вершину в графе ровно один раз. В статье Е. В. Константиновой и А. Н. Медведева [1] дается характеристика 6-циклов и 8-циклов в Pancake графе и определяются гамильтоновы циклы Закса и Вильямса [2].

В данной работе рассматриваются гамильтоновы циклы Закса и Вильямса для графа  $S_n$  и доказываются следующие утверждения.

**Теорема 1.** В графе  $S_n$ ,  $n \geq 3$ , всегда существует разбиение на независимые 6-циклы, образующие гамильтонов цикл Закса.

**Теорема 2.** В Star графе  $S_n$ ,  $n \geq 4$ , не существует разбиения на независимые 8-циклы, образующие гамильтонов цикл Вильямса.

---

1. Konstantinova E. V., Medvedev A. N., Independent even cycles in the Pancake graph and greedy Prefix-reversal Gray codes, Graphs and Combinatorics, Springer Japan (2016), DOI 10.1007/s00373-016-1679-x.

2. Williams A., The greedy gray code algorithm, LNCS, 8037, 525–536 (2013).

Научный руководитель – канд. техн. наук, доцент Константинова Е. В.

## **Декомпозиционный алгоритм для задачи размещения предприятий с ограничениями на объемы поставок**

Кальчевская П. И.

Омский государственный университет им Ф.М. Достоевского

Рассматривается задача размещения предприятий с ограниченными объемами производств и поставок [1]. В ней даны пункты возможного размещения предприятий и множество потребителей (клиенты). Известны объемы производства и ограничения на пропускные способности. Заданы спрос клиентов, прибыль, получаемая при поставке единицы продукта от предприятий к потребителям, и штрафы за открытие. Необходимо разместить предприятия и прикрепить к ним клиентов так, чтобы удовлетворить спрос при соблюдении всех условий и получить наибольшую прибыль с учетом штрафов. Отличительными особенностями этой задачи являются наличие ограничений на объемы поставок и максимизация критерия поиска оптимального решения.

В модели содержатся переменные открытия предприятий и переменные перевозок продукции клиентам. Благодаря этому исходная задача может быть разделена на две подзадачи. Представляется интересным применение к ней метода декомпозиции Бендерса, который хорошо зарекомендовал себя для задач производственно-транспортного типа [2]. На каждой итерации допустимая область задачи сужается путем добавления линейных ограничений, которые отсекают неперспективные целочисленные точки. В работе декомпозиционный метод комбинируется с другими подходами (венгерский алгоритм, метод потенциалов). Проводится анализ экспериментальных данных с точки зрения мощности системы отсечений, времени нахождения оптимального решения и др.

---

1. Вознюк И.П. Аппроксимационный алгоритм для задачи размещения на максимум с ограниченными объемами производств и поставок // Известия вузов. Математика. 2000, № 12, С. 15-20.

2. Колоколов А.А., Леванова Т.В. Декомпозиция Бендерса для задач размещения предприятий: учебно-методическое пособие. Омск: ОмГУ, 2009.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доцент Леванова Т. В.

## **Точный алгоритм решения задачи упаковки в контейнеры с ограничениями на цвета предметов**

Кондаков А. А.

Новосибирский государственный университет

Рассматривается задача упаковки в контейнеры с дополнительными ограничениями на максимально допустимое количество классов («цветов») в контейнере. На вход подаётся множество предметов, для каждого предмета задано множество цветов. Требуется найти разбиение предметов на минимальное число подмножеств (упаковку в контейнеры), такое, что суммарное число цветов, используемых в контейнере, не превосходит заданного порога.

Модель появилась в связи с задачей печати упаковок для молочной продукции, также нашла свое применение при печати книг. В случае одного множества цветов для каждого предмета и ограничения на вместимость контейнера задача впервые была рассмотрена в [1]. Там же был предложен точный алгоритм для решения этой задачи.

Разработан и реализован точный алгоритм, основанный на схеме ветвей и границ. Для нахождения нижних оценок используется метод генерации столбцов. В литературе такой подход получил название Branch-And-Price. Предложены комбинаторные нижние оценки, являющиеся развитием оценок из [1]. Проведены численные эксперименты.

---

1. Peeters M., Degraeve Z., The co-printing problem: A packing problem with a color constraint // Operations Research. 2004. Vol. 52, N 4. P. 623-638.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Кочетов Ю. А.

## О метрических свойствах самодуальных булевых бент-функций

Куценко А. В.

Новосибирский государственный университет

Скалярным произведением  $\langle x, y \rangle$  двух векторов длины  $n$  называется число  $x_1y_1 \oplus x_2y_2 \oplus \dots \oplus x_ny_n$ , где операция  $\oplus$  есть сложение по модулю 2. Носителем булевой функции  $f$  от  $n$  переменных называется множество  $\text{supp}(f) = \{x \in \mathbb{Z}_2^n : f(x) = 1\}$ .

Весом Хэмминга булевой функции  $f$  называется вес её вектора значений  $wt(f) = |\text{supp}(f)|$ . Преобразование Уолша-Адамара булевой функции  $f$  от  $n$  переменных называется целочисленная функция

$$W_f(y) = \sum_{x \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{\langle x, y \rangle} f(x).$$

Согласно одному из определений бент-функций, булева функция  $f$  от чётного числа переменных  $n$  называется бент-функцией, если  $|W_f(y)| = 2^{n/2}$ . Бент-функция  $\tilde{f}$  называется дуальной к бент-функции  $f$ , если

$$W_{\tilde{f}}(x) = (-1)^{f(x)} 2^{n/2}.$$

Бент-функция называется самодуальной, если  $\tilde{f} = f$ .

Известна следующая конструкция бент-функций. Пусть  $h$  – любая перестановка на множестве двоичных векторов длины  $n/2$ , пусть  $g$  – произвольная булева функция от  $n/2$  переменных. Тогда функция  $f(x', x'') = \langle x', h(x'') \rangle \oplus g(x'')$  является бент-функцией от  $n$  переменных (Конструкция Мэйорана-МакФарланда, 1973.). В работе [1] были найдены необходимые и достаточные условия самодуальности бент-функции, построенной с помощью конструкции Мэйорана-МакФарланда при условии  $h \in \text{GL}(n/2, 2)$ .

**Теорема 1.** Булева бент-функция  $f$  от чётного числа переменных  $n$  является самодуальной тогда и только тогда, когда при каждом фиксированном  $y$  вес Хэмминга булевой функции от  $n$  переменных  $F_y(x) = f(x) \oplus f(y) \oplus \langle x, y \rangle$  равен  $2^{n-1} - 2^{n/2-1}$ .

**Гипотеза 1.** Пусть  $f_1, f_2$  – различные бент-функции от чётного числа переменных  $n \geq 4$ , построенные с помощью конструкции Мэйорана-МакФарланда при условии  $h_1, h_2 \in \text{GL}(n/2, 2)$ . Если  $f_1, f_2$  – самодуальные бент-функции, то  $wt(f_1 \oplus f_2) \geq 2^{n-2}$ .

Гипотеза проверена при  $n=4, 6, 8, 10$ .

---

1. Carlet C., Danielson L. E., Parker M. G., Sole P. Self dual bent functions. // Int. J. Inform. Coding Theory. 1, 384-399 (2010).

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Токарева Н. Н.

## О графах полного разнообразия шаров

Куценогая Е. П.

Новосибирский государственный университет

В работе обыкновенный связный неориентированный конечный граф  $G=(V,E)$  с множеством вершин  $V$  и множеством ребер  $E$  рассматривается как дискретное метрическое пространство с метрикой пути, определенной на множестве его вершин.

В случае дискретных метрических пространств шары заданного радиуса с центрами в различных точках не всегда различны, а могут совпадать. Поэтому любой связный неориентированный граф характеризуется разнообразием входящих в него шаров. Вектор  $\tau(G)=(\tau_0, \dots, \tau_d)$ ,  $i$  – я компонента которого  $\tau_i$  равна числу различных шаров радиуса  $i$  в графе, называется *вектором разнообразия шаров* графа  $G$ , где  $d=d(G)$  – диаметр графа  $G$ . Впервые такое определение было введено в работе [1].

Среди всех разнообразий можно выделить своего рода совершенные, когда шары с центрами во всех вершинах графа различны для всех радиусов. Будем говорить, что граф  $G=(V,E)$  обладает свойством  $t$  – разнообразия шаров, если  $\tau_i=|V|$  для всех  $0 \leq i \leq t$ . Если  $t=d-1$ , то граф  $G=(V,E)$  назовём графом *полного (максимального) разнообразия шаров* [2].

**Теорема 1.** Если граф  $G=(V,E)$  диаметра  $d(G) \geq 3$  является графом полного разнообразия шаров, то выполнен один из двух следующих случаев:

1. Ни одно из ребер графа  $G$  не является мостом.
2. В  $G$  существует ровно один мост  $e \in E$  такой, что один из его концов является висячей вершиной, и ни одно из ребер  $E \setminus e$  не является мостом  $G$ .

**Теорема 2.** Среди всех обыкновенных связных графов порядка  $n$  диаметра  $d$  существует граф с полным разнообразием шаров тогда и только тогда, когда  $n \geq 2d > 0$  или  $n=d+1=3$ .

---

1. Федоряева Т. И. Разнообразие шаров в метрических пространствах деревьев // Дискретный анализ и исследование операций. 2005. Т. 12. №3. С. 74-84.

2. Евдокимов А. А. Локально изометрические вложения графов и свойство продолжения метрики // Сибирский журнал исследования операций. 1994. Т. 1. №1. С. 5-12.

Научные руководители – канд. физ.-мат. наук, проф. Евдокимов А. А.,  
канд. физ.-мат. наук, доцент Федоряева Т. И.

## Генетический алгоритм для задачи конкурента о размещении вышек сотовой связи

Легких И. С.

Новосибирский государственный университет

Рассматривается задача размещения вышек сотовой связи двумя участниками рынка: лидером и конкурентом. Предполагается, что клиенты в совокупности располагают бюджетом, который, в конечном счёте, некоторым образом будет полностью распределён между лидером и конкурентом. Прибыль каждого оператора составляет захваченная часть бюджета за вычетом платы на поддержание работоспособности вышек. Также учитывается арендная плата, отдаваемая конкурентом лидеру, установившему вышку первым, при совместном её использовании. Клиенты выбирают оператора, основываясь на данных о среднем качестве связи, предоставляемой операторами. Эта задача представляет интерес ввиду порождаемой ей неклассической модели захвата клиента: важно не размещение ближайшего предприятия, а «суперпозиция» всех установленных вышек. Так, большее количество предприятий не гарантированно приносит больший доход, поскольку вышки создают некоторые помехи друг другу.

Целевая функция описанной задачи нелинейна, поэтому не удаётся воспользоваться стандартными алгоритмами решения задач целочисленного линейного программирования. Поэтому реализован эвристический *генетический алгоритм* [1] для поиска приближённых решений хорошего качества. Алгоритм заключается в выборе начальной популяции из булевых векторов решений и последующего процесса эволюции. На каждом шаге эволюции с помощью оператора *селекции* выбираются два решения – *родители*. По этим решениям оператор *скрещивания* строит новое решение, которое затем подвергается небольшим случайным модификациям – мутациям. Затем полученное решение добавляется в популяцию, а решение с наименьшим значением целевой функции из неё удаляется.

Обсуждается результат работы генетического алгоритма для задачи конкурента в вышеизложенной постановке в сравнении с решениями, предлагаемыми стандартными пакетами.

---

1. Holland J. H. Adaptation in Natural and Artificial Systems. — Ann Arbor: University of Michigan Press, 1975.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Давыдов И. А.

**Двухмашинная задача open shop с маршрутизацией на треугольнике**

Льготина Е. В.

Новосибирский государственный университет

Рассматривается задача open shop с маршрутизацией, которая является обобщением двух классических задач дискретной оптимизации: задачи коммивояжера и задачи open shop теории расписаний. В этой постановке машины перемещаются по вершинам транспортной сети, выполняя операции расположенных в них работ. Требуется составить кратчайшее расписание выполнения всех работ и возвращения машин в исходную вершину (базу).

В [1] рассматривается простейшая постановка такой задачи, когда число машин равно двум, а транспортная сеть является двухвершинной. Задача NP-трудна уже в такой постановке. В [1] найден точный интервал локализации оптимума этой задачи относительно нижней оценки оптимума  $R' = \max\{l_{\max} + 2\tau, d_{\max}^1, d_{\max}^2 + 2\tau\}$ , где  $l_{\max}$  – максимальная нагрузка машин,  $d_{\max}^k$  – наибольшая длина работы в вершине  $k$ ,  $\tau$  – время перемещения между вершинами. Доказано, что оптимум не превышает  $\frac{6}{5} R'$ .

В [2] рассмотрено обобщение этой постановки: двухмашинная задача с маршрутизацией на звезде. Доказано, что оптимум этой задачи также не превышает  $\frac{6}{5} R'$ .

В данной задаче рассматривается другое обобщение, в котором транспортная сеть представляет собой треугольник. Доказано, что и в этом случае оптимум принадлежит интервалу  $[R', \frac{6}{5} R']$ .

---

I. Averbakh, O. Berman, and I. Chernykh. A 6/5-approximation algorithm for the two-machine routing open shop problem on a 2-node network // *European Journal of Operational Research* 2005, 166(1), pp. 3-24

2. Льготина Е. В., Черных И. Д. Двухмашинная задача open shop с маршрутизацией на звезде // *Материалы VI Международной конференции «Проблемы оптимизации и экономические приложения»*, Омск, 28 июня – 4 июля 2015, с. 126

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Черных И. Д.

## Спектры кодов Грея в 7-кубе

Малых А. Е.

Новосибирский государственный университет

Булевым  $n$ -кубом  $GQ_n$  называется граф, вершинами которого являются двоичные слова длины  $n$  и пара вершин соединена ребром, если соответствующие слова различаются ровно в одной позиции, номер этой позиции определяет направление соответствующего ребра. Гамильтоновым циклом в графе называется цикл, проходящий через все вершины графа по одному разу. Гамильтоновы циклы в  $GQ_n$  (коды Грея) имеют важное прикладное значение, поэтому их свойства активно изучаются. Одним из таких свойств является спектр кода Грея. Спектром кода Грея в  $GQ_n$  называется набор  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , где  $a_i$  - число рёбер  $i$ -го направления в коде Грея,  $a_i \leq a_j$  при  $i \leq j$ .

Известны необходимые условия того, что набор  $a$  является спектром кода Грея в  $GQ_n$  [1]:

- а)  $a_i$  - неотрицательное чётное для любого  $i = 1, \dots, n$ ;
- б)  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2^n$ ;
- в)  $a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq 2^k$  для  $1 \leq k \leq n$ .

В [1] была приведена нерешённая задача: требовалось выяснить, являются ли необходимые условия на спектр гамильтонова цикла в  $GQ_n$  достаточными для существования кода Грея с таким спектром. В [2] предложено асимптотическое решение данной задачи, однако для небольших размерностей  $n$  задача остаётся открытой.

Для размерностей, не превосходящих 6 было предложено решение при помощи полного перебора и SAT-решателей [3]. Решить аналогичным образом задачу для размерности 7 не представляется возможным ввиду больших требований к вычислительным ресурсам.

Целью данной работы является решение задачи для размерности 7 за счёт использования различных конструкций гамильтоновых циклов в  $GQ_n$ . В рамках работы было покрыто более 99% спектров при помощи торической и индуктивной конструкций, конструкции Рамраса и конструкции Потапова.

- 
1. Knuth D. E. The art of computer programming, Volume 4. Addison-Wesley, 2004
  2. Потапов В. Н., Построение гамильтоновых циклов с заданным спектром направлений рёбер в булевом  $n$ -мерном кубе, Дискретн. анализ и исслед. опер., 2012, том 19, номер 2, 75–83
  3. Chebiryak Y. and Kroening D. Towards a Classification of Hamiltonian Cycles in the 6-Cube, J.Satisfiability, Boolean Mod. and Comp., 4 (2008) 57–74

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Пережогин А. Л.

## О метрических дополнениях линейных подпространств булева куба

Облаухов А. К.

Новосибирский государственный университет

В работе рассматривается понятие *метрического дополнения* подмножеств булева куба – множества, максимально удалённого в метрике Хэмминга от данного – и изучаются его свойства.

Задача исследования метрического дополнения множества возникает на пути исследования *бент-функций*, множество которых является метрическим дополнением множества аффинных функций от чётного числа переменных. Бент-функции часто используются в криптографии в силу высокой нелинейности.

В книге [1] также поставлена задача исследования *метрически регулярных* множеств – таких, что двойное взятие метрического дополнения возвращает в первоначальное множество.

В работе получен общий вид метрического дополнения линейного подпространства, оценки на его удалённость от подпространства.

**Лемма 1.** Метрическое дополнение линейного подпространства  $L$  булева куба является объединением сдвигов подпространства, то есть множеств вида

$$\{a \oplus x | x \in L\}, a \in F_2^n.$$

**Теорема 1.** Пусть  $L$  – линейное подпространство размерности  $k$  булева куба размерности  $n$ . Тогда метрическое дополнение  $L$  удалено от него на расстояние, не превосходящее  $n-k$ , и эта оценка достижима.

Оценка достигается, например, на гранях. Получено также точное описание метрического дополнения для подпространств, базис Гаусса-Жордана которых удовлетворяет одному из следующих свойств:

1. Веса Хэмминга векторов базиса не превосходят двух.
2. Веса Хэмминга векторов базиса не превосходят трёх, а все векторы базиса с весом три имеют попарно пересекающиеся носители.

Также проведено исследование метрических свойств полностью регулярных кодов. Код  $C$  называется *полностью регулярным*, если для любого вектора  $x$ , находящегося на некотором расстоянии  $k$  от  $C$ , число векторов, находящихся на расстоянии  $k-1$  и  $k+1$  от  $C$  и расстоянии  $l$  от  $x$  зависит только от  $k$ .

**Теорема 2.** Пусть  $C$  – полностью регулярный код. Тогда  $C$  является метрически регулярным множеством.

---

1. Tokareva N. Bent functions: results and applications to cryptography. – Academic Press, 2015.

## Сравнительный анализ регулярных покрытий с использованием одного или двух типов секторов

Осотова Л. А.

Новосибирский государственный университет

*Покрытием* плоской области называется такая совокупность фигур, что каждая точка области принадлежит хотя бы одной фигуре. *Плотность* покрытия – это отношение суммы площадей фигур, участвующих в покрытии, к площади покрываемой области. Во многих приложениях требуется найти наименее плотное покрытие.

В *регулярных* покрытиях плоскость разбивается на правильные  $n$ -угольники (*плитки*) и все плитки покрываются одинаково. Поэтому для оценки плотности регулярного покрытия, достаточно рассмотреть покрытие одной плитки. Плотность регулярного покрытия зависит от формы плитки (треугольник, квадрат или шестиугольник), а также от типа и числа фигур, участвующих в покрытии одной плитки. В [1] введена классификация регулярных покрытий, согласно которой в каждом покрытии из класса  $COV_n(p, q)$  область разбивается на правильные  $n$ -угольники (плитки) и каждая плитка покрывается  $p$  фигурами  $q$  различных типов.

В [2] предложено регулярное покрытие плоскости с использованием треугольной плитки и двух типов кругов принадлежащее классу  $COV_3(p, 2)$  плотность которого стремится к 1.0189 при  $p$  стремящемся к бесконечности. Вдохновившись этим покрытием, мы построили покрытие с использованием двух типов секторов и нашли для него функцию плотности, зависящую от числа секторов участвующих в покрытии одной плитки. Уже при  $p \geq 27$  плотность предложенного покрытия оказалась меньше 1.0189. Далее мы сравнили несколько покрытий с использованием одного и двух типов секторов, в результате чего нашли лучшую модель покрытия для произвольного числа секторов  $p$  участвующих в покрытии одной плитки.

---

1. Астраков С. Н., Ерзин А. И., Залобовский В. В. Сенсорные сети и покрытие плоскости кругами // Дискретный анализ и исследование операций. 2009. Т. 6, №3. С. 3-19.

2. Fejes Tóth G. Covering the plane with two kinds of circles // Discrete & Computational Geometry. 1995. No. 13. P. 445-457.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Ерзин А. И.

## **Локальный поиск с запретами для стохастической задачи размещения с квантильным критерием**

Очкасов А. Е.

Новосибирский государственный университет

Рассматривается новый вариант стохастической задачи размещения предприятий, где обеспечивается гарантированный с определенной вероятностью результат, заключающийся в максимизации прибыли от обслуживании клиентов с вычетом необходимых затрат на создание новых предприятий. Даны два множества: одно из них множество клиентов, другое множество мест, где можно расположить предприятия. Доход, получаемый любым предприятием от потребителя, является случайной величиной с различной реализацией для каждого клиента. Задача формулируется следующим образом: зная, где уже ранее построены предприятия конкурирующей фирмы, определить оптимальное расположение новых предприятий, так чтобы с заданной вероятностью гарантировать максимально возможную прибыль.

Эта задача является NP трудной. Для ее решения применяется алгоритм, в основу которого положен метод локального поиска с запретами. Разработана программа на языке C++, реализующая данный алгоритм. Приводится сравнение разработанного алгоритма с коммерческим программным обеспечением GAMS.

- 
1. Aarts E. & Lenstra J.K. Local search in combinatorial optimization. 1997. John Wiley & Sons Ltd.
  2. Иванов С.В., Морозов М.В. Стохастическая задача конкурентного размещения предприятий с квантильным критерием. 2015.

Научный руководитель: д-р физ.-мат. наук, проф. Кочетов Ю.А.

## Гибридный алгоритм решения задачи Job Shop

Раздобреева А. Г.

Новосибирский государственный технический университет

Задача оптимизации работы многостадийной последовательной обслуживающей системы, известная в литературе как Job Shop Scheduling Problem (JSSP), несмотря на свою хорошую изученность, продолжает оставаться одной из наиболее актуальных задач теории расписаний в календарном производственном планировании. Актуальность разработки и исследования вычислительно эффективных полиномиальных приближенных алгоритмов прежде всего обусловлена NP-трудностью задач данного класса, а также большими размерностями реализаций для практических нужд.

В данной работе рассмотрен один из гибридных методов решения задачи  $Jm/C_{max}$  синтеза расписаний последовательных многостадийных обслуживающих систем. Метод опирается на принцип декомпозиции, подразумевающий разбиение задачи на подзадачи меньшей размерности, с использованием эвристических правил, сужающих область поиска и позволяющих отсеивать заведомо бесперспективные варианты. При решении подзадач используется вычислительная схема метода ветвей и границ.

Основным результатом является разработка программного комплекса, включающего в себя настоящий алгоритм, а также ряд других методов решения задачи. Данный комплекс позволил провести экспериментальный и сравнительный анализ полученных результатов работы алгоритма на тестах различной размерности. Комплекс предполагает интерактивное взаимодействие с пользователем, что позволяет, изменяя параметры алгоритма в зависимости от полученного ранее решения, добиваться приемлемых результатов, сохраняя баланс между степенью быстроедействия и приближением к оптимальному решению.

Научный руководитель: д-р техн. наук, доцент Мезенцев Ю. А.

**Локальный поиск с чередующимися окрестностями для задачи упаковки в контейнеры с ограничениями на цвета предметов**

Сергеева Л. А.

Новосибирский государственный университет

Рассматривается новый вариант задачи упаковки в контейнеры, в которой каждый предмет имеет заданное множество цветов. Каждый контейнер (цветной принтер) может поддерживать ограниченное количество цветов. Требуется найти минимальное количество контейнеров для упаковки (печати) всех предметов.

Известно, что эта задача является NP-трудной [1]. Для её решения разработан метод локального поиска с чередующимися окрестностями [2]. Для кодировки решений используются последовательности предметов. В качестве декодирующей процедуры применяется алгоритм *Первый подходящий*. Для заданного решения соседние решения получаются следующим образом: перемещаем предмет в новую позицию; выбираем два предмета в последовательности и меняем их местами; выбираем подпоследовательность предметов и меняем их порядок на противоположный.

Разработанный алгоритм запрограммирован на языке C++. Приводится сравнение результатов работы алгоритма с результатами, полученными коммерческим программным обеспечением GAMS.

---

1. Peeters M., Degraeve Z. The co-printing problem: a packing problem with a color constraint // Operations Research. 2004. Vol. 52, N 4. P. 623–638.

2. Кочетов Ю., Младенович Н., Хансен П. Локальный поиск с чередующимися окрестностями // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. 2003. Т. 10. № 1. С.11–43.

Научный руководитель: д-р физ.-мат. наук, проф. Кочетов Ю. А.

## **Фреймворк глобальной оптимизации с параллелепипедными ограничениями**

Сороковиков П. С., Жданова Е. М.

Бурятский государственный университет, г. Улан-Удэ

Глобальная оптимизация с параллелепипедными ограничениями является одной из наиболее общих и востребованных областей математики в свете решения актуальных прикладных задач анализа данных и машинного обучения. В силу актуальности тематики и увеличения производительности вычислительной техники растет интерес исследователей – разрабатывается достаточно много новых подходов, методов, алгоритмов. И одной из актуальных проблем являются вопросы эффективной реализации и сравнительного анализа разрабатываемого алгоритмического обеспечения.

Целью данной работы является создание инструментария, обеспечивающего для разработчиков алгоритмов возможности проведения быстрого сравнительного анализа с существующими методами на ряде представительных задач.

Для достижения указанной цели поставлены следующие задачи:

1. разработка программного фреймворка с постоянно пополняемой библиотекой методов и набором методических указаний по реализации новых алгоритмов;
2. создание бенчмарка – пополняемого банка, включающего задачи, классифицированные по различным характеристикам (размерность, характер целевой функции и т.п.) и указания по тестированию методов;
3. создание банка результатов тестирования библиотечных алгоритмов, включая наборы стартовых точек.

В результате работы был разработан программный фреймворк [1], позволяющий добавить метод глобальной оптимизации, добавить задачу и любой набор добавленных методов протестировать на любом наборе добавленных задач. На текущий момент произведено начальное формирование библиотек алгоритмов и бенчмарка, продолжается их наполнение.

---

1. [https://github.com/Pavel2301/global\\_optimization](https://github.com/Pavel2301/global_optimization)

Научный руководитель – канд. техн. наук Хандаров Ф. В.

**Имитационное моделирование потока пассажиров в системе аэропорт**

Ткачёв К. В.

Новосибирский государственный университет

В работе рассматривается имитационная модель потока пассажиров в крупном аэропорте. Модель предназначена для тестирования различных алгоритмов управления массиванным потоком событий в имитационной модели и анализа её устойчивости по отношению к потере некоторых событий при сбоях в работе оборудования (отказе ядер либо групп ядер) или системы управления процессами (зависание процесса).

Модель включает в себя агентов-генераторов (отвечают за интенсивный поток пассажиров), агентов-обработчики (обрабатывают поступившего пассажира), агентов-распределителей (распределяют пассажиров по самолетам) и агентов-наблюдателей (контролируют работу всех типов агентов). Модель характеризуется интенсивным потоком пассажиров, наличием различными видами сбоев и некоторым количеством «важных» персон.

Результаты экспериментов показали, что при использовании различных алгоритмов управления можно существенно сократить время выполнения модели и количество затрачиваемой памяти, увеличить отзывчивость модели для управляющих событий. Хотя модель предназначена для отладки алгоритмов управления процессом имитации, она достаточно правдоподобна и может использоваться для принятия решений в работе реального аэропорта.

Научный руководитель – д-р техн. наук Родионов А. С.

**Новые расстояния и меры информативности  
для формул логики Лукасевича для автоматической кластеризации  
множеств высказываний**

Фефелова В. В.

Новосибирский государственный университет

В настоящее время возрос интерес к анализу многозначной экспертной информации. Данное направление развивалось в работах Г. С. Лбова, Н. Г. Загоруйко, научного руководителя и его учеников. В данной работе рассматриваются логические высказывания из базы знаний или экспертов, представленные в виде логических формул  $n$ -значной логики Лукасевича. Для кластеризации множества логических высказываний надо ввести расстояние между высказываниями, а также меру достоверности.

Целью данной работы являлось введение новых расстояний и мер достоверности для логики Лукасевича.

Основные результаты данной работы:

1) С привлечением теории моделей были введены новые расстояния между формулами, включающие известное. Доказаны свойства метрик для расстояний и меры информативности (учитывающие многозначность, схожие по свойствам с предыдущим расстоянием для логик Лукасевича). Полученные величины можно применять в анализе баз знаний, их кластеризации, а также при построении логических решающих функций в распознавании.

2) Полученные величины применяются в алгоритме кластеризации. Рассмотрено множество примеров для различных  $n$ , проведены кластеризации и показаны их различия. По введенному индексу качества кластеризации из множества примеров была выбрана наилучшая кластеризация, построены коллективные расстояния и по ним новая кластеризация.

3) Для автоматической кластеризации написано рабочее java-приложение.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доцент Викентьев А. А.

## **Верхние и нижние оценки для минимаксной задачи конкурентного размещения предприятий**

Чулков В. Ю.

Новосибирский государственный университет

Рассматривается математическая модель конкурентной борьбы производителей продукции. Сначала Лидер принимает решение о том, в каких местах разместить свои предприятия. Затем Конкурент, зная решение лидера, размещает свои предприятия. Предприятия могут быть размещены непосредственно в точках концентрации спроса и иметь различный уровень привлекательности для каждого клиента. Этот уровень прямо пропорционален количеству денег, вложенных в предприятие, и обратно пропорционален расстоянию до клиента. Каждый клиент удовлетворяет спрос в одном предприятии, наиболее привлекательном для него. В рамках ограниченного бюджета требуется найти такое решение Лидера, чтобы максимизировать его долю рынка.

Эта задача может быть представлена в виде задачи двухуровневого программирования. Основываясь на данном представлении, разработан приближенный метод локального поиска с чередующимися окрестностями. На каждой итерации метода используются различные окрестности, по-разному открывающие и закрывающие предприятия и распределяющие бюджет между ними. Для выхода из локального оптимума применяются расширенные окрестности, в которых закрывается большее число предприятий. При заданном решении Лидера его доля рынка определяется из точного решения задачи Конкурента.

Верхние оценки строятся путем ограничения стратегий, доступных Конкуренту. Точное решение задачи Лидера при уже известном наборе ответных решений Конкурента дает верхнюю оценку доли рынка Лидера. Добавляя стратегии Конкурента, можно приблизить верхнюю оценку к оптимуму. Имея верхние и нижние оценки, при помощи метода ветвей и границ можно точно решить задачу. Приводятся результаты численных экспериментов.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Кочетов Ю. А.

## **Генетический алгоритм для задачи упаковки в контейнеры с ограничениями на цвета предметов**

Чупрасова М. А.

Новосибирский государственный университет

Рассматривается новый вариант задачи упаковки в контейнеры, где каждый предмет имеет заданное множество цветов. Контейнеры (цветные принтеры) поддерживают ограниченное количество цветов. Требуется найти минимальное число контейнеров, необходимое для упаковки (печати) всех предметов.

Известно, что эта задача является NP-трудной [1]. Для ее решения разработан генетический алгоритм, популяция которого состоит из недопустимых решений задачи: для некоторых контейнеров нарушается ограничение на число цветов. Работа алгоритма состоит из нескольких итераций. На каждой итерации удаляется один из контейнеров и делается попытка найти допустимое решение. Для кодировки решений используются наборы предметов, лежащих в каждом контейнере. В качестве процедуры скрещивания используется следующий алгоритм: из двух решений выбираются хорошо упакованные контейнеры, а оставшиеся предметы раскладываются произвольным образом.

Разработанный алгоритм запрограммирован на языке C++. Приводится сравнение результатов работы алгоритма с результатами, полученными коммерческим программным обеспечением GAMS, и с результатами алгоритма локального поиска с чередующимися окрестностями.

---

1. Peeters M., Degraeve Z. The co-printing problem: a packing problem with a color constraint // *Operations Research*. 2004. Vol. 52, N 4. P. 623–638.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Кочетов Ю. А.

**К задаче простого преследования на плоскости**

Щелчков К. А.

Удмуртский государственный университет, г. Ижевск

В пространстве  $R^2$  рассматривается дифференциальная игра  $n+1$  лиц:  $n$  преследователей  $P_1, \dots, P_n$  и убегающих  $E$  с законами движения

$$\dot{x}_i = u_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad \dot{y} = v, \quad y(0) = y^0, \quad u_i, v \in U,$$

где  $U$  – выпуклый компакт с непустой внутренностью. Обозначим

$$z_i^0 = x_i^0 - y^0, z^0 = \{x_1^0, \dots, x_n^0, y^0\}.$$

Считаем, что

$$z_i^0 \neq 0 \text{ для всех } i = 1, \dots, n.$$

Условие поимки:

$$x_i(\tau) = y(\tau) \text{ при некоторых } i, \tau.$$

**Теорема 1.** Пусть  $U$  – треугольник с вершинами в точках  $A, B, C$ , и  $n=3$ . Для того, что бы в задаче произошла поимка необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$z_1^0 = -\gamma_1(\alpha_1(B-A) + (1-\alpha_1)(C-A));$$

$$z_2^0 = -\gamma_2(\alpha_2(A-B) + (1-\alpha_2)(C-B));$$

$$z_3^0 = -\gamma_3(\alpha_3(A-C) + (1-\alpha_3)(B-C));$$

где  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  – любые положительные числа,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  принадлежат отрезку  $[0, 1]$ .

**Теорема 2.** Для существования начальных положений

$$z_1^0 \text{ и } z_2^0,$$

из которых в данной игре происходит поимка, необходимо и достаточно существование не равных между собой точек  $a_1, a_2, b_1, b_2$  принадлежащих  $\partial U$ , которые не находятся на одной прямой, и таких, что векторы  $a_1 - b_1$  и  $a_2 - b_2$  коллинеарны,

$$\gamma a_1 + (1-\gamma)b_1 \in \partial U, \quad \gamma a_2 + (1-\gamma)b_2 \in \partial U,$$

где  $\gamma$  принадлежит отрезку  $[0, 1]$ . При этом поимка будет гарантирована из начальных положений

$$z_1^0 = \alpha(a_1 - b_1), \quad z_1^0 = -\beta(a_1 - b_1),$$

где  $\alpha, \beta > 0$ .

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Петров Н. Н.

**Guaranteed parameter estimation of the first order autoregression with correlated noise**

Dogadova T. V.

National Research Tomsk State University

Consider the estimation problem of the parameter  $a$  of a stable first-order autoregression

$$dx_t = ax_t dt + dw_t, t \geq 0$$

by observations of the process  $y_t$  with known parameter  $\lambda$  of the noise  $\eta_t$

$$y_t = x_t + \eta_t, \quad \eta_t = \lambda \eta_t dt + dv_t,$$

where  $w_t$  and  $v_t$  are mutually independent standard Wiener processes,  $a^2 < 0$ ,  $\lambda < 0$ ,  $\lambda^2 \neq a^2$ . Similar to the method developed in [1] for discrete-time systems we define the truncated estimator of dynamic parameter  $a$  by the formula

$$\hat{a}_T = \frac{\int_0^T \Delta_h z_{t-h} d\Delta_h z_t}{\int_0^T \Delta_h z_{t-h} \Delta_h z_t dt} \cdot \chi \left( \left| \int_0^T \Delta_h z_{t-h} \Delta_h z_t dt \right| \geq T \cdot \log^{-1} T \right),$$

where  $z_t = x_t - \lambda \int_0^t x_s ds$ ,  $\Delta_h z_t = z_t - z_{t-h}$ ,  $h > 0$ .

Then there exist numbers  $C$  and  $T_0$  such that

$$E(\hat{a}_T - a)^2 \leq \frac{C}{T}, \quad T \geq T_0.$$

---

1. Vasiliev V. A. A truncated estimation method with guaranteed accuracy// Annals of the Institute of Statistical Mathematics. – 2014. – Vol. 66, № 1. – P. 141-163.

Scientific advisor – Dr. Phys. Math., Prof. Vasiliev V. A.

## Принцип одного большого скачка для сумм с распределением Коши

Быстров П. А.

Новосибирский государственный университет

Пусть  $X_1, X_2$  – одинаково распределенные случайные величины, имеющие субэкспоненциальное распределение. Справедливы равенства:

$$P(X_1 + X_2 > x) = P(X_1 > x) + P(X_2 > x) - P(\min(X_1, X_2) > x) + P(\max(X_1, X_2) \leq x, X_1 + X_2 > x) := \sum_{i=1}^2 P(X_i > x) - P_2(x) + P_1(x)$$

Если  $P_1(x) = o(P(X_1 > x))$ , то выполнен так называемый принцип большого скачка (ПБС). Если вдобавок к этому  $P_2(x) = o(P(X_1 > x))$ , то выполнен так называемый принцип одного большого скачка (далее: ПОБС).

Если  $X_1, X_2$  – независимые в совокупности случайные величины, то ПОБС всегда выполнен. Если же  $X_1, X_2$  – зависимые случайные величины, то ПОБС может не выполняться. Примером зависимых случайных величин являются условно независимые случайные величины: такие величины имеют одно и то же распределение, зависящее от параметра, который в свою очередь является случайным.

**Теорема 1.** Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – одинаково распределенные случайные величины, имеющие распределение Коши с нулевым параметром сдвига:  $X_i \sim C(0, \gamma)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Пусть  $F_\gamma(x)$  – функция распределения  $X_1$ , зависящая от параметра  $\gamma$ , который равномерно распределен на отрезке  $[a, b]$ , где  $0 \leq a < b < \infty$ . Тогда выполнен ПОБС.

**Теорема 2.** Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – одинаково распределенные случайные величины, имеющие распределение Коши с нулевым параметром сдвига:  $X_i \sim C(0, \gamma)$ . Пусть  $F_{\frac{1}{\gamma}}(x)$  – функция распределения  $X_1$ , зависящая от параметра  $\frac{1}{\gamma}$ , который на отрезке  $[0, b]$  имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью  $p(x) = \frac{k+1}{b^{k+1}} x^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . ПОБС выполнен тогда и только тогда, когда  $k \geq 1$ .

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Фосс С. Г.

## Об оценке спектральной плотности

Вежнина О. А.

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Спектральная плотность, представляющая собой преобразование Фурье ковариационной функции стационарного случайного процесса, определяет свойства процесса и позволяет анализировать его структуру. В связи с этим разработка методов построения и статистического анализа оценок спектральных плотностей является одной из главных проблем в спектральном анализе случайных процессов.

Ранее в работе рассматривалась задача оценивания спектральной плотности стационарного случайного процесса, задаваемого уравнением

$$dX_t = -\theta X_t dt + dW_t,$$

где  $\theta > 0$  – неизвестный параметр,  $W_t$  – винеровский процесс.

Спектральная плотность случайного процесса определяется формулой

$$g(\lambda) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\theta}{\theta^2 + \lambda^2}.$$

Использовался последовательный план  $(\tau(H), \hat{\theta}_\tau)$ , где марковский момент  $\tau(H)$  зависит от заранее назначаемого уровня  $H$  и определяется как

$$\tau(H) = \inf \left( t: \int_0^t X_s^2 ds \geq H \right),$$

$$H = \text{const}, \hat{\theta}_\tau = \frac{1}{H} \int_0^{\tau(H)} X_s dX_s.$$

При построении оценок спектральных плотностей стационарных случайных процессов также применяются периодограммные методы. Оценкой для спектральной плотности  $g(\lambda)$  будет функция

$$\hat{g}_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{-i\lambda k} \right|^2,$$

называемая периодограммой.

Для получения состоятельных оценок спектральных плотностей, как правило, используется метод сглаживания периодограмм спектральными окнами  $W_N(\cdot)$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , т. е. используются оценки вида

$$\hat{g}_N^W(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} W_N(\lambda - \nu) \hat{g}_N(\nu) d\nu.$$

С помощью имитационного моделирования проводится сравнение последовательной оценки с оценкой, полученной путем сглаживания периодограммы с помощью окон Бартлета и окон Гаусса.

Научный руководитель – Емельянова Т. В.

## Последовательное оценивание параметра модели устойчивой авторегрессии первого порядка с гарантированной точностью

Ивашенко А. О.

Национальный исследовательский Томский государственный университет

В задачах обработки временных рядов широко используются авторегрессионные модели, описывающие стационарные случайные процессы. Параметры таких моделей в большинстве случаев неизвестны, поэтому перед использованием модели требуется идентифицировать её параметры непосредственным оцениванием. В работе рассматривается задача оценивания параметра. Проводится исследование качества оценки модели авторегрессии первого порядка с дискретным временем.

Для получения последовательных оценок с произвольной точностью, необходимо иметь выборку неограниченного размера. Однако на практике время наблюдения системы, как правило, не только конечно, но фиксировано. Последовательное оценивание и усеченное последовательное оценивание являются подходами для нахождения оценок с гарантированной точностью.

Целью исследования является сравнение последовательной и усеченной последовательной процедуры оценивания параметра модели устойчивой авторегрессии первого порядка.

Рассматривается задача оценивания параметра процесса  $x_t$ , заданного стохастическим разностным уравнением

$$X_i = \lambda X_{i-1} + \sigma \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где  $X_0 = 0$ ,  $\varepsilon_i$  – независимые одинаково распределенные случайные величины.  $E\varepsilon_i = 0, Var\varepsilon_i = \sigma^2 < +\infty$ .

Чаще всего для оценивания параметра модели AR(1) применяют метод наименьших квадратов (МНК)

$$\hat{\lambda}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i X_{i-1}}{\sum_{i=1}^n X_{i-1}^2} \quad (2)$$

При последовательном оценивании число наблюдений заранее неизвестно, оно определяется в ходе наблюдения процесса. При решении практических задач может оказаться, что при заданном объеме выборки момент остановки не достигается. В этом случае используют усеченную последовательную процедуру.

Численным моделированием продемонстрировано, что обе процедуры последовательного оценивания позволяют получить оценки с заданной среднеквадратической точностью.

Научный руководитель – Емельянова Т. В.

## Характеристическая функция распределения вероятностей суммарного объема заявок в системе $M|GI|_{\infty}$

Лисовская Е. Ю.

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Задача исследования систем массового обслуживания (СМО), в которых каждая поступающая в систему заявка имеет случайный объем, как было замечено в работе [1], играет важную роль при моделировании работы различных информационно-вычислительных и телекоммуникационных систем. Однако аналитических решений этой задачи для бесконечнолинейных СМО с произвольной функцией времени обслуживания до сих пор не было найдено. В настоящей работе предлагается решать поставленную задачу методом просеянного потока позволяющим учитывать объемы заявок, находящихся в системе в момент времени  $t$  и не учитывать покинувшие.

Рассмотрим СМО с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает простейший поток с параметром  $\lambda$ . Считаем, что продолжительность обслуживания заявки имеет произвольную функцию распределения  $B(x)$ , одинаковую для всех приборов. Предполагаем, что каждое требование характеризуется случайным объёмом  $v > 0$ . Объёмы различных требований независимые случайные величины с функциями распределения  $G(y) = P\{v < y\}$ .

Обозначим  $V(t)$  – суммарный объем требований, находящихся в просеянном потоке к моменту времени  $t$ .

В работе была получена характеристическая функция процесса  $V(t)$  в стационарном режиме:

$$M\{e^{ju_2 V(t)}\} = \exp\{\lambda b_1 [G^*(u_2) - 1]\},$$

где

$$G^*(u_2) = \int_0^{\infty} e^{ju_2 y} dG(y),$$

а  $b_1$  – среднее время обслуживания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00292 мол\_а.

---

1. Тихоненко О.М. Моделирование процессов и систем обработки информации : курс лекций / О.М. Тихоненко. – Минск: БГУ, 2008. – 148 с.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, доцент Моисеева С. П.

## Проверка гипотезы о модели периодической пуассоновской регрессии

Плаксиенко А. С.

Новосибирский государственный университет

Изучается модель пуассоновской регрессии: пусть  $Y_1, \dots, Y_n$  – независимые случайные величины,  $Y_i$  имеет распределение Пуассона с параметром  $\lambda_i = a(1 + a_1 \cos \frac{2\pi i}{T} + b_1 \sin \frac{2\pi i}{T})$ , где  $T$  – период,  $a$ ,  $a_1$ ,  $b_1$  – неизвестные параметры. При  $T = 4$ ,  $n = 4k$  получены оценки максимального правдоподобия для параметров  $a$ ,  $a_1$ ,  $b_1$ :

$$\hat{a} = \bar{Y}, \quad \hat{a}_1 = \frac{S_4 - S_2}{S_4 + S_2}, \quad \hat{b}_1 = \frac{S_1 - S_3}{S_1 + S_3},$$

где  $S_j = \sum_{i=1}^k Y_{4(i-1)+j}$ . Для того, чтобы оценки  $\hat{a}_1$ ,  $\hat{b}_1$  всегда были определены, будем полагать  $0/0 = 0$ .

**Теорема** Пусть  $T = 4$ ,  $n = 4k$ ,  $a \rightarrow \infty$ ,  $a_1$ ,  $b_1$  – константы. Тогда  $\hat{a}/a \rightarrow 1$  п.н.,  $\hat{a}_1 \rightarrow a_1$  и  $\hat{b}_1 \rightarrow b_1$  п.н., вектор  $\sqrt{a}(\hat{a}/a - 1, \hat{a}_1 - a_1, \hat{b}_1 - b_1)$  слабо сходится к нормальному вектору с нулевым матожиданием и ковариационной матрицей

$$\frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ a_1 & 2 & 0 \\ b_1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

В условиях предыдущей теоремы статистика

$$\gamma_a = \frac{S_1 + S_3 - (S_2 + S_4)}{\sqrt{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}}$$

сходится к стандартному нормальному закону. Эта сходимость используется для проверки модели на реальных данных. Модель применялась к анализу количества заболевших ротавирусным энтеритом в г. Челябинске по кварталам 2006-2009 гг., для которого очевиден сезонный характер заболеваемости. Применение построенной модели дает  $\hat{a} \approx 411$ ,  $\gamma_a \approx 3,317$ , т.е. её нельзя использовать для прогнозов этого заболевания. Рассматриваются различные обобщения данной модели.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доцент Ковалевский А. П.

## Исследование систем массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов и случайным объемом заявок

Потатуева В. В.

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Исследование систем массового обслуживания (СМО), в которых каждая поступающая в систему заявка наряду со случайной длиной имеет случайный объем [1], играет важную роль при моделировании работы самых разнообразных технических устройств, в частности современных информационно-вычислительных систем. В настоящей работе построены и исследованы математические модели изменения объема требований, находящихся в системах вида  $M/M/\infty$  и  $MMPP/M/\infty$  в стационарном режиме.

Пусть каждое требование, поступающее в систему имеет случайный объем  $\sigma_i > 0$ . Объемы различных требований независимые случайные величины с функцией распределения  $G(y) = P\{\sigma_i < y\}$ . Обозначим  $i(t)$  – число заявок в системе в момент времени  $t$ , тогда суммарный объем заявок, находящихся в системе определяется случайным процессом  $\eta(t) = \sum_{k=0}^{i(t)} \sigma_k$ .

В работе были получены основные вероятностные характеристики суммарного объема находящихся в системе требований вида. Показано, что математическое ожидание и дисперсия суммарного объема требований в системе  $M/M/\infty$  в стационарном режиме определяются выражениями

$$m(\eta) = \frac{\lambda}{\mu} a_1 \text{ и } \sigma^2 = \frac{\lambda}{\mu} a_2,$$

где  $a_1 = M\{\sigma\}$ ,  $a_2 = M\{\sigma^2\}$ .

Аналогичные исследования проведены для системы  $MMPP/M/\infty$ . С помощью асимптотического анализа [2] была получена гауссовская аппроксимация для характеристической функции суммарного объема находящихся в системе требований.

1. Тихоненко О.М. Моделирование процессов и систем обработки информации: курс лекций / О.М. Тихоненко. – Минск : БГУ, 2008. – 148 с.

2. Назаров А. А., Моисеева С. П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, доцент Моисеева С. П.

## Статистический анализ качества образования учеников Томской области

Темирбаев С. К.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет

**Актуальность** работы обусловлена необходимостью отслеживания и повышения качества обучения, т.к. образование является одной из ведущих сфер жизни социума.

Перед родителями всегда стоит вопрос в какую школу отдать свое чадо, а перед государством – оценить и определить факторы, влияющие на уровень обучения.

**Целью** работы являлось выявление зависимостей в качестве обучения и сравнительный анализ школ. Анализировались результаты экзаменов учеников Томской области по русскому языку и математике в 9 и 11 классах (2013 и 2015 года соответственно).

Первоначально был проведен анализ на однородность данных. Данный анализ определяет качество обучения в городских школах и сельских. Проведенные тесты Колмогорова-Смирнова, Манна-Уитни и Уальда-Вольфовица показали, что качество обучения одинаково лишь по русскому языку для 9 класса.

Был проведен корреляционный анализ по Пирсону, Кенделлу и Спирмену, показавший, что помимо естественной зависимости между результатами разных годов по одному предмету, также коррелируют результаты по русскому языку за 2015г с результатами по математике за 2015г и результаты по математике за 2013г с результатами по русскому языку за 2015г. Из этого можно сделать вывод, что ученики лучше знавшие математику в 9 классе, успешнее напишут экзамены в 11 по обоим предметам.

Также был проведен сравнительный анализ школ по среднему баллу учеников. Исходя из полученных результатов были выявлены 4 школы, имевшие высокие результаты во всех рассмотренных случаях: НОУ гимназия Томь, МАОУ Малиновская СОШ, ОГБОУ ТФГЛ, МБОУ Северский лицей.

Проведенные исследования показывают, что неравенство в качестве образования продолжает существовать: у учеников городских школ больше шансов получить хорошее образование и соответственно поступить на более престижную специальность в ВУЗе. Из 4 выделенных школ 3 являются городскими.

Научный руководитель – канд. техн. наук Кацман Ю. Я.

## Об одном подходе к моделированию нелинейно-упругого деформирования анизотридных оболочек из углепластика

Алеев Н. Р.

Новосибирский государственный университет

Анизотридные конструкции представляют собой сетчатые оболочки из однонаправленного углепластика, обладающие повышенными удельными характеристиками жёсткости и прочности и значительными перспективами в области конструирования ракетной и космической техники [1].

Представленный в работе подход к моделированию деформирования анизотридных оболочек основан на континуальной модели [2], при которой реальная сетчатая оболочка заменяется эквивалентным сплошным анизотропным телом.

Работа позволяет упростить и оптимизировать процесс расчета и проектирования анизотридных конструкций и состоит из нескольких этапов. Первый этап – вывод разрешающей системы уравнений в среде Wolfram Mathematica. Система строится на основе соотношений пространственной теории упругости: уравнений равновесия, нелинейных физических и кинематических соотношений [2]. Второй этап – написание программы синтаксического анализа (парсера) с использованием регулярных выражений для преобразования разрешающей системы уравнений в код языка java. Третий этап – реализация на языке java нелокального алгоритма без насыщения [3] и проведение расчетов в рамках комплекса программ «АНИЗОТРИД».

---

1. Васильев В. В., Барынин В. А. и др. Анизотридные композитные сетчатые конструкции – разработка и применение к космической технике // Композиты и наноструктуры. 2009. №3. С. 38–50.

2. Голушко С. К., Семисалов Б. В. Численное моделирование деформирования анизотридных конструкций с применением высокоточных схем без насыщения // Мат. мод. и числ. мет. 2015. № 6.23–45.

3. Семисалов Б. В. Нелокальный алгоритм поиска решений уравнения Пуассона и его приложения // Журн. выч. мат. и мат. физ. 2014. Т. 54. № 7. С. 1110–1135.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Семисалов. Б. В.

**Численное исследование точности разностных схем для волновых уравнений**

Анисимова А. С.

Новосибирский государственный университет

В работе численно исследуются разностные схемы различной точности. Схемы приводятся как для волновых уравнений, так и для волновых систем, переписанных в терминах «давление» - «скорость». Также в работе приводится исследование зависимости фазовой скорости от различных волновых чисел и шагов по пространству, так называемый «дисперсионный анализ». Приводятся результаты расчетов для начальных возмущений различной гладкости, для различных чисел Куранта. Исследование проведено на равномерной сетке для стандартной явной разностной схемы и для схемы «расширенный крест», аппроксимирующих двумерное волновое уравнение.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Лаевский Ю. М.

## Метод коллокации и наименьших невязок для решения задач математической физики в областях с криволинейной границей

Беляев В. А.

Новосибирский государственный университет

Предложен и реализован вариант метода коллокации и наименьших невязок для численного решения краевых задач для уравнений Пуассона и бигармонического в областях с криволинейной границей. Дифференциальные задачи методом КНН проектировались в пространство полиномов четвертой степени. Граничные условия для приближенного решения выписывались точно на границе расчетной области  $\Omega$ . В ячейках, которые пересекала граница, использованы «законтурные» точки коллокации.

Сначала рассматриваемый подход был испытан на решении с повышенной точностью задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

Решение второй задачи применялось для расчета напряжённо – деформированного состояния изотропной пластины, находящейся под действием поперечной нагрузки. Оно описывается решением бигармонического уравнения

$$\frac{\partial^4 \omega(x_1, x_2)}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega(x_1, x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \omega(x_1, x_2)}{\partial x_2^4} = \frac{q(x_1, x_2)}{D}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega \quad (1)$$

с соответствующими краевыми условиями. Здесь  $\omega(x_1, x_2)$  – прогиб срединной поверхности,  $q(x_1, x_2)$  – поперечная нагрузка,  $D$  – жёсткость пластины при изгибе.

Численные эксперименты проведены на последовательности сеток размеров  $8 \times 8$ ,  $16 \times 16$ ,  $32 \times 32$ ,  $64 \times 64$ . Результаты расчетов показали, что приближенные решения сходятся с повышенным порядком и с высокой точностью совпадают с тестовыми аналитическими решениями.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Шапеев В. П.

## Реализация метода сопряженных градиентов для численного решения уравнения конвекции и диффузии

Грудович Л. Е.

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Вычислительная математика решает большое количество задач, связанных с обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных. Эти уравнения описывают процессы различных областей химии, физики, биологии и др. В данной работе методом конечных разностей и сопряженных градиентов численно решается уравнение конвекции и диффузии в единичном квадрате с граничными условиями первого рода:

$$U \frac{\partial \Phi}{\partial x} + V \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( G \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( G \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + S;$$

$$\Phi|_{\Gamma} = \varphi.$$

Где  $U, V, G > 0$  – непрерывно дифференцируемые функции внутри и на границе области исследования,  $\varphi$  – непрерывная функция, определенная на границе  $\Gamma$ .

После разностной аппроксимации исходной дифференциальной задачи на равномерной декартовой сетке получена система линейных алгебраических уравнений вида  $Ax=b$ . Для ее решения использован метод сопряженных градиентов. Применение метода сопряженных градиентов требует использования трех базовых операций линейной алгебры: сложения векторов, вычисления скалярного произведения векторов и умножения матрицы на вектор. Поэтому при реализации алгоритма эти операции выполнены в виде отдельных процедур и затем использованы при записи основных формул метода сопряженных градиентов [1].

Работоспособность полученной программной реализации метода сопряженных градиентов проверена на задаче, когда коэффициенты в уравнении и решение имеют вид:  $\Phi(x,y)=x^2y$ ,  $U=V=G=1$ ,  $S=2xy+x^2-2y$ . Расчеты показали, что решение, полученное методом сопряженных градиентов, соответствует точному решению исходной задачи. Вычисления выполнялись с точностью  $10^{-5}$ , контроль сходимости метода выполнялся по норме ошибки и невязки.

---

1. Крылов.В.И. Вычислительные методы высшей математики / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырский. –Минск : Высш. шк., 1972. – Т. 1. – 584 с.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Данилкин Е. А.

**Параллельный алгоритм моделирования волновых процессов  
основанный на пространственной декомпозиции с перекрытиями без  
итераций по согласованию решений**

Гуш М. Н.

Новосибирский государственный технический университет

При решении практических задач требующих моделирование волновых процессов обычно предъявляются высокие требования к вычислительным ресурсам как с точки зрения производительности, так и объёма необходимой оперативной памяти.

Классический подход к моделированию волновых полей в ресурсоёмких задачах – метод Шварца. Расчётная область разбивается на подобласти, затем на каждом временном слое итерационно идёт параллельное моделирование поля в каждой подобласти и согласование решений граничащих подобластей, пока решение не сойдётся.

В предложенном алгоритме учитывается физическая природа волновых полей, а именно скорость распространения возмущений. Сперва выполняется декомпозиция области без перекрытий, затем каждая подобласть расширяется, перекрывая соседнюю на величину, превышающую расстояние, проходимое волной в рассматриваемой среде за один временной шаг. На добавленных в результате декомпозиции границах задаются однородные краевые условия второго типа. На каждом временном слое выполняется расчёт волнового поля в каждой подобласти и обмен решениями в области перекрытия.

Учитывая скорость распространения волн, отражения от добавленных границ не должны выйти за пределы области перекрытия на текущем временном слое. Для решения на следующем временном слое значения поля в области перекрытия восстанавливаются из соседней подобласти, тем самым убирая влияние добавленных границ на решение и перемещая возмущение поля из одной области в другую. При таком подходе нет необходимости совершать итерации как методе Шварца, однако возрастает время моделирования в подобластях за счёт их увеличения.

В работе на примере процесса распространения упругих волн в изотропной среде показана сходимость решения задачи по предложенному алгоритму к точному решению с увеличением перекрытия подобластей, экспериментально вычисляется необходимая величина перекрытий, сравнивается предложенный подход с аддитивным методом Шварца по затраченному времени на решение и использованному объёму оперативной памяти.

Научный руководитель – д-р техн. наук, проф. Персова М. Г.

## Метод коллокации и наименьших невязок для решения уравнений Бюргерса и Бюргерса – Кортевега – де Фриза

Демидов И. С.

Новосибирский государственный университет

В представленной работе начально-краевые задачи для численного решения уравнений Бюргерса и Бюргерса – Кортевега – де Фриза

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq X, \quad 0 \leq t \leq T, \quad U|_{t=0} = U_0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{D_\sigma^2} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = 0, \quad 0 \leq x \leq X, \quad 0 \leq t \leq T, \quad U|_{t=0} = U_0, \quad (2)$$

с различными краевыми условиями использована разностная аппроксимация производных по времени. На каждом временном слое в каждой ячейке разностной сетки решение искалось в виде полинома третьей степени по  $x$  с неопределенными коэффициентами. Для их определения применялся метод коллокаций и наименьших невязок. Уравнения (1), (2) предварительно линеаризовались по Ньютону, и на каждом временном слое применялись итерации по нелинейности.

Численные эксперименты по решению задач (1), (2) были проведены на различных аналитических и известных из литературы тестовых решениях. При использовании по времени схемы Кранка – Николсона рассматриваемый метод на гладких решениях сходится по времени со вторым порядком. В тестовом решении с разрывом для задачи (1) при  $\nu = 0$  фронт ударной волны получается без осцилляций и имеет по  $x$  ширину порядка 1.5 ячейки.

Возможности метода были также проверены на решении широко известной задачи для уравнения Бюргерса – Кортевега – де Фриза (2) о взаимодействии двух солитонов с разными амплитудами. В частности, эксперименты были проведены при больших числах Рейнольдса, что представляет трудности для некоторых численных методов. Предложенный метод хорошо передает характерное взаимодействие солитонов и без осцилляций крутые фронты волн, которые появляются со временем в решении задачи.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Шапеев В. П.

**Анализ применения PML-слоя в геофизических приложениях**

Жигалов П. С., Рак Б. В.

Новосибирский государственный технический университет

В современном мире экономика многих стран, зависит от полезных ископаемых. Конкуренция за обладание ими порой доходит до вооруженных конфликтов. Таким образом, все более актуальными становятся задачи, связанные с геологоразведкой.

Задачи геологоразведки имеют ряд отличительных особенностей. К ним можно отнести большой размер расчетной области; изменение электропроводности среды в зависимости от глубины, сезона, а также от многих других факторов; сложный рельеф поверхности земли.

Задачи геологоразведки описываются уравнением Гельмгольца. Характерной особенностью математической модели является широкий диапазон частот: от 0.125 Гц в случае морской геоэлектрики до 10 КГц в случае геологоразведки для малой глубины залегания полезных ископаемых. Для решения задач геологоразведки целесообразно использовать векторный метод конечных элементов (ВМКЭ) [1].

В рамках данного исследования рассматривается решение трехмерной гармонической задачи с помощью ВМКЭ. Была выписана вариационная постановка, обеспечивающая выполнение закона сохранения заряда. Для моделирования электрического поля был реализован программный комплекс. Были проведены исследования влияния PML-слоя [2] на границах расчетной области в различных геофизических приложениях.

---

1. Эпов М. И., Шурина Э. П., Архипов Д. А. Параллельные конечноэлементные вычислительные схемы в задачах геоэлектрики // Вычислительные технологии. – 2013. – Том 18, №2. – С. 94-112.

2. Wiik T., De Hoop M. V., Ursin B. A Discontinuous Galerkin Method for Modelling Marine Controlled Source Electromagnetic Data // Proceedings of the Project Review, Geo-Mathematical Imaging Group, Purdue University, West Lafayette, IN, Vol. 1 (2013) pp. 75-102.

Научный руководитель – д-р техн. наук, проф. Шурина Э. П.

**Распараллеливание решения трёхмерных краевых задач на квазиструктурированных сетках с использованием графических ускорителей**

Климонов И. А.

Новосибирский государственный университет

При распараллеливании решения трёхмерных краевых задач на квазиструктурированных сетках методом декомпозиции расчётной области на подобласти, сопрягаемые без наложения, наиболее трудоёмкой вычислительной процедурой является решение краевых подзадач в подобластях.

Использование параллелепипедальных квазиструктурированных сеток даёт возможность применить для этих целей быстросходящиеся методы переменных направлений. Распараллеливание итерационного процесса по подобластям проводится на CPU в системе MPI, а для решения подзадач предлагается использовать графические ускорители GPU с использованием технологии CUDA. В качестве метода решения подзадач применяется трехмерный аналог метода Писмана-Рэчфорда, который позволяет эффективно использовать графические ускорители.

Проводятся экспериментальные исследования применения графических ускорителей при решении подзадач трехмерным аналогом метода Писмана-Рэчфорда. Даются экспериментальные оценки ускорения распараллеливания как на GPU, так и в гибридной вычислительной среде CPU + GPU по сравнению с расчётами только на CPU.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Свешников В. М.

## Исследование порядка точности линеаризованной схемы Годунова-Куликова в эйлеровых координатах

Ключинский Д. В.

Новосибирский государственный университет

В задачах газовой динамики при численных расчетах обобщенных решений всё большей популярностью пользуются схемы высоких порядков точности. Чаще всего изобретение таких схем обусловлено необходимостью обеспечить монотонность решений. Следует отметить, что схемы высоких порядков недостаточно аргументировано описывают законы термодинамики. С.К. Годуновым было обнаружено [2], что дробные порядки точности имеются даже у схем первого порядка. Причина этого парадокса до сих пор не известна.

Данная работа является продолжением работы [2], и её цель - экспериментально показать, что линеаризованная схема Годунова-Куликова [1] также имеет дробный порядок точности. В отличие от работы [2], где порядок точности определялся по методу Соболева, критерием точности является скорость сходимости интегралов по контуру от законов сохранения. Порядок точности  $P$  для контурных интегралов  $F_\rho$ ,  $F_{\rho u}$ ,  $F_{\rho S}$ ,  $F_{\rho E}$ , рассматриваемых с последовательным уменьшением шага сетки  $h$ , вычисляется по правилу Рунге

$$P = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \log_3 \frac{F_\rho(3h) - F_\rho(h)}{F_\rho(h) - F_\rho(h/3)} \right)$$

Точность схемы исследована на примере классических задач газовой динамики: задачи Римана о распаде произвольного разрыва, задачи об ударной волне, задачи о волне разрежения. Сформулированы гипотезы возникновения дробных порядков у схемы.

---

1. Годунов С.К., Куликов И.М. Расчет разрывных решений уравнений гидродинамики с гарантией неубывания энтропии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2014, том 54, номер 6, стр. 1008–1021.

2. Годунов С.К., Манузина Ю.Д., Назарьева М.А. Экспериментальный анализ сходимости численного решения к обобщенному решению в газовой динамике // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2011, том 51, номер 1, стр. 96–103

Научные руководители – чл.-корр. РАН, проф. Кабанихин С. И.,  
Воронов Д. А.

**Моделирование волновых процессов слабо сжимаемой жидкости**

Кохонов Р. Е.

Новосибирский государственный университет

В работе рассматривается задача о распаде разрыва в слабо сжимаемой жидкости. Задача широко известна и уже разрешена с использованием модели приближения Буссинеска. Существуют недостатки этой модели, она плохо подходит для слабо сжимаемой жидкости, т.к. ошибки в вычислениях плотности приводят к большим колебаниям давления.

Предлагается новая модель, идея которой заключается в использовании уравнения для давления, вместо уравнения неразрывности, что позволит вести более точные вычисления. В данный момент написана программа для новой модели, выполнены тестовые расчеты, проведено сравнение моделей и выявлена наиболее эффективная.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Вшивков В. А.

## Модификация приближения Фурье для решения задач с пограничным слоем

Кузьмин Г. А.

Новосибирский государственный университет

В настоящее время существует множество актуальных проблем науки и техники, сводящихся к сингулярно возмущенным краевым задачам для дифференциальных уравнений. Наиболее распространенные подходы к их решению основаны на построении сеток с кусочно-линейным/полиномиальным приближением неизвестной функции [1,2], что обеспечивает относительно невысокую скорость сходимости метода и ведет к существенному сгущению сетки в области пограничного слоя, и как следствие, к росту вычислительных затрат и погрешностей.

В данной работе предлагается отойти от традиционных сеточных подходов и использовать для аппроксимации функций с погранслойными составляющими приближения, полученные на основе специфического отображения области определения ряда Фурье на отрезок [-1,1]:

$$f(x) = P_N(x) \approx \sum_{k=0}^N a_k \cos\left(k \arccos\left(\tan\left[\frac{x \arctan(b)}{b}\right]\right)\right) = \sum_{k=0}^N a_k B(k, x)$$

где  $b > 0$  - параметр. Для бесконечно гладких функций базис  $B(k, x)$  обеспечивает экспоненциальное убывание погрешности с умеренным значением множителя при экспоненте и даёт высокую численную устойчивость, характерную для ряда Фурье. В таблице представлено сравнение точности приближений решения задачи с малым параметром

$$0 < \varepsilon \ll 1$$

$$\varepsilon f''(x) - f(x) = -\sin \pi x (\varepsilon \pi^2 + 1), f(-1) = 1, f(1) = -1$$

в базисе  $B(k, x)$  и базисе из полиномов Чебышёва.

$N$	10	40	70	100
Чебышёв	1.0000	1.0000	1.0000	0.9973
$B(k, x)$	0.0529	$9 * (10)^{-8}$	$2 * (10)^{-11}$	$2 * (10)^{-11}$

Таблица 1. Расчетные значения погрешности приближения для  $\varepsilon = 10^{-10}$

1. Kadalbajoo M.K., Gupta V. A brief survey on numerical methods for solving singularly perturbed problems // Applied Mathematics and Computation. 2010. Vol. 217. No. 8. P. 3641-3716.

2. Лисейкин В.Д., Лиханова Ю.В., Шокин Ю.И. Разностные сетки и координатные преобразования для численного решения сингулярно возмущенных задач. Новосибирск: Наука. 2007.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Семисалов Б. В.

**Суммирование волн в задаче построения теоретических сейсмограмм  
лучевым методом с применением нового алгоритма вычисления  
преобразования Гильберта.**

Леваева А. В.

Новосибирский государственный университет

В работе описывается заключительный этап расчета по лучевому методу: построение сейсмотрасс в приемниках. Считается, что этот этап не представляет затруднений и практически не освещен в отечественной и зарубежной литературе. Однако, по нашему мнению, он представляет самостоятельный интерес и требует строгого и конкретного описания.

Основную сложность в задаче суммирования представляет вычисление преобразование Гильберта сигнала в источнике. Обычно его вычисляют посредством вычисления преобразования Фурье сигнала с последующим возвратом во временную область. В работе предлагается новый алгоритм вычисления преобразования Гильберта непосредственно во временной области. Решение получается в виде быстро сходящегося ряда, коэффициенты которого вычисляются по рекуррентным формулам. Такой способ позволяет вычислять преобразование Гильберта с любой наперед заданной точностью и с минимальными временными затратами.

На основе разработанного алгоритма составлена программа и проведены численные расчеты применительно к задаче суммирования волн.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доцент Белоносов А. С.

## **Математическое моделирование процессов фильтрации в анизотропных средах**

Марков С. И.

Новосибирский государственный технический университет

Комплексные исследования гидродинамических процессов в анизотропных средах являются сложной задачей, которая не может быть решена в полном объёме без применения аппарата математического моделирования. Математические модели фильтрации имеют специфические особенности. Как правило, они связаны с геометрической разномасштабностью исследуемых структур и большим разбросом значений физических параметров. Следовательно, для решения данных проблем необходимо разрабатывать современный математический аппарат, который легко адаптируется под определённый класс задач и позволяет получить физически адекватное решение при минимальных затратах вычислительных ресурсов.

Среди эффективных математических подходов можно выделить вычислительные схемы на базе разрывного метода Галёркина, который входит в семейство неконформных конечноэлементных методов. Высокая эффективность данных схем обусловлена тем, что каждый элемент тесселяции области моделирования содержит собственное пространство решения, поведение которого на межэлементном интерфейсе доопределяется с помощью специальных лифтинг-операторов.

В настоящей работе для решения задачи фильтрации в анизотропных средах применяется современный математический аппарат на базе разрывного метода Галёркина со специальными стабилизирующими параметрами. Рассматриваются вопросы применения методов теории гомогенизации для вычисления эффективных тензорных физических характеристик исследуемых анизотропных сред.

Научный руководитель – д-р техн. наук, проф. Шурина Э. П.

**Математическое моделирование процессов с фазовыми переходами  
многомасштабным разрывным методом Галёркина**

Полищук С. Ю.

Новосибирский государственный технический университет

При решении многих задач математического моделирования границы вычислительной области известны, но в некоторых задач положение границ области неизвестно, и его можно определить исходя из значений фазовых переменных. Задачи со свободной границей нелинейны, что создаёт трудности для численного моделирования. К ним можно отнести различные процессы описывающие, к примеру, таяние льда, выращивание монокристаллов и задачи горения.

Сложность задач с движущимися границами предъявляет особые требования к математическому и программному обеспечению. Необходимо использовать аппарат современных численных методов, которые позволяют учесть осцилляции решения и допускающих hp-стратегии.

В работе предлагается вычислительная схема решения задачи Стефана на основе многомасштабного разрывного метода Галёркина в трехмерной постановке с использованием линейных и квадратичных базисных функций. Решение ищется на прямой сумме двух подпространств: разрывного и непрерывного, что позволяет естественным образом использовать многоуровневый решатель.

Научный руководитель – канд. техн. наук, доцент Иткина Н. Б.

## Численное исследование задачи о разрушении плотины в зависимости от глубины в нижнем бьефе

Потоцкая А. А.

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Разрушение плотины – одна из опасных ситуаций, приводящих к значительным экологическим и экономическим последствиям. Умение моделировать такие процессы, предсказывать их течение помогает выработать соответствующие меры, способствующие уменьшению последствий этого явления.

Цель работы – выбор численного метода, позволяющего достаточно просто проводить расчеты, сохраняя при этом специфические особенности процесса.

Задача о разрушении плотины описывается в рамках модели мелкой воды. Первоначально жидкость предполагается покоящейся по обе стороны от разрыва. В момент времени  $t = 0$  «плотина» внезапно разрушается. Процесс движения жидкости описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных, с соответствующими начальными и граничными условиями.

Численное решение поставленной задачи осуществляется с помощью схемы Лакса-Фридрихса. Исследуются вопросы аппроксимации, устойчивости и сходимости используемого численного метода по начальным данным.

В начальный момент глубина водного потока терпит разрыв. При  $t > 0$  разрыв мгновенно сглаживается, а поверхность жидкости, находящейся в движении, принимает форму параболы. Как показали расчеты, отношение глубины верхнего и нижнего бьефов имеет критическое значение, равное 0,1384. Если глубина ниже плотины (нижний бьеф) составляет менее 13.8% глубины воды по другую сторону, то расход воды в створе плотины после разрушения не зависит ни от глубины нижнего бьефа, ни от времени  $t$ . В противном случае глубина, скорость и количество протекающей воды зависят от вышеуказанного отношения. Эти особенности процесса разрушения плотины, полученные в данном исследовании, отмечаются в работах других авторов.

Анализ полученных результатов показывает, что применяемый численный метод достаточно точно передает особенности процесса разрушения, не требуя при этом больших затрат на реализацию.

Научный руководитель – Михайлов М. Д.

## **Численные алгоритмы гладкой аппроксимации таблично заданных функций**

Филюшов А. А.

Новосибирский государственный университет

При численном решении задач математической физики возникает необходимость аппроксимировать входные данные задачи в промежутках между узлами, а так же вычислять частные производные.

В данной работе предлагается рассмотреть некоторые методы аппроксимации с контролем спектральных свойств полученной сглаженной функции. При наличии дополнительной информации о природе входных данных есть возможность наложить дополнительные ограничения и уточнить результат. Такой информацией может быть наиболее характерный частотный диапазон входных данных, а так же шумы различной природы.

Целью работы является создание набора инструментов для эффективной гладкой аппроксимации функций нескольких переменных, который можно было бы использовать для решения задач математического моделирования за приемлемое время на настольном компьютере. Последнее означает, что полученный алгоритм должен быть хорошо оптимизирован. Для этого предлагается использовать комбинацию из двух методов, один из которых повышает точность, но требует больше времени, чем второй метод, который сохраняет точность на прежнем уровне.

На основе разработанных алгоритмов составлен комплекс программ. Приводятся результаты сравнительных экспериментов на модельных и реальных данных.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доцент Белоносов А. С.

## Исследование влияния численной ошибки вносимой при построении LU-разложения матрицы на качество получаемого решения системы линейных уравнений.

Чмеленко О. С.

Новосибирский государственный университет

Основное преимущество прямых методов перед итерационными – точность получаемого решения и возможность однократной факторизации матрицы системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для решения системы со многими правыми частями. Однако для решения СЛАУ, получаемых в результате аппроксимации 2-х и 3-мерных краевых задач с ДУ в частных производных прямые методы являются ресурсоемкими как по памяти, так и по производительности. Одно из направлений по сокращению указанных затрат – использование техники аппроксимации матрицами малого ранга -факторов при проведении разложения матрицы [1].

СЛАУ имеет вид  $Ax = f$ . Без потери общности будем считать что матрица  $A$  – симметричная.

Целью данной работы является исследование оценки влияния ошибки, вносимой непосредственно в -фактор, так и в процессе построения  $LDL^t$  - разложения. Проведен теоретический анализ и получена оценка погрешности решения. При этом матрица  $A$  рассматривалась как в поэлементном, так и в блочном виде, а ошибки вводятся либо в  $L$ -факторы, либо в поддиагональные блоки, что моделирует появление ошибок в процессе аппроксимации матрицами малого ранга.

Указанные оценки подтверждены численно на матрицах, получаемых в результате аппроксимации уравнения Гельмгольца в 2-мерной области на прямоугольной сетке. Показано что получаемые оценки через ошибки матрицы  $L$  более точные, чем традиционные оценки погрешности решения, получаемые через ошибки матрицы  $A$  [2].

---

1. Chandrasekaran S., Dewilde P., Gu M., Somasunderam N. On the numerical rank of the off-diagonal blocks of Schur complements of discretized elliptic PDEs // Siam Journal on Matrix Analysis and Applications. 2010. 31, N 5. 2261–2290.

2. Годунов С. К., Антонов А.Г., Кирилук О. П., Костин В. И. Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах, 1988, 456

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Соловьев С. А.

## Clarification of the value of “mean” constant in the ratio for the error of the Monte Carlo method

Andorny E. N.

Novosibirsk State University

It is assumed that the error  $\delta_n = |I - Z_n|$  of the Monte Carlo method  $I = \mathbf{E}\zeta \approx Z_n = (\zeta_1 + \dots + \zeta_n)/n$  has the asymptotic behavior for  $n \rightarrow \infty$  of the form  $\delta_n \sim r_n = H \frac{\sqrt{\mathbf{D}\zeta}}{\sqrt{n}}$  (see, for example, [1]). In this paper, the choice of the constant  $H$  is discussed.

Following the considerations from [1, 2], in the paper [3] we have recommended to use the value  $H \approx 0,6745$ , for which  $\mathbf{P}\{\delta_n \geq r_n\} \approx 1/2 \approx \mathbf{P}\{\delta_n \leq r_n\}$  when  $n \gg 1$ . The value  $r_n$  with such choice of the constant  $H$  is called *the probable error* of the Monte Carlo method [2].

We have conducted the following computing experiments. We simulated numerically the sample values  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  of random variables  $\zeta$  with the known mathematical expectations  $\mathbf{E}\zeta$  and variances  $\mathbf{D}\zeta$ . The errors  $\delta_n = |\mathbf{E}\zeta - Z_n|$  and approximations of the constant  $H \approx H_n = \frac{\delta_n \sqrt{n}}{\sqrt{\mathbf{D}\zeta}}$  for various  $n$  were calculated. It turned out the following.

1). For large  $n$  and for various distributions of the random variable  $\zeta$ , the mean (with respect to the number of experiments) values  $H_n$  converge to the constant, which is obtained for the standard Gaussian distribution (this is consistent with *the central limit theorem* – see, for example, [4]).

2). The mean value  $H_n$  for the standard Gaussian random variable  $\zeta \in \mathbb{N}(0, 1)$  converges to the value  $H \approx 0,80 \dots$  (the first two digits after the decimal point are true).

Thus, in this paper we managed to get the comparatively essential clarification of the recommendations from the paper [3].

---

1. Mikhailov G. A., Voytishchik A. V. Numerical Statistical Modelling. Monte Carlo Methods. Moscow: Ed. center “Akademia”, 2006 [in Russian].

2. Sobol I. M. Numerical Monte Carlo Methods. Moscow: Nauka, 1973 [in Russian].

3. Voytishchik A. V., Andorny E. N. On the choice of the constant in the ratio for the Monte Carlo method error // Abstracts of International Conference “Advanced problems of numerical and applied mathematics – 2015”. Novosibirsk: Akadem izdat, 2015. P. 32 [in Russian].

4. Borovkov A. A. Probability Theory. Moscow: Nauka, 1986 [in Russian].

Scientific advisor – Dr. Phys. Math., Prof. Voytishchik A. V.

## Solution of flow problem in random heterogeneous media.

Arefeva N. V.

Novosibirsk State University

A steady state, incompressible, single-phase flow through a saturated porous medium is studied. The dimensionless pressure  $p$  and Darcy velocity  $u$  are described by Darcy law and continuity equation:  $u = -K \nabla p; \nabla \cdot u = 0$ , where permeability  $K$  is an input parameter.

Because of highly irregular structure of permeability distribution, the statistical approach is widely used for fluid flow simulation through porous media. We employ usually used assumption about lognormal distribution of  $K$ . Then the log-permeability  $f = \ln(K)$  is considered as a statistically homogeneous random field with Gaussian distribution which is fully defined by its mean value and covariance function. The method based on spectral random fields representations [2] is used for numerical simulation of realizations of permeability random field.

Upscaled flow equations can be computed by using a two-point flux approximation. This leads to the standard five-point stencil for the coarse grid pressure equation [1]:

$$T_{i-\frac{1}{2},j}^x (P_{i-1,j} - P_{i,j}) + T_{i+\frac{1}{2},j}^x (P_{i+1,j} - P_{i,j}) + T_{i,j-\frac{1}{2}}^y (P_{i,j-1} - P_{i,j}) + T_{i,j+\frac{1}{2}}^y (P_{i,j+1} - P_{i,j}) = 0$$

where  $T$  are the corresponding interblock transmissibilities.

The uncertainty inherent in the boundary conditions of the boundary problem solution allows to treat them as random function. As a result, the solution  $P$  is also considered as random field. Further, this approach have to allow to perform e.g. the global sensitivity analysis [3] or uncertainty quantification.

---

1. Chen, Y., Durlafsky, L. J. Adaptive local-global upscaling for general flow scenarios in heterogeneous formations. *Transport in Porous media*, 62, 157-185, 2006.

2. Sabelfeld, K. K. *Monte Carlo Methods in Boundary Value Problems*, 283 pp., Springer, New York/Heidelberg/Berlin, 1991.

3. Sobol' I. M. Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates. *Mathematics and Computers in Simulation*, 55, 271-280, 2001.

Scientific advisor – Cand. Phys. Math. Kolyukhin D. R.

## Stochastic collocation method for solving diffusion equations with random initial concentration

Dulzon O. V.  
Novosibirsk State University

We develop a simulation algorithm for solving the diffusion equation in the domain  $[0,L] \times [0,T]$  with periodic boundary condition

$$\frac{\partial n}{\partial t}(x,t) = D\Delta n(x,t) - \alpha n(x,t), \quad n(0,t) = n(L,t),$$

$$\frac{\partial n}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial n}{\partial x}(L,t)$$

where  $D(x)$  is a diffusion coefficient and  $\alpha$  is an absorption coefficient. The initial concentration  $n(x,0)$  is defined as a conditional Gaussian random process with a prescribed correlation function. We apply the Crank-Nicolson scheme for the finite-difference approximation and solve the problem by direct Monte Carlo method and the polynomial chaos expansion, see [1], [2]. We use probabilistic collocation method to determine the coefficients of the polynomial chaos expansion. The input random field  $n(x,0)$  is simulated by the Karhunen –Loeve expansion. Numerical results for both methods are given. Also, we extend this approach to a nonlinear two-component diffusion system.

The study has been supported by the Russian Science Foundation under Grant N 14-11-00083.

---

1. I. A. Shalimova, K.K. Sabelfeld, O.V. Dulzon. Stochastic collocation method for solving initial boundary value problems with random data. Proceedings of the international conference “Advanced problems of computational and applied mathematics”, 2015, Novosibirsk [in Russian].

2. Heng Li, and Dongxiao Zhang, Probabilistic collocation method for flow in porous media: Comparisons with other stochastic methods, Water Resources Research, VOL. 43, W09409, 2007.

Scientific advisor – Cand. Phys. Math. Shalimova I. A.

## Stochastic modeling of electron-hole annihilation process in a semiconductor

Eremeev G. V.

Novosibirsk State University

In this report we consider the process of electron hole recombination in a flat semiconductor layer. This process is governed by spatially inhomogeneous Smoluchowski equations for three types of particles: electrons, holes and recombination centers. An electron can interact with holes and recombination centers due to tunneling and diffusion. If the electron and hole annihilate, they produce a photon. The holes also can interact with the recombination centers due to tunneling. An attempt to apply finite-difference methods to equations describing the recombination processes meet difficulties related to a huge dimension of the problem and necessity to obtain the solution on a huge time interval.

The natural way to attack the recombination problem is the Monte Carlo method. But in the direct kinetic Monte Carlo algorithm, in the presence of diffusion a mesh is still used, which significantly slows down the calculations. In order to get rid of this disadvantage, we consider an algorithm based on the random walk on spheres method. This method is mesh free, i.e. the phase space is continuous.

The idea behind this algorithm is simple. Around each electron, we construct a disk of maximal radius which doesn't contain any hole or recombination center. We then simulate the random exit times of electrons from these disks. Using this exit times we calculate frequencies, then, according to obtained frequencies, we choose the electron to be moved. This electron jumps out of the disk so that the new random position of the electron is uniformly distributed on the boundary of this disk. The distribution of the exit time is known and we are thus able to simulate the random exit time  $dt$  according to this distribution, giving us the time  $t = t + dt$  (e.g, see [1]).

The work has been supported by Russian Science Foundation under Grant N14-11-00083.

---

1. Sabelfeld K.K., Brandt O., Kaganer V.M. J. Mathem. Chemistry, 53(2015), 651 – 669.

Scientific advisor – Prof. Sabelfed K. K.

## The approximate numerical spectral model of periodically correlated processes

Medvyatskaya A. M.  
Novosibirsk State University

We consider approximate algorithm for the numerical simulation of periodically nonstationary stochastic processes based on the representation [1], [2]

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^n \left( \xi_k(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) + \zeta(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) \right),$$

where  $\xi_k(t)$  and  $\zeta(t)$  are stationary components forming a vector of infinite stationary random process. Here we consider an approximate numerical model in which the vector components are the sequence of finite-dimensional vectors. Numerical experimentations have showed that correlations have a periodic time dependencies.

This work was supported by the Russian Foundation for Basis Research (grant No 16-31-00038-mol-a).

- 
1. Dragan Ya.P., Rozhkov V.A., Yavorsky I.N. The Methods of Probabilistic Analysis of Oceanological Rhythmicity, 1987. [in Russian]
  2. Prigarin S.M.. Spectral Models of Random Fields in Monte Carlo Methods, 2001.

Scientific advisor – Dr. Phys. Math., Prof. Ogorodnikov V. A.

**Stochastic simulation of photon cloud generated by a laser pulse in scattering media**

Mironova D. E.  
Novosibirsk State University

The LIDAR remote sensing is an effective tool to study optical and microphysical properties of scattering media. The receivers of modern LIDARs can register return signals depending on time as well as obtain spatially temporal images of radiation intensity diffused by the explored domain [1, 2]. Multiple scattering of radiation plays an essential role in formation of LIDAR return signals. Monte Carlo methods are widely used for solution of direct problems of laser pulse propagation in various optical media that essentially helps in interpretation of spatially-temporal returns [3].

The paper deals with Monte Carlo simulation of a laser pulse propagation in dispersive media and studying of photons 3D distributions (photon clouds) generated by light multiple scattering. It was shown that photon clouds may take the shape of paraboloids or toruses. Numerical results are presented for laser sensing of atmospheric clouds and ocean.

The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects 15-01-00783, 16-01-00145), the Program of Fundamental Research of the Presidium of RAS I.33, and the Program ‘Leading scientific schools of the Russian Federation’ (project NSh-5111.2014.1).

- 
1. Cahalan B., McGill M., Kolasinski J., Varnai T., and Yetzer K. THOR–Cloud thickness from off-beam LIDAR returns. *J. Atmos. Oceanic. Engnol.* 22 (2005), pp. 605–627.
  2. Davis A. B., Cahalan R. F., Spinhirne J. D., McGill M. J., and Love S. P., Off-beam LIDAR an emerging Engnique in cloud remote sensing based on radiative Green-function theory in the diffusion domain. *Phys. Chem. Earth (B)* 24 (1999), pp. 177–185.
  3. Prigarin S. M. Monte-Carlo simulation of multiply scattered LIDAR returns (software description), *Bulletin of the Novosibirsk Computing Center* (2011), Series Numerical Analysis, Issue 15, pp. 41–50.

Scientific advisor – Prof. Prigarin S. M.

## On the choice of the distribution density of nodes in the T.Kohonen scheme

Prasol D. A.

Novosibirsk State University

In the series of applied problems it is expedient to use *the adaptive meshes* (see, for example, [1]). Usage of meshes with concentrations in sub-domains, where the singularities of the approximated function (solution)  $\varphi(x)$  are located, improves the accuracy of approximation and gives quality pattern of behavior of the function  $\varphi(x)$  by considerably small number of nodes.

*The T.Kohonen scheme* [2] is considered as an effective algorithm for the “self-acting” obtaining of the adaptive nodes. It is the iterative procedure, and on every step the mesh nodes are “attracted” (by the certain rule) to the random point, which is realized with respect to the density  $f(x)$ . At the end of the process the nodes are situated nearly with respect to *the “equi-distribution” law* [1] with *the control function* [1] equal to  $f(x)$ .

The problem of the choice of the density  $f(x)$  is interesting and principal. Here the certain difficulties and uncertainties appear even in the one-dimensional case which is considered in this paper. For example, in the monograph [1] it is proposed (without certain reasoning) to use (for the considerably narrow class of problems) the control function of the form

$$f(x) = 1 + C_0 |\varphi(x)|^{b_0} + C_1 |\varphi'(x)|^{b_1} + C_2 |\varphi''(x)|^{b_2},$$

where the non-negative constants  $C_k, b_k; k = 0, 1, 2$  are selected experimentally and the corresponding mesh approximations are taken instead of derivatives  $\varphi'(x)$  and  $\varphi''(x)$ .

In this paper, the series of considerations and examples are presented, which show the expediency of the choice of the density  $f(x)$  in the form

$$f(x) = H \sqrt{|\varphi''(x)|},$$

where  $H$  is the corresponding normalize constant.

---

1. Khakimzyanov G. S., Shokin Yu. I. Difference schemes on Adaptive Meshes. Parts 1, 2. Novosibirsk: NSU, 2009 [in Russian].

2. Kohonen T. Self-Organizing Maps. Springer-Verlag, 2001.

Scientific advisor – Dr. Phys.Math., Prof. Voytishchek A. V.

## Numerical modelling of multifractal Brownian motion

Rybdylova G. S.  
Novosibirsk State University

Multifractal Brownian motion is a generalization of fractional Brownian motion where the Hurst parameter and local fractal dimension can vary within the time [1-9].

Consider a Holder continuous function  $H: [0, \infty) \rightarrow (0, 1)$  with parameter  $\beta > 0$ . A Gaussian random process  $W(t)$  is called (standard) multifractal Brownian motion if its expectation is equal to zero and correlation function  $R(t, s) = \mathbb{M}[W(t)W(s)]$  has the form

$$R_H(t, s) = \frac{C(H(t), H(s))}{2} (|t|^{H(t)+H(s)} + |s|^{H(t)+H(s)} - |t - s|^{H(t)+H(s)}),$$

$$C(H(t), H(s)) = \frac{\sqrt{\Gamma(2H(t) + 1)\Gamma(2H(s) + 1)\sin(\pi H(t))\sin(\pi H(s))}}{\Gamma(H(t) + H(s) + 1)\sin(\pi(H(t) + H(s))/2)},$$

where  $\Gamma$  is the gamma function.

This paper deals with numerical simulation of multifractal Brownian motion for different functions  $H(t)$ .

- 
1. Adler R.J. The Geometry of Random Fields. New York: Wiley, 1981.
  2. Ayache A., Cohen S., Levy Vehel J. The covariance structure of multifractal Brownian motion, with application to long range dependence. In ICASSP '00: Proceedings of the Acoustic, Speech, and Signal Processing, 2000. On IEEE International Conference, IEEE Computer Society, Washington DC, USA, pp. 3810 – 3813.
  3. Feder J. Fractals. New York and London: Plenum Press, 1988
  4. Keller D. Multifractal Brownian motion in vehicle crash tests, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 56 (2011), No. 2, pp. 437-447.
  5. Mandelbrot B.B., Ness J.W.V. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications // SIAM Rev, 1968, Vol. 10. pp. 422-437.
  6. Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1982, pp. 468.
  7. Peltier R., Levy Vehel J. Multifractal Brownian motion: definition and preliminary results, INRIA research report No. 2645, 1995.
  8. Samorodnitsky G., Taqqu M.S. Stable non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance. New York: Chapman & Hall, 1994.
  9. Schroeder M. Fractals, Chaos, Power Laws. New York: W. H. Freeman and Company, 1991, pp 429.

Scientific advisor – Prof. Prigarin S. M.

**Bias analysis for estimators of functionals of the sea surface spectral models**

Sagoyakova E. R.  
Novosibirsk State University

Spectral methods are an effective means of numerical simulation of the sea surface roughness when solving some problems. In this paper, the sea surface is treated as a homogeneous Gaussian random process.

We investigate the accuracy of the spectral model of the sea surface of the test problems associated with the evaluation functionals [1], the average number of intersections  $N_0(C)$  level C process  $x(t)$  on the interval  $(0, T)$

$$N_0(C) = \pi^{-1}(\sigma_1/\sigma_0) \exp(-C^2/(2\sigma_0^2))$$

and the average duration of intervals  $\theta(C)$  between emissions

$$\theta(C) = 2\pi(\sigma_1/\sigma_0) \Phi\left(\frac{C}{\sigma_0}\right) \exp(C^2/(2\sigma_0^2)),$$

where  $\sigma_n^2$  - is the variance process,  $\sigma_1^2$  - the variance of the derivative process, The  $\Phi$ -function of the standard normal distribution.

---

1. Prigarin S. M. Methods for the numerical simulation of random processes and fields.[in Russian]

Scientific advisor – Prof. Prigarin S. M.

## **Optimization of Multidimensional Sequence Recognition Method Based on Hidden Markov Models Using Parallel Hybrid Computations**

Uvarov V. E.

Novosibirsk State Engnical University

Hidden Markov models (HMMs) were presented and studied yet in 1970-s, however they were broadly recognized as a powerful sequence recognition tool somewhat later due to a rapid development of computing Engnologies. Despite the fact that HMMs show good results in practical sequence recognition tasks, their usage comes at a cost of high computational time. One of possible ways to optimize the implementation of HMMs algorithms is to use parallel hybrid computations.

In this work, optimization was performed using CPU (central processing unit) and GPU (graphics processing unit) hybrid computational scheme. Cross-platform and multi-purpose OpenCL framework was used to program parallel hybrid computations.

Baum-welch training algorithm has been optimized during this work as well as two recognition methods: a traditional one and one that is based on derivatives with respect to various HMM parameters. The traditional one is aimed at maximizing the likelihood of sequence being produced by a HMM. On the other hand, method based on derivatives uses support vector machine (SVM) method and recognition is performed in the attribute space of first derivatives of likelihood function logarithm with respect to various HMM parameters.

Execution times of parallel hybrid and sequential implementations of HMM algorithms were compared. On training stage, the optimized version appeared to be up to 10 times faster than sequential one. On recognition stage, the optimized version was up to 10.5 faster. On derivatives calculation stage, optimized implementation showed up to 5.8 speed-up.

The results of this work showed that the optimized versions of HMMs algorithms implementations are faster than sequential ones. However, this statement is true only for a big number of sequences being used for training simultaneously.

Scientific advisers – Dr. Tech, Prof. Popov A. A.,  
Cand. Tech., Assoc. Prof. Gulyaeva T. A.

## Computation of phase functions for up-to-date atmospheric cloud models

Zakovryashin A. V.  
Novosibirsk State University

Such optical phenomena like rainbows, glories and coronas arise due to the nature of the light scattering by water droplets. The dependence of the distribution density of the intensity of scattered radiation on the angle between incident and scattered photons is called a scattering phase function. The phase function of water-drop clouds is determined by the wavelength and size distribution of droplets. The purpose of this paper is to study an influence of water droplet size distributions on cloud phase functions. The cloud phase functions of water-droplet clouds can be calculated by the Mie theory approximation. A water droplet size distribution is usually approximated by the modified gamma distribution (see, for example, OPAC [1], MODTRAN [2] models).

In this paper, the computations of the phase functions were performed for the up-to-date cloud models with “mirror” gamma distributions and bimodal distributions of water droplet radius. According to [3], these distributions are typical for atmospheric clouds. Programs developed in the NASA’s Goddard Space Flight Center, the Ludwig Maximilian University of Munich, and the Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS (Novosibirsk) were used to compute the phase functions for different wavelengths.

---

1. Hess M., Koepke P., Schult I. Optical properties of aerosols and clouds: the software package OPAC, Bulletin of the American Meteorology Society, V.79 (1998), No.5, P.831-844.

2. Berk A., Bernstein L. S., Robertson D. C. MODTRAN: A moderate resolution model for LOWTRAN 7, Geophysics Laboratory, Bedford, Maryland, Report AFGL-TR-89-0122, Air Force Geophysics, Hanscom AFB, Ma 01731.

3. Romanov N., Erankov V. Calculated and Experimental Regularities of Cloud Microstructure Formation and Evolution, 2013

Scientific advisor – Prof. Prigarin S. M.

## **Численное стохастическое моделирование полей осадков**

Бабичева Г. А.

Новосибирский государственный университет

В работе рассматривается практическое применение алгоритма, основанного на модификации метода "по строкам и столбцам". Он позволяет моделировать двумерные однородные гауссовские поля на равномерной прямоугольной сетке. Ключевой его особенностью является то, что изолинии корреляционных функций этих полей имеют вид эллипсов, ориентированных в заданном направлении. Это позволяет применять алгоритм для моделирования случайных полей различных метеорологических элементов.

В данной работе этот алгоритм применяется для моделирования полей осадков по данным наблюдений для Маслянинского района Новосибирской области. Методом прямого моделирования реализаций случайных полей рассчитываются характеристики аномальных осадков. Для расчетов используются ресурсы Сибирского Суперкомпьютерного Центра.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 16-31-00038 мол\_а).

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, доцент Огородников В. А.

## **Построение регрессионной зависимости на основе нечеткой системы Такаги-Сугено с использованием нечеткой кластеризации**

Бебишева О. М.

Новосибирский государственный технический университет

Метод восстановления зависимости с использованием нечеткой логики является одним из сравнительно новых и многообещающих методов для построения регрессионных моделей. В данной работе способ был оптимизирован путем добавления предварительной нечеткой кластеризации на начальном этапе, так как кластеризация при правильном выборе числа кластеров позволяет разбить данные на компактные отделяемые друг от друга группы, обнаружить аномальные наблюдения и исключить их из рассматриваемой задачи. При кластеризации подмножества из  $X$  могут быть описаны матрицей принадлежности, где элементы также лежат на интервале  $[0, 1]$  и определяют степень принадлежности к кластеру.

Преимуществом данного подхода построения регрессионной зависимости является то, что он позволяет получить достаточно сложные модели в условиях зашумления входных данных, опираясь при этом на линейные модели.

Целью исследования было сравнение получаемых регрессионных зависимостей при построении моделей Takagi-Sugeno (TS) и моделей с использованием нечеткой кластеризации (fuzzy c-means [1], Густафсон-Кессель [2]). В качестве критериев качества результирующих моделей использовался критерий скользящего контроля.

Проанализировав результаты исследования, можно сказать, что метод построения зависимости на основе TS модели с использованием функций принадлежности полностью оправдывает свои возможности и демонстрирует высокую способность аппроксимации зависимости. При применении нечеткой кластеризации качество модели повышается, однако необходимо правильно подобрать количество кластеров, чтобы добиться минимального значения критерия скользящего контроля.

---

1. Bezdek, James C., Robert Ehrlich, William Full. Computers & Geosciences Vol. 10, No. 2-3, pp. 191-203, 1984 FCM: The fuzzy c-means clustering algorithm.

2. Gustafson, D. E., Kessel, W. C., 1979, Fuzzy clustering with a fuzzy covariance matrix. // IEEE CDC pp. 761-766, San Diego, USA.

Научный руководитель – д-р техн. наук, проф. Попов А. А.

## Построение регрессионных зависимостей с использованием алгоритма опорных векторов с квадратичной функцией потерь при наличии выбросов в данных

Гладкова А. В.

Новосибирский государственный технический университет

Метод опорных векторов с квадратичной функцией потерь (LS SVM) относится к непараметрическим методам оценки регрессии, которые широко используются в прикладных исследованиях. Однако наличие такого потенциального недостатка LS-SVM-решения, как использование функции потерь в виде суммы квадратов ошибок, может привести к получению менее устойчивых оценок при наличии выбросов в данных или когда основное допущение о гауссовом распределении переменных ошибки не выполняется.

В данной работе рассматривается взвешенная модификация [1], позволяющая преодолеть указанный недостаток. Робастная процедура предлагает введение весовых коэффициентов, которые определяются с помощью весовой функции на основе стандартизированной ошибки:

$$v_k = \begin{cases} 1 & \text{если } |e_k/\hat{s}| \leq c_1 \\ c_2 - \frac{|e_k/\hat{s}|}{c_2 - c_1} & \text{если } c_1 \leq |e_k/\hat{s}| \leq c_2, \\ 10^{-4} & \text{иначе} \end{cases}$$

где метод вычисления  $\hat{s}$  существенно зависит от предположений относительно закона распределения помехи и основан на медиане абсолютного отклонения.

В результате проведенных исследований было выявлено, что использование критерия скользящего контроля по отдельным объектам (LOO CV) в его стандартном варианте для настройки параметров алгоритма при наличии выбросов увеличивает вероятность получения переобученной модели. Также был введен дополнительный параметр в формулу стандартизации остатков, варьирование которого позволяет менять в процентном отношении количество наблюдений, которым приписывается практически нулевой вес.

---

1. Suykens J.A.K., Lukas L., Vandewalle J. Sparse approximation using least-squares support vector machines // Neurocomputing, 2000, v. 48, pp. 85-105.

Научный руководитель – д-р техн. наук, проф. Попов А. А.

## **Классификация эмоций по изображению человека с помощью скрытых марковских моделей**

Горлова Н. А.

Новосибирский государственный технический университет

Системы классификации эмоций по изображению человека могут найти широкое применение в различных отраслях. Несмотря на многообразие применяемых подходов к распознаванию, стопроцентной точности добиться не удастся. В данной работе рассматривается классификация эмоций с помощью скрытых марковских моделей (СММ) с использованием величин, посчитанных по характерным точкам лица. Для нахождения координат особых точек лица используется активная модель формы.

Для задания СММ необходимо определить вектор вероятностей начальных состояний, матрицу вероятностей переходов из одного скрытого состояния в другое, функции плотностей распределений условных вероятностей наблюдать текущее состояние, при условии, что находимся в некотором скрытом состоянии.

В работе рассматриваются два различных метода классификации эмоций. Первый метод основан на максимуме функции правдоподобия. Для каждой определяемой эмоции задаётся отдельная модель. В качестве последовательности наблюдений используются некоторые величины, посчитанные по характерным точкам лица одного изображения.

Для тестирования в работе используется база изображений Cohn-Kanade, используемая многими исследователями для сравнения качеств алгоритмов классификации эмоций по изображению.

Метод, основанный на функции правдоподобия, показал высокую точность (до 88%) при классификации сильно различающихся эмоций. При наличии среди эмоций близких друг к другу, точность классификации для данного метода существенно снижается.

Для повышения точности классификации был рассмотрен метод, основанный на многоуровневой СММ. В данном методе задается дополнительная СММ (модель верхнего уровня), каждое внутреннее состояние которой соответствует определенной эмоции. Метод, основанный на многоуровневой СММ, с высокой точностью (до 82%) классифицирует близкие эмоции, что не хуже, чем в опубликованных авторах исследованиях на той же базе изображений.

Научный руководитель – канд. техн. наук, доцент Гулятьева Т. А.

## Особенности вычисления транспортных характеристик электронной лавины в кислороде

Зайцева А. А.

Новосибирский государственный университет

Рассматривается задача моделирования движения электронов во внешнем электрическом поле [1]. Разработан алгоритм метода Монте-Карло переноса электронов в молекулярном кислороде. В алгоритме учитываются упругие столкновения электронов с частицами среды, неупругие столкновения, в том числе ионизация и поглощение [2]. Проведены расчеты транспортных характеристик для различных значений параметров (напряженности поля и давления). Приводится сравнение полученных результатов с экспериментальными данными и численными экспериментами других авторов [3]. Кроме того, численно исследованы границы применимости диффузионного приближения и его отличие от кинетической модели переноса.

---

1. Аккерман А.Ф. Моделирование траекторий заряженных частиц в веществе. – М.: Энергоатомиздат. – 1991. – 200 с.

2. Itikawa Y. Cross Sections for Electron Collisions with Oxygen Molecules // J. Phys. Chem. Ref. Data. – Vol. 38. – No. 1. – 2009. – p. 1 – 20.

3. Dutton J. A survey of electron swarm data // J. Phys. Chem. Ref. Data. – Vol.4. – No. 3. – 1975. – p. 577 – 851.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Лотова Г. З.

## Об одном способе гибридизации эволюционного алгоритма и метода роя частиц

Сороковиков П. С., Козырев С. И., Кривоносов И. А.  
Бурятский государственный университет, г. Улан-Удэ

В настоящее время для решения задач безусловной глобальной оптимизации часто применяют стохастические методы, что связано как с ростом мощности вычислительной техники, так и с необходимостью решения сложных задач, не поддающихся градиентным методам. Интересной особенностью подобных методов является их возможность модификации и гибридизации. В данной работе предлагается способ гибридизации эволюционного алгоритма и метода роя частиц.

Разработанный метод представляет собой модификацию эволюционного алгоритма [2] с добавлением в него нового оператора, идея которого позаимствована у метода роя частиц [1]. В данном алгоритме, как и в методе роя частиц, каждая «особь» хранит координаты лучшего из найденных ей решений и лучшее из пройденных всеми «особями» решений. Также каждая «особь» имеет свой вектор скорости перемещения.

Алгоритм был протестирован на наборе тестовых функций, имеющих различные экстремальные характеристики. Было проведено сравнение с базовыми методами: эволюционным алгоритмом и методом роя частиц. В силу стохастичности методов, запуск алгоритмов производился многократно из одних и тех же случайно выбранных в области определения функции стартовых точек. На всех тестовых функциях показано улучшение по сравнению с родительскими методами.

В результате работы был разработан гибридный прямой метод на основе эволюционного алгоритма и метода роя частиц. Разработанный алгоритм показал результат лучше, чем базовые методы.

---

1. Kennedy J., Eberhart R. C. Particle swarm optimization // In Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks, 1995, P. 1942–1948.

2. Whitley D. A genetic algorithm tutorial // Statistics and Computing, 1994, №4, P. 65–85.

Научный руководитель – канд. техн. наук Хандаров Ф. В.

## Применение кусочно-постоянных приближений функций в алгоритмах численного моделирования случайных величин

Шипилов Н. М.

Новосибирский государственный университет

В данной работе описан ряд ситуаций (использование приближенного моделирования случайных величин, метод исключения, выборка по важности и др.), в которых требуется моделировать (получать соответствующие численные реализации выборочных значений) случайные величины, имеющие составные плотности. Такие плотности можно получать, в том числе, с помощью использования кусочно-постоянных аппроксимаций используемых функций.

Несложно получить следующий результат.

**ТЕОРЕМА.** *Составная плотность вида*

$$f(u) = \sum_{i=1}^M p_i f_i(u) \chi_{(a_i, b_i)}(u); \quad p_i \geq 0; \quad p_1 + \dots + p_M = 1$$

*является элементарной [1] тогда и только тогда, когда плотности  $f_i(u)$  элементарные, а интервалы  $(a_i, b_i)$  не пересекаются.*

Используя эту теорему и утверждение из монографии [1] о том, что *метод обратной функции распределения* для одномерной элементарной составной плотности эквивалентен *модифицированному методу дискретной суперпозиции*, несложно (используя *квантильный метод* или *метод Уолкера* [1]) создать эффективный алгоритм моделирования одномерной случайной величины, имеющей составную плотность.

В качестве примера применения описанной вычислительной технологии рассмотрена соответствующая модификация алгоритма *метода «мажорантного сечения»* [1, 2]. Здесь определенную трудность составляет нахождение верхней границы сечения на каждом из интервалов  $(a_i, b_i)$ . Предлагается использовать приближенные алгоритмы построения кусочно-постоянных мажорант из монографии [3].

1. Михайлов Г. А., Войтишек А. В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Изд. центр «Академия», 2006.

2. Михайлов Г. А. Замечания о практически значимых алгоритмах численного статистического моделирования // Сибирский журнал вычислительной математики. 2014. Т. 17, № 2. С. 180-190.

3. Войтишек А. В. Дискретно-стохастические модификации стандартного метода Монте-Карло. Новосибирск: НГУ, 2009.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Войтишек А. В.

## Распознавание образов методом Монте-Карло при заданной конфигурации искомой области

Штерншис А. С.

Новосибирский государственный университет

Рассматривается задача теории распознавания образов – задача определения множества  $X \subset R^n$ : моделируется последовательность случайных точек – обучающих сигналов – в параллелепипеде  $P: X \subset P \subset R^n$ , причем для каждой точки-сигнала известно, содержится ли она в  $X$ ; используя эту информацию, следует для произвольной точки

$x \in P$  ответить, принадлежит ли точка  $x$  искомой области.

Эту задачу можно решать с помощью искусственных нейронных сетей или с помощью алгоритма конкуренции, описанного в статье [1]. Но здесь рассматривается множество  $X$  известной конфигурации – параллелепипед с ребрами, параллельными ребрам  $P$ .

Осуществляется моделирование согласно равномерному закону распределения в пространстве, то есть в ограниченном множестве, в котором заведомо находится искомое множество.

Предлагается заключить неизвестное множество  $X$  в последовательность вложенных областей с той же конфигурацией. Определенным образом вводятся понятия черной и белой областей, геометрические параметры которых изменяются с каждой новой смоделированной точкой.

Первая с вероятностью единица содержится в искомой области, вторая с вероятностью единица неизвестную область содержит.

Ключевой частью работы является теорема сходимости.

**ТЕОРЕМА.** Если число обучающих сигналов стремится к бесконечности, геометрические параметры черной и белой областей сходятся по вероятности к параметрам искомой области.

Теорема доказывается с помощью утверждения о том, что значения минимума и максимума при равномерном распределении стремятся по вероятности к соответствующим границам. Из теоремы следует, что с наперед заданной точностью за конечное число шагов можно определить расположение искомого объекта.

В работе рассматривается задача распознавания многомерных параллелепипедов и эллипсоидов.

---

1. Антюфеев В.С. Решение задач распознавания методом Монте-Карло.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Антюфеев В. С.

## Модель миграции газа вдоль цементной пробки в обсаженной цементированной скважине

Алипова Д. Т.

Новосибирский государственный университет

При эксплуатации нефтяных скважин возникает необходимость изолировать нефтеносные слои от водоносных, а также отделить нефтеносные слои друг от друга. Для этого применяется технология цементирования скважин. В результате застывания цементного раствора, помещенного внутрь обсадной колонны, образуется цементная пробка. К нижнему торцу пробки приложено пластовое давление, к верхнему — давление жидкости в скважине. Изменения этих давлений, а также других параметров среды, окружающей пробку, могут привести к нарушению целостности пробки или ее связи с обсадной колонной и прорыву жидкости из одной части скважины в другую. Работа посвящена моделированию трещины и оценке опасности нарушения изоляции.

За основу взята модель гидроразрыва пласта, основанная на гипотезе независимости поперечных сечений (РКН модель [1]), обобщенная на случай сложной геометрии сечения [2]. Одномерность данной модели позволяет существенно экономить вычислительные ресурсы и описывать распространение длинных трещин.

В работе модель нарушения изоляции цементной пробки обобщена на случай миграции газа [3]. Для описания течения газа используются уравнение Рейнольдса для сжимаемой смазки и уравнение состояния идеального газа.

В ходе работы были рассмотрены различные варианты расположения цементной пробки по отношению к обсадной колонне. Выполнен анализ чувствительности времени прорыва пробки газом к исходному напряженному состоянию цемента и давлению в резервуаре. Проведен сравнительный анализ времени прорыва пробки газом и несжимаемой жидкостью. Показано влияние сжимаемости на процесс распространения трещины.

---

1. Nordgren R. Propagation of vertical hydraulic fractures. // J. Pet. Engnol. - 1972. - P. 306–314.

2. Piva A. A crack along a circular interface between dissimilar media. // Meccanica. - 1982. - Vol. 17, No. 2, P. 85-90.

3. Lecampion B., Bungler A., Kear J., Quesada D. Interface debonding driven by fluid injection in a cased and cemented wellbore: Modeling and experiments. // Int. J. of Greenhouse Gas Control. - 2013. - P. 210-212.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук. Лапин В. Н.

## **Задача Стефана для уравнения теплопроводности при математическом моделировании промерзания влажного грунта**

Алипова К. А.

Национальный исследовательский Томский государственный университет

В работе рассматривается вопрос математического моделирования промерзания грунта в задачах метеорологии. Моделирование подобных процессов является очень важным, так как в весенне-осенний период процессы, протекающие в почве, оказывают существенное влияние на формирование поверхностных потоков тепла, которые в свою очередь влияют на физические процессы, протекающие в приземном слое атмосферы. Сложность заключается в том, что необходимо выбрать математическую модель и метод решения, который позволил бы достаточно точно описать данные процесс и при этом был бы не очень сложен с вычислительной точки зрения для применения в глобальных моделях численного прогноза погоды.

При моделировании процессов тепло- и влагообмена в почве в весенне-осенний период возникает граница между мёрзлой и талой частями грунта, которая изменяется с течением времени, что приводит к разделению всего слоя грунта на две области. Её особенность заключается в том, что положение границы области изменяется со временем.

Для решения данной проблемы используется задача Стефана для уравнения теплопроводности. Рассмотрены и реализованы два численных метода решения: метод ловли фронта и неявный метод. Проведено сравнение двух методов решения.

В дальнейшем планируется распространить полученный результат на математическую модель снежного покрова и объединить ее с моделью промерзания грунта.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ МК-6896.2015.5.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Богословский Н. Н.

## **Оптимизация распределения толщины лопасти рабочего колеса гидротурбины на основе пространственных расчетов потока**

Анкудинова А. С.

Новосибирский государственный университет

Институт вычислительных технологий СО РАН, г. Новосибирск

В ИВТ СО РАН с 2005 года используют программный комплекс CADRUN-opt [1] для расчета характеристик потока и КПД гидротурбины, а также для проектирования и оптимизации формы рабочего колеса гидротурбины. При этом варьируется форма срединной поверхности, а распределение толщины лопасти остается неизменным. В настоящей работе предпринята попытка оптимизации распределения толщины.

Параметризация толщины лопасти задается с помощью четырех параметров: точек максимальной толщины на ступице и ободе, значений толщины в указанных точках. Целью оптимизационного расчета было найти такой набор параметров толщины лопасти, при которых получится максимальный КПД и наименьшая площадь кавитации. Оптимизационный расчет проводится с помощью генетического алгоритма, который для каждого набора параметров рассчитывает характеристики потока и КПД гидротурбины. По результатам оптимизационного расчета, при котором варьировали исключительно параметры, отвечающие за распределение толщин, было выяснено, что таким способом мы можем увеличить КПД на 0,2-0,6% в зависимости от режима работы на гидротурбине, а площадь кавитации уменьшить на 3%.

Для более гибкого варьирования распределения толщин была предложена расширенная параметризация толщины лопасти уже с шестью параметрами: четыре из них такие же как и в старой параметризации, а также точка максимальной толщины в срединном поперечном сечении и значение толщины в указанной точке.

Расширенная оптимизация программно реализована и внедрена в оптимизационный комплекс CADRUN-opt. Показано, что использование расширенной параметризации позволяет еще больше повысить КПД и уменьшить площадь кавитации.

---

1. Черный С. Г., Чирков Д. В., Лапин В. Н. и др. Численное моделирование течений в турбомашинах. // Новосибирск: Наука, 2006.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Чирков Д. В.

## **Численное моделирование неустановившегося движения воды в дельте реки**

Антипова Е. А.

Новосибирский государственный университет  
Институт вычислительной математики  
и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск

В связи с интенсивным хозяйственным освоением устьевых областей крупных сибирских рек расчеты неустановившегося движения воды как в однорукавных, так и многорукавных устьях приобретает особую актуальность. Численное моделирование водного потока на основе уравнений Сен-Венана является весьма эффективным методом исследования многих природных процессов.

В работе представлен вывод уравнений неустановившегося потока в гидравлической идеализации (уравнений Сен-Венана) из уравнений сохранения массы и импульса (уравнений Навье-Стокса).

Для численного моделирования дельта реки схематически представляется как некоторый плоский граф. При этом участкам соответствуют ребра графа, а узлам – его вершины. В качестве неизвестных функций на отрезках задаются функции расхода и уровня поверхности воды. Граничные условия в узловых точках определяются из условий сопряжения (баланса расходов и равенства уровней в узле). Необходимые граничные условия в начальном и конечном створе участка русла рассматриваются как частный случай условий сопряжения.

В качестве метода решения исходных дифференциальных уравнений была использована абсолютно устойчивая неявная разностная схема со вторым порядком аппроксимации по пространству и первым по времени. Реализация данного метода зависит от типа рассматриваемого разветвленного русла. Получившаяся замкнутая система алгебраических уравнений решается методом прогонки.

Первый численный эксперимент проводился для однорукавной дельты реки, геометрия русла которой представляет собой призматический канал. Второй эксперимент был проведен для одной из главных протоков реки Лена, а именно Быковской протоки.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Крылова А. И.

## **Численный анализ нестационарных режимов естественной конвекции с переменной вязкостью в замкнутой полости с локальными изотермическими участками**

Астанина М. С.

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Естественная конвекция является важнейшим механизмом теплопереноса во многих приложениях: охлаждение элементов электронной техники, теплоперенос в солнечных коллекторах, выращивание объемных монокристаллов, получение однородного расплава материала. Такие процессы постоянно встречаются в нашей жизни и привлекают внимание исследователей.

Целью работы является математическое моделирование нестационарных режимов свободноконвективного теплопереноса в замкнутой полости, заполненной жидкостью с переменной вязкостью, при наличии двух источников энергии постоянной температуры и изотермически охлаждаемых вертикальных стенок.

При проведении расчетов предполагается, что внутри полости находится ньютоновская теплопроводная жидкость, удовлетворяющая приближению Буссинеска; режим течения является ламинарным; вязкость жидкости зависит от температуры. Дифференциальные уравнения в частных производных, описывающие анализируемый процесс, формулируются на основе нестационарных уравнений Обербека–Буссинеска для случая переменной вязкости, с использованием безразмерных переменных «функция тока – завихренность - температура».

Сформулированная краевая задача реализована численно методом конечных разностей второго порядка точности на равномерной сетке. Разработанная вычислительная методика протестирована на серии модельных задач, а также на множестве разностных сеток.

В процессе исследований было проанализировано влияние температурного напора, асимметричного тепловыделения от источников энергии, расстояния между изотермическими элементами, параметра вязкости и свойств рабочей среды на гидродинамику и теплоперенос внутри полости. Выводы опираются на распределения температуры, завихренности и изолиний функции тока, а так же на зависимости среднего числа Нуссельта на поверхности источников от определяющих параметров.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, доцент Шеремет М. А.

**Исследование неявной схемы для решения уравнений Максвелла в областях с различными масштабами**

Афонин Г. Д.

Новосибирский государственный университет

Для расчета электромагнитных полей зачастую используется известная схема с перешагиванием, обладающая условной устойчивостью. В работе предложена неявная конечно-разностная схема для решения уравнений Максвелла в трехмерном случае, с учетом различных масштабов области по различным направлениям, с целью повысить ее устойчивость. Новая схема удовлетворяет законам Гаусса для электрического и магнитного полей в разностном виде, а также сохраняет амплитуду волны и несущественно изменяет скорость ее распространения в зависимости от углов по отношению к осям координат. Создан двумерный код для расчета распространения электромагнитных волн в прямоугольной области. Проведены тестовые расчеты, показавшие, что предложенная неявная конечно-разностная схема не уступает по качеству стандартной схеме с перешагиванием и позволяет проводить расчеты электрофизических величин из уравнений Максвелла для областей с различными масштабами по пространству.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Вшивков В. А.

## Численное решение обратной задачи для двух фармакокинетических моделей

Вострикова Е. И.

Новосибирский государственный университет

В докладе рассмотрено численное решение обратной задачи для двух фармакокинетических моделей.

Система дифференциальных уравнений для модели контроля глюкозы-инсулина выглядит следующим образом:

$$(1) \begin{cases} \frac{dX}{dt} = -p_2 \cdot X(t) + p_3 \cdot (I(t) - I_b), X(0) = 0, \\ \frac{dG}{dt} = -X(t) \cdot G(t) + p_1 \cdot (G_b - G(t)), G(0) = G_0. \end{cases}$$

Здесь  $X$  - количество инсулина во внутритканевом пространстве,  $I$  - концентрация инсулина в плазме,  $G$  - концентрация глюкозы в плазме. Обратная задача состоит в нахождении параметров:  $G_0$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ ,  $p_4$ .

Также в работе рассмотрена математическая модель фармакокинетики и фармакодинамики Дигоксина в организме человека:

$$(2) \begin{cases} \frac{dD_{vas}(t)}{dt} = -\left(\frac{Q_D}{V_{vas}} + k_{vi}\right) \cdot D_{vas}(t) + k_{iv} \cdot D_{is}(t) + Q_D \cdot C(t), \\ D_{vas}(0) = 0, \\ \frac{dD_{is}(t)}{dt} = k_{vi} \cdot D_{vas}(t) - \left(k_{iv} + k_{on} \cdot (R_{tot} - DR(t))\right) \cdot D_{is}(t) \\ + k_{off} \cdot DR(t), D_{is}(0) = 0, \\ \frac{dDR(t)}{dt} = k_{on} \cdot (R_{tot} - DR(t)) \cdot D_{is}(t) - k_{off} \cdot DR(t), DR(0) = 0. \end{cases}$$

Здесь  $D_{vas}$  - количество Дигоксина в сосудистых тканях,  $D_{is}$  - количество Дигоксина во внутритканевом пространстве,  $DR$  - количество дигоксина на границе рецепторов. Обратная задача заключается в поиске параметров:  $k_{on}$ ,  $k_{off}$ ,  $R_{tot}$ .

Численное решение задач (1) и (2) было получено с помощью метода Рунге-Кутты. Для решения обратной задачи был использован метод Нелдера-Мида, а также метод максимального правдоподобия. Был проведен сравнительный анализ методов. В работе представлены результаты численных экспериментов для синтетических и реальных данных.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00382 мол\_а.

Научные руководители –

д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН Кабанихин С. И., Воронов Д. А

## Разработка модели движения жидкости с переменными плотностью и вязкостью в устройстве для отвода диффузионного слоя

Вьюнник Н. М., Иванова Н. В.

Кемеровский государственный университет

В пищевой промышленности важная роль отводится глубокой переработке пищевого сырья, что включает в себя разделение сырья на различные компоненты. Для этих целей целесообразно использовать мембранные технологии. Однако при фильтрации на мембране образуется диффузионный пограничный слой с повышенной концентрацией задерживаемых веществ, который увеличивает гидравлическое сопротивление и снижает производительность процесса. В данной работе предлагается математическая модель процесса концентрирования раствора высокомолекулярных веществ в конструкции с отводом диффузионного слоя как движение вязкой несжимаемой жидкости с переменной плотностью.

Нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости будем описывать системой дифференциальных уравнений Навье-Стокса с переменной вязкостью и плотностью. Для нахождения значений плотности и вязкости смеси используются следующие зависимости от концентраций компонент смеси:

$$\rho = \rho_2 \cdot C + (1 - C)\rho_1,$$

$$\mu = \mu_2 \cdot C + (1 - C)\mu_1;$$

где,  $\mu > 0$  – динамическая вязкость,  $\mu_2$  – динамическая вязкость примеси (задерживаемых компонентов),  $\mu_1$  – динамическая вязкость жидкости без учета примеси,  $\rho$  – плотность смеси,  $\rho_2$  – плотность примеси,  $\rho_1$  – плотность жидкости без учета примеси,  $C$  – концентрация примеси.

Для решения системы уравнений Навье-Стокса, используется схема расщепления по физическим факторам. При решении уравнений входящих в математическую модель использовались различные схемы и методы: схема стабилизирующих поправок, итерационный метод неполной аппроксимации, схема продольно-поперечной прогонки.

Предложенная в докладе модель позволяет изучить характер распространения примеси в устройстве для отвода диффузионного слоя. При проведении соответствующих расчетов модель позволит прогнозировать геометрические параметры устройства с целью интенсификации производительности.

Работа выполнена при поддержке проектной части Государственного задания № 1.630.2014/К.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Захаров Ю. Н.

**Исследование эффективности методов локации микросейсмических событий на модельных данных**

Галактионова А. А.

Новосибирский государственный университет

Сейсмический мониторинг относится к технологиям уменьшения риска опасных природных явлений и выявления каких-либо сейсмических событий. Он является неотъемлемой частью жизнеобеспечения населения регионов с выраженной сейсмической активностью и позволяет автоматически определять местоположение даже очень слабых сейсмических событий, что способствует изучению динамики тектонических разломов. Для сейсмического мониторинга используется сеть сейсмических станций, равномерно распределённая на площади исследований или охватывающая исследуемый участок.

Целью работы является анализ эффективности применения различных методов локации микросейсмических событий на модельных данных, полученных путем решения прямой динамической задачи лучевым методом. Синтетические сейсмограммы строятся для случая однородных и градиентных сред. Относительные времена вступлений продольных и поперечных волн находятся путем пикировки по этим данным. Обратная задача об определении положения источника решается различными методами: методом «засечек», минимизацией суммы квадратов временных невязок, а также с привлечением поляризационного анализа. Исследована зависимость точности алгоритмов локации от уровня погрешностей относительных времен вступления, неадекватности скоростной модели, частоты дискретизации и т.п. Приводятся результаты численных экспериментов.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доцент Белоносов А. С.

## **Реализация граничных условий асимметричной двумерной задачи в программе LCODE**

Горн А. А., Минаков В. А.

Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН, г. Новосибирск  
Новосибирский государственный университет

Традиционно частицы ускоряют в электрических полях, создаваемых высокочастотными резонаторами. В кильватерном ускорении электрические поля создаются внутри, как правило, осесимметричной плазменной ячейки с помощью пучка заряженных частиц или лазерного импульса, который называется драйвером.

Программный комплекс LCODE предназначен для моделирования кильватерного ускорения в случае, когда драйвером является пучок заряженных частиц. В данном коде счетное окно движется со скоростью света, и все вычисления производятся в квазистатическом приближении, то есть в предположении, что пучок заряженных частиц слабо меняется за один период плазменных колебаний, которое автоматически выполняется для ультрарелятивистских частиц.

Результатом моделирования являются распределения электрического и магнитного полей, а также потенциала кильватерной волны, которые определяются в ходе решения программой системы уравнений Максвелла.

LCODE позволяет проводить моделирование как в осесимметричной цилиндрической системе координат, так и в плоской декартовой. Последняя отличается возможностью решения задач с асимметричным начальным распределением частиц пучка или плазмы в пространстве, однако в ней отсутствует граничное условие, определяемое осевой симметрией системы. Это не позволяет применять те же алгоритмы для расчета полей, что и в осесимметричной цилиндрической системе координат.

Данная работа посвящена реализации граничных условий в плоской геометрии программы LCODE. В работе изучена проблема накопления ошибки, возникающей при расчете электрического тока в задаче с асимметричным начальным распределением частиц пучка или плазмы, а также разработан и оптимизирован алгоритм устранения накопления такой ошибки. В качестве проверки на корректность работы, с помощью реализованного кода проведены моделирования физических задач с известным результатом.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук Лотов К. В.

## Численное моделирование эффектов плоского ультррелятивистского пучка заряженных частиц

Горшунов В. С.

Новосибирский государственный университет

С точки зрения математического моделирования задачи с большими значениями релятивистского фактора порядка  $\gamma = 10^3$  существенно отличаются от задач с малыми значениями ( $\gamma = 7$ ). Поле движущейся заряженной частицы в лабораторной системе координат вытягивается в  $\gamma$  раз поперёк оси и сокращается в  $\gamma^2$  раз вдоль этой оси. Таким образом, классические подходы, такие как измельчение сетки в продольном направлении и увеличение области в поперечном, становятся неприемлемыми из-за серьёзного увеличения требований к ресурсам ЭВМ.

При фокусировке пучка его размеры в поперечном направлении сильно увеличиваются, вследствие чего возникают эффекты плоского пучка. Размеры трёхмерного плоского пучка в различных направлениях относятся как  $\sim 1:100:10000$ . Поэтому временной шаг выбирается не из соображений точности, а из соображений устойчивости. Таким образом, уменьшение сетки в поперечном направлении ведет не только к увеличению количества действий, связанных с количеством узлов сетки, но и к увеличению количества временных шагов программы. В связи с этим предложена и исследована неявная конечно-разностная схема, не уступающая по качеству стандартной явной схеме с перешагиванием и позволяющая проводить расчеты электрофизических величин из уравнений Максвелла для областей с различными масштабами по пространству. Показано соответствие результатов теоретическим формулам. Построены трёхмерные программы с использованием новой неявной и явной схем, моделирующие движение пучка заряженных частиц в электромагнитных полях. В данном подходе используется метод-частиц-в-ячейках (PIC-метод). Повышение точности расчётов может быть достигнуто увеличением количества узлов пространственной сетки. Однако, количество частиц также должно быть увеличено. При значительном увеличении этих характеристик необходимо произвести распараллеливание алгоритма. В данный момент идёт работа над распараллеливанием алгоритма.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Вшивков В. А.

## **Численные алгоритмы вариационного усвоения данных для задач химической кинетики**

Гришина А. А.

Новосибирский государственный университет

При прогнозировании динамики разномасштабных, быстро изменяющихся во времени процессов в атмосферной химии, биологии, медицине, на качество прогноза оказывают влияние неопределенности различной природы: в начальных и краевых условиях, в параметрах модели и т. д. Для минимизации их влияния используются методы усвоения данных наблюдений. Они позволяют уточнить прогноз с учетом имеющихся данных измерений.

Цель нашей работы – построить численные схемы для модели Робертсона, описывающей динамику концентраций трех веществ в ходе химических реакций, и модели, описывающей механизм распада озона в стратосфере. Во-первых, ставится цель: с помощью вариационных методов достичь выполнения материального баланса субстанций для численных аппроксимаций модели. Во-вторых, исследовать возможность и оценить точность восстановления функций состояния по имеющимся неполным данным о концентрации некоторых из входящих в систему веществ.

В ходе работы получены следующие результаты:

- на основе дискретно-аналитических схем решена прямая задача расчета концентраций веществ в системе Робертсона;
- с целью выполнения закона сохранения массы для полученного решения применен вариационный алгоритм с использованием метода множителей Лагранжа (сопряженных функций), для этого найден экстремум функционала, минимизирующего отклонение суммарной массы веществ от исходной массы;
- для системы уравнений фотохимического распада озона применен алгоритм вариационного усвоения 3DVAR с целью уменьшить влияние неопределенностей задания параметров модели на точность решения.

Таким образом, на примере двух систем уравнений химических реакций, изучена эффективность применения методов усвоения данных к задачам химической кинетики.

Работа выполнена при поддержке МК-8214.2016.1.

Научные руководители - д-р физ.-мат. наук, проф. Пененко В. В.,  
канд. физ.-мат. наук Пененко А. В.

## **Новые критерии скорости роста и выбора направления в трехмерной модели пошагового распространения трещины**

Гроо Н. А.

Новосибирский государственный университет

Для адекватного описания траектории неплоской трещины анализируются различные критерии скорости роста фронта трещины и выбора направления его отклонения, реализуемые в трехмерной модели пошагового распространения. Для определения величины приращения фронта трещины в каждой его вершине используется критерий плотности энергии деформации, согласно которому разрушение материала происходит при достижении плотности энергии деформации критического значения для этого материала. При этом в работе при расчете плотности энергии деформации учитываются все три моды коэффициентов интенсивности напряжений (КИН). Направление распространения трещины в каждой вершине фронта определяется как углом отклонения, так и углом кручения. Угол отклонения соответствует нулевому значению второй моды КИН, а угол кручения – нулевому значению третьей моды КИН. В подавляющем большинстве работ по моделированию распространения трехмерных трещин используется предположение о локальной плоской трещине и третья мода КИН, а, следовательно, угол кручения не учитывается при выборе направления распространения. В работе угол кручения вычисляется через производную от угла отклонения вдоль фронта трещины и поэтому значение третьей моды КИН записывается как функция угла отклонения. Это позволило свести задачу удовлетворения равенства нулю второй и третьей мод КИН к минимизации функционала по углу отклонения. Задача минимизации решается итерационным методом Ньютона на каждом шаге распространения трещины. Верификация предложенных критериев проведена на трехмерной задаче квазидинамического распространения нагруженной трещины в сжимаемой на бесконечности упругой среде.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Черный С. Г.

## Алгоритм метода конечных объемов для решения уравнений Навье-Стокса несжимаемой вязкой жидкости

Дервеедова Н. А.

Новосибирский государственный университет

В работе рассмотрен экономичный численный алгоритм решения уравнений Навье-Стокса вязкой несжимаемой жидкости на основе метода приближенной факторизации. Исходные уравнения выбираются в виде интегральных законов сохранения в декартовой или цилиндрической системах координат.

$$MH \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} U d\omega + \oint_S (W\bar{n}) dS = \oint_{\omega} F d\omega,$$

где  $\omega$  - элементарный объем расчетной области  $\Omega$ ,  $S = d\omega$  - граница данного объема,  $\bar{n}$  - внешняя нормаль к площадке  $dS$  границы  $S$ ,  $U$  - вектор искомых функций,  $W$  - матрица, составленная из столбцов потоков проходящих через данную границу объема. Здесь вектор искомых функций, векторы потоков и элементы тензора вязких напряжений и вектора правой части равны

$$U = \begin{pmatrix} p \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, W = H \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1^2 + p - \sigma_1^1 & v_1 v_2 - \sigma_1^2 \\ v_1 v_2 - \sigma_2^1 & v_2^2 + p - \sigma_2^2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1^1 = 2\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \sigma_2^2 = 2\mu \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \sigma_1^2 = \sigma_2^1 = \mu \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right),$$

$$d = -l \left( p + 2\mu \frac{v_2}{H} \right), H = r^l.$$

$x_1, x_2$  - направления координат. При  $l = 0$  получим декартовы координаты  $x_1 = x, x_2 = y$ , при  $l = 1$  - цилиндрические координаты  $x_1 = z, x_2 = r$ . Значение коэффициента  $l = 0$  соответствует плоскому случаю,  $l = 1$  - осесимметричному.

Для построения численного алгоритма используется метод конечных объемов, для его реализации выбрана схема приближенной факторизации со специальным расщеплением уравнений по физическим процессам и пространственным направлениям. Алгоритм апробирован на решении задач: течения Пуазейля в канале и течениях Куэтта и Тейлора-Куэтта между двумя цилиндрами при наличии торцевых крышек. Полученные результаты расчетов и проведенные сравнения с точными решениями и расчетами других авторов позволяют сделать вывод об эффективности предложенного алгоритма.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Ковеня В. М.

**Решение двумерной обратной кинематической задачи сейсмоки методом нелинейной лучевой сейсмотомографии.**

Кайгородцева А. А.

Новосибирский государственный университет

При обработке данных полевых наблюдений большую роль играет правильное определение скоростного строения верхней части геологической среды, примыкающей к дневной поверхности. Одним из наиболее употребимых методов его определения на настоящий день является метод сейсмотомографии. Помимо сейсмоки, метод томографии находит применение в медицине для восстановления структур тканей человеческого тела и в изучении волн цунами для восстановления океанического дна.

Данная работа посвящена численной реализации метода сейсмотомографии о восстановлении скоростного строения среды по заданному семейству временных годографов. Параметризация скоростной модели осуществляется путем триангуляции исследуемой области. Скорость (либо «медленность») ищется в вершинах полученных треугольников. Тем самым скорость в среде является непрерывной кусочно-линейной функцией. Это позволяет решать прямую кинематическую задачу без привлечения ресурсоемких численных методов решения ОДУ.

Рассматривается также случай восстановления «медленности» в вершинах треугольников. Для случая линейной «медленности» получены явные решения уравнения эйконала.

Приводятся результаты численных экспериментов на модельных данных.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доцент Белоносов А. С.

**Двумерное математическое моделирование данных индукционных каротажных зондирований на основе метода конечных разностей**

Карасенко А. П.

Новосибирский государственный университет

Один из способов изучения геологического разреза, пересеченного скважиной, – индукционный каротаж – основан на возможности различать пласты по удельной электропроводности. Каротажный зонд состоит из генераторной и приемной катушек. Генераторная катушка питается переменным током, в приемной катушке измеряется э.д.с. Измеряемое э.д.с. зависит от тока в генерирующей катушке и от токов, возникающих в среде. Распределение этих токов зависит от удельной электропроводности среды. Поэтому по измеряемой э.д.с. можно судить об удельной электропроводности пластов.

Рассмотрена двумерная модель осесимметричной среды, в которой скважина пересекает пачку горизонтальных слоев. Источником электромагнитного поля является катушка с током, расположенная внутри непроводящего корпуса. Плотность тока в источнике изменяется во времени по гармоническому закону и имеет одну ненулевую компоненту – тангенциальную. В осесимметричной среде такой источник порождает только тангенциальную компоненту электрического поля  $E_{\phi}$ .

В цилиндрической системе координат система уравнений Максвелла в проводящей немагнитной среде приводится к дифференциальному уравнению эллиптического типа относительно тангенциальной компоненты  $E_{\phi}^a$  аномального электрического поля. На границе области (на большом расстоянии от источника) ставятся условия Дирихле. Построенная с помощью метода конечных разностей консервативная разностная схема аппроксимирует данное уравнение с данными граничными условиями на неравномерной прямоугольной сетке со вторым порядком точности.

Численное решение получено итерационным методом сопряженных ортогональных сопряженных невязок (COCR). В результате работы создано ПО, позволяющее по заданным параметрам среды и тока в генерирующей катушке получать  $E_{\phi}^a$ .

Научные руководители – канд. физ.-мат. наук Суродина И. В.,  
канд. техн. наук Никитенко М. Н.

## **Моделирование процесса термического крекинга нефти в двумерной постановке**

Карнаков П. В.

Новосибирский государственный университет

Институт вычислительных технологий СО РАН, г. Новосибирск

Термический крекинг – технология переработки нефти с целью получения продуктов меньшей молекулярной массы, пригодных для использования в качестве моторного топлива, смазочных масел, а также сырья для химической промышленности. В ходе процесса нефть нагревают и подвергают действию катализаторов, что приводит к разрыву связей между атомами углерода и образованию газообразных, жидких и твердых углеводородов.

В настоящей работе предлагается модель процесса крекинга и её численная реализация. Модель описывает движение смеси вязких жидкостей с различными плотностями и химические реакции между составляющими смеси. Задача рассматривается в двумерной постановке.

Модель состоит из уравнений Навье-Стокса, уравнений переноса компонент смеси, а также системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих химические реакции. Уравнения Навье-Стокса разрешаются численно методом SIMPLEC на совмещенных сетках, уравнения переноса – методом частиц в ячейках.

В докладе представлена формулировка модели и численного метода, продемонстрированы результаты различных численных экспериментов. Обсуждаются подходы к параллельной реализации и необходимые вычислительные ресурсы.

Научные руководители – д-р физ.-мат. наук, проф. Черный С. Г.  
канд. физ.-мат. наук Лапин В. Н.

## Численный метод решения задачи определения параметров математической модели распространения туберкулеза

Каштанова В. Н.

Новосибирский государственный университет

Эпидемия туберкулеза сопровождается не только количественными, но и выраженными качественными изменениями этого заболевания, специфичными для разных регионов. Поэтому для разработки плана мероприятий по выявлению и лечению больных необходимо составить прогноз развития эпидемии в отдельно взятом регионе.

Одним из наиболее эффективных методов является математическое моделирование, а именно разработка индивидуальной математической модели, описывающей процессы распространения инфекции в популяции. Такие модели описываются системами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), коэффициенты которых характеризуют особенности популяции и развития болезни. Таким образом для уточнения модели для конкретной популяции необходима качественная оценка параметров модели (или их комбинаций) [1].

**Цель данной работы** – постановка, исследование и построение алгоритма численного решения задачи определения коэффициентов системы нелинейных ОДУ (обратная задача), описывающей процессы передачи туберкулеза с учетом лечения и лекарственной устойчивости [2], по дополнительным статистическим данным о решении прямой задачи (количество здоровых, латентно зараженных и инфекционных больных индивидов) в заданный момент времени.

Разработан алгоритм численного решения обратной задачи для заданной популяции, основанный на минимизации целевого функционала, и приведены результаты численных расчетов.

---

1. Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications // Berlin: Gruyter. 2011.

2. Trauer J. M., Denholm J. T., McBryde E. S. Construction of a mathematical model for tuberculosis transmission in highly endemic regions of the Asia-pacific // Journal of Theoretical Biology. 2014. No. 358. P. 74–84.

Научные руководители –

чл.-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, проф. Кабанихин С. И.,  
канд. физ.-мат. наук Криворотько О. И.

## Расчет лучей и лучевого расхождения для триангулированной трехмерной модели среды

Кириленко А. В.

Новосибирский государственный университет

Лучевой метод получил широкое распространение для численного решения задач математической физики. Последние годы характеризуются все возрастающим применением в разведочной геофизике трехмерной сейсморазведки с площадными системами наблюдений. Поэтому остается актуальной проблема разработки эффективного современного математического обеспечения по решению 3D-задач кинематики и динамики объемных волн для класса сред, достаточно «покрывающего» нужды практики. При этом, по сравнению с двумерным случаем, немного более сложной является задача лучевого трассирования из заданного положения  $M_0$  источника в заданную серию точек  $M = M_i, i = 1, 2, \dots, N$ , образующих, вообще говоря, двумерную расстановку приемников на поверхности наблюдения  $S$ .

В работе реализован алгоритм лучевого трассирования, расчета лучевого расхождения и пристрелки для триангулированной трехмерной модели среды. Особенность алгоритма заключается в том, что расчет луча ведется по явным формулам, которые обеспечены линейной скоростью внутри каждого из тетраэдров. Произведено сравнение построенного алгоритма с уже существующими аналогами, основанными на решении системы дифференциальных уравнений. В ходе исследования также рассмотрены другие случаи параметризации скоростного строения среды, для которых решение уравнения эйконала находится в явном виде. На основе построенных алгоритмов составлен комплекс программ решения прямой кинематической задачи. Приводятся результаты численных расчетов.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доцент Белоносов А. С.

## **Мультипольные модификации метода граничных элементов для решения трехмерной задачи распространения трещины**

Корбанова Т. Г.

Новосибирский государственный университет

Для решения трехмерной задачи распространения трещины анализируются мультипольные модификации метода граничных элементов (МГЭ). В процессе распространения трещины растет число переменных задачи. Обычный метод граничных элементов не может быть применен к решению данной задачи при большом числе степеней свободы из-за больших затрат времени и оперативной памяти для хранения матрицы СЛАУ. Для преодоления этого недостатка предлагается использовать мультипольные модификации МГЭ. В них все граничные элементы делятся на группы-мультиполи, на основе техники построения октодеревя. В отличие от обычного МГЭ, который учитывает связи между опорными точками и каждым граничным элементом рассматриваемой области, в мультипольном МГЭ учитываются только вклады от близких элементов и удаленных мультиполей. В результате вместо всей матрицы СЛАУ требуется хранить произведение матрицы и вектора неизвестных. Применяя любой метод решения СЛАУ, например, метод обобщенных минимальных невязок GMRES или прямой метод LU-факторизации, можно получить решение поставленной задачи.

В настоящей работе решается трехмерная задача квазистатического распространения ненагруженной трещины в растягиваемой упругой среде. Проводится валидация и верификация нескольких мультипольных алгоритмов на известных решениях и экспериментальных данных задач упругости. На крупномасштабных задачах получено уменьшение времени расчетов и затрат оперативной памяти.

Научный руководитель – д-р физ.–мат наук, проф. Черный С. Г.

## **Моделирование усталостного разрушения рабочего колеса гидротурбины вызванного ротор-статор взаимодействием**

Крюков А. Е.

Новосибирский государственный университет

Эксплуатация гидротурбины, осуществляемая в широком диапазоне ее мощностей, приводит к колебаниям напряжений в рабочем колесе (РК) с большими амплитудами. Из-за циклических нагрузок на колесо в нем образуются усталостные трещины, существенно уменьшающие срок службы конструкции. Даже при работе на одном режиме (одном значении мощности) РК подвергается спектру колебаний напряжений с различными частотами и амплитудами. Чрезвычайно актуально создание алгоритмов оценки ресурса колеса. В работе представлена численная модель усталостного разрушения РК радиально-осевой гидротурбины, вызванного ротор-статор взаимодействием. Модель состоит из трех подмоделей: нестационарного трехмерного потока жидкости, напряженно-деформированного состояния РК и усталостного разрушения. Трехмерный поток жидкости рассчитывается в приближении уравнений Эйлера одновременно в спиральной камере, во всех межлопаточных и межлопастных каналах направляющего аппарата и РК, в отсасывающей трубе. По нестационарным нагрузкам от жидкости на каждом шаге по времени определяются напряжения в РК в приближении уравнений упругого равновесия, решаемых методом граничных элементов. Множество статических напряженных состояний дает квазидинамическую картину циклического нагружения колеса. Место разрушения лопасти РК определяется положением максимальной амплитуды колебаний напряжений. Эквивалентные напряжения в РК не превышают критического значения и пластические деформации отсутствуют. Следовательно, повреждение от одного источника колебаний за фиксированное время можно оценить по кривой Веллера, представляющей зависимость амплитуды динамических напряжений от числа циклов до разрушения. Для оценки времени усталостного разрушения РК под действием всех циклических нагрузок используется правило линейного суммирования повреждений. Верификация разработанной модели проведена на РК гидротурбины преждевременно подвергшейся усталостному разрушению из-за некорректной оценки ресурса на этапе проектирования.

Научный руководитель – д-р физ.-мат наук, проф. Черный С. Г.

## Решение задачи Ламе о многослойной трубе для расчета температурных напряжений в обсаженной скважине

Куклин А. А.

Новосибирский государственный университет

Для добычи углеводородов с большой глубиной залегания используются обсаженные скважины. Одним из факторов, существенно влияющих на напряженно-деформированное состояние (НДС) этой конструкции, состоящей из стальной обсадной колонны, цементной оболочки и породы, являются температурные напряжения, вызванные изменением температуры пласта.

Для расчета температурных напряжений в настоящей работе используется задача Ламе о составной (многослойной) трубе. Эта задача в классической постановке описывает плоское деформированное состояние двух концентрических труб из различных материалов, нагруженных давлением. На границах между материалами ставятся условия непрерывности нормальных компонент напряжений и смещений и нулевое значения касательных напряжений и смещений.

В настоящей работе предлагается обобщение этой постановки для вычисления напряжений в случае  $N$  материалов с учетом температурных деформаций. Решение задачи сводится к решению СЛАУ размерности, совпадающей с количеством границ между материалами.

В предложенной постановке получено решение для случая обсаженной скважины, нагруженной внутренним давлением, состоящей из трех слоев и закупоренной скважины, имеющий дополнительный слой – пробку внутри обсадной колонны.

На основе аналитического решения проведен анализ чувствительности прочности конструкции к основным заданным параметрам: температуре, свойствам упругой среды: модулю Юнга и коэффициенту Пуассона.

---

1. Г. Ламе - "Лекции по математической теории упругости твердых тел" (leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides) (1852).

Научный руководитель: канд. физ.-мат. наук Лапин В. Н.

## Сравнительный анализ схем для расчета динамики частиц в электромагнитных полях в релятивистском случае

Лаговская К. В.

Новосибирский государственный университет

Данная работа относится к области решения задач физики плазмы и динамики частиц в электромагнитных полях. В настоящее время построено множество различных схем, позволяющих описать поведение заряженной частицы под действием электромагнитного поля. Однако большинство из них работают при малых значениях релятивистского фактора ( $\gamma \sim 2$ ). Известны случаи, когда имеющиеся методы не подходят для задач с большим его значением, так как подобные задачи существенно отличаются от предыдущих [1].

Целью данной работы является исследование динамики заряженной частицы в различных электромагнитных полях и её зависимости от релятивистского фактора. Исследования проводятся на схемах первого и второго порядка [2]. Для сравнения используются уже известные аналитические решения, если они существуют. В работе рассматриваются недостатки и достоинства каждой из схем, численно доказываются порядок аппроксимации, проверяется чувствительность к изменению начальных данных и дополнительных параметров. Особое внимание уделяется изучению зависимости точности решения схем от значения релятивистского фактора.

---

1. Вшивков В. А., Боронина М. А. Трехмерное моделирование динамики ультрарелятивистских пучков заряженных частиц: особенности вычисления начальных и граничных условий // Матем. моделирование, 24:2 (2012), 67–83.

2. Hong Qin, Shuangxi Zhang, Jianyuan Xiao, Jian Liu, Yajuan Sun, and William M. Tang Why is Boris algorithm so good? // Phys. Plasmas 20, 084503 (2013).

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Боронина М. А.

**Численное решение задачи уточнения параметров иммунного ответа  
для простейшей математической модели  
инфекционного заболевания Г.И. Марчука с запаздыванием**

Латышенко В. А.

Новосибирский государственный университет

Математические модели иммунного ответа, широко используемые для исследования динамики иммунной защиты организма при инфекционных заболеваниях, содержат большое количество параметров, которые характеризуют иммунный статус организма и свойства антигена. Оценка параметров системы уравнений по клиническим данным позволяет моделировать динамику заболевания у конкретного человека, а также строить прогнозы течения и исхода болезни.

В данной работе исследована простейшая математическая модель инфекционного заболевания Г.И. Марчука [1], состоящая из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений ОДУ с запаздывающим аргументом, которые описывают изменение числа антигенов, рост плазматических клеток, баланс числа антител и характеристику пораженного органа.

**Цель данной работы** – постановка, исследование и построение алгоритма численного решения задачи определения коэффициентов системы ОДУ с запаздыванием (обратная задача) по дополнительным статистическим данным о решении прямой задачи в заданный момент времени [2]. Для решения прямой задачи используется метод Рунге-Кутты-Фельберга четвертого порядка аппроксимации [3]. Разработан и проанализирован генетический алгоритм численного решения обратной задачи определения параметров и приведены результаты численных расчетов.

---

1. Марчук Г.И. Математическое моделирование в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты. - 3-е издание перераб. и доп.- Москва: Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит. 1991.

2. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство. 2008.

3. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. Москва: Мир. 1980.

Научные руководители –

чл.-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, проф. Кабанихин С. И.,

канд. физ.-мат. наук Криворотько О. И.

**Конечно-разностная схема для двухтемпературной модели взаимодействия лазерного излучения с металлами**

Лизунов С. А.

Новосибирский государственный университет

Численное моделирование играет важную роль для оптимизации технологии обработки материалов фемтосекундными (фс) лазерными импульсами, позволяя лучше понять происходящие при этом физические процессы. При воздействии фс лазерным импульсом на металлы энергия излучения поглощается электронами проводимости, тогда как кристаллическая решетка некоторое время остается холодной. Возникающее в результате сильно неравновесное состояние хорошо описывается двухтемпературной моделью, учитывающей плавление.

В данной работе была построена дивергентная неявная конечно-разностная схема, реализующая эту модель. В отличие от предыдущих работ в качестве переменных использовались тепловые энергии электронов и решетки, а не их температуры. Это позволило избежать введения дельта-функции при описании плавления и обеспечило консервативность схемы. Поскольку в работе использовались существенно нелинейные зависимости энергий от температур, то при вычислении температур по энергиям применялся метод Ньютона. Параметры задачи требовали большого шага по времени, т.е. перехода к неявной схеме. Для построения этой схемы при использовании тепловых энергий в качестве переменных была проведена соответствующая линеаризация.

Были проведены методические, а также физические расчеты для золота и никеля.

Научные руководители – д-р физ.-мат. наук Булгакова Н. М.,  
д-р физ.-мат. наук Жуков В. П.

**Расчет кинематики фронта волны цунами  
в глубоком океане лучевым методом**

Лукинова В. Л.

Новосибирский государственный университет

В работе рассматривается прямая задача численного моделирования процесса распространения волны цунами в открытом океане на большие расстояния. Эта задача является одним из этапов оперативного прогноза, когда очаг землетрясения уже локализован и требуется быстро определить районы возможных катастроф.

В приближении лучевого метода, скорость волны определяется формулой Лагранжа  $v = \sqrt{gh}$ , то есть только рельефом дна. При этом необходимо учитывать сферичность Земной поверхности. Для вычисления значений скорости в произвольной точке разработаны программы гладкой аппроксимации таблично заданных сеточных функций двух переменных, а также выведены дифференциальные уравнения для расчета лучей и лучевого расхождения с учетом сферичности.

На основе разработанных алгоритмов составлен комплекс программ, позволяющий строить волновые фронты, определять лучевое расхождение вдоль них, находить каустики и зоны тени.

Приводятся результаты численных расчетов по реальным данным батиметрии одного из районов Индийского океана.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доцент Белоносов А. С.

## Особенности вычисления плотности тока при решении задач физики плазмы методом частиц в ячейках

Льготина Е. В.

Новосибирский государственный университет

В данной работе рассматривается двумерная численная модель, описывающая динамику плазмы. Для решения задачи используется метод частиц в ячейках в приближении разреженной плазмы.

Рассматриваемые физические процессы описываются системой, состоящей из уравнения Власова и уравнений Максвелла (1) – (4):

$$\begin{aligned} d\vec{E}/dt &= c \cdot \text{rot}\vec{H} - 4\pi\vec{j} \quad (1) & d\vec{H}/dt &= -c \cdot \text{rot}\vec{E} \quad (2) \\ \text{div}\vec{E} &= 4\pi\rho \quad (3) & \text{div}\vec{H} &= 0 \quad (4) \end{aligned}$$

Необходимые для решения уравнений Максвелла плотности заряда и тока определяются по скоростям и координатам отдельных частиц:

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_j q_j R(\vec{r}, \vec{r}_j(t)), \quad j(\vec{r}, t) = \sum_j q_j \vec{v}_j(t) R(\vec{r}, \vec{r}_j(t)).$$

Здесь  $q_j$  – заряд частицы с номером  $j$ ; функция  $R(\vec{r}, \vec{r}_j(t))$  (функция ядра) характеризует форму, размер частицы и распределение в ней заряда.

Существует два подхода к решению уравнений Максвелла: 1) решение уравнений (1) – (4) с корректировкой значения электрического поля, полученного с учетом решения уравнения Пуассона для поправки к электрическому потенциалу  $\Delta\phi = \text{div}_H(\vec{E})^* - 4\pi\rho$  ( $\text{div}_H$  – разностный оператор дивергенции), и 2) исходя из нахождения плотности тока из уравнения неразрывности  $\partial\rho / \partial t + \text{div} \vec{j} = 0$  (5) (используя метод, предложенный в [1] Вилласенором и Бунеманом для вычисления плотности тока при помощи точного учёта потока плазмы через границы ячеек). Второй метод позволяет автоматически удовлетворить разностному аналогу уравнению (5) и не требует решения уравнения Пуассона.

Цель работы – с помощью численных экспериментов сравнить оба подхода относительно точности полученного результата.

---

1. Villasenor J., Buneman O. Rigorous charge conservation for local electromagnetic field solver // Computer Phys. Comm. 1992. Vol.69. P. 306-316.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Вшивков В. А.

## **Моделирование человеческого оррерия для Томского музея науки и техники**

Лялюхова И. Е.

Национальный исследовательский Томский государственный университет

В настоящей работе представлены расчетные модели движения пяти планет Солнечной системы и короткопериодической кометы 67P/Чурюмова-Герасименко, предназначенные для реализации в виде человеческого оррерия в парковой зоне музея.

Оррерий представляет собой динамическую модель Солнечной системы, в которой люди играют роль движущихся планет. Он прост в использовании и привлекает людей разных профессий. Эта модель создана для того, чтобы в веселой и занимательной форме, представить основные понятия в области астрономии и показать достаточно точно изменения положения координат основных небесных тел.

Положения объектов Солнечной системы в оррерии представлены в виде стальных дисков, расположенных на земле. Каждая плитка несет ключевую информацию об орбитальном движении объекта. Во-первых, плитки пронумерованы и показывают количество шагов от начального момента времени; во-вторых, каждая плитка отображает эклиптическую долготу, расстояние от Солнца и истинную аномалию.

Целью настоящей работы являлся расчет человеческого оррерия для Томского музея науки и техники на начальную эпоху 2020.0. В связи с этим с использованием приближенных аналитических аппроксимаций изменения угловых элементов орбит планет, приводимых в астрономических ежегодниках [1], были получены необходимые орбитальные данные для 5 планет. Поскольку отведенная под оррерий территория ограничена 100 кв. м размеры Солнечной системы, на местности были ограничены, орбитой Юпитера. Расстояние в 1 м на местности соотнесено с 1 а.е. Вычислены орбитальные периоды планет в эпоху 2020.0, угловые расстояния между планетами, временной интервал и угловые расстояния между дисками для каждой планеты. С помощью этих данных пользователи смогут определить положения планет на любой момент времени.

---

1. Астрономический ежегодник на 2006 год [Н.И. Глебова и др.].// С.- П.: Изд-во ИПА РАН– 2005 . – С.701 .

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Бордовицина Т. В.

**Повышение точности локации очагов сейсмоакустической эмиссии по данным ЗС мониторинга малой сейсмической группы в Приэльбрусье**

Максимова А. Г.

Новосибирский государственный университет

Сейсмический мониторинг позволяет изучить региональную или локальную сейсмическую активность данной территории. Найденные параметры сейсмических событий в совокупности с историческими записями используются для сейсмического районирования. Эти данные могут представлять интерес для дальнейшего прогнозирования сейсмической активности.

Целью работы является изучение точности методов локации источников сейсмических событий по данным ЗС мониторинга. Рассмотрены два метода решения обратной задачи: поляризационный анализ и метод засечек. Применение поляризационного анализа позволяет определить направление на очаг сейсмоакустической эмиссии. Разработанный алгоритм поляризационного анализа также позволяет с высокой точностью определять относительные времена вступления продольных и поперечных волн, что повышает точность методов локации. Одним из таких методов является метод засечек. Исследована роль различных параметров, влияющих на точность методов локации, таких как шаг оцифровки, средние скорости распространения волн, наличие градиентов скоростей.

Анализ полученных результатов позволяет оценить эффективность рассмотренных методов локации применительно к экспериментальным данным, полученным в ходе экспедиционных работ в Приэльбрусье.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доцент Белоносов А. С.

## Математическое моделирование спектрально ограниченных оптических импульсов в среде с положительной дисперсией

Машарова Д. А.

Новосибирский государственный университет

Создание высокоэффективных и компактных волоконных лазеров считается одним из наиболее ярких достижений квантовой электроники. В общем случае схема лазерного резонатора состоит из активного волокна, усиливающего сигнал, насыщающегося поглотителя, синхронизирующего моды, пассивного волокна и ответвителя. Резонатором служат перечисленные устройства, замкнутые в кольцо.

В настоящее время существует проблема оптимизации выходной энергии в такой системе. С физической точки зрения интересно рассматривать среду с положительной дисперсией, так как в ней генерируются импульсы с большей энергией, чем классические солитоны. Положительной дисперсией обладает пассивное волокно, которое составляет большую часть длины лазера, а влияние остальных устройств системы можно считать распределенным по всей длине лазера. Поведение огибающей электро-магнитного импульса  $A(z, t)$  описывается следующим уравнением:

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial z} = \left( \frac{i\beta_2 L}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - i\gamma L |A|^2 \right) A + \left( \sigma - \frac{\kappa}{1 + |A|^2 / P_{SAM}} \right) A.$$

Данная модель более точно описывает распространение импульса в длинном волоконном лазере, и для этого уравнения найдено единственное приближенное аналитическое решение.

Целью работы является нахождение численного решения данного уравнения и сравнение его с аналитическим приближением. Еще одной задачей является оптимальный выбор параметров устройств лазерного резонатора для максимизации выходной энергии сигнала.

Для численного решения уравнения используется симметричный Фурье-метод расщепления по физическим процессам.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Федорук М. П.

## **Комплексная динамика в углеродно-азотной модели злаково-бобового пастбища**

Неупокоева К. Г.

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

Определяющей чертой современных комплексных математических моделей экологических процессов выступает их сложность, под которой понимается внутренняя структурная сложность объекта моделирования и большое количество процессов физической, химической и биологической природы, требующих адекватного математического описания для исследования изучаемых феноменов в ходе компьютерного эксперимента. Структурная и функциональная сложность приводят к тому, что создание целостной гармоничной модели нового поколения становится возможным только совместными усилиями коллективов или сообществами специалистов из разных предметных областей.

Физиологическая модель злаково-бобового пастбища используется для изучения динамики этих конкурирующих видов. В нашей модели мы рассматриваем углеродно-азотные пулы и потоки, объединяющие конкурирование за свет и минеральный азот почвы, а также, включающие в себя процессы азотфиксации, улетучивания и распределения сухого вещества. Так же можно рассчитать относительную распространенность пастбища и охват вредителей и болезней. Мы рассматриваем динамическое поведение этих видов при условии отсутствия временной отсрочки для циклического прохождения азотом сквозь запас органических веществ в почве. Исследуются результаты воздействия различных временных отсрочек, ассоциированных с запасом органических веществ в почве на динамику системы: поведение становится сложным, нелинейным и показывает мелкие или крупные колебания при двух частотах. Изучается высокая чувствительность системы как к исходным данным запаса органических веществ в почве, так и к любому фотосинтезному конкурентному преимуществу. Обсуждается применение этих результатов в отношении к наблюдениям и экспериментам со злаково-бобовыми пастбищами.

Механистическое понимание динамикотравяных и пастбищенских травосмесей может обеспечить возможность улучшенного управления сельскохозяйственной системой и повысить их жизнеспособность, в особенности по отношению к изменениям окружающей среды.

Научный руководитель – Абрамова А. В.

## Теоретическое и экспериментальное исследование движения биконуса по наклонным рейкам

Ноговицын П. И.

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, г. Якутск

Широко известен демонстрационный эксперимент, где биконус двигается по двум наклонным рейкам в направлении вверх. Если на эти рейки положить цилиндрическое тело, то это тело катится вниз. С точки зрения закона сохранения энергии в движении биконуса никакого противоречия нет, т.к. центр тяжести биконуса на самом деле опускается вниз. В известной автору литературе нет точного описания движения такой системы. Целью данной работы является вывод уравнения движения биконуса по двум наклонным рейкам, анализ параметров его движения на основе решения этого уравнения и практическая проверка теоретических расчетов.

Система имеет следующие параметры: угол конусности биконуса, угол наклона реек и угла раствора между рейками. При зафиксированных значениях этих параметров система имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты  $q$  выберем расстояние между вершиной и точкой, находящейся на пересечении плоскости поверхности реек и перпендикуляра опущенной к этой плоскости из центра биконуса. Уравнение движения, выведенное методом Лагранжа, имеет вид:

$$\ddot{q} \left[ \frac{2(ak)^2 m}{(ak)^2 - 1} (kh - q)^3 + I[(ak)^2 - 1](kh - q) \right] - I\dot{q}^2[(ak)^2 - 1] + mg \left[ \sin \varphi - \frac{\cos \varphi}{1 - (ak)^2} \right] (kh - q)^3 = 0$$

Здесь  $a = \text{ctg } \alpha/2$ , где  $\alpha$ -угол конусности биконуса;  $k = \text{ctg } \beta/2$ , где  $\beta$ -угол раствора реек;  $\varphi$ -угол наклона реек;  $m$ -масса биконуса,  $h$ -половина высоты биконуса,  $I$ -момент инерции(выражается через  $a, m, h$ ).

Полученное уравнение решается численно с помощью пакета «Mathematica». Проведен численный параметрический анализ движения биконуса. Полученные теоретические выводы совпадают с проведенными практическими экспериментами с биконусом.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Григорьев Ю. М.

## **Исследование поверхностных волн, возникающих при подводном оползне на континентальном склоне акватории Черного моря**

Палагина А. А.

Новосибирский государственный университет

Акватория Черного моря отличается достаточно высокой сейсмической активностью и подвержена потенциальной опасности возникновения волн цунами, вызванных не только сильными землетрясениями, но и сходом подводных оползней, которые представляют собой движение некоторой массы грунта вдоль склона дна. Поэтому вероятность таких событий должна учитываться при оценке рисков для густонаселенного черноморского побережья, а также для морских трубопроводов, предназначенных для транспортировки нефти и газа.

Ранее для численного моделирования поверхностных волн, генерируемых подводным оползнем, использовались, как правило, гидродинамические модели мелкой воды. В настоящей работе применяется более точная двумерная модель потенциальных течений, учитывающая вертикальные перемещения жидкости, при этом для описания движения оползня по неровному подводному склону использованы уравнения, полученные в работе [1]. Также описываются конечно-разностный алгоритм расчета на подвижных сетках и особенности построения сеток в мелководной части акватории, приводятся новые аппроксимации неотражающих краевых условий.

На реальном рельефе исследовано влияние неровностей дна на формирование поверхностных волн, порождаемых движением подводного оползня. Выявлены особенности волновых полей в зависимости от начального заглубления оползня, его размеров (длина и ширина) и от коэффициента трения.

Проведены сравнения максимальных заплесков при движении оползня по реальному дну и модельному. Рассмотрены волновые режимы, возникающие при движении оползня по континентальному склону, имеющему участки с различной кривизной и выявлены особенности его перемещения.

---

1. Beisel S.A., Chubarov L.B., Dutykh D., Khakimzyanov G.S., Shokina N.Yu. Simulation of surface waves generated by an underwater landslide in a bounded reservoir// Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2012, Vol. 27, No. 6, P. 539-558.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Хахимзянов Г. С.

## Численная реконструкция поля выпадения полидисперсной примеси от линейного источника

Петухова К. К.

Новосибирский государственный университет

В работе представлены численные решения и анализ полученных данных в обратных задачах для легкой, моно- и полидисперсной примеси. В задачах оцениваются параметры аэрозольных выбросов и плотности осадка препарата по данным наблюдения на различном расстоянии от линейного источника. За целевую функцию принимается среднеквадратичное отклонение измеренной и вычисленной плотности осадка. В случае лёгкой и полидисперсной примеси определяемыми параметрами являются эффективная высота источника и коэффициент взаимодействия примеси с растительным покровом. В монодисперсном случае также подлежит определению средняя скорость оседания частиц аэрозоля.

Для описания движения аэрозольного облака было использовано полуэмпирическое уравнение переноса примеси для мгновенного линейного источника бесконечной протяженности. Скорость ветра и коэффициент вертикального турбулентного обмена описываются с помощью теории подобия Монина-Обухова. Входными параметрами являлись расстояние точек отбора проб от источника, спектр размера частиц, а также данные измерений плотности осадка.

Процесс распространения аэрозольной примеси в атмосфере от мгновенного линейного источника высоты  $H$  описывается полуэмпирическим уравнением турбулентной диффузии

$$u(z) \frac{\partial Q}{\partial x} - w \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial Q}{\partial z},$$

с граничными и начальными условиями:

$$k(z) \frac{\partial Q}{\partial z} + wQ = 0|_{z=z_0}, k(z) \frac{\partial Q}{\partial z} = 0|_{z=h}, u(z)Q|_{x=0} = G\delta(z - H),$$

где  $x, z$  - горизонтальная и вертикальная координаты,  $Q(x, z)$  - импульс концентрации примеси,  $u(z)$  - скорость ветра (направление оси  $x$  совпадает с направлением ветра),  $k(z)$  - коэффициент вертикального турбулентного обмена,  $w$  - скорость гравитационного оседания частиц,  $h$  - высота приземного слоя атмосферы,  $\delta$  - дельта-функция,  $G$  - производительность непрерывного линейного источника (г/м).

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук Рапута В. Ф.

## Сравнение алгоритмов движения частиц в PIC методе

Пехтерев М. С.

Новосибирский государственный университет

В данной работе рассматриваются численные методы интегрирования уравнений движения заряженных частиц в электромагнитных полях. Уравнения движения записаны для частицы с массой  $m$  и зарядом  $e$  для трёхмерного случая в проекциях на оси координат для релятивистских задач.

Особенность подхода к решению данной задачи характеризуется тем, что особое внимание уделяется методам, которые требуют минимального числа вычислений правой части на одном шаге интегрирования.

Была рассчитана траектория движения частицы и правильность её движения в магнитном поле, проверено сохранение полной энергии.

В работе использовался алгоритм Бориса, а так же его сравнение с методами четвёртого порядка, а именно: Рунге-Кутта, метод Штёмера, метод типа предиктор-корректор Хэмминга.

Для всех перечисленных методов проводились численные эксперименты для тестовой задачи, имеющей аналитическое решение. Дано сравнение погрешностей численных результатов по указанным методам для различных временных шагов.

Научный руководитель: д-р физ.-мат. наук, проф. Вшивков В. А.

## **Математическое моделирование процесса розжига огневого забоя в одной модели подземного газогенератора**

Полухина М. Е.

Кемеровский государственный университет

Глубокая переработка угля одна из самых сложных и трудоёмких задач в угольной отрасли. Решение данной задачи позволит улучшить экономические показатели топливно-энергетического комплекса и решить важные вопросы экологической безопасности окружающей среды. Решением данных проблем может быть подземная газификация углей, которая представляет собой процесс подземного горения угля, получения при этом горючих газов путем нагнетания в угольный массив окислителя и последующего их использования для получения тепла, электроэнергии или различных химических продуктов.

В данной работе для моделирования процесса розжига огневого забоя рассматривается двумерная математическая модель подземного газогенератора по методу “потока” на начальной стадии его работы на основании уравнений механики многофазной недеформируемой пористой реагирующей среды. Математическая модель ПГУ представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими начальными и граничными условиями, являющихся следствиями законов сохранения.

Целью данного исследования являлось установление закономерностей физико-химических и горно-технических особенностей розжига огневого забоя (горящая часть огневого пласта) и дальнейшего процесса распространения фронта горения по угольной поверхности (огневому штреку); моделирование процесса розжига огневого забоя от точечных источников на границе и разработка соответствующего вычислительного алгоритма. Построенные расчеты также учитывают фильтрацию газа в угольном пласте, изменение температуры, образование газовой фазы, движение огневого забоя, изменение концентраций газов и массовых долей компонентов среды.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Захаров Ю. Н.

## Моделирование течений жидкости с погруженными телами

Попенов А. Ю.

Новосибирский государственный университет

Применение классических методов вычислительной гидродинамики для моделирования переноса тел сложной формы вязкими жидкостями сопряжено с рядом существенных трудностей. Требуется отдельно определять движение тел и строить подвижные топологически сложные и подробные расчетные сетки на каждом временном слое. Это значительно повышает сложность алгоритмов и увеличивает расчетное время. Поэтому в таких классах задач целесообразно применять модифицированные методы на основе метода погруженных границ (Immersed Boundary Method).

На основе метода погруженных границ, разработана математическая модель движения вязкой несжимаемой жидкости с погруженными в нее телами. Вводятся две отдельные сетки, декартова расчетная сетка для численного решения системы уравнений Навье-Стокса и лагранжева сетка для представления погруженной границы. Для моделирования взаимодействия между жидкостью и обтекаемым телом в уравнения Навье-Стокса добавляется член, описывающий воздействие границы на жидкость. Эта сила вычисляется на основе расположения расчетных точек погруженной границы, и изменяет течение. Для вычисления параметров течения жидкости используется метода SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations, частично неявный метод для уравнений со связью по давлению). Для трансляции границ погруженных тел на каждом шаге по времени решается методом Эйлера задача переноса.

В работе рассматривается движение вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале. В качестве погруженных тел рассматривались жесткие цилиндры, ориентированные поперек потока. Исследовано, изменение характера движения жидкости при добавлении в нее цилиндров.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Есипов Д. В.

## **Алгоритм моделирования распространения радиальной трещины гидроразрыва**

Прокопчик К. В.

Новосибирский государственный университет

При моделировании распространения трещины гидроразрыва пласта (ГРП) необходимо учитывать влияние течения жидкости в трещине, деформацию и разрушение породы. Уравнения, описывающие эти процессы, сильно связаны, что усложняет поиск их совместного решения.

В работе [1] предложен алгоритм совместного решения, в котором на каждом шаге распространения трещины задается величина ее приращения. Соответствующий этому приращению шаг по времени находится в процессе итерационного решения задачи «гидродинамика-упругость», описывающей деформацию породы и течение жидкости. В этом алгоритме невозможно задать величину шага по времени, что осложняет его использование в задачах проектирования ГРП и не позволяет применять его для описания процесса закрытия трещины.

В настоящей работе на примере модели радиальной трещины [2] предлагается модификация описанного алгоритма. В ней шаг по времени задается непосредственно, что позволяет избежать указанных недостатков. Для поиска величины приращения трещины используется метод релаксации, причем на каждой его итерации необходимо перестраивать расчетную сетку и решать задачу «гидродинамика-упругость». Это существенно снижает скорость сходимости алгоритма, что было продемонстрировано серией тестов.

В дальнейшем планируется увеличить скорость алгоритма путем выбора оптимального метода решения задачи «гидродинамика-упругость» и использования одной и той же сетки при поиске величины приращения трещины, а также использовать алгоритм в задачах оптимизации ГРП.

---

1. Алексеенко О.П., Есипов Д.В., Куранаков Д.С. Двумерная пошаговая модель распространения трещины гидроразрыва // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 2011. – Т. 11, № 3. – С. 36-59

2. Лапин В.Н., Черный С.Г., Есипов Д.В., Д.С. Куранаков Математические модели гидроразрыва пласта // Вычислительные технологии. – 2014. – Т.19, № 2. – С.33-61.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Лапин В. Н.

**Система обработки результатов моделирования динамики  
околозвездного диска при планетообразовании: автоматизированный  
поиск локальных экстремумов плотности**

Пустоваров А. А.

Новосибирский государственный университет

Одна из важнейших задач современной астрофизики - изучение процессов планетообразования. Существует гипотеза, связывающая образование зародышей планет с развитием гравитационных неустойчивостей в газовых дисках вокруг молодых звезд. Для изучения процессов образования неустойчивостей, аккреции и массопереноса в таких околозвездных дисках разрабатываются различные физические модели и программные комплексы численного моделирования.

Цель данной работы - разработка системы пост-процессинга результатов моделирования околозвездного диска, позволяющей проводить разделение процессов массопереноса и волновых изменений плотности газа.

В случае программных комплексов численного моделирования, использующих лагранжев подход к описанию сплошной среды, решить поставленную задачу можно путем отслеживания траекторий движения газовых неоднородностей и наборов частиц составляющих эти неоднородности.

Алгоритмы поиска неоднородностей в полях плотности условно делимы на несколько групп: friends-of-friends finders, НОР finders, spherical overdensities finders и phase-space finders [1]. В работе реализованы алгоритмы поиска неоднородностей на основе подхода НОР и отслеживания этих уплотнений между шагами вычислений. Проверена гипотеза о связи скорости движения области повышенной плотности по диску и изменения темпа аккреции газа из диска на звезду.

---

1. Alexander Knebe et al. // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2011. V. 415(3). Pp. 2293-2318.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Стояновская О. П.

**Численное моделирование функционирования сети онкомаркеров**

Сенотрусова С. Д.

Новосибирский государственный университет

Изучение онкомаркеров, направленное на выявление и прогнозирование исхода заболевания, является бурно развивающейся областью в современных медико-биологических исследованиях и клинической практике. В настоящее время в качестве потенциальных маркеров злокачественных опухолей рассматриваются белок p53, его отрицательный регулятор белок Mdm2, а также связанные с ними микроРНК (miRNA). В данной работе для уточнения прогностических свойств этих маркеров привлечены средства математического моделирования. В качестве базовой принята нелинейная многопараметрическая математическая модель функционирования сети p53-Mdm2, включающая в себя систему дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Для принятой модели численно реализована и изучена вычислительная технология предельного перехода от уравнения с запаздыванием к системе ОДУ, описывающих  $n$  гипотетических промежуточных стадий передачи сигнала в сети p53-Mdm2. В ходе численных экспериментов с привлечением ряда численных методов показано, что переход к модели с достаточно большим числом стадий может приводить к модели с запаздыванием. Исследовано асимптотическое поведение погрешности перехода, а также конкретные условия его численной реализации при конечных  $n$  для различных методов. Выполнен комплекс численных экспериментов, направленных на исследование поведения сети p53-Mdm2 в норме и в условиях стресса; определены области в пространстве параметров, в которых решение задачи выходит на стационарный режим или теряет устойчивость.

Выполнено численное исследование функционирования сети p53-Mdm2-miRNA в нормальных условиях и при стрессе, впервые изучена возможность рассмотрения miRNA в качестве онкомаркера при различных состояниях сети p53-Mdm2-miRNA для miRNA, находящихся в прямой функциональной взаимосвязи с белком p53. Все полученные решения имеют достаточно ясный медико-биологический смысл и подтверждают применимость принятой математической модели для изучения прогностических свойств рассмотренных онкомаркеров.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук Воропаева О. Ф.

## **Дрейф частиц в околозвездном диске: калибровочный тест для задачи моделирования динамики твердой фазы при планетообразовании**

Скопинцев А. М.

Новосибирский государственный университет

В настоящее время существуют две конкурирующие теории формирования планет в околозвездных дисках:

- Гравитационная неустойчивость, объясняющая формирование планет как результат развала газопылевого диска на отдельные области высокой плотности — самогравитирующие сгустки или зародыши планет;
- Ядерная аккреция, согласно которой сначала образуется плотное твердое ядро, а потом из диска налипают газовая оболочка.

На настоящий момент подтверждено открытие 1941 экзопланеты. Анализ результатов наблюдений показывает, что гигантские планеты обнаруживаются намного чаще вокруг звезд, в которых отношение содержания твердой фазы к массе газа (так называемая металличность) выше, чем среднее значение этой величины, определяемое космической распространенностью химических элементов.

В нашем подразделении изучается сценарий, связанный с образованием планет в результате гравитационной неустойчивости. Чтобы изучить режимы, в которых металличность сформировавшегося сгустка отличается от металличности диска, развиваются модели движения твердой фазы разного размера. Для тел, размер которых меньше 1 см, время выравнивания скоростей газа и твердой фазы становится на несколько порядков меньше, чем орбитальный период такого тела. Наличие процессов с различающимися характерными временами приводит к «жесткости» решаемой системы.

Цель работы — построить упрощенную численную модель дрейфа тел в околозвездном диске, с помощью которой:

- Откалибровать трение частиц с газом в численной модели, учитывающей комплекс процессов в диске;
- Определить предельный размер частиц, для которых время выравнивания скоростей газа и твердой фазы отличается не более, чем на 2 порядка от динамического времени.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Стояновская О. П.

## **Разработка системы мониторинга вертикального ствола шахты на основе волоконно-оптических датчиков**

Созонов Н. С.

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Мониторинг инженерных сооружений шахты необходим для безопасной эксплуатации и предотвращения аварийных ситуаций. Используемые методы, такие как визуальный осмотр и лазерные измерения, не позволяют следить за состоянием конструкции в режиме реального времени, отслеживать динамические эффекты и уровень деформации в элементах армировки. Абсолютная пожаро- и взрывобезопасность, а также возможность вести опрос датчиков на значительном расстоянии позволяет создать систему мониторинга на основе волоконно-оптических датчиков.

Целью работы является разработка системы мониторинга ствола шахты на основе волоконно-оптических датчиков деформации. Определение расположения датчиков производилось на основе результатов математического моделирования.

Рассматриваемая модель включает в себя бетонную крепь ствола шахты в виде полого цилиндра внутренним диаметром 7 м и толщиной стенки 0,5 м с металлической армировкой внутри. На внешнюю поверхность цилиндра прикладывается гидростатическое давление грунтов. Решение задачи производилось в рамках теории упругости, для численной реализации использовался программный комплекс ANSYS.

На основании расчетов, моделировавших различные внешние воздействия, были: а) определены наиболее деформируемые места бетонной крепи и металлической армировки, б) определен уровень начальных деформаций конструкции, в) даны рекомендации по изменению существующей схемы армировки для минимизации уровня деформации. Характер деформирования армировки шахты совпадает с результатами натурными наблюдений.

Таким образом, на основании результатов математического моделирования разработана система мониторинга вертикального ствола шахты на основе волоконно-оптических датчиков деформации.

Научные руководители – д-р физ.-мат. наук, проф. Шардаков И. Н.

## **Алгоритм расщепления в методе конечных объемов для решения уравнений газовой динамики.**

Солдаткин М. А.

Новосибирский государственный университет

В работе рассмотрен экономичный алгоритм для численного решения уравнений Эйлера и Навье-Стокса сжимаемого теплопроводного газа. Для построения разностной схемы используется метод конечных объемов и схема предиктор-корректор с расщеплением уравнений по физическим процессам и направлениям. Этап предиктора состоит из двух независимых шагов, каждый из которых реализуется неявным алгоритмом. Реализация каждого этапа сводится к решению отдельных уравнений скалярными прогонами, что делает алгоритм экономичным. На этапе корректора реализуется явная схема. Для устранения осцилляций решения вводится монотонизатор решения, что позволяет практически устранить осцилляции.

Для оценки работоспособности предложенного алгоритма были проведены численные расчеты решения двух задач: одномерной задачи о распаде произвольного разрыва, для которой известно точное решение, и двумерной задачи о течении сверхзвукового газа в сужающемся канале. Полученные результаты расчетов и проведенные сравнения решений по предложенному алгоритму с точными решениями и расчетами других авторов позволяют сделать вывод об эффективности предложенного алгоритма.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-00191).

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Ковеня В. М.

## **Разработка и реализация алгоритмов решения задач индукционного каротажа**

Сулейманова К. А.

Новосибирский государственный технический университет

На сегодняшний день геофизические исследования скважин обеспечивают получение основной информации для решения важнейших задач геологии. В число основных геофизических методов исследования скважин входят методы каротажа. Они необходимы для изучения физического состояния самой скважины, а также параметров породы, расположенной в непосредственной близости к скважине. К основным видам каротажа относятся: боковое каротажное зондирование скважин, индукционный каротаж скважин и другие.

Целью данной работы является разработка программы моделирования электромагнитного поля и инверсии данных для технологии индукционного каротажа, а также анализ возможностей разработанной программы на синтетических данных с учетом возможного зашумления.

В ходе выполнения работы был разработан алгоритм и реализована программа решения обратной задачи. В качестве прямой задачи использовалась двумерная нестационарная осесимметричная задача с точечным источником. Для ее решения использовался метод конечных элементов с билинейными базисными функциями на прямоугольниках. Для аппроксимации по времени использовалась неявная трехслойная схема.

При решении обратной задачи минимизировался функционал невязки методом Гаусса-Ньютона. Для обеспечения сходимости процесса решения нелинейной обратной задачи использовались специальные регуляризации, которые обеспечивали получение «физических» значений проводимости и отсутствие пересечений границ слоев геологической среды.

На основании разработанных вычислительных алгоритмов была выполнена программная реализация, которая была протестирована на синтетических данных. Было установлено, что зашумление входных данных до 5% несущественно влияет на решение обратной задачи.

Научный руководитель – д-р техн.наук, проф. Персова М. Г.

**Решение прямой кинематической задачи сейсмоки лучевым методом для триангулированной двумерной модели среды.**

Тагильцев И. И.

Новосибирский государственный университет

В работе рассматривается прямая кинематическая задача о расчете лучей и лучевого расхождения в двумерных неоднородных средах. Эта задача является необходимым элементом реализации метода сейсмотомографии восстановления скоростного строения среды по временам первых вступлений.

Скоростная модель среды представляется в виде непрерывной кусочно-линейной функции, путем триангуляции исследуемой области и заданием значений скоростей в вершинах полученных треугольников. Расчет траекторий лучей в каждом из треугольников осуществляется по явным формулам. Рассмотрены также случаи задания в узлах среды "медленности", а также других вариантов параметризации скоростного строения среды, для которых существует явное решение уравнения эйконала.

На основе выведенных алгоритмов составлены программы, позволяющие рассчитывать кинематические и динамические характеристики волновых полей, порождаемых точечными источниками.

Приводятся результаты численных экспериментов на модельных данных.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доцент Белоносов А. С.

## Численное моделирование распада разрыва в средах с дисперсионными эффектами.

Тарасов В. С.

Новосибирский государственный университет

В данной работе рассмотрен процесс формирования и распада разрыва в разреженной плазме, для которой характерны дисперсионные эффекты. Предложена численная модель, описываемая уравнениями Власова-Пуассона для сред с эффектами дисперсии, а так же реализация этой модели. Для решения был использован метод частиц в ячейках с различными вариантами восстановления плотности распределения модельных частиц. Первый – с использованием функции распределения Больцмана, наиболее распространенный способ за всю историю развития моделирования физики плазмы и PIC-метода, в частности. Второй подход реализован с помощью функции распределения Малькова [1], которая была предложена сравнительно недавно и имеет ряд принципиальных отличий.

Целью исследований является сравнение численных результатов моделей гидродинамического подхода с физически более правильным решением, которое может быть получено кинетическим подходом. Использование кинетического подхода предполагает серьезные требования к ресурсам ЭВМ, поэтому изучение и улучшение моделей гидродинамического подхода актуально в наши дни.

Выполнены тестовые расчеты, получены результаты для каждой из моделей, описывающих распад разрыва. Также проведено сравнение этих результатов и выявлена наиболее эффективная модель.

---

1. Liseykina T. V., Dudnikova G. I., Vshivkov V. A., Malkov M. A. Ion-acoustic shocks with reflected ions: modelling and particle-in-cell simulations. *Journal of Plasma Physics*, vol. 81, October 2015, Cambridge University Press.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, профессор Вшивков В. А.

**Разработка аудиокодека с использованием вариационных алгоритмов  
идентификации экспоненциально-синусоидальной модели (ESM)  
звукового сигнала**

Хасина Е. М.

Новосибирский государственный университет

Целью работы является создание алгоритмов моделирования аудиосигналов на основе метода вариационной идентификации параметров моделирующего уравнения, а также написание аудиокодека с применением разработанных алгоритмов.

Сжатие аудиосигнала производится путём его представления суммой экспоненциально растущих/затухающих синусоид. Кадр сигнала моделируется решением линейного разностного уравнения заданного порядка путем минимизации расстояния между решением и моделируемым кадром по параметрам уравнения и краевым условиям решения. Минимизация целевой функции осуществляется итерациями с обновляемой обратной матрицей (ООМ) в пространстве параметров моделирующего уравнения, а также в пространстве корней характеристического полинома с помощью алгоритмов типа Ньютона (optim) математической среды Scilab.

Численные эксперименты проводились для моделей порядков от 1 до 40 с применением различных методов минимизации вариационной функции. Начальные приближения выбирались по формулам линейного метода наименьших квадратов для невязки модельного уравнения; затем применялись итерации ООМ для коэффициентов уравнения и на заключительном этапе уточняющие итерации по корням полинома с помощью процедуры optim.

На основе предложенной схемы был реализован аудиокодек и произведено тестирование на двух типах аудиофайлов: фортепиано и электрогитара. Для фортепиано достигнутая степень сжатия составляет в среднем в три раза, для электрогитары – в среднем в полтора раза при заданном уровне точности 5%.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, доцент Ломов А. А.

**Метод восстановления данных наблюдений на основе гармонического анализа временных рядов**

Хорошилов А. А.

Новосибирский государственный университет

Использование долговременных рядов данных космической тепловой съёмки для выявления тепловых аномалий в сейсмически активных зонах сопряжено с проблемой обнаружения и выбраковывания плохих данных, ведущих к потере или искажению информации. К таким данным относятся пиксели, соответствующие областям с высокой облачностью, и пиксели с высоким уровнем аппаратных шумов. В настоящей работе рассматривается алгоритм гармонического анализа временных рядов HANTS [1] для восстановления пропущенных данных, полученных с использованием спутниковых систем Terra-MODIS, на примере Тувинского землетрясения, произошедшего 27 декабря 2011 года с магнитудой  $M_s=6.7$ .

---

1. Alfieri S. M., Lorenzi F. De, Menenti M., Mapping air temperature using time series analysis of LST: the SINTESI approach, *Nonlin. Processes Geophys.*, 20, 513–527, 2013.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук. Воронина П. В.

## Основные свойства модельных пористых сред периодической структуры, образованных извилистыми каналами

Хромова Н. А.

Тюменский государственный университет

Падение цен на углеводородное сырье на мировом рынке делает задачу снижения себестоимости их добычи как никогда **актуальной**. Одним из направлений решения этой задачи является изучение фильтрационно-емкостных свойств горных пород. Проведение дорогостоящих лабораторных экспериментов по изучению этих свойств потенциально можно заменить вычислительным экспериментом на модельной пористой среде.

В работе рассмотрена модельная пористая среда периодической структуры, образованная извилистыми каналами переменного сечения. **Целью** исследования является определение основных свойств такой среды: пористость, просветность и проницаемость.

Пористость и просветность рассмотренной среды определяется из ее геометрии (аналитически или численно). Геометрия каналов и расчетная сетка были построены в открытом пакете SALOME. Проницаемость определена по результатам численного интегрирования системы уравнений Навье – Стокса в поровом пространстве. Вычисления проведены в открытом пакете OpenFOAM с помощью приложения simpleFoam. В силу того, что рассмотренная среда является периодической, то достаточно получить решение в объеме одного канала. Зная объемный расход флюида через вход (выход) канала, на основании уравнения Дарси определяем проницаемость среды.

Модельные пористые среды рассмотрены в широком диапазоне пористости. Для пористых сред, образованных каналами с большим аспектным соотношением (отношение радиуса канала в широкой части к отношению радиуса канала в узкой части) проницаемость значительно ниже, чем рассчитанная по формуле Козени, поскольку узкие места обладают высоким гидравлическим сопротивлением.

**Вывод:** рассмотренная методика определения основных свойств модельных пористых сред позволяет строить каналы произвольной формы и определять проницаемость по результатам численного интегрирования уравнений гидродинамики.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Игошин Д. Е.

## **Влияние впуска воздуха под рабочее колесо гидротурбины на амплитуду автоколебаний в режимах повышенной нагрузки**

Щербаков П. К.

Новосибирский государственный университет

Институт вычислительных технологий СО РАН, г. Новосибирск

В режимах повышенной нагрузки гидротурбины часто возникают автоколебания, причиной которых является гидродинамическая неустойчивость кавитационной полости под рабочим колесом. Одним из наиболее распространенных способов борьбы с этими явлениями является выпуск воздуха под рабочее колесо гидротурбины. Настоящая работа посвящена распространению программного комплекса CADRUN на случай расчета трехфазных течений «вода-пар-воздух» и исследованию с его помощью влияния впуска воздуха на автоколебания.

Математическая модель представляет собой 3D уравнения Навье-Стокса движения трехфазной смеси «вода-пар-воздух» для области гидротурбины, соединенные с 1D моделью гидроакустики для области напорного водовода. К уравнениям Навье-Стокса добавляется уравнение переноса объемной доли жидкости с источниковыми членами, отвечающими за конденсацию и парообразование, уравнение переноса объемной доли воздуха. Используется  $k-\epsilon$  модель турбулентности Кима-Чена.

Численный алгоритм основан на методе искусственной сжимаемости и неявном методе конечных объемов. Невязкие потоки аппроксимировались при помощи MUSCL схемы третьего порядка аппроксимации по пространству. Для аппроксимации вязких потоков использовалась центрально-разностная схема второго порядка.

В ходе тестовых расчетов было установлено влияние силы тяжести и плотности воздуха на картину течения. Было исследовано влияние скорости и радиуса впуска воздуха на форму кавитационной каверны, амплитуду пульсаций и картину течения в отсасывающей трубе гидротурбины. Расчеты проводились на двух различных сетках: базовой и подробной, сгущенной в области впуска воздуха. Проведенные расчеты подтверждают, что выпуск воздуха способен повысить давление в областях, где наблюдаются кавитационные явления, тем самым значительно снизить амплитуду автоколебаний. Результаты стационарных и нестационарных расчетов говорят о том, что при помощи впуска воздуха можно контролировать интенсивность кавитации.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Чирков Д. В.

**Численное моделирование пузырьковой жидкости**

Эрдыниев Э. Б.

Новосибирский государственный университет

Работа посвящена разработке численных моделей, алгоритмов и программ для моделирования волновых процессов в пузырьковой жидкости. В работе предлагается новая численная схема, основанная на методе частиц в ячейках, широко применяемая при решении задач физики плазмы, которая позволяет пройти этап «непрерывного» перехода к развитию разрыва и описанию динамики дальнейшего состояния его «берегов». Данная схема принципиально отличается от схемы частиц в ячейках Харлоу тем, что частицы имеют собственную скорость и поэтому границы с вакуумом не размазываются.

Математическая модель включает в себя уравнения газовой динамики для пузырьковой смеси, уравнение Рэлея для радиуса пузырьков и уравнение состояния для слабосжимаемой жидкости, и носит название Иорданского-Когарко-ван Вингардена.

В работе приведены примеры численного решения задачи образования разрыва в жидкости. Решение показывает полный разрыв жидкости с образованием волн разрежения и осцилирующей структуры.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Вшивков В. А.

### **Проблема снятия неоднозначностей, обусловленных взаимодействием прагматической пресуппозиции и отрицания**

Баджелидзе К. Р.

Новосибирский государственный университет

Проблема разрешения неоднозначности является одной из старейших проблем в компьютерной лингвистике. Попытка научить компьютер распознавать многозначности, возникающие в языке, представляет собой сложнейшую задачу, относящуюся к «AI-полным», т.е. задачам, для решения которых необходимо создать искусственный разум сравнимый с интеллектом человека. Очевидно, что для правильного понимания текста необходимо умение устранять попадающиеся в тексте неоднозначности. В контексте данной работы рассматриваются многозначности, возникающие при работе с прагматическими пресуппозициями.

Одним из способов распознавания пресуппозиций в предложении является применение к нему критерия отрицательности. Но при использовании этого метода неизбежно возникает ряд случаев, в которых навешивание отрицания дает неоднозначность предложения. К примеру, отрицание в высказывании: «Он не грешил, говоря неправду» может расшифровываться двояко: либо «Он не говорил неправду» – здесь отрицается действие, либо «Он говорил неправду, но это не грех» – здесь отрицание интерпретации. Одним из методов борьбы с подобными неоднозначностями является формулировка вопроса о существовании косвенного объекта: «Он сказал неправду?».

Несомненно, что решение проблемы многозначности является необходимой ступенью на пути к полному пониманию естественного языка. Большинство носителей языка не задумываясь способно разрешать такие задачи, руководствуясь контекстом, логикой или интуицией. Но для тех, кто только начинает учить язык, неоднозначности могут стать серьезной проблемой. Поэтому задачей данного исследования является изучение методов обнаружения и устранения многозначностей, обусловленных взаимодействием прагматической пресуппозиции и отрицания, а также разработка интерактивного средства обучения человека распознаванию такого вида неоднозначностей.

Веб-приложение разрабатывается с использованием синтаксического анализатора на основе грамматики связей. Для реализации приложения применяются языки HTML, PHP и JavaScript.

Научный руководитель – д-р филол. наук, проф. Тимофеева М. К.

## **Разработка программной библиотеки для генерации выражений исчисления высказываний**

Долженкова Н. А.

Вятский государственный университет, г. Киров

В современной жизни программисты часто сталкиваются с проблемой обработки и генерации математических или логических выражений. Несмотря на частое возникновение таких задач, и необходимостью их решения, на сегодняшний день в свободном доступе не существует готовых программных модулей, способных предоставить требуемые функциональные возможности в приемлемом виде. В большинстве случаев программисты реализуют все необходимые методы самостоятельно, что зачастую требует наличия серьезной математической подготовки. Таким образом, задача разработки универсальной расширяемой библиотеки для генерации и обработки выражений исчисления высказываний является актуальной.

Разработка велась с помощью языка программирования Java. Выбор основан на том, что этот язык является кроссплатформенным, а библиотека, реализованная с его помощью, будет иметь возможность сопряжения с любыми другими программными модулями. Библиотека содержит такие функции, как генерация выражения в заданном логическом базисе, лексический (посредством конечного автомата) и синтаксический (с применением расширенных форм Бэкуса-Наура) анализ, вычисление значения выражения для заданного набора переменных, всевозможные преобразования над деревом грамматического разбора, а также его оптимизация (сокращение числа вершин), преобразование заданного в виде дерева разбора выражения к строковому виду и т.д. Реализованные в библиотеке методы имеют несколько вспомогательных интерфейсов, что позволяет пользователю задавать собственные параметры для некоторых процедур.

Ключевой особенностью разработанной программной библиотеки является возможность генерировать выражение с задаваемыми пользователем количеством используемых переменных и глубиной вложенности скобок. Кроме того, библиотека позволяет выполнять качественный анализ полученного выражения с помощью вероятностных методов, и определять средний ожидаемый процент наборов переменных, на которых выражение обращается в истину (ложь).

Разработанная программная библиотека находится в свободном доступе.

Научный руководитель – Чистяков Г. А.

## Анализ типов в трансляторе с языка предикатного программирования

Зубарев А. Ю.

Новосибирский государственный университет

Язык предикатного программирования Р является статически типизированным языком с элементами неявной типизации. Типы языка Р могут иметь рекурсивную структуру и быть параметризованы переменными. Источником параметризации переменными является типовой терм **subtype**(Т х: р(х, n)), определяющий подмножество типа Т, для которого истинно логическое выражение р(х, n), где n – параметр типа. Пример: тип диапазон 1..n, определяемый как **subtype**(int х: х>=1 & х<=n). Целью данной работы является разработка алгоритмов анализа типов предикатной программы как части семантического анализа в экспериментальной системе предикатного программирования.

Анализ типов предикатной программы реализуется в следующей последовательности. Неявная типизация, определенная для 4-х видов конструкций, преобразуется в явную типизацию. Строится граф зависимости по типам. Для каждого типа проверяется, является ли он рекурсивным. Допустимой является рекурсия лишь по полям типов «структуры» и «объединения». Для каждой языковой конструкции программы определяется ее тип в зависимости от типов подконструкций. Допустимость типов ее подконструкций проверяется в соответствии с правилами языка.

Семантические правила языка формализованы с использованием трех видов отношений на паре типов: согласованности (существование общей мажоранты), совместности (вложение первого типа во второй) и тождества (взаимное вложение типов). Отношение вложения типов определено в виде 20-ти правил, в т.ч. и для рекурсивных типов. Для системы типов языка Р определены ковариантные позиции типовых термов. Вложение типов в ковариантных позициях влечет вложение типов, содержащих эти позиции. Сравнение параметрических типов сводится к проверке истинности логических выражений. Здесь предполагается использование SMT-решателей.

Разработана детальная спецификация системы типов языка Р, правил вложения типов, семантических правил языка и алгоритмов анализа типов.

Научный руководитель – канд. техн. наук Шелехов В. И.

## **Разработка алгоритма эффективной расстановки точек переключения в машинном коде**

Киреев И. Ю., Углянский И. Е., Павлов П. Е.  
Новосибирский государственный университет

Высокопроизводительные вычисления играют важную роль в современных науках, при этом для их реализации все чаще применяются высокоуровневые языки программирования. Преимуществами таких языков являются разработка с учетом принципов ООП, а также автоматическое управление памятью со сборкой мусора, что, с другой стороны, добавляет издержки производительности.

В ходе выполнения данной работы была разработана подсистема статического компилятора Java в объектный код, осуществляющая расстановку точек переключения потоков для эффективного управления памятью. В таких точках среда исполнения обладает достаточным количеством информации о состоянии потоков для выполнения точной сборки мусора. Это позволило сделать переход к кооперативной остановке потоков, что значительно повысило отказоустойчивость программ в условиях большого потребления памяти при минимальных накладных расходах по производительности.

Для минимизации накладных расходов была проведена оптимизация расстановки точек переключения в циклах. Учитывая финитность циклов, можно определить обратные дуги, постановка точек на которых будет являться избыточной. Алгоритм вычисления мест расположения точек был описан задачей потокового анализа. Результатом работы этого алгоритма является отображение узлов графа потока управления в значения свойства достижимости точки переключения. На основе этого отображения можно выполнить поиск дуг, при прохождении которых происходит смена значения достижимости, а именно в начале каждого подграфа, в котором скорая достижимость точки не гарантируется.

Также был проведен анализ влияния на производительность точек переключения в листовых методах. Была изготовлена специальная версия алгоритма, исключавшая расстановку точек в них. Однако измерения показали незначительную разницу по сравнению с основным вариантом: именно такие методы чаще всего попадают под оптимизацию встраивания в тело вызывающего метода. Таким образом, данная модификация алгоритма была признана излишней.

Научный руководитель – канд. техн. наук Шелехов В. И.

**Программа кластеризации разнотипных медицинских данных на основе ансамбля алгоритмов**

Латыпов М. Д.

Новосибирский государственный технический университет

Нарастающий в настоящее время объём различной информации и обнаруженные при работе с ним трудности показали, что для эффективной обработки данных нужно использование не только стандартных статистических методов, но и более сложных комплексных алгоритмов. Одним из направлений, занимающихся данными методами, стала дисциплина под названием интеллектуальный анализ данных (ИАД). ИАД основан на применении методов математического моделирования для решения задачи исследования данных с целью получения некоторых знаний об объекте. Одной из базовых задач ИАД является задача кластеризации.

На сегодняшний день существует порядка сотни методов кластеризации, основанных на различных математических принципах. Такое многообразие объясняется наличием ряда проблем, не позволяющих создать единый универсальный алгоритм под любые виды задач и типы данных.

К таким проблемам относятся:

- Проблема кластеризации объектов, описываемых совокупностью разнотипных признаков.
- Проблема повышения качества (точности и устойчивости) кластерных решений.
- Проблема размерности пространства признаков.
- Проблема наглядного представления результата.
- Проблема нелинейности исходных данных.

Возможным вариантом решения вышеназванных проблем является использование ансамблевых алгоритмов (ансамбля алгоритмов) кластеризации.

В рамках данной работы поставлена задача создания неоднородного кластерного ансамбля, и реализация его в составе программной системы. В качестве используемых алгоритмов кластеризации выбрано использование генетического алгоритма кластеризации и набора иерархических агломеративных алгоритмов кластеризации.

В качестве прикладной задачи, которая используется в качестве базовой для исследования в рамках данной работы, выбрана задача кластеризации медицинских данных.

Научный руководитель – канд. техн. наук, доцент Альсова О. К.

## **Верификация алгоритмов управления методами Model checking на виртуальных объектах**

Лях Т. В., Сизов М. М

Институт автоматики и электротехники СО РАН, г. Новосибирск  
Новосибирский государственный университет

На сегодняшний день рост значимости программного обеспечения в области промышленной автоматизации находится в противоречии с текущей практикой разработки управляющих программ. Тестирование управляющих алгоритмов в подавляющем большинстве случаев начинается только при запуске ПО на реальном объекте. Для решения проблемы тестирования алгоритмов управления (АУ) была предложена концепция виртуальных объектов управления (ВОУ) – программных имитаторов автоматизируемого технологического процесса [1].

Такой подход позволяет использовать итерационную модель разработки и отлаживать код АУ до этапа пуска-наладки. Однако чтобы рассмотреть возможные состояния алгоритма и изучить его реакцию на различные внешние события, верификация проводится в ручном режиме. В качестве базы для автоматизации рассматривался подход Model checking, обеспечивающий верификацию модели разрабатываемой системы [2], что означает дополнительное тестирование результирующего кода. Язык Reflex базируется на модели гиперавтомата и ориентирован на описание АУ, характеризующихся дуализмом, событийностью, синхронизмом и логическим параллелизмом. Было предложена схема бесшовной верификации АУ, описанного на языке Reflex, исключающая создание модели за счет трансляции текста Reflex в код на языке Promela и последующим анализом верификатором SPIN. Подход предполагает сначала раздельную верификацию участков кода АУ, независимых от ВОУ, и участков ВОУ, независимых от АУ. А затем их совместную верификацию. Такая схема позволяет использовать концепцию ВОУ в сочетании с подходом Model checking для автоматической верификации АУ при существенном снижении трудоемкости.

---

1. Зюбин В. Е. Процесс-ориентированное программирование: Учеб. пособие / Новосибир. гос. ун-т. 2011. 194 с.

2. Christel Baier, Joost-Pieter Katoen. Principles of Model Checking / The MIT Press. Massachusetts Institute of Engnology. 2007. 994 с.

Научный руководитель – д-р техн. наук Зюбин В. Е.

**About Ramsey type models with a large number of investors**

Baldorzhieva I. D.  
Novosibirsk State University

The Ramsey type model means a dynamic model of functioning of the two-level hierarchical system “the State - investor”.

The purpose of the research work is to study influence of the flat tax rate on behavior of the system “the State - investors”, in a situation when there is “a lot of” investors. It is necessary to establish uniform for all investors tax collection rules.

The state solves the problem of choosing the rate of tax  $\rho(f)=\rho=const$ , maximizing tax revenue on income during the reporting period  $[0,T]$ :

$$\sum_{i=1}^M \int_0^T \rho f_i(k_i(t)) e^{-\delta t} dt \rightarrow \max_{\rho},$$

Where  $M$  is the number of investors,  $\delta > 0$  is the discount coefficient,  $k$  is the capital-labour ratio,  $f_i(k_i(t))$  is the production function of the  $i$ -th investor, defined by management  $s_i(t)$ , found in result of the solution of the modified problem of optimal control from [1].

In this paper we will give the equation, allowing to find the optimal value of a rate for the problem with “a lot of” number of investors. Receiving this equation is based on the found formula for determining the optimal for the state tax rate in a situation when we have one investor.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Researches (grants № 16-06-00101 and № 16-01-00108).

---

1. Ashmanov S.A., Introduction to mathematical economics [in Russian], Nauka, Moscow, 1984.

Scientific advisor – Cand. Tech. Antsyz S. M.

**On existing of Laffer's points in discrete analogue of the Ramsey model**

Itskovich M. A.  
Novosibirsk State University

In this paper we consider the model of hierarchical system, consisting of the State and several companies (investors). The purpose of the research work is to define conditions of existing rational behavior strategies of all participants in the examined socio-economic system. We assume that the State gives the tax scheme and the rate of tax. Investors, knowing the strategy of the State and supposing that it is fixed, maximize their utility functions. As the utility function of the investor it is considered total consumption with discounting. The State adopts such a strategy where a greater amount of taxes is levied during the reporting period  $[0, T]$ . For solving such problems one can use well-known methods of decomposition that are based on rational division of the difficult problem and solving distinct subproblems agreeing further particular solutions for getting common optimal solution.

The analysis is based on modifying the Ramsey model. In the classical Ramsey model [1] the income of company is distributed between consuming and investments. However this model does not consider the existence of taxation therefore it decrypts the functioning of the system "the State - investors" not adequately.

As a result the discrete models, describing the functioning of such system with a distribution of incomes from the production between consumption, investments and property taxes, are constructed. The theorems of quasiconcavity of objective functions of problems of the lower and upper levels with time-independent part of consumption and the flat rate of taxation are proved. The sufficient conditions for the existence of the Laffer's points for the case of several investors were found.

This work was supported by the Russian Foundation for Humanities (grant № 16-02-00070 and Russian Foundation for Basic Researches (grants № 16-06-00101 and № 16-01-00108).

---

1. Ashmanov S.A. Introduction into mathematical economy. M. Nauka, 1984 (in Russian).

Scientific advisor – Cand. Tech. Antsyz S. M.

**About finding of the stochastic parameters influencing functioning of the market of real estate.**

Krakhalyov A.A.  
Novosibirsk State University

The market of real estate is a perspective segment of economy. Earlier in [1][2] some models of functioning of this market in the assumption that the prices and demand for apartments of different types in the short-term and long-term period are set were considered. The goal of the report to consider the market as set of three groups of subjects, thus each subject is modeled as the mathematical programming problem which stochastic parameters, including demand and the prices are. New methods of long-term prediction of the prices and a sentence are constructed. The model similar offered in [3] is for this purpose used. Algorithms of finding of numerical values of accidental parameters can be interpreted, as the solution of a stochastic differential equation.

In the report results of calculations will be provided, and also will be shown how dynamics of the prices and parameters of the market influence functioning of the market of real estate and process of coordination of plans of subjects of this market.

This work was supported by Russian Foundation for Humanities (grant № 16-02-00070).

---

1. Khutoretsky A.B. Analysis of the short-term equilibrium in the estate market with an application to the development of estate policy M.: EERC,2001.

2. Krakhalyov A.A. About the influence of the price dynamics on the functioning of the real estate market// Proceedings of the 53 th International Scientific Student Conference ISSC 2015: Mathematics. / Novosib. state. univ. Novosibirsk, 2015, p. 264.

3. Artemyev S.S., Yakunin M.A. Mathematical and statistical modeling in finance. Novosibirsk: ICMMG SB RAS, 2003

Scientific advisor – Cand. Tech. Antsyz S. M.

**An approach to the formation of regional development programmes taking into account the budget volatility**

Novikov A. O.  
Novosibirsk State University

Mineral resources are the industry's largest investment. Earlier in [1] a model of resource development in the region based on the principle of public-private partnership has been considered. This principle implies that in the process of development of the territory the state undertakes not only the part of the financing of infrastructure projects, but also the part of the costs caused by the loss of environmental compensation. Further details of interaction between the state and the investors are described in [2].

Model from [1] includes the problems of two-level integer linear programming. Earlier in [3] for solving this problem the following has been proposed: game-theoretical approach and the method of search reduction with help of which it is possible to build an optimal set of industrial projects carried out by the state and the investor.

In the report a new problem of linear stochastic programming will be presented, in which it is assumed that the budget restrictions in the model from [1] can be varied within a predetermined range. We put forward an approach to solve this problem based on its reduction to deterministic problem. The data about the Zabaikalye Territory development were used for numerical check of algorithms that implement the approach.

This work was supported by Russian Foundation for Humanities (grant № 16-02-00070).

---

1. Antsyz S.M., Kalgina E.S., Lavlinskiy S.M. Formation program for the development of resources in the region: some approaches [in Russian]. // Herald ZabGU 2013, №11 (102). Pp 118-124.

2. Lavlinskiy S.M. Models indicative planning of socio-economic development of the region's resources [in Russian]. - Novosibirsk: Publishing House of the SB RAS, 2008.

3. Novikov A.O. On the approach to the formation of the program of development of region [in Russian] // Proceedings of the 53 th International Scientific Student Conference ISSC 2015: Mathematics. / Novosib. state. Univ. Novosibirsk, 2015, p. 265.

Scientific advisor – Cand. Tech. Antsyz S. M.

**Вектор Шепли с априорными вероятностями образования коалиций.**

Банаев Ф. С.

Новосибирский государственный университет

С давних времен люди интересовались вопросом раздела выигрыша, достигнутого в результате какой-либо совместной деятельности. Порой члены общества полагают, что справедливый способ деления это разделить выигрыш поровну. Однако такое распределение не подходит для ситуаций, когда игроки в разной мере влияют на выигрыш.

Рассматривая эту проблему, Ллойд Шепли предложил правило распределения выигрыша максимальной коалиции между её членами. Шепли предположил, что множество агентов случайно упорядочено  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ , причем вероятность каждого упорядочения одинакова. В таком случае каждому индивиду можно приписать выигрыш, определенный как дополнительный выигрыш принесенный игроком в коалицию. Теперь итоговый выигрыш агента можно определить как среднее его маргинальных вкладов по всевозможным последовательностям (очередям). При этом вес коалиции  $S$  соответствует вероятности того, что в случайной очереди  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  перед агентом  $i$  стоят в точности элементы множества  $S$ . Тем самым вероятность присоединения игрока к коалиции зависит лишь от её мощности. Однако в реальности существует много ситуаций, когда присоединение одного игрока к коалиции происходит естественным образом, а вот присоединение другого затруднительно или вообще невозможно.

Целью работы является разработка принципа справедливого распределения выигрыша тотальной коалиции, который лучше соответствует экономическим реалиям. В основу модификации положен принцип определения вероятности образования очереди, заданный посредством формализованных взаимоотношений между игроками, описанных в терминах теории графов. У каждого индивида имеется уровень инициативной способности, и ребро, соединяющее двух индивидов, имеет вес, отражающий вероятность их «совместной работы в коалиции». Для расчета вероятности образования случайной очереди был разработан алгоритм, положенный в основу определения нового вероятностного распределения на множестве всех очередей. В итоге был разработан новый принцип определения справедливого дележа.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, доцент Маракулин В. М.

## **О двухуровневых задачах моделирования деятельности научного предприятия**

Верещагин С. А.

Новосибирский государственный университет

В последние годы перед российской наукой стоит серьезная задача по созданию инноваций, способных кардинально улучшить экономическое и образовательное положение страны в сложившейся геополитической обстановке мира. Государственные научные предприятия отличаются от прочих других предприятий тем, что у первых не стоит задача по максимизации прибыли. Таким предприятиям необходимо наращивать полезность выпуска научной продукции: статьи, изобретения, публикации в известных журналах. При этом для поддержания престижности работы в изучаемой сфере необходимо, в том числе, добиться справедливого распределения заработной платы среди страт научных работников.

В настоящем докладе рассматривается иерархическая система, состоящая из управляющего органа и нескольких научных предприятий. В качестве экономических регуляторов будут использоваться: субсидии, выдаваемые управляющим органом, и налоги, которыми облагаются научные предприятия.

Целью данной работы является построение и анализ математической дискретной двухуровневой оптимизационной модели подобной системы [см. 1]. Критерием верхнего уровня управления является максимизация полезности от деятельности научного предприятия. Полезность измеряется функцией, аргументами которой являются количество статей, научных разработок, публикаций. Критерием нижнего уровня является наиболее справедливое распределение заработной платы среди страт научных сотрудников.

Теоретические выводы будут подкреплены результатами практических расчетов на основе бухгалтерской документации ИГМ СО РАН и других институтах Академгородка.

Работа поддержана грантом РГНФ № 16-02-00070.

---

1. Анцыз С.М. Рыпалова О.А. О двух системах налогообложения: дискретные модели. Новосибирск. ИМ СО РАН, 2010.

Научный руководитель – канд. техн. наук Анцыз С. М.

**Теоретико-игровая динамическая модель маркетинга  
с кусочно-постоянными оптовым и розничным дисконтами**

Дьячкова Т. П., Тарелкин А. М.  
Новосибирский государственный университет

Исследуется ценообразование в структуре «производитель – ритейлер – потребитель». В работе [1] рассматривалось два вида дисконтов: оптовый (стимулирование ритейлера производителем) и розничный (часть дисконта, которую ритейлер направляет на снижение цены товара). В работе авторов [2] рассмотрены различные ситуации: постоянного оптового и кусочно-постоянного розничного дисконта, а также, наоборот, кусочно-постоянного оптового и постоянного розничного дисконта. Найдены равновесия по Нэшу и Штакельбергу.

В предлагаемой работе результаты [2] обобщаются на случай, когда и оптовый, и розничный дисконты являются кусочно-постоянными, причем уровни дисконтов фиксированы, а моменты переключений уровней переменные. Рассматриваются ситуации:

- сначала производитель меняет уровень дисконта, потом ритейлер,
- наоборот, сначала ритейлер меняет уровень дисконта, потом производитель.

Для различных частных случаев описаны (внутренние) равновесия по Нэшу и Штакельбергу.

Работа частично поддержана грантами РФФИ № 16-01-00108, № 16-06-00101 и РГНФ № 16-02-00070.

---

1. Bykadorov I., Ellero A., Moretti E., Vianello S. The role of retailer's performance in optimal wholesale price discount policies // *European Journal of Operational Research*, 2009. Vol. 194. №2. P.538-550.

2. Дьячкова Т. П., Тарелкин А. М. Теоретико-игровая динамическая модель маркетинга // *Материалы 52-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2014: Математика*. Новосибирск. НГУ, 2014. С. 110.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доцент Быкадоров И. А.

## **О влиянии различных видов несовершенной конкуренции на благосостояние общества**

Измайлов Т. А.

Новосибирский государственный университет

В работе исследуются функции социального благосостояния (косвенной полезности) в состоянии равновесия для трех типов несовершенной конкуренции – олигополии Курно, олигополии Бертрана и монополистической конкуренции – со свободным входом в отрасль, производящей горизонтально дифференцированное благо в условиях возрастающей отдачи от масштаба.

Традиционные представления о характере связи между уровнем конкуренции и благосостоянием потребительского сектора заключаются в том, что рост конкуренции неизбежно приводит к росту общественного благосостояния. В работе [1] было показано, что для указанных типов несовершенной конкуренции олигополия Курно реализует наиболее низкий уровень конкуренции, в то время как монополистическая конкуренция – наибольший из трех. В качестве меры несовершенства конкуренции использовался индекс Лернера.

Цель данной работы – показать, что рост конкуренции приводит к росту благосостояния лишь при определённых условиях. Более точно, в работе найдены достаточные условия на функции полезности потребителей, гарантирующие рост благосостояния. Показано, что эти условия заведомо выполняются для классов функций полезности CES, CARA и HARA, которые чаще всего используются в моделях экономики с несовершенной конкуренцией, что и приводит к ложному представлению об универсальности этого эффекта. Кроме того, построен класс функций полезности, генерирующий противоположный эффект, при котором рост конкуренции приводит к снижению благосостояния общества.

---

1. Parenti M., A.V. Sidorov, J.-F. Thisse, and E.V. Zhelobodko (2016) Cournot, Bertrand or Chamberlin: Toward a reconciliation. *International Journal of Economic Theory* (forthcoming)

Научный руководитель – канд. физ.-мат наук, доцент Сидоров А. В.

**О государственных дотациях на инвестиции, выделяемых из налоговых сборов: дискретные модели**

Ким Д. Л.

Новосибирский государственный университет

Изучение влияния различных видов налогов и разных схем налогообложения на функционирование экономики и ее отдельных субъектов интенсивно ведется более двух веков.

В работе [1] рассматривается динамическая модель иерархической системы государство – инвестор (глава предприятия) – производство. В модели предполагается, что часть налогов, собираемых с предприятий, направляется в виде дотаций на инвестиции (капиталовложения). Установлено, что доля налоговых сборов, возвращаемая на развитие производства, должна быть не меньше, чем доля дохода, направляемая главой предприятия на инвестиции. В [1] используется аппарат оптимального управления.

В настоящей работе изучается дискретная модель, формулировка которой базируется на [2]. Рассматривается экономическая система, состоящая из нескольких предприятий и органа управления. Деятельность предприятий регулируется с помощью пропорционального или прогрессивного налога на прибыль, при этом часть налоговых сборов, возвращается предприятиям в виде дотаций (аналогично [1]).

Целью работы является математический анализ возможности регулирования экономической системы с помощью той или иной схемы налогообложения с учетом дотаций на производство, определение области результативности этой схемы, в том числе при решении задачи сохранения пропорций производства.

---

1. Трубачева А.Е. О независимости верхнего уровня управления от формы налогообложения // Сибирский журнал индустриальной математики. 2006. Т.9. № 3(27). С. 139-147.

2. Анцыз С.М., Рыпалова О.А. О двух системах налогообложения: дискретные модели. – Новосибирск. 2010. – 32 с. – (Препринт / РАН Сиб. отд-ние. Ин-т математики; №252)

Научный руководитель – канд. техн. наук Анцыз С. М.

## Оценка параметров спроса на авиаперевозку на разных рынках

Козырев Я. С.

Новосибирский государственный университет

Современный российский рынок гражданских авиаперевозок формируется под влиянием множества факторов, которые усложняют проблему исследования данного рынка. На отечественном рынке авиаперевозок сегодня преобладает ценовая конкуренция. Высокая динамичность структуры и сегментации рынка, усиление конкуренции, ожидаемый рост пассажиропотока в четыре-пять раз, возможность проведения гибкой тарифной политики, освоения новых трасс резко увеличивают значимость управленческих решений и одновременно повышают риск и вероятность ошибок.

В данной работе рассмотрено влияние социально-экономических факторов регионов России и оценка эластичности по цене на формирование тарифов авиабилетов и пассажиропоток между двумя городами на основе моделей и предположений, изложенных в [1] и внутренних данных авиакомпании. Были выбраны объёмные рынки с большим числом рейсов, конкурентов. Учтены особенности трансферных и прямых пассажиров. Трансферный пассажир - пассажир, который доставляется в конкретный аэропорт из другого аэропорта одним рейсом, а далее пересаживается или продолжает маршрут другим рейсом. Также получена оценка потенциала рынка. Результаты получены с помощью знаний эконометрического анализа и применения статистических пакетов.

---

1. Комаристый Е. Н. Информационно-модельный комплекс для исследования рынка гражданских авиаперевозок/ Отв. ред. М. В. Лычагин. – Новосибирск: ИЭОПП СО РАН, 2006.

Научный руководитель – канд. экон. наук, доцент Ибрагимов Н. М.

## О максимизации производительности труда в модифицированной модели Рамсея-Солоу

Котова А. А.

Новосибирский государственный университет

Рассматривается двухуровневая система государство-инвесторы, в которой потребление инвесторов облагается пропорциональным налогом. Цель данной работы: найти значение налоговой ставки, при котором производительность труда в этой системе в заданный период будет максимальной.

Возникает задача:

$$\frac{\sum_{i=1}^n \int_0^T Y_i(t) e^{-\delta t} dt}{\sum_{i=1}^n \int_0^T L_i(t) dt} \rightarrow \max_r,$$

при условии, что доля выпуска  $i$ -го инвестора  $s_i(t)$ , идущая на инвестиции, определяется в результате решения задачи:

$$\int_0^T \frac{C_i(t)}{L_i(t)} e^{-\delta t} dt \rightarrow \max_{s_i},$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} Y_i(t) &= N_i(t) + C_i(t) + I_i(t), \\ N_i(t) &= r(C)C_i(t), \\ C_i(t) &= (Y_i(t) - N_i(t))(1 - s_i(t)), \\ I_i(t) &= (Y_i(t) - N_i(t))s_i(t), \\ 0 &\leq s_i(t) \leq 1, 0 \leq r(C) \leq 1, \\ \dot{K}_i(t) &= (Y_i(K_i(t), L_i(t)) - N_i(t))s_i(t) - \mu K_i(t), \\ \frac{K_i(T)}{L_i(T)} &= k_T > 0, \end{aligned}$$

где  $n$  – количество предприятий,  $K_i$  – объем основных фондов  $i$ -го предприятия,  $L_i$  – числовое выражение объема трудовых ресурсов,  $Y_i$  – объем выпущенной продукции,  $I_i$  – инвестиции в производство,  $C_i$  – потребление работников предприятия,  $N_i$  – налог на потребления,  $r$  – налоговая ставка,  $\delta$  – константа дисконтирования,  $\mu$  – темп амортизации фондов,  $k_T$  – фондвооруженность в момент  $T$ . Функционалом задачи инвестора является удельное потребление работников в заданном периоде.

В данном докладе будут предложены алгоритмы поиска оптимального решения этих задач.

Работа поддержана грантами РФФИ № 16-06-00101 и № 16-01-00108.

Научный руководитель – канд. техн. наук Анцыз С. М.

## О функционале благосостояния работников двухуровневой модели «Государство-Инвестор»

Кузьмина К. И.

Новосибирский государственный университет

В [1], [2] рассматриваются дискретные аналоги модели Рамсея-Солоу, модифицированные с учетом использования двух схем налогообложения: плоской шкалы и прогрессивного налога. Функционалом в [1] на нижнем уровне является удельное потребление. Критерий верхнего уровня в обеих работах - объем налоговых сборов. Целью настоящей работы является повышение минимальной заработной платы (благосостояния работников) на верхнем уровне модели («государство»). В докладе изучается динамическая модель функционирования системы «государство-инвесторы(предприятия)» в течение  $T$  моментов времени. Предполагается, что «государство» задает схему налогообложения и величину одной (в случае постоянного налога), либо нескольких (в случае прогрессивного налога) налоговых ставок. На нижнем уровне («инвестор»), зная стратегию государства, с учетом налогов на добавленную стоимость и акцизов максимизирует удельное потребление. В качестве функционала, который максимизирует «государство», принимается минимальный уровень оплаты труда.

$$\min_{\tau, k} \omega_{\tau, k} \rightarrow \max_{\chi_1, \chi_2}$$

Здесь  $\omega_{\tau, k}$  – средняя заработная плата на  $k$ -ом предприятии,  $k = \{1, \dots, L\}$ , где  $L$  – число инвесторов,  $\chi_1$  – ставка налога на добавочную стоимость,  $\chi_2$  – ставка акцизов.

В данном докладе будут предложены алгоритмы поиска оптимального решения задач обоих уровней управления.

Работа поддержана грантами РФФИ № 16-06-00101 и № 16-01-00108.

---

1. Itskovich M. A. The discrete analogue of Ramsey model with taxation of property. // Материалы 53-й Международной Научной Студенческой Конференции МНСК-2015: Математика. / Новосибирский Государственный Университет. Новосибирск, 2015, с.262.

2. Чаунина Т. Е. Об одной двухуровневой модели экономической системы «Государство-Предприятия». // Материалы 51-й Международной Научной Студенческой Конференции МНСК-2013: Математика. / Новосибирский Государственный Университет. Новосибирск, 2013, с. 124.

Научный руководитель – канд. техн. наук Анцыз С. М.

## Выбор метода расчета параметров модели оценки разработки нефтегазового лицензионного участка

Магаев Н. А.

Новосибирский государственный университет

Анализ методов проектов разработки нефтегазовых лицензионных участков позволяет рекомендовать использование нечетких множеств в условиях неточной неполной информации.

Дадим математические понятия о нечетких множествах. Зафиксируем произвольное множество  $X$ . Нечёткое множество  $A$  задаётся посредством функции принадлежности  $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$ . Значение  $\mu_A(x)$  есть число, лежащее между 0 и 1, показывающее степень принадлежности элемента  $x$  нечёткому множеству  $A$ . Равенство  $\mu_A(x) = 1$  означает, что  $x$  точно принадлежит множеству  $A$ ; равенство  $\mu_A(x) = 0$  говорит о том, что  $x$  точно не принадлежит множеству  $A$ . Такой инструмент, как нечеткие множества, придают эксперту гибкость, при оценивании численных показателей. В итоге, мы получаем возможность свести качественные экспертные оценки к числовым.

Чтобы вычислить необходимые параметры инвестиционного проекта, будем принимать денежный поток как набор трапециевидных нечетких чисел  $C_t = (ct_1, ct_2, ct_3, ct_4)$ ,  $t = 0, 1, 2, 3, \dots, T$ . Число  $ct_1$  интерпретируется как наименьшее возможное значение потока в момент времени  $t$ , поток ни при каких обстоятельствах не может опускаться ниже этого значения,  $ct_4$  - наибольшее возможное значение, а числа  $ct_2$  и  $ct_3$  образуют интервал в пределах которого, скорее всего, будет находиться значение денежного потока. Довольно часто для оценки используют треугольные нечёткие числа  $C_t = (ct_1, ct_2 = ct_3, ct_4)$ , при этом число  $ct_1$  есть пессимистическая,  $ct_4$  - оптимистическая, а  $ct_2$  - наиболее вероятная оценка денежного потока проекта.  $r_2, r_3, r_4$ ). Чтобы найти выражение для нечёткого NPV, нужно, как и в обычном случае, суммировать (нечёткие) дисконтированные значения для всех компонент денежного потока:

$$NPV = \sum PV(C_t)$$

Предлагаемый метод демонстрируется на примере оценки инвестиционного проекта разработки нефтегазового участка Восточной Сибири и показывает эффективность его использования.

Научный руководитель – канд. экон. наук, доцент Скопина Л. В.

## Оптимизация портфеля финансовых инструментов

Мошенец М. К.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет

Одним из факторов развитой мировой экономики является высокая степень участия общества в активном или пассивном инвестировании в активы фондового рынка, что является альтернативой простому банковскому депозиту. Современное финансовое инвестирование непосредственно связано с формированием инвестиционного портфеля.

Портфельное инвестирование помогает прогнозировать, планировать, контролировать результаты всей инвестиционной деятельности в секторах фондового рынка.

При формировании инвестиционного портфеля следует руководствоваться следующими правилами:

1. необходима безопасность вложений (неуязвимость инвестиций от потрясений на рынке инвестиционного капитала);
2. стабильность получения дохода является одной из основ формирования портфеля;
3. ликвидность вложений, то их способность участвовать в немедленном приобретении товара (работ, услуг), или быстро и без потерь в цене превращаться в наличные деньги.

Данная работа посвящена формированию оптимального портфеля по методу Г. Марковица.

Согласно теории Марковица, если рассматривается две акции, у которых одинаковый наклон средней линии, то выбирать для торговли необходимо ту, где меньше колебания. Если же наблюдается одинаковая амплитуда, то выбирается акция с более крутым наклоном средней линии. Но поскольку на рынке у всех бумаг разные характеристики, то теория Марковица строит множество оптимальных портфелей, в которых доля акций определена по соотношению «риск-доходность».

Результат исследования показал, что максимальную доходность приносят акции ОАО "Сбербанк" и ОАО "Фармстандарт". Таким образом, при заданном уровне доходности, равном, 50 % инвестору необходимо распределить капитал следующим образом: приобрести акции ОАО "Сбербанк" и ОАО "Фармстандарт". В итоге, его действия приведут к наиболее высокой доходности портфеля акций.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доцент Крицкий О. Л.

## О некоторых моделях накопительного страхования

Непша А. С.

Новосибирский государственный университет

В данной работе рассматривается актуарный рынок и появляющаяся на этом рынке новая страховая компания с некоторым известным начальным капиталом и известной функцией полезности дохода. Исследуется базовая модель: модель одной страховой фирмы, предоставляющей услуги накопительного страхования  $n$  клиентам. Для её изучения взяты условия существования страхового процесса из модели Барруа. Затем изучаются условия сохранения у фирмы клиентской базы. Основным управляющим инструментом, доступным страховой фирме, является «инвестиционная ставка», предлагаемая фирмой клиентам.

В работе рассмотрено 4 ситуации накопительного страхования.

1) Отсутствие страхового события. В этом случае страховая компания выплачивает клиенту сумму, на которую он застраховался (соответствует общей сумме взносов клиента за период страхования) с учётом начисленного процента (инвестиционной ставки).

2) Смерть или первая группа инвалидности плательщика. В этой ситуации страховая компания выплачивает 100% от суммы страхования с учётом начисленного процента и взносы клиента прекращаются.

3) Третья ситуация реализуется, если была установлена 2 или 3 группа инвалидности плательщика. Тогда сумма, выплачиваемая страховой компанией, составит некоторый заданный процент от суммы страховки. После этого клиент продолжит выплаты в том же порядке, что и ранее, а в конце страхового периода фирма будет действовать так же, как в 1).

4) Во всех остальных случаях сумма выплаты фирмы – случайная величина, зависящая от величины ущерба, понесенного клиентом вследствие страхового случая. В этом случае продолжение выплат аналогично продолжению пункта 3).

Первые три модели являются детерминированными. Для исследования четвёртой были рассмотрены два варианта функции полезности и два варианта функции распределения случайной величины.

В докладе будут приведены соотношения для рассмотренной ставки, учитывающие выгоды страхования для фирмы и клиента.

Научный руководитель – канд. техн. наук Анцыз С. М.

## **Применение метода реальных опционов к оценке стоимости нефтяного месторождения**

Петрова М. Е.

Новосибирский государственный университет

Одним из факторов успешного развития России в будущем является рост нефтегазодобывающей отрасли в настоящем. Однако для разведки и разработки месторождений требуются значительные инвестиции, а инвестору необходимы актуальные данные об экономически рентабельных на данный момент проектах освоения, как потенциальных объектах инвестирования.

При оценке нефтегазового месторождения существуют источники неопределенности: величина имеющихся запасов и будущая динамика цены на нефть.

В 1977 году С. Майерс предложил рассматривать рост возможностей компании, введя в употребление этот термин и проведя аналогию между финансовым и реальным опционом.

Реальным опционом называется право принятия инвестором решений, в зависимости от того, какие события будут предшествовать дню решения. С помощью дифференциальных уравнений, можно сделать вывод о выгодности, либо убыточности проекта, для реального рынка участков без учета котировок. Этот метод существует, как виртуальный продукт работы менеджера.

Один из методов оценки реального опциона - биномиальная модель, которая, по сути, является деревом решений, во время движения по которому в каждой точке принимаются решения, ведущие к увеличению, либо уменьшению стоимости актива.

С помощью этого метода будет показано использование метода реальных опционов в оценке стоимости нефтяного месторождения.

Научный руководители – канд. экон. наук, доцент Скопина Л. В.,  
д-р физ.-мат. наук, проф. Вшивков В. А.

**Экономико-математическая модель развития легкой промышленности России в условиях импортозамещения**

Сырчина Н. Д.

Новосибирский государственный университет

В настоящее время в России предприятия легкой промышленности из-за отсутствия достаточной государственной поддержки, а также слабой инвестиционной привлекательности и малоэффективного оборудования являются не конкурентоспособными не только на внешнем рынке, но и на внутреннем.

**Целью** работы является экономико-математический анализ, в результате которого будут определены оптимальные объемы инвестиций в развитие легкой промышленности с целью минимизации импортной продукции. Особенностью экономико-математической модели является использование математико-статистического и экономико-математического инструментария для ее реализации.

Анализ основан на статистических данных Стратегии развития легкой промышленности России до 2020 года. Учитываются инвестиции предыдущих лет и прогнозируются до 2020 года.

Результаты экономико-математического моделирования позволяют рассчитать минимально возможную долю импорта и минимально возможный объем инвестиций в продукцию легкой промышленности.

Научный руководитель – канд. экон. наук, доцент Бажанов В. А.

**О моделях рамсеевского типа с двумя базами налогообложения**

Токтохоева С. Г.

Новосибирский государственный университет

Исследуется двухуровневая иерархическая система государство – инвестор. Анализ проводится на основе модифицированной модели Рамсея, в которой учитывается существование налогообложения и доход предприятия делится на потребление, инвестиции и налоговые выплаты. Государство облагает налогом потребление и основные фонды (имущество) предприятия.

В каждый момент времени выпуск продукции  $Y$  делится на потребление  $C$ , инвестиции (капиталовложения)  $I$ , налог на имущество  $N_K$  и налог на потребление  $N_C$ :

$$Y(t) = C(t) + I(t) + N_K(t) + N_C(t) = (1 - s(t))(Y(t) - \rho_K(K)K(t) - \rho_C(C)C(t)) + s(t)(Y(t) - \rho_K(K)K(t) - \rho_C(C)C(t)) + \rho_K(K)K(t) + \rho_C(C)C(t),$$

$$0 \leq s(t) \leq 1, 0 \leq \rho_K(K) \leq 1, 0 \leq \rho_C(C) \leq 1,$$

где  $s(t)$  – доля выпуска (за вычетом налогов), направляемая на инвестиции, а  $\rho_K(K)$  и  $\rho_C(C)$  – налоговые ставки, соответственно, на имущество и на потребление.

Задача инвестора состоит в выборе функции  $s(t)$ , при которой общее удельное потребление с дисконтированием в плановом периоде  $[0, T]$  достигает максимального значения при фиксированных ставках налогообложения. Государство решает задачу о выборе схем налогообложения  $\rho_K$  и  $\rho_C$ , при которых производительность труда одного работника в плановом периоде  $[0, T]$  достигает максимального значения при предположении, что поведение инвестора оптимально.

В настоящей работе изучаются следующие ситуации: 1) функции  $\rho_K$  и  $\rho_C$  являются константами (действует единый пропорциональный налог на имущество и на потребление); 2) обе функции  $\rho_K$  и  $\rho_C$  – линейные (прогрессивный налог), либо одна из функций линейная, а другая является константой. Для первой ситуации доказана магистральная теорема об оптимальном значении доли выпуска, направляемой на инвестиции на нижнем уровне управления. В докладе будут приведены исследования описанных выше ситуаций, позволяющие государству найти оптимальную налоговую политику.

Работа поддержана грантом РФФИ № 16-01-00108.

Научный руководитель – канд. техн. наук Анцыз С. М.

## **Релейно-гистерезисное управление производством скоропортящейся продукции**

Ульянова Е. С.

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Модели управления запасами с ограниченным сроком годности интенсивно изучаются в последние годы [1, 2]. При этом, как правило, предполагается, что задан некоторый начальный объем запаса и решаются задачи об оптимальном выборе начального объема и построении оптимального алгоритма его расходования.

В настоящей работе предлагается и анализируется одна из возможных моделей одновременного производства и сбыта скоропортящейся продукции. Скорость производства в предложенной модели меняется в зависимости от установленных пороговых значений допустимого запаса продукции.

Основная цель настоящей работы – определить оптимальные параметры управления запасами, получить плотность распределения количества продукции для данной модели при некоторых дополнительных предположениях.

В работе получены уравнения, определяющие плотность распределения количества скоропортящейся продукции при релейно-гистерезисном управлении скоростью производства. Получены решения этих уравнений в случае экспоненциального распределения величин продаж.

---

1. Goyal S.K., Giri B.C. Recent trends in modeling of deteriorating inventory // Eur. J. Oper. Res. – 2001. – Vol. 134 (1). – Pp. 1–16.

2. Bakker M., J. Riezebos J., Teunter R.H. Review of inventory systems with deterioration since 2001 // Eur. J. Oper. Res. – 2012. – Vol. 221. – Pp. 275–284.

3. Livshits K., Ulyanova E. Switch-hysteresis control of the selling times flow in a model with perishable goods // Communication in computer and information science. – 2015. – Vol. 564. – Pp. 263–274.

4. Лившиц К.И., Ульянова Е.С. Диффузионная аппроксимация процесса производства и сбыта скоропортящейся продукции // Известия вузов. Физика. – 2015. – Т. 58. – № 11/2. – С. 281–285.

Научный руководитель – д-р техн. наук, проф. Лившиц К. И.

**Экономико-математическая модель диверсификации производства в регионе с сырьевой экономикой на примере Кемеровской области**

Халимонова Я. А.

Новосибирский государственный университет

Начиная с середины 50-х гг. наблюдается снижение добычи и использования угля в связи с ростом уровня потребления нефти и газа.

В настоящее время уголь начинают рассматривать как сырье для получения широкой гаммы полезных продуктов. Угледобывающие предприятия Кемеровской области стремятся к диверсификации производства. В 2012 г. была разработана областная программа углехимического кластера.

Специализация углехимического кластера – производство продуктов углехимии и сопутствующих материалов с использованием новейших технологий угольной генерации, глубокой переработки сырья и отходов производства.

**Целью** работы является экономико-математический анализ, в результате которого будут определены оптимальные объемы как сырьевых ресурсов, так и производства продукции, получаемой из перерабатываемого сырья, с целью максимизации прибыли и снижения издержек предприятия. Особенностью экономико-математической модели является постановка двухкритериальной задачи оптимизации.

Анализ основан на статистических данных конкретного предприятия. Учитываются как текущие затраты, так и единовременные инвестиции на единицу произведенной продукции.

Результаты экономико-математического моделирования процессов позволяют рассчитать максимально возможную прибыль и минимально возможную величину себестоимости продукции при заданных условиях, то есть эффективность диверсификации угледобывающих предприятий.

Научный руководитель – канд. экон. наук, доцент Бажанов В. А.

**Оценка эффективности инвестиционного проекта в условиях неопределенности воздействия внешних факторов**

Цой Т. Е.

Новосибирский государственный университет

В современных условиях глубокого кризиса российской экономики резко снизилась инвестиционная деятельность, что привело к срыву и проблемам реализации инвестиционных проектов, перспективы которых стали неопределенными. На примере конкретного проекта иллюстрируется ситуация с резким падением цены стратегического продукта, которая может рассматриваться как экономическая катастрофа.

**Цель работы:** исследование оценки эффективности инвестиционного проекта в условиях неопределенности при помощи инструментария теории нечетких множеств при различных данных, в том числе, при катастрофе.

Особенностью предлагаемой модельной конструкции является использование экономико-математического аппарата при выборе окончательного оптимизированного значения параметров рассматриваемого инвестиционного процесса.

В процессе исследования используются данные проекта производства цемента.

Научный руководитель – канд. экон. наук, доцент Бажанов В. А.

**Общественная оптимальность в модели международной торговли при монополистической конкуренции с линейными издержками**

Челондаева А. В.

Новосибирский государственный университет

В последние десятилетия актуальным и весьма популярным является исследование модели монополистической конкуренции применительно к торговле двух неодинаковых (по населению) стран. Предполагается, что в «домашней» стране численность населения (число потребителей) равно  $s \cdot L$ , а в «зарубежной» стране  $(1-s) \cdot L$ , где  $0.5 < s \leq 1$ , а  $L$  – общее число потребителей. Популярен также случай производственных издержек линейного вида. Предполагается, что торговые (транспортные) издержки  $t$  имеют вид «iceberg type».

Стандартные вопросы, возникающие при исследовании таких моделей, следующие: сравнительная статика (по  $\tau$  и по  $s$ ) потребления, выпусков, числа (массы) фирм, цен, функции общественного благосостояния (как в каждой стране, так и суммарно в обеих странах)

Наибольший интерес в настоящее время вызывают два «предельных» случая: свободы торговли ( $\tau=1$ ) и автаркии (прекращение торговли в силу «слишком большого»  $\tau$ ). Кроме того, обычно рассматриваются ситуации рыночного равновесия и общественной оптимальности.

В работе [1] рассматривается ситуация рыночного равновесия для двух групп одинаковых стран (группа больших одинаковых стран и группа маленьких одинаковых стран) для случаев свободы торговли и автаркии.

В предлагаемой работе рассматривается тот же феномен, но для случая общественной оптимальности.

Работа частично поддержана грантами РФФИ № 15-06-05666, № 16-01-00108 и № 16-06-00101.

---

1. Bykadorov I., Ellero A., Funari S., Kokovin S., Molchanov P. Pro-competitive effects and harmful trade liberalization in multi-country world // Department of Management, Università Ca' Foscari di Venezia, Working Paper Series, August 2015. N. 6/2015. 39 p.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доцент Быкадоров И. А.

## АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

Andorny E. N. ....	129	Беляев В. А. ....	114
Arefeva N. V. ....	130	Беляева А. А. ....	78
Baldorzhieva I. D. ....	205	Блинова М. А. ....	17
Dogadova T. V. ....	104	Бовкун О. Р. ....	79
Dulzon O. V. ....	131	Борд Е. Е. ....	46
Eremeev G. V. ....	132	Быстров П. А. ....	105
Itskovich M. A. ....	206	Валов А. В. ....	63
Khomyakova E. N. ....	73	Вежнина О. А. ....	106
Krakhalyov A.A. ....	207	Верещагин С. А. ....	210
Medvyatskaya A. M. ....	133	Визнер Н. Ю. ....	80
Mironova D. E. ....	134	Викентьева Н. А. ....	18
Novikov A. O. ....	208	Вострикова Е. И. ....	154
Prasol D. A. ....	135	Вьюнник Н. М. ....	155
Prytkov N. V. ....	74	Галактионова А. А. ....	156
Rybdylova G. S. ....	136	Галашов А. Е. ....	81
Sagoyakova E. R. ....	137	Галичкина М. А. ....	47
Uvarov V. E. ....	138	Гарбузов К.Е. ....	82
Yermolenko D. V. ....	15	Гильмутдинов И. Х. ....	83
Zakovryashin A. V. ....	139	Гладкова А. В. ....	142
Авилов М. С. ....	75	Гологуш Т. С. ....	48
Агапитов А. Е. ....	76	Гордеев А. С. ....	84
Адатова А. А. ....	38	Горлова Н. А. ....	143
Алеев Н. Р. ....	112	Горн А. А. ....	157
Алипова Д. Т. ....	148	Горшунов В. С. ....	158
Алипова К. А. ....	149	Готин К. С. ....	31
Анисимова А. С. ....	113	Гришина А. А. ....	159
Анкудинова А. С. ....	150	Гродзь А. А. ....	19
Антипова Е. А. ....	151	Гроо Н. А. ....	160
Асланян П. А. ....	77	Грудович Л. Е. ....	115
Астанина М. С. ....	152	Грюнвальд Л. А. ....	20
Афонин Г. Д. ....	153	Гуш М. Н. ....	116
Ахметов А. Ж. ....	61, 62	Давыдова С. Г. ....	21
Бабичева Г. А. ....	140	Демидов И. С. ....	117
Баджелидзе К. Р. ....	199	Дервеедова Н. А. ....	161
Байкалов А. А. ....	5	Долгов П. И. ....	85
Бакчанина Е. М. ....	39	Долженкова Н. А. ....	200
Банаев Ф. С. ....	209	Дьячкова Т. П. ....	211
Бахматов А. Н. ....	40	Елисеева А. Ю. ....	64
Башмаков С. И. ....	6	Емельянов Д. Ю. ....	7
Бебишева О. М. ....	141	Жданова Е. М. ....	98
Бектемиров И. Т. ....	41	Жигалов П. С. ....	118
Белоног А. Ю. ....	16	Зайцева А. А. ....	144

Зубарев А. Ю. ....	201	Лизунов С. А. ....	172
Иванова Н. В. ....	155	Лисовская Е. Ю. ....	108
Иващенко А. О. ....	107	Лукинова В. Л. ....	173
Измайлов Т. А. ....	212	Льготина Е. В. ....	91, 174
Кажымурат А. А. ....	32	Лялюхова И. Е. ....	175
Кайгородцева А. А. ....	162	Лях Т. В. ....	204
Кальчевская П. И. ....	86	Магаев Н. А. ....	217
Карасенко А. П. ....	163	Максимова А. Г. ....	176
Карнаков П. В. ....	164	Малых А. Е. ....	92
Каушан К. А. ....	8	Малютина М. В. ....	42
Каштанова В. Н. ....	165	Марков С. И. ....	124
Ким Д. Л. ....	213	Маткин Е. А. ....	10
Киприянов Я. А. ....	22	Матюхин А. В. ....	43
Киреев И. Ю. ....	202	Машарова Д. А. ....	177
Кириленко А. В. ....	166	Мельникова И. А. ....	44
Кисатов М. А. ....	23	Местникова А. А. ....	51
Клепиков П. Н. ....	33	Минаков В. А. ....	157
Клепикова С. В. ....	33	Мошенец М. К. ....	218
Климонов И. А. ....	119	Наприенко Я. М. ....	45
Ключинский Д. В. ....	120	Непша А. С. ....	219
Козырев С. И. ....	145	Неупокоева К. Г. ....	178
Козырев Я. С. ....	214	Николаев И. В. ....	24
Колдаев Д. А. ....	65	Ноговицын П. И. ....	179
Кондаков А. А. ....	87	Носкова Ю. О. ....	25
Корбанова Т. Г. ....	167	Облаухов А. К. ....	93
Корепанова Е. В. ....	49	Осотова Л. А. ....	94
Короткова Р. М. ....	9	Очкасов А. Е. ....	95
Котова А. А. ....	215	Павлов П. Е. ....	202
Кохонов Р. Е. ....	121	Палагина А. А. ....	180
Кривоносов И. А. ....	145	Панасенко А. С. ....	11
Круглова Е. А. ....	50	Петрова М. Е. ....	220
Крюков А. Е. ....	168	Петухова К. К. ....	181
Кузьмин Г. А. ....	122	Пехтерев М. С. ....	182
Кузьмина К. И. ....	216	Плаксиенко А. С. ....	109
Куклин А. А. ....	169	Полищук С. Ю. ....	125
Кутищева А. Ю. ....	66	Полухина М. Е. ....	183
Куценко А. В. ....	88	Помогаева С. В. ....	52
Куценогая Е. П. ....	89	Попенов А. Ю. ....	184
Лаговская К. В. ....	170	Попов Ю. С. ....	12
Латыпов М. Д. ....	203	Потатуева В. В. ....	110
Латышенко В. А. ....	171	Потоцкая А. А. ....	126
Леваева А. В. ....	123	Прокопчик К. В. ....	185
Легких И. С. ....	90	Пурис В. А. ....	67

Пустоваров А. А. ....	186	Ульянова Е. С. ....	223
Раздобреева А. Г. ....	96	Уфимцева И. В. ....	56
Рак Б. В. ....	118	Фефелова В. В. ....	100
Рожков Д. С. ....	34	Филина М. П. ....	69
Рябов Г. К. ....	13	Филюшов А. А. ....	127
Саблин Н. А. ....	35	Фролов А. С. ....	57
Санков И. И. ....	26	Халимонова Я. А. ....	224
Сарычева Е. В. ....	53	Хасанов А. Р. ....	70
Семенова А. С. ....	68	Хасина Е. М. ....	194
Сенотрусова С. Д. ....	187	Хлыстова И. В. ....	28
Сергеева Л. А. ....	97	Хорошилов А. А. ....	195
Сизов М. М. ....	204	Хромова Н. А. ....	196
Скопинцев А. М. ....	188	Цой Н. Г. ....	58
Созонов Н. С. ....	189	Цой Т. Е. ....	225
Солдаткин М. А. ....	190	Цыганова А. И. ....	29
Сороковиков П. С. ....	98, 145	Чебакова М. П. ....	71
Старикова А. А. ....	54	Челондаева А. В. ....	226
Сулейманова К. А. ....	191	Чмеленко О. С. ....	128
Сухачева Е. С. ....	36	Чулков В. Ю. ....	101
Сырчина Н. Д. ....	221	Чупрасова М. А. ....	102
Тагильцев И. И. ....	192	Чуриков Д. В. ....	14
Таранин Н. А. ....	27	Шемелина В. О. ....	59
Тарасов В. С. ....	193	Шестаков В. В. ....	72
Тарелкин А. М. ....	211	Шпилов Н. М. ....	146
Темирбаев С. К. ....	111	Штерншис А. С. ....	147
Ткачѐв К. В. ....	99	Щелчков К. А. ....	103
Ткаченко С. Д. ....	55	Щербаков П. К. ....	197
Токтохоева С. Г. ....	222	Эрдыниев Э. Б. ....	198
Трофименко Н. Н. ....	37	Юртина Ю. Ю. ....	30
Угрянский И. Е. ....	202	Янькова Г. С. ....	60

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА .....</b>	<b>5</b>
Байкалов А. А. ....	5
Башмаков С. И. ....	6
Емельянов Д. Ю. ....	7
Каушан К. А. ....	8
Короткова Р. М. ....	9
Маткин Е. А. ....	10
Панасенко А. С. ....	11
Попов Ю. С. ....	12
Рябов Г. К. ....	13
Чуриков Д. В. ....	14
<b>ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ .....</b>	<b>15</b>
Yermolenko D. V. ....	15
Белоног А. Ю. ....	16
Блинова М. А. ....	17
Викентьева Н. А. ....	18
Гродзь А. А. ....	19
Грюнвальд Л. А. ....	20
Давыдова С. Г. ....	21
Киприянов Я. А. ....	22
Кисатов М. А. ....	23
Николаев И. В. ....	24
Носкова Ю. О. ....	25
Санков И. И. ....	26
Таранин Н. А. ....	27
Хлыстова И. В. ....	28
Цыганова А. И. ....	29
Юртина Ю. Ю. ....	30
<b>ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ.....</b>	<b>31</b>
Готин К. С. ....	31
Кажымурат А. А. ....	32
Клепиков П. Н., Клепикова С. В. ....	33
Рожков Д. С. ....	34
Саблин Н. А. ....	35
Сухачева Е. С. ....	36
Трофименко Н. Н. ....	37
<b>ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ.....</b>	<b>38</b>
Адатова А. А. ....	38
Бакчанина Е. М. ....	39

Бахматов А. Н. ....	40
Бектемиров И. Т. ....	41
Малютина М. В. ....	42
Матюхин А. В. ....	43
Мельникова И. А. ....	44
Наприенко Я. М. ....	45
<b>ГИДРОДИНАМИКА.....</b>	<b>46</b>
Борд Е. Е. ....	46
Галичкина М. А. ....	47
Гологуш Т. С. ....	48
Корепанова Е. В. ....	49
Круглова Е. А. ....	50
Местникова А. А. ....	51
Помогаева С. В. ....	52
Сарычева Е. В. ....	53
Старикова А. А. ....	54
Ткаченко С. Д. ....	55
Уфимцева И. В. ....	56
Фролов А. С. ....	57
Цой Н. Г. ....	58
Шемелина В. О. ....	59
Янькова Г. С. ....	60
<b>МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ.....</b>	<b>61</b>
Ахметов А. Ж. ....	61
Ахметов А. Ж. ....	62
Валов А. В. ....	63
Елисеева А. Ю. ....	64
Колдаев Д. А. ....	65
Кутищева А. Ю. ....	66
Пурис В. А. ....	67
Семенова А. С. ....	68
Филина М. П. ....	69
Хасанов А. Р. ....	70
Чебакова М. П. ....	71
Шестаков В. В. ....	72
<b>ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА.....</b>	<b>73</b>
Khomyakova E. N. ....	73
Prytkov N. V. ....	74
Авилов М. С. ....	75
Агапитов А. Е. ....	76
Асланян П. А. ....	77

Беляева А. А. ....	78
Бовкун О. Р. ....	79
Визнер Н. Ю. ....	80
Галашов А. Е. ....	81
Гарбузов К.Е. ....	82
Гильмутдинов И. Х. ....	83
Гордеев А. С. ....	84
Долгов П. И. ....	85
Кальчевская П. И. ....	86
Кондаков А. А. ....	87
Куценко А. В. ....	88
Куценогая Е. П. ....	89
Легких И. С. ....	90
Льготина Е. В. ....	91
Малых А. Е. ....	92
Облаухов А. К. ....	93
Осотова Л. А. ....	94
Очкасов А. Е. ....	95
Раздобреева А. Г. ....	96
Сергеева Л. А. ....	97
Сороковиков П. С., Жданова Е. М. ....	98
Ткачёв К. В. ....	99
Фефелова В. В. ....	100
Чулков В. Ю. ....	101
Чупрасова М. А. ....	102
Щелчков К. А. ....	103
<b>ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.....</b>	<b>104</b>
Dogadova T. V. ....	104
Быстров П. А. ....	105
Вежнина О. А. ....	106
Иващенко А. О. ....	107
Лисовская Е. Ю. ....	108
Плаксиенко А. С. ....	109
Потатуева В. В. ....	110
Темирбаев С. К. ....	111
<b>ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА .....</b>	<b>112</b>
Алеев Н. Р. ....	112
Анисимова А. С. ....	113
Беляев В. А. ....	114
Грудович Л. Е. ....	115
Гуш М. Н. ....	116
Демидов И. С. ....	117

Жигалов П. С., Рак Б. В.....	118
Климонов И. А.....	119
Ключинский Д. В.....	120
Кохонов Р. Е.....	121
Кузьмин Г. А.....	122
Леваева А. В.....	123
Марков С. И.....	124
Полищук С. Ю.....	125
Потоцкая А. А.....	126
Филлошов А. А.....	127
Чмеленко О. С.....	128
<b>МЕТОДЫ МОНТЕ-КАРЛО И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ .....</b>	<b>129</b>
Andorny E. N.....	129
Arefeva N. V.....	130
Dulzon O. V.....	131
Eremeev G. V.....	132
Medvyatskaya A. M.....	133
Mironova D. E.....	134
Prasol D. A.....	135
Rybdylova G. S.....	136
Sagoyakova E. R.....	137
Uvarov V. E.....	138
Zakovgyashin A. V.....	139
Бабичева Г. А.....	140
Бебишева О. М.....	141
Гладкова А. В.....	142
Горлова Н. А.....	143
Зайцева А. А.....	144
Сороковиков П. С., Козырев С. И., Кривоносов И. А.....	145
Шипилов Н. М.....	146
Штерншис А. С.....	147
<b>МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ.....</b>	<b>148</b>
Алипова Д. Т.....	148
Алипова К. А.....	149
Анкудинова А. С.....	150
Антипова Е. А.....	151
Астанина М. С.....	152
Афонин Г. Д.....	153
Вострикова Е. И.....	154
Вьюнник Н. М., Иванова Н. В.....	155
Галактионова А. А.....	156
Горн А. А., Минаков В. А.....	157

Горшунов В. С.....	158
Гришина А. А.....	159
Гроо Н. А.....	160
Дервеедова Н. А.....	161
Кайгородцева А. А.....	162
Карасенко А. П.....	163
Карнаков П. В.....	164
Каштанова В. Н.....	165
Кириленко А. В.....	166
Корбанова Т. Г.....	167
Крюков А. Е.....	168
Куклин А. А.....	169
Лаговская К. В.....	170
Латышенко В. А.....	171
Лизунов С. А.....	172
Лукинова В. Л.....	173
Льготина Е. В.....	174
Лялюхова И. Е.....	175
Максимова А. Г.....	176
Машарова Д. А.....	177
Неупокоева К. Г.....	178
Ноговицын П. И.....	179
Палагина А. А.....	180
Петухова К. К.....	181
Пехтерев М. С.....	182
Полухина М. Е.....	183
Попенов А. Ю.....	184
Прокопчик К. В.....	185
Пустоваров А. А.....	186
Сенотрусова С. Д.....	187
Скопинцев А. М.....	188
Созонов Н. С.....	189
Солдаткин М. А.....	190
Сулейманова К. А.....	191
Тагильцев И. И.....	192
Тарасов В. С.....	193
Хасина Е. М.....	194
Хорошилов А. А.....	195
Хромова Н. А.....	196
Щербаков П. К.....	197
Эрдыниев Э. Б.....	198

<b>ПРОГРАММИРОВАНИЕ.....</b>	<b>199</b>
Баджелидзе К. Р. ....	199
Долженкова Н. А. ....	200
Зубарев А. Ю. ....	201
Киреев И. Ю., Углянский И. Е., Павлов П. Е. ....	202
Латыпов М. Д. ....	203
Лях Т. В., Сизов М. М. ....	204
<b>МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА.....</b>	<b>205</b>
Baldorzhieva I. D. ....	205
Itskovich M. A. ....	206
Krakhalyov A.A. ....	207
Novikov A. O. ....	208
Банаев Ф. С. ....	209
Верещагин С. А. ....	210
Дьячкова Т. П., Тарелкин А. М. ....	211
Измайлов Т. А. ....	212
Ким Д. Л. ....	213
Козырев Я. С. ....	214
Котова А. А. ....	215
Кузьмина К. И. ....	216
Магаев Н. А. ....	217
Мошенец М. К. ....	218
Непша А. С. ....	219
Петрова М. Е. ....	220
Сырчина Н. Д. ....	221
Токтохоева С. Г. ....	222
Ульянова Е. С. ....	223
Халимонова Я. А. ....	224
Цой Т. Е. ....	225
Челондаева А. В. ....	226
<b>АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ.....</b>	<b>227</b>
<b>ОГЛАВЛЕНИЕ .....</b>	<b>230</b>

МАТЕРИАЛЫ  
54-Й МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ  
СТУДЕНЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ  
МНСК–2016

МАТЕМАТИКА

*Материалы конференции публикуются в авторской редакции*

---

Подписано в печать 31.03.2016

Формат 60x84/16

Офсетная печать

Уч.-изд. л. 10,0. Усл. печ. л. 14,8

Заказ № \_\_\_\_\_

Тираж 150 экз.

---

Редакционно-издательский центр НГУ  
630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2