МНСК Международная научная студенческая конференция

Материалы секции
МАТЕМАТИКА

10-20 апреля 2022

НОВОСИБИРСК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МНСК-2022

МАТЕМАТИКА

Материалы
60-й Международной научной студенческой конференции

10 – 20 апреля 2022 г.

Новосибирск
2022

УДК 51
ББК 22.1я431
М 431

Научный руководитель секции – д-р физ.-мат. наук, акад. РАН С. С. Гончаров

Председатель секции – д-р физ.-мат. наук, проф. РАН И. В. Марчук

Зам. председателя секции – канд. физ.-мат. наук И. И. Тахонов

Ответственный секретарь секции – Т. И. Тихонова

М 431 Математика : Материалы 60-й Междунар. науч. студ. конф. 10–20 апреля 2022 г. / Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2022. — 176 с.

ISBN 978-5-4437-1303-8

УДК 51
ББК 22.1я431

ISBN 978-5-4437-1303-8

SIBERIAN BRANCH OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
MINISTRY OF SCIENCE AND HIGHER EDUCATION
OF THE RUSSIAN FEDERATION
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY

ISSC-2022

MATHEMATICS

Proceedings
of the 60th International Scientific Student Conference

April, 10 – 20, 2022

Novosibirsk
2022

УДК 51
ББК 22.1я431
М 431

М 431 Mathematics : Proceedings of the 59th International Scientific Student Conference. April, 10–20, 2022 / Novosibirsk State University. – Novosibirsk : IPC NSU, 2022. — 176 p.

ISBN 978-5-4437-1303-8

УДК 51
ББК 22.1я431

ISBN 978-5-4437-1303-8

УДК 512.54, 512.554

On some 5-transposition groups and algebras related to them

Vsevolod A. Afanasev

Novosibirsk State University

We study the class of 5-transposition groups, i.e. groups generated by their subset D of involutions, such that D is closed under conjugation and the order of the product of any 2 elements from D does not exceed 5. These groups are interesting not only by themselves, but due to their connection to the field of non-associative algebras.

Our goal is to classify 3-generated 5-transposition groups with the commuting pair of generators, that is the 5-transposition quotients of the following finitely presented groups:

$$G = \{x, y, z | x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^2 = (yz)^a = (xz)^b = e\}$$

where $a, b \in \{1..5\}$. We also wish to study various non-assocítative algebras corresponding to these groups.

Theorem 1. *All 3-generated 5-transposition groups with a commuting pair of generators are finite and are quotients of one of the following groups:*

Group	Isomorphism type	Extension
G_1	$Z_2 \times S_4$	
G_2	$Z_2 \times A_5$	
G_3	$Z_4^2 : D_8$ $D_8 = \langle d_1, d_2 \rangle$	$d_1 : e_1 \to e_1$ and $e_2 \to 2e_1 - e_2$ $d_2 : e_1 \to -e_1$ and $e_2 \to -e_2$
G_4	$Z_5^2 : D_8$ $D_8 = \langle d_1, d_2 \rangle$	$d_1 : e_1 \to -e_1$ and $e_2 \to e_2$ $d_2 : e_1 \to e_2$ and $e_2 \to e_1$
G_5	$(S_3 \times S_3) : Z_2$	Z_2 acts like (1,4)(2,5)(3,6) on a natural embedding of S_3^2 into S_6
G_6	$Z_2 \times (Z_2^4 : D_{10})$	generated by isomorphism of $Aut(Z_2^4) \cong A_8 \cong GL_4(2))$
G_7	$[(Z_2^2 : (Z_4 \times Z_2) : Z_2) : D_8] : D_{10}$	
G_8	$PGL(2, 9)$	

Similar research can be found in [1], albeit with a condition $xy \in D$, so that the algebras related to the obtained groups were $2A$-generated subalgebras of the Griess algebra.

As was mentioned before, this class of groups is of interest due to their connection to the field of non-associative algebras: in particular Majorana theory [2] and the theory of axial algebras [3]. To this end we provide a result connected to the former:

Definition. *We consider a tuple (G, D, V) for a 5-transposition group $G = \langle D \rangle$, where $V = \langle\langle X \rangle\rangle$ is a commutative, non-associative algebra generated by certain idempotents x called Majorana axis to be a Majorana representation of (G, D). We say that it is k-closed if it is spanned (as a module) by elements $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots x_k,\ x_i \in X$.*

For unsolvable groups from the table above the result goes as follows:

Theorem 2. *A non-solvable group $Z_2 \times A_5$ has 4 Majorana Representations. Two of them are 2-closed and have dimensions 21, and 26 similar to the representations of A_5, discovered in [4], while the others are a 2-closed 20-dimensional algebra and a 3-closed 46-dimensional algebra. Group $PGL(2, 9)$ has a unique Majorana representation based on the embedding into the Griess algebra.*

We also plan to relay our progress regarding construction of Majorana representations for other listed groups as well as some results related to axial algebras of Jordan type.

[1] S. Decelle. Majorana Representations and the Coxeter Groups $G^{(m,n,p)}$."(2013).

[2] A.A. Ivanov, The Monster Group and Majorana Involutions, Cambridge Univ. Press, Cambridge, Cambridge Tracts in Mathematics 176 (2009).

[3] J. Hall, F. Rehren, S. Shpectorov. (2013). Universal Axial Algebras and a Theorem of Sakuma. Journal of Algebra. 421.

[4] A.A Ivanov, Á. Seress. Majorana representations of A_5. Mathematische Zeitschrift. 272. 1-27. (2012).

Научный руководитель – Dr. Sc., A. S. Mamontov

УДК 510.5

О рангах полиномиально вычислимых деревьев

Д. А. Кириллов

Новосибирский государственный университет

Пусть $\omega^{<\omega} = \{\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle |\ n \geq 0, x_i \in \omega\}$ – множество всевозможных n-ок натуральных чисел. На $\omega^{<\omega}$ введем частичный порядок $\leq : a \leq b,$ если a – начальный сегмент b.

Назовем $T \subseteq \omega^{<\omega}$ деревом, если оно замкнуто относительно начальных сегментов. Скажем, что $x \in T$ – лист T, если $\forall y \in \omega^{<\omega}(x < y \Rightarrow y \notin T)$. Путем в дереве T назовем любую последовательность вершин $(x_1, x_2, ...)$ где $x_i \in T$ такую, что $\forall i(x_{i+1} = \langle y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}\rangle \Rightarrow x_i = \langle y_1, y_2, ..., y_n\rangle)$.
Дерево T назовем деревом с конечными путями, если в нем нет бесконечных путей. Для $x \in T$ определим $h(x)$ – ранг вершины дерева T. Если x – лист T, то $h(x) = 0$. Иначе $h(x) = \sup\{h(z) + 1|\ z$ – потомок $x\}$. Тогда рангом дерева T с конечными путями назовем ранг его корня: $h(T) = h(\langle\ \rangle)$. Рангом любого дерева с конечными путями является счетный ординал.

Зафиксируем нумерацию (кодировку) τ всех n-ок натуральных чисел: $\tau(\langle\ \rangle) = e$, $\tau(\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle) = \text{bin}(x_1) * \text{bin}(x_2) * ... * \text{bin}(x_n)$, где $\text{bin}(n)$, $n \in \omega$ – представление числа в бинарной системе счисления. Всякое дерево можно рассматривать как совокупность номеров его вершин. Характеристическая функция этого множества номеров называется характеристической функцией данного дерева. Назовем T вычислимым деревом, если его характеристическая функция вычислима.

Любому ординалу α соответствует частично упорядоченное множество $(\alpha, \leq)$, где $\leq$ – естественный порядок на ординалах, и тогда α называется вычислимым ординалом, если эта структура обладает вычислимым представлением. Доказательство следующего классического факта можно найти в [1].

Теорема. *Пусть α - ординал. Тогда равносильно:*
a) α – вычислимый ординал
b) Существует вычислимое дерево T с конечными путями такое, что $h(T) = \alpha$.

В работе рассматриваются полиномиально вычислимые (P-вычислимые) деревья – деревья, характеристическая функция которых вычислима за полиномиальное время. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть α - ординал. Тогда равносильно:
a) α – вычислимый ординал
b) Существует P-вычислимое дерево T с конечными путями такое, что $h(T) = \alpha$.

Похожий результат был получен для более узкого класса деревьев – нормальных P-вычислимых деревьев с конечными путями. Назовем T нормальным деревом, если

$$\forall a \in T(a = \langle x_1, x_2, ..., x_n, y\rangle \Rightarrow \forall y_1 < y\ \langle x_1, x_2, ..., x_n, y_1\rangle \in T).$$

Теорема 2. Пусть α - ординал. Тогда равносильно:
a) α – вычислимый ординал
b) Существует нормальное P-вычислимое дерево T с конечными путями такое, что $h(T) = \alpha$.

[1] Х. Роджерс. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. – М.: Мир. – 1972.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, П.Е. Алаев

УДК 512.54

Обобщенные группы Кокстера

В. Э. Лешков

Новосибирский государственный университет

Группы Кокстера, возникающие как группы отражений евклидова пространства, обладают рядом замечательных свойств. В частности, они являются линейными, а потому имеют разрешимую проблему равенства слов. Каждой группе Кокстера отвечает некоторый граф (граф Кокстера).

В данной работе определяется категория взвешенных 2-комплексов, являющаяся полной и кополной, обладающая начальным и конечным объектами, малыми произведениями и копроизведениями. Построен функтор из категории взвешенных 2-комплексов в категорию групп, образом которого являются обобщенные группы Кокстера – класс групп, содержащий группы Кокстера, а также группы крашеных гауссовых кос GVP_n, впервые рассмотренные В. Г. Бардаковым, П. Беллингери и С. Дамиани в [1], и группы G_n^k, введенные В. О. Мантуровым в [2].

[1] V. Bardakov, P. Bellingeri, C. Damiani. *"Unrestricted virtual braids, fused links and other quotients of virtual braid groups".* J. Knot Theory Ramifications (2015).

[2] V. O. Manturov. *Non-Reidemeister knot theory and its applications in dynamical systems, geometry and topology.* arXiv:1501.05208 (2015).

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. В. Г. Бардаков

УДК 510.67

О видах предгеометрий кубических теорий

С. Б. Малышев

Новосибирский государственный университет

Приводится описание видов предгеометрий [1] для кубических теорий [2], [3]. Вводятся новые понятия $c-$предгеометрии и $c-$модулярности.

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть T — кубическая теория. Тогда для некоторой (любой) насыщенной модели $M = \langle S, R \rangle$ теории T выполняется одно из следующих двух условий:

1) все компоненты связности модели M конечны и имеют ограниченную мощность, а предгеометрия $\langle S, \mathrm{acl} \rangle$ вырожденная;

2) модель M имеет бесконечную компоненту связности, которая является λ-кубом для некоторого кардинала λ, а c-предгеометрия $\langle S, \mathrm{acl} \rangle$ является c-модулярной.

Теорема 2. Пусть T — кубическая теория. Тогда для некоторой (любой) модели $M = \langle S, R \rangle$ теории T выполняется следующее условие: c-предгеометрия $\langle S, \mathrm{cl} \rangle$ не является c-локально конечной тогда и только тогда, когда имеется бесконечное количество натуральных чисел n, для которых $0 < Inv_T(n) < \infty$.

---

[1] A. Pillay. Geometric Stability Theory. – Oxford: Clarendon Press. – 1996.

[2] S. V. Sudoplatov. Group polygonometries. – Novosibirsk: NSTU. – 2013.

[3] S. V. Sudoplatov. Models of cubic theories // Bulletin of the Section of Logic, 2014, Vol. 43, No. 1-2. P. 19–34.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, доц. С. В. Судоплатов

УДК 512.54

Вербальные кванделы с одним параметром

Е. В. Мархинина

Новосибирский государственный университет

Квандл Q – это алгераическая система с одной бинарной алгебраической операцией $(x, y) \mapsto x * y$, которая удовлетворяет следующим трем аксиомам.

(q1) $x * x = x$ для всех $x \in Q$,

(q2) Для всех $x \in Q$ отображение $S_x : y \mapsto y * x$ является биекцией,

(q3) Для всех $x, y, z \in Q$ справедливо равенство $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$.

Квандлы были введены Джойсом и Матвеевым в 1982 году как инструмент для построения инвариантов классических узлов и зацеплений. Следующее утверждение установлено в [1].

Теорема 1. Пусть $w \in F_2$ элемент свободной группы, и пусть $*_w$ – бинарная операция, определенная правилом $x *_w y = w(x, y)$. Если $Q = (G, *_w)$ является квандлом для любой группы G, то справедливо одно из следующих утверждений.

1. $w(x, y) = yx^{-1}y$,
2. $w(x, y) = y^{-s}xy^s$ для $s \in \mathbb{Z}$.

Основным результатом работы является следующая теорема, которая обобщает теорему 1.

Теорема 2. Пусть $W = W(x, y, z)$ элемент свободной группы $F(x, y, z)$, и пусть $*_{W,c}$ – бинарная операция, определенная правилом $x *_{W,c} y = W(x, y, c)$. Если $Q = (G, *_{W,c})$ является квандлом для любой группы G и элемента $c \in G$, то справедливо одно из следующих утверждений.

1. $W(x, y, z) = yx^{-1}y$,
2. $W(x, y, z) = y^{-s}xy^s$ для $s \in \mathbb{Z}$,
3. $W(x, y, z) = yz^{-s}y^{-1}xz^s$ для $s \in \mathbb{Z}$,
4. $W(x, y, z) = yz^{-s}xy^{-1}z^s$ для $s \in \mathbb{Z}$,
5. $W(x, y, z) = z^{-s}y^{-1}xz^sy$ для $s \in \mathbb{Z}$,
6. $W(x, y, z) = z^{-s}xy^{-1}z^sy$ для $s \in \mathbb{Z}$.

---

[1] Valeriy Bardakov, Timur Nasybullov, Mahender Singh. General constructions of biquandles and their symmetries. – Journal of Pure and Applied Algebra. – 2021.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук. Т. Р. Насыбуллов

УДК 510.6, 510.225

О логических и топологических классификациях регулярных ω-языков

В. Н. Ореховский

Новосибирский государственный университет

Пусть A - конечный алфавит, содержащий не менее двух символов. ω-Язык над алфавитом A - множество бесконечных последовательностей символов из A (ω-слов). Множество всех ω-слов над алфавитом A обозначается A^ω.

В работе рассматриваются два подхода к классификации ω-языков: логический и топологический. При первом подходе ω-слова рассматриваются как структуры сигнатуры $\sigma = \{\leq, Q_a, ...\}$ или $\tau = \sigma \cup \{p, s\}$. Получим иерархии Σ_n^σ и Σ_n^τ, индуцируемые иерархиями предложений сигнатур σ и τ по числу перемен кванторов в предваренной нормальной форме. Логический подход используется также для классификации языков конечных слов, например, [1].

В отличие от языков конечных слов, топологический подход важен для изучения омега-языков. На множестве A^ω вводится канторовская топология и рассматривается борелевская иерархия $\mathbf{\Sigma}_n^0$. Важным техническим инструментом здесь являются игры Вэджа, разработанные в [2].

Также рассматриваются тонкие иерархии [3] $\mathcal{S}_\alpha$ и $\mathbf{\Sigma}_\alpha$. Последняя на множестве регулярных ω-языков совпадает с иерархией Вагнера [4]. Известно, что $\bigcup_{\alpha<\omega^\omega} \mathcal{S}_\alpha = BC(\Sigma_2^\sigma)$ и $\bigcup_{\alpha<\omega^\omega} \mathbf{\Sigma}_\alpha = BC(\mathbf{\Sigma}_2^0)$.

Теорема. Для любого ординала $\alpha < \omega^\omega$ существует ω-язык N_α такой, что $N_\alpha \in \mathcal{S}_\alpha$, но $N_\alpha \notin \mathbf{\Pi}_\alpha$.

[1] D. Perrin and J.-E. Pin. *Infinite Words. Automata, Semigroups, Logic and Games*. Academic Press, 2004.

[2] W. W. Wadge. Reducibility and determinateness on the Baire space. Thesis (Ph.D.)–University of California, Berkeley. *ProQuest LLC, Ann Arbor, MI*, 1983. 334 pp.

[3] V. L. Selivanov. Fine hierarchy of regular ω-languages. *Theoret. Comput. Sci.* 191 (1998), no. 1-2, 37–59.

[4] K. Wagner, On ω-regular sets, *Inform. and Control* 43,2 (1979), 123-177.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. В.Л.Селиванов

УДК 512.54

О распознаваемости групп $E_6^{\pm}(3)$ по графу Грюнберга-Кегеля

В. В. Паньшин

Новосибирский государственный университет

Пусть далее G — это конечная группа. Обозначим за $\pi(G)$ множество простых делителей порядка G. *Граф Грюнберга-Кегеля* (или *граф простых чисел*) $\Gamma(G)$ группы G — это простой граф с множеством вершин $\pi(G)$, в котором вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда в группе есть элемент порядка pq.

Будем говорить, что группа G *распознаваема* (по графу Грюнберга-Кегеля), если для любой конечной группы L из равенства $\Gamma(G) = \Gamma(L)$ следует $G \simeq L$. На сегодняшний день известно мало результатов о распознаваемости исключительных простых групп лиева типа, в частности о распознаваемости групп типа $E_6^{\pm}(q)$. Известно (В.Го, А.С.Кондратьев, Н.В.Маслова), что группы $E_6^{\pm}(2)$ распознаваемы.

Основным результатом работы является

Теорема. Простые группы $E_6^{\pm}(3)$ распознаваемы по графу Грюнберга-Кегеля.

Результат получен совместно с А.П. Храмовой, Н.В. Масловой и А.М. Старолетовым.

[1] Khramova A. P., Maslova N. V., Panshin V. V., Staroletov A. M., *Characterization of groups* $E_6(3)$ *and* ${}^2E_6(3)$ *by Gruenberg-Kegel graph*, Sib. El. Math. Rep., 2021, Vol.18, No.2, pp. 1651-1656.

Научный руководитель – д-р физ.-мат.наук., проф. А.В. Васильев

УДК 510.52, 510.54

P/PSPACE-нумерации

А. В. Слобожанин

Новосибирский государственный университет

Теория нумераций [1] является важным инструментом анализа алгоритмической сложности семейств конструктивизируемых объектов. Вопрос о существовании для заданного семейства нумерации, вычислимой в той или иной иерархии можно интерпретировать следующим образом: какой сложности нам потребуется вычислитель, чтобы работать с данным семейством также просто, как с классическими натуральными числами. Особую роль здесь играют так называемые *фридберговы нумерации*, которые сопоставляют каждому натуральному числу ровно один элемент из заданного семейства. Если для семейства существует фридбергова нумерация, то вычислитель сможет работать с семейством без потери информации о внутреннем устройстве элементов. В рамках данного исследования ограничением для нумераций выбраны классические классы сложностной иерархии ($\mathbf{K} \in \{\mathbf{P}, \mathbf{NP}, \mathbf{PSPACE}, \mathbf{EXP}, \mathbf{EXPSPACE}\}$[2]).

Все представленные ниже результаты получены в предположении, что все сложностные включения строгие.

Определение. Пусть S – не более чем счетное семейство функций из ω в ω. Сюрьективное отображение $\nu : \omega \to S$, назовем **K**-нумерацией семейства S, если функция $\phi(n, x) = \nu(n)(x)$ принадлежит классу **K**.

В [3] были начаты исследования **K**-нумераций, в частности было доказано, что не существует **P**, **NP**-нумераций семейства всех **P**-функций, но есть **EXP**-нумерация указанного семейства. В данной работе эта серия результатов была продолжена:

Предложение 1. *Не существует **PSPACE**-нумерации семейства всех **P**-функций.*

Предложение 2. *Не существует **PSPACE**-нумерации семейства всех **PSPACE**-функций.*

Предложение 3. *Не существует **EXP**-нумерации семейства всех **PSPACE**-функций.*

Предложение 4. *Существует **EXPSPACE**-нумерация семейства всех **PSPACE**-функций.*

Также, в [3], был построен пример **NP**-вычислимого семейства **P**- функций, без фридберговых нумераций. В данной работе этот результат был усилен:

Теорема. Существует **NP**-вычислимое семейство **P**-функций у которого нет фридберговой **NP**-нумерации, но есть фридбергова **PSPACE**-нумерация.

---

[1] Ю. Л. Ершов. Теория нумераций. – М.: Наука. – 1977.

[2] Д. Хопкрофт, Р. Мотвани, Д. Ульман. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. — М.: «Вильямс», 2002.

[3] Б. Уразалинов, Сводимости в классах P и PSPACE, ВКР, 2021

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, С. С. Оспичев

УДК 512.548.4

О представлениях Вады бабушкиного и сквер узлов

П. П. Соколов

Новосибирский государственный университет

Рассмотрим два узла

$$K_1 = cl(\sigma_1^3\sigma_2^3), \tag{1}$$

$$K_2 = cl(\sigma_1^3\sigma_2^{-3}). \tag{2}$$

Это бабушкин и сквер узлы соответственно.
Рассмотрим представления Вады

$$w_2(\sigma_i) = \begin{cases} x_i \to x_i x_{i+1}^{-1} x_i & , \\ x_{i+1} \to x_i & , \\ x_j \to x_j & , j \neq i,\ j \neq i+1 \end{cases} \tag{3}$$

$$w_3(\sigma_i) = \begin{cases} x_i \to x_i^2 x_{i+1} & , \\ x_{i+1} \to x_{i+1}^{-1} x_i^{-1} x_i & , \\ x_j \to x_j & , j \neq i,\ j \neq i+1 \end{cases} \tag{4}$$

Теорема. Представления Вады (), () не отличают сквер узел от бабушкиного узла (1), (2).

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. В. Г. Бардаков

УДК 510.67

О числе счётных моделей аддитивной теории натуральных чисел

И. К. Уктамалиев

Новосибирский государственный университет

В монографии [1] поставлена проблема описания распределения простых над конечными множествами, предельных и остальных счетных моделей для различных естественных классов алгебраических систем.

Определение. Набор $(P(T), L(T), NPL(T))$ называется *тройкой распределения числа счетных моделей* теории T и обозначается через $cm_3(T)$. Для теорий T с континуумом типов выполняется $I\,(T, \omega) = 2^\omega$, и, значит, хотя бы одно из значений $P(T), L(T), NPL(T)$ равно 2^ω.

В [1] и [2] установлена следующая

Теорема. В предположении континуум-гипотезы для любой немалой теории T тройка $cm_3(T)$ принимает одно из следующих значений:
1. $(2^\omega, 2^\omega, \lambda))$, $\lambda \in \omega \cup \{\omega, 2^\omega\}$; 2. $(0, 0, 2^\omega)$;
3. $(\lambda_1, \lambda_2, 2^\omega)$, где $\lambda_1 \geq 1$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \{\omega, 2^\omega\}$.

Все указанные значения имеют реализации в классе немалых теорий. Используя [3] и [4], следующая теорема доказывается путем рассмотрения $\mathbb{Q}^+$ вместо группы $\mathbb{Q}$ и ее модификаций.

Теорема 1. Для теории $T =$Th$(\langle \mathbb{N}, +, 0\rangle)$ в тройке распределения cm_3 имеет место $P(T) = 2^\omega$, $L(T) = 2^\omega$ и $NPL(T) = 2^\omega$.

[1] Судоплатов С. В. Классификация счетных моделей полных теорий. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2014. Ч. 2.

[2] Popkov R. A., Sudoplatov S. V. Distributions of countable models of theories with continuum many types // arXiv:1210.4043v1. 2012. URL: http://arxiv.org/pdf/1210.4043.pdf

[3] Попков Р. А. О числе простых и предельных моделей теории аддитивной группы целых чисел / Р. А. Попков // Вестник Омского университета. — 2014. — Т. 72, № 2. — С. 34–36.

[4] Попков Р. А. Распределение счетных моделей теории группы целых чисел / Р. А. Попков // Сиб. матем. журн. — 2015. — Т. 56, № 1. — С. 185–191.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. С. В. Судоплатов

УДК 512.54

$\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость цилиндрических групп

А. В. Усиков

Новосибирский государственный университет

Конечно порожденная группа называется *цилиндрической*, если она действует на дереве так, что стабилизаторы вершин изоморфны $\mathbb{Z}^2$, а стабилизаторы ребер изоморфны $\mathbb{Z}$. Цилиндрическая группа называется *примитивной*, если каждая ее реберная группа является максимальной циклической подгруппой в соответствующей вершинной группе.

В 1987 г. Р. Бернс, А. Карас и Д. Солитэр нашли пример группы 3-многообразия, содержащую неотделимую конечно порожденную подгруппу. В 1996 г. Д. Вайз предложил пример автоматной группы, не являющейся хопфовой. Оба этих примера представляют собой цилиндрические группы. В 2000 г. К. Кроук и Б. Клейнер показали, что граница CAT(0) пространства не является ее инвариантом, используя те же цилиндрические группы.

В статье [1] Н. Хода, Д. Вайз и Д. Вудхаус находят необходимые и достаточные условия финитной аппроксимируемости цилиндрических групп. В настоящей работе мы начинаем изучать аппроксимируемость цилиндрических групп конечными π-группами.

Основным результатом работы являются следующие две теоремы.

Теорема 1. Пусть G – цилиндрическая группа, расщепляемая над деревом, $H \leqslant_\pi G$ – примитивная подгруппа. Тогда G – $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемая.

Теорема 2. Пусть G – $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемая цилиндрическая группа . Тогда существует $H \leqslant_\pi G$ такая, что H – примитивная подгруппа.

[1] Hoda, N., Wise, D. and Woodhouse, D. (2020). Residually finite tubular groups. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, 150(6), 2937-2951.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, Ф. А. Дудкин

УДК 510.6

Арифметическая разрешимость моделей Эренфойтовых теорий с разрешимыми типами

Е. И.Хлестова

Новосибирский государственный университет

Известная проблема М. Морли [1] была поставлена в 1976 году: будет ли каждая счетная модель Эренфойтовой теории с разрешимами типами разрешима? В 1983 году К. Эш и Т. Миллар [2] ослабили вопрос: являются ли счетные модели Эренфойтовых теорий с арифметическими типами арифметически разрешимы? Перетятькин заметил, что из эффективной версии теоремы об опускании рекурсивных типов разрешимых теории следует разрешимость простой модели для Эренфойтовых разрешимых теорий [3]. По релятивизации, для Эренфойтовых теорий с арифметическими типами будут арифметически разрешимы простые и насыщенные модели [4]. Проблема сводится к исследованию предельных моделей введенных в [5]. Судоплатовым в [5] ввыведен подкласс Эренфойтовых теорий со свойством (СЕП).

Теорема. В Эренфойтовой теории с арифметическими типами и свойством СЕП все счетные модели арифметически разрешимы.

Следствие. В любой Эренфойтовой теорий с арифметическими типами в любом классе эквивалентности, введенному в [5], содержащего предельную модель всегда есть предельная арифметически разрешимая модель.

На основе примера Рида получаем существование Эренфойтовых теорий с арифметическами типами заданной арифметической сложности [6].

[1] Morley M. Decidable models //Israel Journal of Mathematics. – 1976. – Т. 25. – №. 3. – С. 233-240

[2] Ash C. J., Millar T. S. Persistently finite, persistently arithmetic theories //Proceedings of the American Mathematical Society. – 1983. – С. 487-492.

[3] Перетятькин М. Г. О полных теориях с конечным числом счётных моделей //Алгебра и логика. – 1973. – Т. 12. – №. 5. – С. 550-576.

[4] Гончаров С. С., Ершов Ю. Л. Конструктивные модели. – Научная Книга, 1999.

[5] Судоплатов С. В. Полные теории с конечным числом счетных моделей. I //Алгебра и логика. – 2004. – Т. 43. – №. 1. – С. 110-124.

[6] Reed R. C. A decidable Ehrenfeucht theory with exactly two hyperarithmetic models //Annals of pure and applied logic. – 1991. – Т. 53. – №. 2. – С. 135-168

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Е. Е. Витяев

УДК 512.714

Мономиальные операторы Роты — Бакстера на $F[x, y]$

А. Ф. Ходзицкий

Новосибирский государственный университет

Линейный оператор R, определённый на произвольной алгебре A над полем F называется оператором Роты — Бакстера веса $\lambda \in F$, если

$$R(a)R(b) = R(R(a)b + aR(b) + \lambda ab) \tag{1}$$

для любых $a, b \in F[x, y]$.

Оператор L, заданный на алгебре многочленов $F[x, y]$, называется мономиальным, если $L(x^k y^l) = \varepsilon_{kl} x^{a_{kl}} y^{b_{kl}}$, где $\varepsilon_{kl} \in F$, для любых $k, l \in \mathbb{N}$. Мономиальные операторы Роты — Бакстера на $F[x]$ были введены в [1], а в [2] такие операторы были полностью описаны.

Определение. Оператор T, заданный на алгебре A, называется гомоморфным оператором усреднения, если $T(ab) = T(a)T(b) = T(T(a)b) = T(aT(b))$ выполнено для всех $a, b \in A$.

Теорема. Мономиальный гомоморфный оператор усреднения T, заданный на $F[x, y]$, с точностью до замены x на y имеет один из следующих видов: (1) $T(x^n y^m) = y^{m+rn}$, (2) $T(x^n y^m) = x^{rm} y^m$, где $r \geq 0$.

В работе описаны все операторы Роты — Бакстера R веса 1 на $F[x, y]$, заданные по формуле $R(x^k y^l) = \varepsilon_{kl} T(x^k y^l)$, где $\varepsilon_{kl} \in F$, а T имеет вид (1) при $r = 0, 1$.

Пример. Оператор $R(x^k y^l) = \varepsilon_{kl} y^{k+l}$, где

$$\varepsilon_{kl} = \begin{cases} -\frac{\beta k + l}{k + l}, & k - l \equiv 0 \pmod 2, \\ -1, & k - l \equiv 1 \pmod 2, \end{cases}$$

является оператором Роты — Бакстера веса 1 на алгебре $F[x, y]$.

Описаны все разложения алгебры $F[x, y]$ в прямую сумму двух подалгебр, в которых есть базис, полностью состоящий из мономов.

[1] L. Guo, M. Rosenkranz, and S.H. Zheng. Rota-Baxter operators on the polynomial algebras, integration and averaging operators, Pacific J. Math. (2) 275 (2015) 481–507.

[2] H. Yu. Classification of monomial Rota-Baxter operators on $k[x]$. J. Algebra Appl. 15 (2016), 1650087, 16 p.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук В. Ю. Губарев

УДК 512.54

Автоморфизмы циклических расширений свободных групп

Е. А. Шапорина

Новосибирский государственный университет

В 2006 году О. Богопольский, А. Мартино и Э. Вентура [1] описали группы внешних автоморфизмов всех циклических расширений свободной группы ранга 2

$$M_\varphi = \mathbb{F}_2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z},$$

где $\mathbb{Z}$ действует на $\mathbb{F}_2$ сопряжением так, как действует $\varphi \in Aut(\mathbb{F}_2)$ - автоморфизм, задающий это расширение.

В 1994 году С. Герстен [2] исследовал действие группы

$$H = F_3 \rtimes \mathbb{Z} = \langle a, b, c, t \mid a^t = a, b^t = ba, c^t = ca^2 \rangle$$

на $CAT(0)$ пространствах. Он доказал, что группа, действующая на $CAT(0)$ пространстве собственно и кокомпактно, не может содержать группу H в качестве подгруппы. В частности, группы $Aut(F_n), n \geqslant 3$ и $Out(F_n), n \geqslant 4$ не являются $CAT(0)$ группами. Группа Герстена и её обобщения упоминаются в работах Дж. Баттона, Н. Брэди, Д. Вайса.

В 2021 году Е. А. Шапорина совместно с Ф. А. Дудкиным описала группы внешних автоморфизмов группы Герстена [3]:

Теорема. $Out(H) \cong (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{Z}^3) \rtimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$. В данной работе мы продолжаем изучать автоморфизмы циклических расширений свободной группы ранга 3.

Фиксируем целое положительное $k \neq 0$. Обозначим

$$G_k = \langle a, b, c, t \mid a^t = a, b^t = ba^k, c^t = c \rangle.$$

Основной результат работы — теорема, описывающая структуру группы $Out(G_k)$:

Теорема 1. $Out(G_k) \cong (((\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}_k) \times (F_2 \times F_2)) \rtimes \mathbb{Z}) \rtimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$.

[1] O. Bogopolski, A. Martino, E. Ventura, The automorphism group of a free-by-cyclic group in rank 2, Comm. Alg., 35(5), 2007, 1675–1690.

[2] S. M. Gersten, The automorphism group of a free group is not a CAT(0) group, Proc. Amer. Math. Soc., 121(4), 1994, 999–1002.

[3] Ф. А. Дудкин, Е. А. Шапорина, Автоморфизмы группы Герстена, Сиб. матем. журн., 62(3), 2021, 514–524

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Ф. А. Дудкин

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.63

Сравнение ядер Вендланда и B-сплайнов в гидродинамике сглаженных частиц

С. А. Аношин

Новосибирский государственный университет

Метод гидродинамики сглаженных частиц (Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH) востребован в различных областях науки, таких как астрофизика (моделирование протопланетных дисков на начальных этапах формирования планет), химия (моделирование газофазных химических реакций), биология (моделирование движения в однородных средах) и других. В методе SPH сплошная среда заменяется модельными частицами, представляющими собой подвижные нерегулярно расположенные узлы интерполяции для вычисления пространственных производных. Вычисление пространственных производных от функции, заданной в дискретном наборе узлов, выполняется с помощью финитной функции — ядра. Ввиду существования различных типов ядер важно знать, какие из них предпочтительнее использовать при выполнении того или иного расчета.

Одна из характеристик, по которой можно сравнивать ядра, отмечается в работе [1]. Ее авторы показывают эффект "слипания" модельных частиц, нарастающий с увеличением количества узлов интерполяции. Это слипание означает, что эффективное количество узлов интерполяции, определяющее точность интерполянта, оказывается сильно меньшим, чем количество обрабатываемых частиц. Ясно, что слипание негативно отражается на скорости сходимости метода.

В работе проводится сравнительный анализ ядер Вендланда и B-сплайнов 4 и 10 степени. Ядра сравниваются с точки зрения противодействия слипанию модельных частиц. В качестве теста рассматривается начально-краевая задача о распространении акустических колебаний в газе с возмущенными начальными скоростями. По результатам работы показано, что ядра Вендланда слабее сопротивляются эффекту слипания, чем B-сплайны, что позволяет позитивно говорить о выборе B-сплайнов при расчетах с большим количеством частиц. Однако стоит отметить, что вычисления ядер Вендланда требуют выполнения меньшего количества арифметических операций, что сокращает время счета программы.

Работа проведена за счет средств гранта РНФ 19-71-10026.

---

[1] Dehnen, W. & Aly, H. Improving convergence in smoothed particle hydrodynamics simulations without pairing instability. Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 425(2), 1068-1082. MNRAS. April, 2012

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, О. П. Стояновская

УДК 519.6

Многосеточный метод решения двумерных краевых задач

М. А. Баталов

Новосибирский государственный университет

Многосеточные итерационные методы являются одним из эффективных подходов для решения многомерных краевых задач, поскольку они являются асимптотически оптимальными по порядку, то есть объем вычислений пропорционален числу степеней свободы.

В работе предлагается и экспериментально исследуется экономичный вариант алгоритма для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), аппроксимирующих на прямоугольной сетке двумерную задачу Дирихле для диффузионного уравнения. Многосеточный подход конструируется как рекурсивное применение двухсеточного алгоритма, основанного на редуцировании СЛАУ с густой сетки на редкую и на использовании метода чебышевского ускорения для обратного продолжения решения с редкой сетки на густую.

Приводятся теоретические оценки вычислительной ресурсоемкости алгоритма, а также обсуждаются результаты численных расчётов для представительной серии методических задач.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. В.П. Ильин

УДК 519.6

Моделирование нестационарных течений вязкой жидкости в поровом пространстве

Е. А. Гондюл

Новосибирский государственный университет

Для получения корректных данных о параметрах нефтегазоносного пласта и оптимизации параметров процесса вытеснения существует потребность в численных моделях многофазных течений. В данной работе предлагается оптимизированная численная реализация модели фазового поля, позволяющей моделировать течение двухфазной несмешивающейся жидкости в пористом пространстве.

Целью исследования является разработка и реализация численного алгоритма для моделирования двухфазных потоков вязкой жидкости в поровом пространстве горных пород. Используется модель фазового поля, предполагающая, что параметр среды, например концентрация, непрерывно меняется в тонких ненулевых межфазных слоях. Решается система уравнений, состоящая из уравнения Навье-Стокса, в которое добавляется сила поверхностного натяжения, и уравнения Кана-Хилларда для учёта межфазного взаимодействия.

Разработана численная схема для решения данной системы уравнений, проведена серия вычислительных экспериментов для двухфазной жидкости, показывающих применимость данной модели для расчётов на цифровых моделях керна.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, В. В. Лисица

УДК 519.6

Некорректность обратной задачи определения источника волн

А. В. Губер

Новосибирский государственный университет

В работе исследована обратная задача определения источника волн в двумерном случае.

Рассмотрим прямую задачу для уравнения акустики в области $\Omega = \{(x, y) : x \in (0, L_x), y \in (0, L_y)\}$:

$$u_{tt} = \mathrm{div}(c^2(x, y)\nabla u), \qquad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T),$$

$$u|_{t=0} = q(x, y), \qquad u_t|_{t=0} = 0,$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Подобные задачи возникают во многих приложениях. Например, в задачах распространения волны цунами $c(x, y) = \sqrt{gh(x, y)}$ — скорость распространения волн, $h(x, y)$ глубина океана, $g = 9.81$ м/с^2 ускорение свободного падения [1].

Обратная задача состоит в определении функции $q(x, y)$ по дополнительной информации [2]:

$$u(x_n, y_n, t) = f_n(t), \qquad n = \overline{1, N}.$$

Здесь (x_n, y_n) — расположение приемников, N — количество приёмников.

В операторной форме обратная задача формулируется в виде $Aq = f$.

Исследовано убывание сингулярных чисел дискретного оператора обратной задачи. Реализован численный метод решения прямой и регуляризации обратной задачи с использованием технологий OpenMP и CUDA. Приведены результаты численных расчетов.

[1] В. М. Кайстренко. Обратная задача на определение источника цунами. – Сб.: Волны цунами. Труды САХКНИИ – 1972. Вып.29.С.82-92

[2] М. А. Шишленин. Матричный метод в задачах определения источников колебаний. Сиб. электрон. матем. изв., 11 (2014), С.161–С.171.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, М. А. Шишленин

УДК 519.6

Об одном подходе к восстановлению зависимостей по ненакрывающим интервальным данным

М. А. Звягин

Новосибирский государственный университет

Рассматривается задача восстановления линейной зависимости вида

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_m x_m$$

по набору значений переменных и функции

$$\{\, x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{im}, y_i\}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где значения функции y_i известны неточно и для них заданы интервалы возможных значений, которые, вообще говоря, могут быть не накрывающими. Решение задачи сводится к нахождению минимума выпуклой негладкой функции $\Phi\big(\beta_0, \ldots, \beta_m\big) = \|y \ominus \boldsymbol{y}\|$, которая в зависимости от выбора нормы в пространстве имеет вид

$$\Phi_1\big(\beta_0, \ldots, \beta_m\big) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{rad} \boldsymbol{y}_i + \sum_{i=1}^{n} |\operatorname{mid} \boldsymbol{y}_i - (\beta_0 + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_{ij})|,$$

$$\Phi_p\big(\beta_0, \ldots, \beta_m\big) = \left(\sum_{i=1}^{n} (\operatorname{rad} \boldsymbol{y}_i + |\operatorname{mid} \boldsymbol{y}_i - (\beta_0 + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_{ij})|)^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\Phi_\infty\big(\beta_0, \ldots, \beta_m\big) = \max_{1 \le i \le n} \{\operatorname{rad} \boldsymbol{y}_i + |\operatorname{mid} \boldsymbol{y}_i - (\beta_0 + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_{ij})|\}.$$

Для Φ_1, Φ_∞ показана полиэдральность. На основе методов негладкой оптимизации предложен численный метод решения поставленной задачи восстановления зависимостей, выполнена его программная реализация. Проведены эксперименты, в ходе которых был найден пример, показывающий разительное отличие результата решения задачи восстановления линейной зависимости по накрывающей и ненакрывающей выборке.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. С. П. Шарый

УДК 519.6

Методы решения СЛАУ с седловой точкой в задачах фильтрации

Д. И. Козлов

Новосибирский государственный университет

Итерационные процессы в подпространствах Крылова для решения больших плохо обусловленных СЛАУ седлового типа с разреженными матрицами, возникающие в результате конечно-элементной аппроксимации базисными функциями Равьяра–Тома на регулярной прямоугольной сетке задачи Неймана для двухфазной фильтрации в смешанной постановке.

Используется регуляризованный метод Удзавы, предложенный Грейфом, бидиагонализация Голуба-Кахана [1], а также комбинированные двухуровневые итерационные алгоритмы с использованием эффективного ускорения Чебышева и вариационного метода сопряженных направлений.

Ресурсоемкость и вычислительная производительность предложенных алгоритмов исследованы на примерах задач трехмерной фильтрации. Эффективность предлагаемых численных методов продемонстрирована на представительном ряде методических задач.

---

[1] ACM transactions on mathematical software. Vol. 8, No. 1, March 1982, Pages 43-71

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. В. П. Ильин

УДК 519.6

Метод зеркального обращения времени для случайно неоднородных сред

В. В. Койнов

Новосибирский государственный университет

Во многих важных приложениях, таких как ультразвуковая медицинская визуализация, неразрушающий контроль материалов, сейсмическая инверсия и других, возникает задача обнаружения и локализации объектов и источников, расположенных внутри некоторой случайно-неоднородной среды.

В работе рассматривается задача восстановления положений источников в геологических случайно-неоднородных средах по записям сейсмограмм на свободной поверхности. Для восстановления источников применяется метод зеркального обращения времени (Time Reversal Mirror) к набору статистически эквивалентных сред, моделируемых случайной функцией пространства. Приводятся результаты численных экспериментов.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00759, https://rscf.ru/project/22-21-00759/

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук Г. В. Решетова

УДК 519.642

Построение областей устойчивости неявного метода для интегро-алгебраического уравнения типа Абеля

Г. К. Соколова

Иркутский государственный университет

Пусть $\mathbb{R}^{n\times n}$ — вещественное векторное пространство $(n\times n)$-матриц, $\Delta=[0,1]\times[0,t]$ — двумерный компакт. Относительно искомой n-мерной вектор-функции $x:\ [0,1]\to\mathbb{R}^n$ рассматривается уравнение

$$A(t)x(t)-\int\limits_0^t (t-s)^{-a}K(t,s)x(s)ds=f(t),\ a\in(0,1),\ t\in[0,1], \qquad (1)$$

называемое *интегро-алгебраическим уравнением* (ИАУ) *типа Абеля*, где матрицы $A:\ [0,1]\to\mathbb{R}^{n\times n}$, $K:\ \Delta\to\mathbb{R}^{n\times n}$ и вектор $f:\ [0,1]\to\mathbb{R}^n$ заданы и имеют достаточно гладкие компоненты, а ненулевая матрица главной части такая, что $\det A(t)=0$ для всех $t\in[0,1]$. Планируемый доклад посвящен построению областей устойчивости разработанных в статье [1] алгоритмов численного решения ИАУ (1). Устойчивость этих методов изучается на модельных интегральных уравнениях типа Абеля первого и второго рода, к которым сводится начальная задача

$$^{GC}\mathfrak{D}_{0+}^{1-a}x(t)=\lambda x(t),\ x(0)=x_0,\ t\in[0,1],\ \mathrm{Re}\lambda\ll 0,$$

для линейного интегро-дифференциального уравнения с *производной Герасимова – Капуто* дробного порядка $1-a$. В частности, при $a=0$ получается задача Коши для уравнения Далквиста, называемая также «жёсткой» задачей, интегральные аналоги которой в форме уравнений Вольтерра первого и второго рода обычно применяют к исследованию устойчивости численных методов решения ИАУ с регулярным ядром.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Иркутской области в рамках научного проекта № 20-41-385002 р_Наставник.

---

[1] *М. В. Булатов, О. С. Будникова* Численное решение интегро-алгебраических уравнений со слабой особенностью в ядре k-шаговыми методами // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2015. Т. 13. С. 3-15.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук О. С. Будникова

УДК 512.54

О свойствах сечений производящих рядов числа решеточных путей в конусе

В. С. Алексеев

Сибирский федеральный университет

Пусть $\Delta = \{\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^N\} \subset \mathbb{Z}^2$ — это набор из N векторов с целочисленными координатами такой, что конус

$$K = \{\lambda : \lambda = k_1\alpha^1 + \dots + k_N\alpha^N\}, k_i = 1, 2, \dots, i = 1, ..., N$$

заостренный, то есть целиком лежит в некоторой полуплоскости. Обозначим через $f(x_1, x_2)$ число путей из начала координат в точку $(x_1, x_2) \in K$ с шагами из Δ и рассмотрим формальный степенной ряд

$$F(z_1, z_2) = \sum_{(x_1,x_2)\in K} f(x_1, x_2) z_1^{x_1} z_2^{x_2},$$

который назовем производящим рядом для числа путей $f(x_1, x_2)$ с шагами из Δ. Отметим, что конус K можно представить в виде объединения конусов

$$K = \bigcup_{k_1=0}^{\infty} \{k_1\alpha^1 + K_1\},$$

где K_1 — это конус, натянутый на вектора $\{\alpha^2, ..., \alpha^N\}$, тогда

$$F(z_1, z_2) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \left(\sum_{(x_1,x_2)\in K_1} f(x_1, x_2) z_1^{x_1} z_2^{x_2} \right) \left(z^{\alpha^1}\right)^{k_1},$$

причем суммы вида $F(k_1; z_1, z_2) = \sum\limits_{(x_1,x_2)\in K_1} f(x_1, x_2) z_1^{x_1} z_2^{x_2}$ будем называть сечениями производящего ряда $F(z_1, z_2)$.

В работе получено рекуррентное соотношение для сечений $F(k_1; z_1, z_2)$ производящего ряда числа решеточных путей в конусе K. Отметим, что частные случаи этой задачи рассматривались в работах [1] и [2].

[1] С.С. Ахтамова, В.Ю. Гришунов, А.П. Ляпин, С.А. Тихомиров. О сечениях производящих рядов в задачах о решеточных путях // Прикладная математика & Физика, 2020, том 52, №2, с. 146-151.

[2] А. П. Ляпин, С. С. Ахтамова. Рекуррентные соотношения для сечений производящего ряда решения многомерного разностного уравнения // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2021. Т. 31. Вып. 3. С. 414–423.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доц. А. П. Ляпин

УДК 816

Построение минимального базиса инвариантов для дифференциальной алгебры $2\times$ 2 матриц

С. А. Васюткин

Новосибирский государственный университет

Преобразование подобия $T_g : a \to gag^{-1}$ матриц разбивает их на классы эквивалентности, различающиеся наборами инвариантов. Инварианты имеют различные представления: собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы a, следы степеней a и т.д. Пусть матрица $a = a(t)$ зависит гладким образом от параметра $t \in D \subset \mathbb{R}$, так что определены производные $a_1 = da/dt, a_2 = d^2a/dt^2, \ldots$. Известно, что собственные значения матрицы a_1 не совпадают с производными собственных значений $d\lambda_1/dt, \ldots, d\lambda_n/dt$ матрицы a.

Вопрос о связи собственных значений и алгебраических инвариантов исходной матрицы a и ее прозводных $da/dt, d^2a/dt^2$... интересен сам по себе и находит приложения в механике континуума. Он формулируется и решается на основе теории дифференциальных инвариантов. В работе [1] предложено решение этой задачи, основанное на построении оператора инвариантного дифференцирования ∇ для группы преобразований подобия. Оператор ∇ позволяет вычислить собственные значения матриц производных $a_1, a_2, \ldots$ как инварианты продолженного преобразования подобия.

В работе [2] этот подход применяется к построению базиса инвариантов для набора 2×2 матриц $a_0, a_1 = da_0/dt, a_2 = d^2a_0/dt^2, \ldots$, состоящего из исходной матрицы и её производных. Наличие производной накладывает связи между элементами этого набора и сокращает число элементов базиса, по сравнению с чисто алгебраическим случаем[3]. Доказываются формулы для вычисления алгебраических инвариантов такого набора. Формулируется обобщение формул Фрике в терминах следов.

[1] Васюткин С. А., Чупахин А. П., Дифференцирование подобных матриц // Матем. заметки. 2021. Т. 109, 2. С. 302–306.

[2] Васюткин С. А., Чупахин А. П., Построение минимального базиса инвариантов для дифференциальной алгебры $2\times$ 2 матриц // Сибирский журнал индустриальной математики 2022. Т. 25, 2. С. 1–9.

[3] Сибирский С. К., Алгебраические инварианты системы матриц // Сиб. матем. журн. 1968. Т. 9, 1. С. 152–164.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. А. П. Чупахин

УДК 515.1

Моделирование узла трилистник с мостом в евклидовой геометрии

А. Б. Кутбаев

Новосибирский государственный университет

Узлом называется вложение $\mathcal{S}^1$ (одномерной сферы) в трёхмерное евклидово пространство или в сферу.

В работе [1] разработана компьютерная программа для нахождения гиперболических структур на конических многообразиях.

Рассмотрим узел трилистник с одним мостом, вложенный в трехмерную сферу. В данной работе мы находим евклидову структуру на указанном коническом многообразии и строим соответствующее ему фундаментальное множество. В [2] разработаны технологии нахождения евклидовых структур на узле восьмерка с мостом. Следуя этим технологиям, мы находим фундаментальное множество конического многообразия узла 3_1 с мостом в трехмерной евклидовой геометрии. Оно образует невыпуклый двенадцатигранник.

Пусть дан узел трилистник с мостом, его конический угол равен α, а конический угол моста равен γ. Обозначим его коническое многообразие через $3_1(\alpha, \alpha, \gamma)$. Тогда имеет место следующее утверждение

Теорема 3. *Пусть $\pi/3 < \alpha < \pi$, а угол γ определен соотношением*

$$\cos\gamma = \frac{1}{729}\big(521 + 1200\cos\alpha - 2112\cos^2\alpha + 448\cos^3\alpha + 1920\cos^4\alpha - \\ -1536\cos^5\alpha + 512\cos^6\alpha\big).$$

Тогда коническое многообразие $3_1(\alpha, \alpha, \gamma)$ моделируется в евклидовой геометрии.

Последний результат получен в совместной работе с группой молодых ученых из Томского и Новосибирского государственных университетов под руководством А. Д. Медных, А. Ю. Веснина и Н. В. Абросимова на Большой математической мастерской-2021.

[1] D. Heard. Orb: a computer program for finding hyperbolic structures on 3-orbifolds and manifolds // http://www.ms.unimelb.edu.au/snap/orb.html.

[2] A. D. Mednykh, D. Yu. Sokolova. The exsistence of an Euclidian structure on the figure-eight knot with a bridge // Yakutian Math. J., , 2015, Vol. 22, № 4. P. 25-33.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. А. Д. Медных

УДК 517.53

Дискретные аналитические функции параболического типа и ряды Тейлора

Лу Сяоцин

s.lu1@g.nsu.ru
Новосибирский государственный университет

Целью настоящей работы является установление теорем существования и единственности для дискретной аналитической функции параболического типа в положительном квадранте гауссовой плоскости. Пусть $\mathbb{G}^+ = \{\mathbb{Z}^+ + i\mathbb{Z}^+\}$. Обозначим через $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ и $\mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$ — пространства аналитических экспоненциального типа и дискретных аналитических функций параболического типа, определённых в $\mathbb{C}$ и $\mathbb{G}^+$ соответственно. Для экспоненты $e(\zeta, z) = e(\zeta, x, y) = e^{\zeta x}\big((e^{\zeta} - 1)^2 + 1\big)^y$ определим псевдостепени $\boldsymbol{\{\pi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}}$, по формуле $e(\zeta, x, y) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\pi_k(z)}{k!}\zeta^k$ для $\zeta \in \mathbb{C}$ и $z = x + iy \in \mathbb{G}^+$. Следующая теорема доказана автором в [1].

Теорема 4. *Пусть $f \in \mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$. Тогда существует $F(\zeta) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$, такая, что $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z)$ и ряд абсолютно сходится для всех $z \in \mathbb{G}^+$. В этом случае для каждого $z = x + iy$ мы имеем*

$$f(z) = \sum_{s=-y}^{x} c(x, y, s) F(s), \tag{1}$$

где

$$c(x, y, s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\xi^x \big((\xi - 1)^2 + 1\big)^y}{\xi^{s+1}}\, d\xi, \tag{2}$$

а Γ — любой контур, содержащий внутри 0.

Более того, для всех целых $k \geqslant 0$, справедливы равенства $F(k) = f(k)$.

В работе [2] теорема доказана для дискретных аналитических функций 2 рода.

[1] Лу Сяоцин. *Дискретные аналитические функции параболического типа и ряды Тейлора* // Магистерская диссертация, НГУ,– 2021.– С. 1–20.

[2] Медных А. Д. *Дискретные аналитические функции и ряд Тейлора. В кн.: Теория отображений, ее обобщения и приложения* // Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка.– 1982.– С. 137–144.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, О. А. Данилов

УДК 517

Гранд пространства Соболева на метрических пространствах с мерой

С. В. Павлов

Новосибирский государственный университет

Известно поточечное описание гранд пространств Соболева $L^{1,q)}(U)$ в случае, когда $U = \mathbb{R}^n$ или когда U — подобласть $\mathbb{R}^n$, обладающая свойством продолжения: локально суммируемая функция f принадлежит $L^{1,q)}(U)$ тогда и только тогда, когда найдется $g \in L^{q)}(U)$, такая, что неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|(g(x) + g(y))$$

выполнено для п. в. $x,\ y \in U$. Этот результат позволяет определить гранд пространства Соболева на метрических структурах с мерой.

Метрическое пространство (X, d, μ), обладающее конечным диаметром и снабженное конечной борелевской мерой, называется s-регулярным по отношению к мере μ, если для всех $x \in X$, $r \leq \operatorname{diam} X$ верно

$$\mu(B(x, r)) \geq br^s,$$

где $b = \mu(X)/\operatorname{diam} X^s$.

Над s-регулярной структурой (X, d, μ) при $1 < q < s$ в данной работе получено вложение пространства $W^{1,q)}(X, d, \mu)$ в некоторое пространство суммируемых функций L посредством неравенства

$$\|f\|_L^* = \sup_{\varepsilon\in(0;q-1)} \varepsilon^{1/(q-\varepsilon)} \|f\|_{L^{q^*-\delta(\varepsilon)}} \leq C\left(\frac{\|f\|_{L^{q)}}}{\operatorname{diam} X} + \|f\|_{L^{1,q)}}\right),$$

где $\delta(\varepsilon) = \frac{s^2\varepsilon}{(s-q)(s-q+\varepsilon)}$, $q^* = \frac{sq}{s-q}$. $\|\cdot\|_L^*$ является нормой на L, эквивалентной норме

$$\|f\|_L = \sup_{0<\delta<q^*-1} \left(\delta^{q^*/q} \int\limits_X |f|^{q^*-\delta}\, d\mu\right)^{\frac{1}{q^*-\delta}}.$$

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2019-1613.

[1] Bojarski B. Remarks on some geometric properties of Sobolev mapping, in: Functional Analysis and Related topics, Sapporo, 1990, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991, pp. 65–76.

[2] Водопьянов С. К. Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1269–1295.

[3] Hajlasz P. Sobolev spaces on an arbitrary metric space // Potential Analysis 5: 403–415, 1996.

[4] Iwaniec T., Sbordone C. On the Integrability of the Jacobian under Minimal Hypothesis // Arch. Rational Mech. Anal. 119 (1992) 129-143.

[5] Jain P., Molchanova A., Singh M., Vodopyanov S. On grand Sobolev spaces and pointwise description of Banach function spaces // Nonlinear Analysis 202 (2021) 112100.

[6] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – Наука, Гл. ред. физ. -мат. лит. – М., 1976.

[7] Hajlasz P. Sobolev spaces on metric-measure spaces // Contemporary Mathematics V. 338, 2003.

[8] Hajlasz P., Koskela P. Sobolev Met Poincare // Memoirs of the American Mathematical Society. May 2000, V. 145,№ 688, ISSN 0065-9266.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. С. К. Водопьянов

УДК 531.1

Биомеханическая модель лыжника-гонщика на основе реальных данных

В. Е. Семянова

Новосибирский государственный университет

На сегодняшний день во многих циклических видах спорта математическое моделирование нашло особенно широкое применение[1,2], было проведено множество исследований, результаты которых помогли улучшить результаты спортсменов: например, повысить показатели выносливости у натренированных гонщиков получилось с помощью интервальных тренировок высокой интенсивности [3], а поддерживать производительность после длительных нагрузок - с помощью добавления силовых тренировок [4]. В лыжных гонках среди профессиональных спортсменов большой популярностью пользуется техника дабл полинга, исследованию которой посвящена данная работа.

Были собраны экспериментальные данные на основе анализа видео-изображений гонок уровня кубка мира. На их основе была построена модель движений лыжника-гонщика в рамках модели согласованных нелинейных осцилляторов, а также исследованы особые точки этой модели. Система дифференциальных уравнений, описывающая взаимодействие осцилляторов указанного типа, имеет вид:

$$\varphi_0'' - \alpha_1\varphi_0' + \varphi_0 + \beta_1\varphi_0^3 = b\varphi_1$$

$$\varphi_2'' - \alpha_2\varphi_2' + \varphi_2 + \beta_2\varphi_2^3 = b\varphi_1$$

$\varphi_{0,1\ ,2}$ - функции от времени, определяют углы в плечевом, локтевом суставах и между предплечьем и палкой соответственно. Результатом данной работы является автоматизированная обработка видео-изображений реальных соревнований, построение на основе этих экспериментальных данных математической модели типа нелинейного осциллятора и исследование особых точек этой модели.

[1] L. J. Holmberg, A. M. Lund. A musculoskeletal full-body simulation of cross-country skiing, 2008

[2] А. Е. Кубяк, Д. В. Паршин. Об исследовании кинематики движений лыжников элитного уровня при использовании техники дабл полинг, 2021.

[3] Кошмарь А.В., Воронков А.В., Никитин М.В. Использование монитора сердечного ритма в процессе подготовки квалифицированных лыжников-гонщиков // Дискурс. – 2017. – Т. 9, № 7. – С. 41–47.

[4] Øfsteng S., Sandbakk Ø., Beekvelt M.V. Strength training improves double poling performance after prolonged submaximal exercise in cross-country skiers // Scandinavian Journal of Medicine & Science in Sports. – 2018. – Vol. 28. – P. 893–904

Научный руководитель – канд физ.-мат. наук, Д. В. Паршин

УДК 517.17+517.51

Фундаментальное множество периодической функции нескольких действительных переменных

Г. К. Соколова

Иркутский государственный университет

В данном докладе планируется изложить результаты продолжения исследований периодичности функций нескольких действительных переменных. Рассматриваются периодические функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определенные на всем $\mathbb{R}^n$, что позволяет учесть постоянство как вырожденный случай периодичности. В основе исследования лежит понятие множества P_f периодов периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ранее в работе [1] было показано, что это множество имеет вид

$$\mathrm{P} = \Lambda(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \ldots, \bar{T}_{m_1}) \oplus \mathrm{span}(\bar{\mathcal{T}}_{m_1+1}, \bar{\mathcal{T}}_{m_1+2}, \ldots, \bar{\mathcal{T}}_{m_1+m_2}),$$

где $\bar{T}_k$ — базисные векторы m_1-*мерной решетки*, $\bar{\mathcal{T}}_k$ — направления постоянства функции, и $m_1 + m_2 \leq n$. В представляемой работе вводится понятие фундаментального множества $\mathcal{F}_f$ периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, которое является аналогом понятия основного промежутка периодической функции одной действительной переменной. Изучена геометрия этого множества. Полученные результаты применены к исследованию степени произвола общего решения линейного разностного уравнения

$$u(\bar{r} + \bar{T}) - \lambda u(\bar{r}) = 0, \ \bar{r} \in \mathbb{R}^n,$$

где $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — искомая функция, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — спектральный параметр, $\bar{T} \in \mathbb{R}^n$ — заданный ненулевой вектор.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Иркутской области в рамках научного проекта № 20-41-385002 р_Наставник.

---

[1] Г. К. Соколова. О множестве периодов периодической функции нескольких переменных // Лобачевские чтения – 2018: Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. Казань: Изд-во Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ, 2018. Т. 56. С. 273-277.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук С. С. Орлов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.9

Некоторые классы интегро–дифференциальных уравнений с вырождением

Б. Х. Баротов

Новосибирский государственный университет

Доклад посвящен приложение новых результатов о разрешимости интегро –дифференциальных уравнений

$$h(t)u_t(x,t) + \int_0^t N(t,\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau + \int_0^t R(t,\tau)u(x,\tau)d\tau + c(x,t)u(x,t) = f(x,t) \quad (1)$$

с функции h(t) , обращающейся в нуль на отрезке [0,T] (Δ-оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_n$).Изучаемые уравнение отнесется к классу интегро – дифференциальных уравнений Вольтерры третьего рода.

Целью работы является доказательство теорем существование и единственности регулярных решений краевых задач для уравнений (1) решений, имеющих обобщенные по С.Л. Собелеву производные, входящие в уравнение.

Заметим, что постановка корректных краевых задач для уравнений (1) будем существенным образом определяться числами h(0) и h(T).

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. А. И. Кожанов

УДК 519.6

Отдельные аспекты задачи дихотомии матричного спектра

Ван Ли

Новосибирский государственный университет

Исследование матричного спектра является неотъемлемой частью решения задач из разных областей науки и техники. В конце 20-го века была предложена новая постановка алгебраической спектральной задачи, заключающаяся в определении расположения спектра относительно заданной кривой, то есть задача дихотомии спектра [1]. Такая постановка наиболее точно отражает вопросы, возникающие во многих практических задачах.

К настоящему моменту были созданы алгоритмы дихотомии относительно окружности и прямой, которые можно назвать базовыми. Также разработаны алгоритмы для кривых второго порядка. Определенные модификации алгоритмов позволяют с успехом применять их при решении спектральных задач для дифференциальных операторов [2],[3]. При этом остается целый ряд открытых вопросов, например, дихотомия относительно ломаной.

В рамках данной работы было создано несколько новых алгоритмов для решения следующих спектральных задач:

1. определение наличия или отсутствия собственных значений матрицы на луче;
2. определение наличия или отсутствия собственных значений матрицы на отрезке;
3. дихотомии относительно произвольной прямой без использования матричной экспоненты;
4. разделение матричного спектра относительно угла;
5. разделение матричного спектра относительно прямоугольника.

---

[1] Годунов С.К.Задача о дихотомии спектра матрицы// Сиб. мат. журн. 1986. Т. 27, N 5, с. 57-59.

[2] Бибердорф Э.А., Блинова М.А., Попова Н.И. Модификации метода дихотомии матричного спектра и их применение к задачам устойчивости// СибЖВМ, 2018, Т. 21, № 2, с. 139-153

[3] Biberdorf E. Development of the matrix spectrum dichotomy method // Continuum mechanics, applied mathematics and scientific computing: Godunov’s legacy - A liber amicorum to Professor Godunov; Book series: Advanced Structured Materials, 2020, 37-40

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Э. А. Бибердорф

УДК 517.95

Разрешимость двумерной задачи фильтрации в тонком пороупругом слое

П. В. Гилев

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

Математическая модель двухфазной фильтрации в пороупругой среде описывается следующей системой уравнений [1]:

$$\frac{\partial s_i \phi \rho_i^0}{\partial t} + \nabla \cdot (s_i \phi \vec{u}_i \rho_i^0) = 0, \quad \frac{\partial (1-\phi)\rho_3^0}{\partial t} + \nabla \cdot ((1-\phi)\vec{u}_3 \rho_3^0) = 0,$$

$$s_i \phi (\vec{u}_i - \vec{u}_3) = -K_0(\phi) \frac{k_{0i}}{\mu_i} (\nabla p_i - \vec{g}\rho_i^0), \quad i = 1, 2, \quad s_1 + s_2 = 1,$$

$$\nabla \cdot \vec{u}_3 = -a_1(\phi) p_e - a_2(\phi) (\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{u}_3 \cdot \nabla p_e), \quad p_2 - p_1 = p_c(x, s_1),$$

$$p_e = p_{tot} - (s_1 p_1 + s_2 p_2), \quad \rho_{tot} = (1-\phi)\rho_3^0 + \phi(s_1 \rho_1^0 + s_2 \rho_2^0),$$

$$\nabla p_{tot} + div \left(\eta(1-\phi) \left[\frac{\partial \vec{u}_3}{\partial \vec{x}} + \left(\frac{\partial \vec{u}_3}{\partial \vec{x}} \right)^* \right] \right) = -\rho_{tot} \vec{g},$$

где s_i, p_i, ρ_i^0, $\vec{u}_i$ – соответственно насыщенность, давление, истинная плотность и скорость i-той фазы, $K_0(\phi)$ – тензор фильтрации, k_{0i} – коэффициенты проницаемости, μ_i, η – коэффициенты динамической вязкости жидких и твердой фаз соответственно, $\vec{g}$ – вектор ускорения силы тяжести, ϕ – пористость, p_c – капиллярный скачок, $a_1(\phi)$ и $a_2(\phi)$ – коэффициенты объемной вязкости и объемной сжимаемости соответственно, p_e, p_{tot} – эффективное и полное давление, ρ_{tot} – общая плотность. В работе получено обобщенное решение начально-краевой задачи.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2020-0008).

[1] Папин А.А., Подладчиков Ю.Ю. Изотермическое движение двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде // Известия Алтайского государственного университета, 2015, № 1-2(85). с. 131-140.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. А.А. Папин

УДК 519.63

Об одной задаче нахождения потенциала и объёмного заряда в нестационарных ЭГД течениях несжимаемой полимерной жидкости

Гуань Сюэлинь

Новосибирский государственный университет

Реологическая модель Покровского-Виноградова предложенная в [1], описывающая нестационарные ЭГД течения несжимаемой полимерной жидкости, представляет собой систему нелинейных уравнений для компонент скорости, анизотропного тензора, давления и заряда и уравнение Пуассона для потенциала. При некоторых упрощающих предположениях, а именно, для течения полимерной жидкости пуазейлевского типа в плоском канале, система распадается на две задачи. Одна из полученных задач – это начальная-краевая задача для нахождения потенциала $\Phi(t, y)$ и заряда $q(t, y)$

$$q_t - b \cdot \Phi_y \cdot q_y + b \cdot q^2 = 0, \tag{1}$$

$$\Phi_{yy} = -q, \tag{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Phi|_{y=0} = 0,\, \Phi|_{y=1} = 1, \quad t > 0, \\ q = a \cdot \Phi_y (a > 0) \quad \text{при} \quad y = 1, \quad t > 0, \end{array}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Phi|_{t=0} = \Phi_0(y), \quad 0 < y < 1, \\ q|_{t=0} = q_0(y), \quad 0 < y < 1. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Целью данного исследования является численное нахождение потенциала и заряда. Предложены два подхода для достижения цели. В первом случае в рассмотрение вводится функция $L(t, y) = \frac{1}{q(t,y)} - b \cdot t$, для которой было получено уравнение переноса. Во втором случае дифференциальное уравнение 1-го порядка было получено для функции $\mathcal{L}_y(t, y) = -Q_y(t, y), Q(t, y) = \int_0^y q(t, s) ds$. Для нахождения численного решения использована схема "бегущего счёта" на равномерной сетке с шагом τ по времени t и h по переменной y, $r = \frac{\tau}{h}$. Аппроксимация дифференциального оператора первого метода для L:

$$L_i^{n+1} = \frac{r \cdot b \cdot (\Phi_y)_i^{n+l} \cdot L_i^{n+1+l} + L_i^n}{1 + b \cdot (\Phi_y)_i^{n+l} \cdot r}\ ,\ i = N - 1, \ldots, 0,$$

аппроксимация дифференциального оператора второго метода для $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}_i^{n+1} - \mathcal{L}_i^n - \frac{b \cdot r \cdot ((\mathcal{L}_{i+1}^{n+1})^2 - (\mathcal{L}_i^{n+1})^2)}{2} + \frac{\tau \cdot b \cdot ((\mathcal{L}_N^{n+1})^2 - (\mathcal{L}_0^{n+l})^2)}{2} = 0.$$

Уравнения содержат два параметра a и b. Для учета нелинейности в расчетную схему введен дополнительный параметр l, характеризующий число итераций по нелинейности. Численные расчёты проведены для различных значений параметров: $a = b$, $a << b$, $b << a$, $l = 0, 1, 2$. Оба метода дают сходные результаты: значения искомых величин со временем стабилизируются. Значение a влияет на степень кривизны числовой функции. Величина параметра b влияет только на значение начального условия.

[1] Алтухов Ю.А., Гусев А.С., Пышнограй Г.В., Введение в мезоскопическую теорию текучести полимерных систем. Барнаул: изд-во АлтГПА, 2012.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доц. Е. В. Мищенко

УДК 517.9

Об одной коэффициентной обратной задаче для уравнения типа Бюргерса–Хаксли

П. Н. Дёмушкина

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск

В $G_{[0,T]} = \{(t, x, z) \mid 0 \le t \le T,\ x \in E_1,\ z \in E_1\}$ рассматривается уравнение:

$$u_t = \alpha_1(t)u_{xx} + \alpha_2(t)u^2u_x + \alpha_3(t)u_{zz} + \alpha_4(t)u_z + \alpha_5(t)u\psi(u) + g(t)f(t, x, z), \tag{1}$$

где $\psi(u) = (1 - u^2)(u^2 - \gamma), \quad \gamma \in (0, 1)$.

$g(t)$ является неизвестным коэффициентом.

Начальное условие:

$$u(0, x, z) = u_0(x, z), (x, z) \in E_2. \tag{2}$$

Коэффициенты $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1, 5}$, непрерывные действительнозначные функции переменной t, $0 \le t \le T, T > 0$ – константа, причем $\alpha_1(t) \ge a_0 > 0, \alpha_3(t) \ge a_1 > 0$, a_0, a_1 – константы, E_n – n-мерное евклидово пространство, $n \in \mathbb{N}$.

Функции $f(t, x, z), u_0(x, z)$ заданы в $G_{[0,T]}$ и E_2 соответственно.

Предполагается, что выполняется условие переопределения

$$u(t, b, a) = \varphi(t), \quad t \in [0, T], \quad a - const, b - const, \tag{3}$$

где $\varphi(t)$ - заданная функция, удовлетворяющая условию согласования

$$\varphi(0) = u_0(b, a).$$

Решением задачи (1) – (3) в $G_{[0,t_*]}, 0 \le t_* \le T$, являются функции $u(t, x, z), g(t)$, удовлетворяющие соотношениям (1) – (3).

В данной работе доказана теорема существования решения обратной задачи (1) – (3) в классе гладких ограниченных функций. Доказательство основано на сведении исходной обратной задачи (1) – (3) к прямой вспомогательной задаче Коши, существование которой доказано с помощью метода слабой аппроксимации.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук С. В. Полынцева

УДК 517.925.54

О свойствах решений одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности

В. А. Денисюк

Новосибирский государственный университет

Рассматривается задача Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{n-1}{\tau_1}x_1 + g(t, x_n), \quad t > 0, \\ \frac{dx_j}{dt} = -\frac{n-1}{\tau_j}x_j + \frac{n-1}{\tau_{j+1}}x_{j+1}, \quad j = 2, \dots, n-1, \\ \frac{dx_n}{dt} = -\theta x_n + \frac{n-1}{\tau_{n-1}}x_{n-1}, \\ x|_{t=0} = x^0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\theta > 0$, $\max\limits_{j=1,\dots,n-1} |\tau - \tau_j| \to 0$, функция $g(t,z) \in C\left(\overline{\mathbb{R}}_+^2\right)$ является ограниченной и липшицевой по второму аргументу. Системы такого вида возникают при исследовании многостадийного синтеза вещества, при этом $x_n(t)$ описывает концентрацию конечного продукта. Поскольку количество стадий n может быть сколь угодно большим, при нахождении $x_n(t)$ возникает проблема "большой размерности". Эта проблема была решена Г. В. Демиденко в [1] при $\tau_j = \tau$, $x^0 = 0$. В [2] исследовалась задача Коши (1) при различных τ_j и нулевых начальных данных. В данной работе рассматривается задача Коши (1) при различных τ_j и ненулевых начальных данных. Доказано, что при некоторых начальных данных последовательность $\{x_n(t)\}$, составленная из последних компонент решения, равномерно сходится к функции $y(t)$, которая является решением начальной задачи для уравнения с запаздыванием

$$\frac{dy}{dt} = -\theta y + g(t-\tau, y(t-\tau)). \tag{2}$$

Структура начальных данных для уравнения (2) зависит от структуры вектора x^0. Доказательство опирается на метод, предложенный Г. В. Демиденко в [1] и развитый в [2].

[1] Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В., Матушкин Ю. Г. Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления // Сиб. журн. индустр. мат. 2004. Т. 7, № 1. С. 73–94.

[2] Демиденко Г. В., Уварова И. А. Класс систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности // Сиб. журн. индустр. мат. 2016. Т. 19, № 2. С. 47–60.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доц. И. И. Матвеева

УДК 517.9

Скалярные волновые уравнения на группах Ли, допускающие редукцию порядка

А. Л. Евтягин

Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского

Пусть G — связная односвязная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G. Объектом нашего исследования является скалярное волновое уравнение вида

$$\Delta_G\,\varphi = -m^2\varphi, \tag{1}$$

где Δ_G – оператор Лапласа–Бельтрами левоинвариантной лоренцевой метрики на группе G, m — вещественная положительная постоянная.

Известно, что в общем случае алгебра симметрии уравнения (1) исчерпывается алгеброй Ли $\mathfrak{g}_R(G)$ правоинвариантных векторных полей на группе G. Производя *некоммутативную редукцию* по этой алгебре симметрии [1], можно задачу интегрирования уравнения (1) свести к задаче интегрирования некоторого вспомогательного дифференциального уравнения в частных производных *второго порядка* с числом переменных, равным

$$n' = \frac{1}{2}\,(\dim\mathfrak{g} - \operatorname{ind}\mathfrak{g}) < \dim\mathfrak{g}.$$

Здесь целое неотрицательное число $\operatorname{ind}\mathfrak{g}$ — *индекс* алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Специальный выбор левоинвариантной метрики на группе, однако, может приводить к существованию дополнительных симметрий уравнения (1), не имеющих очевидную геометрическую природу. В настоящем исследовании мы конструируем класс таких левоинвариантных метрик следующим образом. Пусть $\mathfrak{n}$ — коммутативный идеал в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Рассмотрим семейство левоинвариантных метрик на группе G, определяемых билинейными симметрическими формами $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{R}$, такими, что соответствующий изоморфизм $\Phi_{\langle\cdot,\cdot\rangle} : \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}^*$ удовлетворяет условию:

$$\Phi^{-1}_{\langle\cdot,\cdot\rangle}\big|_{\mathfrak{n}^\perp} = 0. \tag{2}$$

Здесь $\mathfrak{n}^\perp\subset\mathfrak{g}^*$ — аннулятор идеала $\mathfrak{n}$ в дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$. Можно показать, что некоммутативная редукция скалярного волнового уравнения (1) с такой левоинвариантной метрикой приводит к некоторому уравнению в частных производных *первого порядка*, то есть имеет место редукция порядка исходного уравнения. Симметрии такого редуцированного уравнения — это его характеристики, которые, однако, в исходном координатном представлении имеют форму нелокальных операторов.

В данной работе мы подробно исследуем левоинвариантные метрики со свойством (2) на четырёхмерных группах Ли, алгебры Ли которых имеют индекс ноль. Отобрав все такие алгебры Ли (согласно классификации [2]), мы в явном виде строим указанные метрики и производим некоммутативную редукцию соответствующих скалярных волновых уравнений. Затем мы в явном виде выписываем скрытые симметрии задачи в редуцированном и исходном представлениях.

[1] А. В. Шаповалов, И. В. Широков, Некоммутативное интегрирование линейных дифференциальных уравнений // ТМФ, 1995, том 104, номер 2, 195–213

[2] Г. М. Мубаракзянов, О разрешимых алгебрах Ли // Изв. вузов. Матем., 1963, номер 1, 114–123

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, А. А. Магазев

УДК 517.9

Краевые задачи для некоторых классов уравнений составного типа с вырождением

Б. В. Жигжитжапов

Бурятский государственный университет им. Доржи Банзарова, Улан-Удэ

Цель данной работы – получение достаточных условий существования и единственности решений для некоторых начально-краевых задач для уравнений в частных производных составного типа с вырождением.

Уравнения в частных производных применяются повсеместно для моделирования различных процессов в науке, технике, экономике. Тем не менее, в данный момент они остаются малоизученными и ведется активная работа по их исследованию.

Уравнения составного типа относятся к неклассическим. В данной работе исследуется псевдоэллиптическое уравнение с несколькими типами вырождений старшей производной. Получаются достаточные условия для существования и единственности регулярных решений в пространстве Соболева W_2^2. Особое внимание уделяется влиянию вырождения на эти условия. Применяется метод Фурье, благодаря которому задача сводится к изучению краевой задачи для линейного ОДУ 2-го порядка с переменными коэффициентами.

Полученные результаты можно обобщить на более общие случаю вырождения.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. А.И.Кожанов

УДК 517.9

Локальные и нелокальные краевые задачи для некоторых классов дифференциальных уравнений с незнакоопределенным направлением эволюции

Б. З. Зикиров

Новосибирский государственный университет

Параболические уравнения с незнакоопреденным направлением эволюции возникают в задачах моделирования процессов движения встречных потоков электронов, в гидро- и газодинамике. Исследованию разрешимости краевых задач для таких уравнений посвящены работы С.А.Терсенова, В.Н.Врагова, С.Г.Пяткова, С.В.Попова, G.Talenti, C.D.Pagani, А.И.Кожанова и многих других.

В докладе излагаются новые результаты о разрешимости локальных и нелокальных краевых задач для параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции и с разрывными коэффициентами. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений-т.е. решений, имеющих все обобщенные по С.Л.Соболеву производные, входящие в уравнение.

Отметим, что нелокальные задачи для параболических уравнений с незнакоопределенным направлением эволюции ранее не изучались.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. А.И.Кожанов

УДК 533.951.8

К неустойчивости одномерных состояний динамического равновесия электронного газа Власова–Пуассона

В. П. Зинина

Новосибирский государственный университет

Изучается задача линейной устойчивости одномерных динамических состояний некоего подкласса локальных термодинамических равновесий безграничного бесстолкновительного электронного газа в электростатическом приближении – газа Власова-Пуассона.

Предполагается, что сначала рассматриваемый электронный газ находился в некотором одномерном статическом состоянии глобального термодинамического равновесия. При этом расстояния между электронами были настолько велики, что электрическим полем можно было пренебречь, поскольку оно, ввиду его слабости, не могло сдвинуть электроны с места из-за наличия у них конечной массы. Считается, что в некий последующий момент времени происходит спонтанная флуктуация, приводящая электронный газ в движение и «включающая» электрическое поле. В результате, у электронов возникает возможность очутиться в некотором одномерном динамическом состоянии того или иного локального термодинамического равновесия.

Прямым методом Ляпунова доказана абсолютная неустойчивость настоящих одномерных динамических состояний локальных термодинамических равновесий относительно одномерных же малых возмущений в случае, когда газ Власова-Пуассона содержит в себе электроны со стационарной функцией распределения, изотропной по физическому пространству, но переменной по скоростному континууму. Получены конструктивные достаточные условия линейной практической неустойчивости изучаемых динамических состояний по отношению к одномерным возмущениям. Построена априорная экспоненциальная оценка снизу и описаны начальные данные для нарастающих во времени малых одномерных возмущений. Обращено достаточное условие линейной устойчивости Ньюкомба-Гарднера-Розенблюта, выявлен его формальный характер. Сконструированы аналитические контрпримеры к спектральным теореме Ньюкомба-Гарднера и критерию Пенроуза. Установленные результаты полностью согласуются с теоремой Ирншоу о неустойчивости равновесных конфигураций точечных электрических зарядов и расширяют область ее применимости с классической механики на статистическую.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доц. Ю. Г. Губарев

УДК 517.983.5

Разрешимость и свойства решений задачи типа Коши для дифференциально-операторных уравнений дробного порядка

Т. С. Индуцкая

Иркутский государственный университет

Пусть всюду далее E_1 и E_2 — вещественные банаховы пространства, B и A — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2 такие, что имеет место включение $D(B) \subseteq D(A)$, и оператор B непрерывно обратим. Рассмотрим класс линейных интегро-дифференциальных уравнений

$$B\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}u(t) - Au(t) = f(t),\ t \in [0;\, T], \tag{1}$$

в котором $u : \mathbb{R} \to E_1$ и $f : \mathbb{R} \to E_2$ — неизвестная и заданная функции соответственно. Введено обозначение *производной Римана – Лиувилля*

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})}\frac{d^{[\alpha]+1}}{dt^{[\alpha]+1}}\int\limits_0^t (t-s)^{-\{\alpha\}}u(s)\,ds,\ t \in [0;\, T],$$

порядка $\alpha > 0$ функции $u : \mathbb{R} \to E_1$, где интеграл понимается в смысле Бохнера, $[\alpha] = \max\{n \in \mathbb{Z} :\ n \leqslant \alpha\}$, $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$. Для уравнения (1) поставим задачу *типа Коши*, т. е. зададим начальные условия

$$\mathcal{D}^{\alpha-i}_{0+}u(t)\big|_{t=0} = u_{[\alpha]+1-i},\ i = 1, \ldots, [\alpha]+1, \tag{2}$$

с известными элементами $u_{[\alpha]+1-i} \in E_1$. Под *классическим* решением начальной задачи (1), (2) будем понимать функцию $u = u(t)$ такую, что $\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}u(t) \in C\left([0;\, T],\, E_1\right)$, которая обращает в тождество уравнение (1) и удовлетворяет начальному условию (2).

В данной работе изучены разрешимость и свойства решений задачи типа Коши (1), (2). Полученные результаты применены к исследованию начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения в частных производных, которая доставляет содержательный пример задачи типа Коши (1), (2) и является динамической математической моделью низкочастотных магнитозвуковых колебаний в электронной (ионной) плазме [1].

[1] А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. – М.: Физматлит. – 2007.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук С. С. Орлов

УДК 517.95

Численное исследование задачи о движении жидкости в пороупругом движущемся льду

В. Н. Ларионова, Р. А. Вирц

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

С использованием уравнений неизотермической двухфазной фильтрации рассматривается задача о движении воды в тающем снеге. Ледовый покров рассматривается как двухфазная среда, состоящая из воды и льда. В данной постановке учитываются фазовые переходы и движение твердой фазы. В модельном случае в автомодельных переменных задача сводится к системе уравнений для нахождения пористости, температуры, скоростей фаз и давления жидкой фазы [1]-[3].

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2020-0008).

[1] Sibin A. N., Papin A. A. Heat and Mass Transfer in Melting Snow //Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2021. – Vol. 62. – N 1, P. 96–104.

[2] Tokareva M.A., Papin A.A. Mathematical Model of Fluids Motion in Poroelastic Snow-ice Cover // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2021, Vol.14. – N 1, P.47–56.

[3] Токарева М.А., Папин А.А.. Краевые задачи для уравнений фильтрации в пороупругих средах: монография. – Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2020. – 141 с.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доц. М.А. Токарева

УДК 533.951.8

Исследование устойчивости трехмерных состояний динамического равновесия двухкомпонентной плазмы Власова–Пуассона

Ло Цзинъюэ

Новосибирский государственный университет

Постановка точной задачи:

$$\begin{gathered} f_t + \vec{v}\nabla_{\vec{x}} f - \nabla_{\vec{x}}\varphi\nabla_{\vec{v}} f = 0 \\ \Delta_{\vec{x}}\varphi = 4\pi(1 - \int\limits_{\Re^3} f(\vec{x},\vec{v},t)d\vec{v}) \\ f = f(\vec{x},\vec{v},t) \geq 0; \quad f(\vec{x},\vec{v},0) = f_0(\vec{x},\vec{v}) \end{gathered} \tag{1}$$

где f – функция распределения электронов; t – время; $\vec{x},\vec{v}$ – координаты и скорости электронов; φ – потенциал самосогласованного электрического поля; f_0 – начальные данные. Предполагается, что f и φ – функции с необходимой степенью гладкости, несобственный интеграл из правой части уравнения Пуассона существует, а ионы покоятся и образуют собой однородный фон в физическом пространстве.

Выведено известное раньше достаточное условие линейной устойчивости точных стационарных решений

$$f = f^0(\vec{x},\vec{v}), \quad \varphi = \varphi^0(\vec{x}) \tag{2}$$

уравнений Власова–Пуассона (1) относительно трехмерных возмущений:

$$\frac{df^0}{d\left(\frac{\vec{v}^2}{2}+\varphi^0\right)} \leq 0 \tag{3}$$

Прямым методом Ляпунова доказана абсолютная линейная неустойчивость точных стационарных решений (2) по отношению к пространственным возмущениям. Тем самым, достаточное условие линейной устойчивости (3) обращено, и выявлен его формальный характер. Обнаружены конструктивные достаточные условия линейной практической неустойчивости, которые можно использовать в экспериментах и расчетах. Получена априорная экспоненциальная оценка снизу роста малых трехмерных возмущений.

Результаты настоящей работы согласуются с классической в электростатике теоремой Ирншоу о неустойчивости и расширяют область ее применимости с теоретической механики на статистическую.

Научный руководитель – канд. физ.–мат. наук, доц. Ю. Г. Губарев

УДК 517.929.2

Построение общих решений линейных разностных функциональных уравнений

М. А. Морева

Иркутский государственный университет

Рассмотрим класс линейных разностных функциональных уравнений

$$u(x+T) - \lambda u(x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $T > 0$ и $\lambda \neq 0$ — действительные параметры, f — заданная функция, а u — искомая. Известно, что общее решение уравнения (1) имеет вид

$$u(x) = \mathcal{E}(x)\,\lambda^{\frac{x}{T}} + v(x),$$

в котором первое слагаемое задает общее решение соответствующего *однородного* уравнения (1), т. е. уравнения с нулевой правой частью f, и содержит произвольную периодическую с периодом T функцию $\mathcal{E}$, а функция v — некоторое частное решение *неоднородного* уравнения (1). Для конкретных видов f и случая $T = 1$ формулы общих решений и методы их построения приведены в книге [1] (см. на стр. 406).

В данной работе предлагается новый подход к построению общих решений, в основе которого лежит теория *распределений* (*обобщенных функций*) Соболева–Шварца и концепция *фундаментального* решения линейного разностного оператора. Доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Функциональное уравнение (1) имеет общее решение вида*

$$u(x) = \begin{cases} \varphi(x), & 0 \le x - x_0 < T; \\ \lambda^n \varphi(x - nT) + \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda^{k-1} f(x - kT), & nT \le x - x_0 < (n+1)T; \end{cases}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, а функция $\varphi :\ [x_0; x_0+T] \to \mathbb{R}$ произвольна.

Показано, что данная формула согласуется с частными случаями, приведенными в книге [1]. Для того, чтобы решение уравнения (1) было единственным, следует задать его на некотором промежутке длины T, например на полуинтервале $[x_0; x_0+T)$, указав вид функции φ. Для непрерывности решения на луче $[x_0; +\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(x) \in C_{[x_0;x_0+T]}$, $f(x) \in C_{[x_0;+\infty)}$ и $\varphi(x_0+T) - \lambda\varphi(x_0) = f(x_0)$.

[1] А. Д. Полянин, А. В. Манжиров. Справочник по интегральным уравнениям: Точные решения. – М.: «Факториал». – 1998.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, С. С. Орлов

УДК 517.962.24

Об асимптотических свойствах решений одного класса систем разностных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием

А. В. Хмиль

Новосибирский государственный университет

Рассматривается нелинейная система разностных уравнений с запаздыванием

$$x_{n+1} = A(n)x_n + B(n)x_{n-\tau(n)}$$

$$+F(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-\tau}), \qquad n = 0, 1, \dots, \tag{1}$$

где $A(n)$, $B(n)$ — матрицы размера $m \times m$ с N-периодическими элементами, $\tau(n) \in \mathbb{N}$ — параметр запаздывания, $1 \le \tau(n) \le \tau < \infty$, $F(n, u) = F(n, u_0, u_1, \dots, u_\tau)$ — непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая одному из условий:

$$a)\ \|F(n,u)\| \le q_0\|u_0\| + q_1\|u_1\| + \dots + q_\tau\|u_\tau\|, \quad q_i \ge 0;$$

$$b)\ F(n,u) \equiv F(n,u_0), \quad \|F(n,u_0)\| \le q_0\|u_0\|^{1+\omega}, \quad q_0, \omega > 0.$$

Используя специальный функционал Ляпунова — Красовского, в [1] исследована асимптотическая устойчивость решений линейных систем вида (1) ($F(n, u) \equiv 0$). Этот функционал является разностным аналогом функционала, предложенного в [2]. В данной работе указаны условия асимптотической устойчивости нулевого решения нелинейных систем вида (1), получены оценки на область притяжения и оценки, характеризующие скорость убывания решений системы (1) на бесконечности.

[1] Demidenko G.V., Baldanov D.Sh. Exponential stability of solutions to delay difference equations with periodic coefficients // In: Continuum Mechanics, Applied Mathematics and Scientific Computing: Godunov's Legacy – A Liber Amicorum to Professor Godunov (Eds.: Demidenko G.V., Romenski E., Toro E., Dumbser M.). Cham, Switzerland: Springer Nature, 2020. P. 93–100.

[2] Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доц. И. И. Матвеева

УДК 517.9

О существовании цикла в модели циркадного осциллятора

Е. В. Юношева

Новосибирский государственный университет

Рассмотрим семимерную систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений кинематического типа, построенную по модели автономного клеточного цикрадного осциллятора, ядро которого описано в [1]:

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = k_1(\Gamma_1(x_7) - x_1); \qquad \frac{dx_2}{dt} = k_2(\Gamma_2(x_1)\cdot L_2(x_6) - x_2);\\
&\frac{dx_3}{dt} = k_3(\Gamma_3(x_1)\cdot L_3(x_6) - x_3); \quad \frac{dx_4}{dt} = k_4(\Gamma_4(x_1)\cdot L_4(x_6) - x_4);\\
&\frac{dx_5}{dt} = k_5(\Gamma_5(x_1)\cdot L_5(x_6) - x_5); \quad \frac{dx_6}{dt} = k_6(\Gamma_6(x_2)\cdot \gamma_6(x_3) - x_5);\\
&\frac{dx_7}{dt} = k_7(\gamma_7(x_4)\cdot L_7(x_5) - x_7);
\end{aligned} \tag{1}$$

где x_j – концентрации компонент генной сети, $\Gamma_j, \gamma_6, \gamma_7$ – монотонно возрастающие, L_j – монотонно убывающие гладкие функции.

В положительном октанте пространства R^7 переменных $x_1, .., x_7$ построена инвариантная область Q_7, содержащая по крайней мере одну стационарную точку системы (1). Получены условия единственности стационарной точки S_7. Обозначим через M_7 матрицу линеаризации системы (1) в точке S_7. Из результатов работы [2] следует существование двумерной инвариантной поверхности, проходящую через точку S_7. Таким образом, верна теорема:

Теорема 6. *Если матрица M_7 имеет собственные числа с положительными вещественными частями и не имеет мнимых собственных чисел, то динамическая система (1) имеет цикл в области Q_7.*

[1] В.П.Голубятников, О.А. Подколодная, Н.Л. Подколодный, Н.Б. Аюпова, Н.Е. Кириллова, Е.В. Юношева Об условиях существования цикла в двух базовых моделях циркадного осциллятора млекопитающих// Сиб. журнал индустриал. математики. 2021. Т.24, № 4. С.39–53.

[2] Н.Е. Кириллова Об инвариантных поверхностях в модели генных сетей // СЖИМ. 2020. Т. 23, № 4. С.69-76.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. В.П. Голубятников

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

УДК 519.83

Исследование нефтяного рынка на основе теории игр

А. Т. Аземова

Новосибирский государственный университет

Как известно, цены на нефть являются высоковолатильными и подвержены влиянию рыночных новостей. Целью данной работы является изучение проблематики выгодности и ключевых условий кооперативного соглашения между крупнейшими нефтедобывающими странами. Данный вопрос исследуется в рамках концепций стохастической кооперативной теории игр и теории отраслевых рынков. В частности, подходы теории игр соответствуют конфликтности интересов участников кооперативного соглашения, возможность объединения игроков рынка учитывается и разрешается с помощью теории кооперативных игр.

Для достижения этой цели были поставлены следующие задачи:

-Изучить тенденции развития мирового рынка нефти и подходы к ценообразованию на нефть;

-Оценить характеристическую функцию стохастической кооперативной игры кооперативного соглашения на мировом рынке нефти.

-построить стохастическую кооперативную игру кооперативного соглашения на мировом рынке нефти. В результате, были выявлены особенности и основные тенденции развития нефтяного рынка. В работе сформулированы и выносятся на защиту следующие основные научные результаты исследования:

- выявлены особенности и основные тенденции развития нефтяного рынка, доказана зависимость цен на нефть от макроэкономики и политической ситуации;

- описаны модели некооперативной игры олигополии на этом рынке и приведены рыночные равновесия по объемам добычи нефти, ценам и прибылям нефтедобывающих стран для случаев отсутствия и наличия на нем кооперативного соглашения. Основной научный результат, полученный в исследовании, заключается в построении характеристической функции стохастической кооперативной игры кооперативного соглашения на мировом рынке нефти, а также построена модель кооперативного соглашения на олигополистическом рынке, совмещающая в себе идеи конкуренции по Курно и по Штакельбергу. Равновесие Курно—Нэша в условиях отсутствия кооперативного соглашения:

$$E[\mathbf{P}^*] = \frac{a + \sum_{i\in I} c_i}{n+1},$$

а ожидаемая прибыль игроков в равновесии равна:

$$E[\mathbf{v}_i^*] = \frac{\Big(a - (n+1)c_i + \sum_{j\in I} c_j\Big)^2}{b(n+1)^2}.$$

Равновесие по Штакельбергу определяется:

$$E[\mathbf{q}_{i\in S}^*] = \frac{a - (2c_i - c_S)(n-s+1) + \sum_{j\in S} c_j}{2b(n-s+1)}.$$

Общая ожидаемая прибыль участников кооперативного соглашения определяется равенством:

$$E[\mathbf{v}_S^*] = \frac{\Big(a + \sum_{j\in S} c_j - c_S(n-s+1)\Big)^2}{4b(n-s+1)}$$

Ожидаемые прибыли прочих стран, игроков-последователей составляют: Дележ из С$*$-ядра при таком уровне значимости описывается вектором

$$x_3(\alpha^*) \approx (252.65,\ 138.28,\ 689.13,\ 607.254,\ 684.06,\ 190.02).$$

для России, США, Саудовской Аравии, Ирана, Ирака и группы иных стран — членов ОПЕК соответственно. Уровень ожидаемых равновесных квот на добычу нефти, для данных игроков рынка (России, США, Саудовской

Аравии, Ирана, Ирака И группы иных стран — членов ОПЕК):

$$E[q] \approx (7.03,\ 4.36,\ 14.94,\ 13.64,\ 14.86,\ 5.66).$$

[1] М.А.Настыч Анализ кооперативных соглашений на мировом рынке нефти. Финансы и кредит (43): 53–66.

[2] Конюховский П.В. Применение стоха- стических кооперативных игр при обосно- вании инвестиционных проектов. // 2012.

Научный руководитель – канд. экон. наук, доц. И.В. Проворная

УДК 51.77

Динамическая модель маркетинга при кусочно-постоянных оптовом и розничном дисконтах

Е. Г. Асмикеева

Новосибирский государственный университет

Исследуется динамическая модель маркетинга, в которой производитель стимулирует посредника, предоставляя ему оптовый дисконт $\alpha \in [0, 1]$, а посредник направляет часть $\beta \in [0, 1]$ (розничный дисконт) оптового дисконта α на снижение розничной цены. В [1] исследовалась задача поиска оптимального α при постоянном β, а в [2] поиска оптимального β при постоянном α. Оптимальные непрерывные дисконты порождают непрерывные розничные цены. Такой математический результат является не очень адекватным экономически. В [3], [4] рассмотрен случай кусочно-постоянных дисконтов. В [5] исследовался случай кусочно-постоянных дисконтов α и β, причем моменты смены уровней дисконтов предполагаются заранее заданными и фиксированными. Для одного переключения было показано, что функция прибыли производителя невогнута. В настоящей работе продолжается исследование данного случая. Получены достаточные условия вогнутости прибыли производителя как функции уровней оптового дисконта для малого числа переключений, а также распространены на случай n переключений.
Исследование частично выполнено в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0019).

---

[1] I. Bykadorov, A. Ellero, E. Moretti, S. Vianello. The role of retailer's performance in optimal wholesale price discount policies // European Journal of Operational Research, 2009, Vol. 194, No. 2. P. 538-550.

[2] I. Bykadorov. Dynamic Marketing Model: Optimization of Retailer's Role // Communications in Computer and Information Science, 2019, Vol. 974. P. 399-414.

[3] I. Bykadorov. Dynamic Marketing Model: the Case of Piece-Wise Constant Pricing // Communications in Computer and Information Science, 2020, Vol. 1145. P. 150-163.

[4] I. Bykadorov. Pricing in Dynamic Marketing: the Cases of Piece-Wise Constant Sale and Retail Discounts // Lecture Notes in Computer Science, 2020, Vol. 12422. P. 27-39.

[5] Е. Г. Асмикеева. Динамическая модель маркетинга при кусочно-постоянных оптовом и розничном дисконтах: случай малого числа уровней дисконтов // Материалы 59-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2021: Математика. Новосибирск. НГУ, 2021. С. 57.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доц. И. А. Быкадоров

УДК 519.86

Влияние волатильности на ценообразование финансовых активов

Е. В. Бабаскина

Новосибирский государственный университет

Стандартная теория ценообразования активов утверждает, что информация однородна для всех инвесторов. Когда информация асимметрична среди инвесторов, вопрос о том, как определяются цены активов и ожидаемая доходность, является теоретически сложным. Различные многофакторные модели показывают разные результаты. Основная трудность связана с отсутствием надлежащих мер информационного риска, по другому идеосикратическая волатильность.

Для сравнения измерения информационного риска и влиянии его на ценообразование были выбраны следующие модели: CAPM [1], трехфакторная [2] и пятифакторная [3] модели Е.Фамы и К.Френча.

Модель CAPM, например, имеет вид:

$$R = R_f + (R_m - R_f) * \beta, \tag{1}$$

где R — требуемая доходность инвестиций в ценную бумагу, R_f— безрисковая доходность, R_m— доходность фондового индекса, β— бета ценной бумаги.

В докладе будет проведен сравнительный анализ многофакторных моделей для оценки стоимости финансовых активов.

Работа поддержана грантами РФФИ № 20-010-00151.

[1] Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики.Том 1. Факты. Модели. М.: ФАЗИС, 1998.

[2] Fama E.F. The behavior of stock market prices // Journal of Business. 1965. V. 79. P. 420-429.

[3] Lin Q. Noisy prices and the Fama–French five-factor asset pricing model in China // Emerging Markets Review. 2017. V. 31. P. 141-163.

Научный руководитель – канд. техн. наук. С.М. Анцыз

УДК 51.77

Равновесие в моделях монополистической конкуренции при аддитивно-сепарабельной полезности: случаи конкретного вида функции элементарной полезности

В. С. Бакирова

Новосибирский государственный университет

В работе исследуется равновесие монополистически конкурентных моделей для международной торговли между странами [1], [2]. Функция полезности потребителя аддитивно-сепарабельна. Рассматривается случай свободной торговли, то есть торговли, осуществляемой практически без транспортных издержек. В каждой стране существует торговый баланс и баланс по труду. Исследуемые модели имеют ровно одну отрасль и труд, который интерпретируется как единственный производительный фактор.

Данная работа является продолжением исследования [3] и предполагает исследование сравнительной статики равновесных решений по торговым издержкам типа "Iceberg type"в случае свободы торговли при линейной функции производственных издержек.

Исследование частично выполнено в рамках государственного задания Институра математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0019).

[1] A. Dixit, J. Stiglitz. Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity // American Economic Review, 1997, Vol.67, No. 3. P. 297-308.

[2] P. Krugman. Increasing returns, monopolistic competition and international trade // Journal of International Economics, 1979, Vol. 9, No. 4. P. 469-479.

[3] А. О. Якушева. Равновесие в модели международной торговли двух и трех стран при монополистической конкуренции, линейных производственных издержках и конкретном виде функции элементарной полезности: случай свободной торговли // Выпускная квалификационная работа бакалавра. ММФ НГУ. Новосибирск, 2020, 51 стр.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доц. И. А. Быкадоров

УДК 51.77

Равновесие в модели Диксита–Стиглица–Кругмана: случай трёх групп стран

И. А. Беляев

Новосибирский государственный университет

Работа посвящена изучению модели международной торговли Дисксита-Стиглица-Кругмана [1]–[6] с однородными фирмами. Эта модель описывает влияние экономии от масштаба на монополистическую конкуренцию в международной торговле. Предлагается рассмотреть случай торговли между тремя группами стран, страны различаются только по числу потребителей. Функция полезности потребителей аддитивно-сепарабельная, конкретная функциональная форма которой считается неизвестной. Транспортные издержки имеют вид "iceberg type". Данная работа является продолжение исследований [1]–[3]. Проведена локальная сравнительная статика равновесных величин относительно малых изменений транспортных издержек. Результаты могут быть использованы для получения сравнительной статики функции общественного благосостояние по транспортным издержкам.

Исследование частично выполнено в рамках государственного задания Института математики им. С.Л.Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0019).

[1] И. А. Беляев. Равновесие в модели Диксита-Стиглица-Кругмана // Материалы 59-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2021: Математика. Новосибирск. НГУ, 2021. С. 60.

[2] I. Belyaev, I. Bykadorov. International Trade Models in Monopolistic Competition: the Case of Non-linear Costs // IEEE Xplore, 2019. P. 12–16. DOI: 10.1109/OPCS.2019.8880237

[3] I. Belyaev, I. Bykadorov. Dixit-Stiglitz-Krugman Model with Nonlinear Costs // Lecture Notes in Computer Science, Vol. 12095, 2020. P. 157–169 DOI: 10.1007/978-3-030-49988-4 11

[4] A. Dixit, J. Stiglitz. Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity // American Economic Review, 1977, Vol. 67, No. 3. P. 297-308.

[5] P. Krugman. Increasing returns, monopolistic competition and international trade // Journal of International Economics, 1979, Vol. 9, No. 4. P. 469-479.

[6] E. Zhelobodko, S. Kokovin, M. Parenti, J.-F. Thisse. Monopolistic competition in general equilibrium: Beyond the Constant Elasticity of Substitution // Econometrica, 2012, Vol. 80, No. 6. P. 2765-2784.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доц. И. А. Быкадоров

УДК 51.77

Модель международной торговли при монополистической конкуренции производителей: локальная сравнительная статика рыночного равновесия по сальдо торгового баланса

Д. И. Бондарь

Новосибирский государственный университет

Исследуется модификация классической модели международной торговли для двух стран (неодинаковых по населению) при монополистической конкуренции производителей [1], [2], аддитивно-сепарабельной функции полезности потребителей и линейной функции производственных издержек. Транспортные издержки являются "iceberg type". В работе производится сравнительная статика равновесных состояния по параметру s, который является сальдо торгового баланса между странами. В работе рассмотрены несколько частных случаев торговли: случай свободы торговли (транспортные издержки "почти"отсутствую), а также случай автаркии (транспортный издержки столь велики, что торговля между странами прекращается). Изучена чувствительность индивидуального потребления, размера и массы фирм, цен и общественного благосостояния к изменению сальдо торгового баланса в ситуации рыночного равновесия.

Исследования частично выполнено в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0019).

[1] A. Dixit, J. Stiglitz. Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity // American Economic Review, 1977, Vol. 67, No. 3. P. 297-308.

[2] P. Krugman. Increasing returns, monopolistic competition and international trade // Journal of International Economics, 1979, Vol. 9, No. 4. P. 469-479.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доц. И. А. Быкадоров

УДК 51-77

Оценка факторов, влияющих на уровень утилизации попутного нефтяного газа

С. В. Борисенко

Новосибирский государственный университет

Нефть располагается в земле вместе с газом, поэтому попутный нефтяной газ – побочный продукт её добычи. Одним из способов утилизации является сжигание на факелах. Данный вариант утилизации ведет к выбросу значительных объемов диоксида углерода, метана, сажи, а также многих других опасных для окружающей среды компонентов. Сжигание газа на факелах по сей день является одной из самых сложных экологических и энергетических проблем во всем мире.

Страны всего мира пытаются решить данную проблему десятилетиями, в США и Норвегии введен запрет на сжигание попутного газа на факелах. В Норвегии лидирующим способом утилизации является закачка попутного газа обратно в пласт для повышения его нефтеотдачи, несколько больших месторождений получили коэффициент нефтеотдачи 53-66% [1]. Поэтому данная тема актуальна.

Целью работы является исследование влияния различных факторов на уровень утилизации попутного нефтяного газа и построения модели по панельным данным.

Задачи исследования:

1. Анализ литературы для выбора факторов, а также проведение статистического анализа факторов, для исключения тех из них, что являются зависимыми.
2. Построение трех моделей по панельным данным: модели сквозной регрессии, модели с фиксированными эффектами и модели со случайными эффектами.
3. Проведение тестов Вальда, Бройша-Пагана и Хаусмна для выбора наилучшей модели. Определение качества модели и интерпретация результатов.

Одним из факторов, оказывающим влияние на утилизацию ПНГ в России, являются цены на газ, поскольку они оказывают прямое влияние на ценообразование ПНГ [2]. Также будут рассмотрены такие факторы как выбросы CO_2, цены на нефть, общая рента за природные ресурсы от ВВП, объемы добычи нефти, протяженность газопроводов, численность населения и др.

Основным результатом работы является модель на основе панельных данных, зависимой переменной в которой выступает объем сжигания ПНГ. Ожидается, что модель со случайными эффектами будет наилучшей, поскольку она более гибкая чем модель сквозной регрессии и позволяет получать более статистически значимые оценки относительно модели с фиксированными эффектами [3].

Покомпонентный вид модели со случайными эффектами имеет вид:

$$y_{it} = \alpha_i + x_{it}\beta + \epsilon_{it}$$

Где i – индекс объекта, t – индекс момента времени, β – вектор коэффициентов регрессии,x_{it} – вектор наблюдений над k независимыми переменными. $\alpha_i = \mu + u_i$, где μ – параметр общий для всех единиц во все моменты времени, u_i – ошибки, некоррелированные с ϵ_{it}.

---

[1] Utilization of Associated Petroleum Gas (APG) —the Norwegian Experience. Leif Hinderaker, Steinar Njaa.

[2] Reducing gas flaring in Russia: Gloomy outlook in times of economic insecurity. Julia S.P. Loe, Olga Ladehaug.

[3] Анализ панельных данных и данных о длительности состояний: учеб. пособие, Ратникова, Т. А., 2014

Научный руководитель – канд. экон. наук, доц. И.В. Проворная

УДК 51-7

Применение модели Геске–Хсу для оценки инвестиционного нефтяного проекта в условиях рисков

В. Е. Васильев

Новосибирский государственный университет

Цель: изучить новые опционные методы оценки инвестиционного нефтяного проекта в условиях рисков.

Модель Блэка-Шоулза имеет широкое распространение для оценки нефтяных проектов в условиях экономических и геологических неопределенностей [2]. Подход Блэка-Шоулза предполагает постоянство волатильности цены инвестиционного проекта, что является недостатком при оценке проектов разработки нефтяного участка. Следовательно, возникает необходимость применения более новых методов оценки. В связи с этим автором работы исследуется модель Геске-Хсу, который описывает стоимость составного опциона [1]. Модификационная формула Геске разбивает проект на два этапа, в каждом из которых волатильность имеет различные значения. В результате исследований получено, что модель Геске-Хсу в высокой степени неопределенности имеет преимущество при оценке нефтяных проектов, чем формула Блэка-Шоулза. Автором работы решены следующие задачи:

1. Представить обзор модификационной формулы Геске;
2. Оценить инвестиционный проект лицензионного нефтяного участка с помощью формул Геске-Хсу и Блэка-Шоулза;
3. На основе практических расчетов показать преимущества модели Геске-Хсу в сравнении с моделью Блэка-Шоулза;
4. Дать рекомендации по применению формулы Геске-Хсу.

---

[1] Hsu Y.-W. Staging of Venture Capital Investment: A Real Options Analysis. University of Cambridge, JIMS, 2002, May, pp. 1–47.

[2] Баранов А.О., Музыко Е.И., Павлов В.Н. Оценка эффективности инновационных проектов с использованием опционного и нечетко-множественного подходов: монография. – Новосибирск: ИЭОПП СО РАН, 2018. – 336 с.

[3] Geske R. (1979) “The valuation of compound options”. Journal of Financial Economics, 7, pp. 63-81.

Научный руководитель – канд. экон. наук, доц. Л. В. Скопина

УДК 519.86

Об использовании модели Марковица для оптимизации паевого фонда

А. Д. Галушкин

Новосибирский государственный университет

Объектом исследования является поведение компании, которая управляет паевым фондом (далее — ПИФ) [1], включающим n активов (инструментов). Для этих целей рассматривается модель оценки финансовых активов CAPM (Capital Asset Pricing Model) [2, с. 62] и портфельная теория Марковица [2, с. 57]. Оптимизация паевого фонда — максимизация его доходности при заданом уровне риска.

В настоящей работе для оптимизации ПИФа предлагается итерационный метод, на каждом шаге которого происходит девирсификации капитала ПИФ и решается оптимизационная задача максимизации доходности при заданом уровне риска σ_p:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot r_i \to \max, \\ \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sigma_i^2 + 2 \sum\limits_{i=1}^{n-1} \sum\limits_{j=i+1}^{n} x_i \cdot x_j \cdot k_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j} \leq \sigma_p, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \end{cases} \tag{1}$$

где x_i — доля i-го инструмента в портфеле; r_i — доходность инструмента, σ_i — стандартное отклонение доходностей инструмента, k_{ij} — коэффициент корреляции между i и j-м инструментом.

Параметры $r_i, \sigma_i, k_{i,j}$ задачи определяются с помощью методов регрессионного анализа по актуальному состоянию рынка.

В докладе будет приведена подробная схема итерационного алгоритма.

Работа поддержана грантом РФФИ №20-010-00151.

[1] *Ефимкин Я. С., Лузиков А. П.* Паевые инвестиционные фонды и их виды // Экономика и современный менеджмент: теория, методология, практика. – 2018. – С. 135-137.

[2] *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Том 1. Факты. Модели. М.: ФАЗИС, 1998.

Научный руководитель – канд. техн. наук С. М. Анцыз

УДК 51.77

Оптимизационная межрегиональная межотраслевая модель с условием межрегиональной мобильности трудовых ресурсов

В. И. Еремкин

Новосибирский государственный университет

Рассматривается модификация оптимизационной межрегиональной межотраслевой модели (ОМММ), где рассматриваются гипотезы межрегиональной миграции населения и трудовых ресурсов в зависимости от уровня жизни в регионе.

Решение стандратной модели находится сведением к задачи линейного программирования и применением соотвествующих методов, например, симплекс-метода.

Отличие данной модели от стандартной:

1. эндогенность трудовых ресурсов, что влечёт за собой нелинейность модели;
2. параметр λ^s отвечает за уровень жизни региона s;
3. целевая функция z соответствует подушевому потреблению по стране;
4. в балансовые ограничения по инвестициям введено отслеживание f_g^r затрат ЖКХ региона r;

В работе планируется доказать наличие решения данной задачи и применить методы решения на ЭВМ.

Полученные результаты позволят исследовать перспективы роста экономики с точки зрения возможных ресурсных ограничений, в частности трудовых ресурсов.

[1] Рубинштейн А. Г. Моделирование экономических взаимодействий в территориальных системах. Новосибирск: Наука, 1983.

[2] Суслов В. И. Измерение эффектов межрегиональных взаимодействий: модели, методы, результаты. Новосибирск: Наука, 1991.

[3] Гранберг А. Г., Суслов В. И., Суспицын С. А. Многорегиональные системы: экономико- математическое исследование. Новосибирск: Наука, 2007.

Научный руководитель – канд. экон. наук, доц. Н. М. Ибрагимов

УДК 330.4

Метод экспертных оценок, применяемый в оценке инвестиционных проектов нефтегазового сектора с учетом экологических затрат в условиях ограниченной информации

Д. Б. Захарцева

Новосибирский государственный университет

Цель: исследовать статистический и матричный подходы обработки результатов анкетирования экспертной комиссии для принятия решения об эффективности инвестиционного проекта.

Для устойчивого развития страны необходимы экономические механизмы регулирования охраны окружающей среды. В условиях ограниченной информации ставится задача нахождения корректной экономической оценки месторождения для принятия приемлемого решения во избежание финансовых потерь. Для этого необходимо найти функцию распределения затрат на экологию по стадиям разработки нефтяного месторождения.

В силу ограниченности информационной базы данных по мониторингу в нефтегазовой отрасли актуализирована роль методов экспертного оценивания параметров [3], которые определяют удорожание стоимости разработки нефтяного месторождения.

В условиях неопределенности для оценки эколого-экономической эффективности инвестиционного проекта [2] необходимо применение методов нечеткого моделирования [1].

---

[1] Недосекин А.О. Методологические основы моделирования финансовой деятельности с использованием нечетких множеств: дис. док.экон.наук. Санкт-Петербург, 2003.

[2] Баранов А.О., Музыко Е.И., Павлов В.Н. Оценка эффективности инновационных проектов с использованием опционного и нечетко-множественного подходов: монография. – Новосибирск: ИЭОПП СО РАН, 2018. – 336 с.

[3] Л.В. Скопина, Н.Е. Шубников Построение экспертной системы для геолого-экономической оценки нефтяных месторождений в условиях неопределенности и рисков//Природные ресурсы Арктики и Субарктики, 2014; №4(76)

Научный руководитель – канд.экон.наук, с.н.с Л.В. Скопина

УДК 330.4

Новый подход к традиционной задаче поиска оценки инвестиционного проекта на основе развития основных подсистем экспертного проектирования

О. В. Клюева

Новосибирский государственный университет

Цель: подготовка базы данных и расширение базы знаний строящейся экспертной системы для выбора эффективного инструмента оценки инвестиционного проекта в нефтедобыче в условиях нечеткой информации. Для достижения цели изучен набор математических методов, в числе которых метод распознавания образов, статистические методы прогнозирования данных и метод нечетких множеств, основывающийся на экспертных оценках.

Отсутствие единой базы данных и коммерческая информация, которой свойственно быть закрытой, обусловливают необходимость поиска эффективного математического инструмента для прогнозирования оценки экономической эффективности освоения нефтяного месторождения. На основе этой информации инвестор через подсистему общения может получить доступ к наглядной форме работы экспертной системы, базе знаний и базе данных.

Анализ математических методов, входящих в базу знаний, привел к решению использовать нечеткое моделирование в оценке проекта. Изучение статистических вероятностных методов способствовало выбору мировой цены на нефть в качестве управляющего параметра оценки инвестиционного проекта.

Теоретическая часть работы построена на основании изучения и анализа работ учёных и практиков в области статистических методов прогнозирования данных [1], распознавания образов,теории нечетких множеств [2], построения экспертных систем [3]. Практическая значимость работы заключается в оценке нефтяных запасов с помощью элементов экспертной системы.

[1] Ханк Д.Э.,Уичерн Д.У.,Райтс А. Дж. Метод Бокса-Дженкинса (ARIMA)//Бизнес-прогнозирование, 7-е издание.:Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003.-656 с.

[2] Zadeh, L.A. (1978) “Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility”. Fuzzy Sets and Systems, 1, pp. 3-28.

[3] Скопина Л.В., Шубников Н. Е. Построение экспертной системы для геолого-экономической оценки нефтяных месторождений в условиях неопределенности и рисков//Природные ресурсы Арктики и Субарктики. 2014. №4(76).

Научный руководитель – канд.экон.наук, с.н.с. Л.В. Скопина

УДК 512.54

Вектор Шепли в коалиционных ТП-играх с перекрывающимися поколениями и априорными вероятностями формирования коалиций

О. А. Ковалевская

Новосибирский государственный университет

Кооперативная игра в виде характеристической функции (другое название — игра с трансферабельной полезностью, ТП-игра) определяется выигрышем каждой коалиции как функцией от входящих в коалицию игроков: $v : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, где $\mathbb{N}$ — множество игроков. В [1] изучена игра, в которой дополнительно вводились вероятности вступления игроков в коалиции, зависящие, в том числе, от отношений между игроками (заданы как взвешенный граф). Для этой игры было предложено и аксиоматизировано надлежащее обобщение классического понятия «вектор Шепли».

В настоящей работе рассматривается игра, развернутая в динамике. Время $t \in T = \{1, 2, \ldots, t, \ldots\}$ дискретное, это номер раунда (момент времени) «взаимодействия» игроков. В каждом раунде какие-то из игроков могут выйти из игры (умирают), а другие — вступить в игру (рождаются). Здесь $\mathcal{I}_t \subset \mathbb{N}$ — множество игроков, участвующих в t-ом раунде и G_t — функция, характеризующая отношения между игроками в момент времени t: $G_t : \mathcal{I}_t \times \mathcal{I}_t \to \mathbb{R}_+$, которая каждой паре $(i, j) \in \mathcal{I}_t \times \mathcal{I}_t$ сопоставляет уровень желания игрока i кооперироваться с игроком j $(i \neq j)$ в момент времени t, а паре (i, i) — инициативную способность игрока i. Вводится также функция $p_t : (i, S_t, G_t) \mapsto p_t(i, S_t, G_t) \in [0, 1]$, которая характеризует вероятность присоединения игрока i к коалиции $S_t^i \subset \mathcal{I}_t \setminus \{i\}$ $(S_t = S_t^i \cup i)$ в ходе t-го раунда при взаимоотношениях G_t. Четверку $(\mathcal{I}_t, v, p_t, G_t)$ мы называем t-м раундом ТП-игры с вероятностно-эндогенным образованием коалиций, где четверка $(\mathbb{N}, v, p, G)$ характеризует такую игру в целом.

Для t-го раунда игры вероятностный вектор Шепли $\varphi_t = (\varphi_t^i)_{i \in \mathbb{N}}$ определяется как ожидаемый маргинальный выигрыш игрока: $\varphi_t^i(v, p_t, G_t) = \Sigma p_t(i, S_t, G_t) \cdot (v(S_t) - v(S_t \setminus \{i\})), i \in \mathbb{N}, t \in T$. Помимо выигрыша, полученного в данный момент времени, каждый из игроков имеет накопленую оценку M_t^i, состоящую из суммы выигрышей, полученных в предыдущих игровых раундах. Выигрыши из прошлого учитываются с коэффициентом дисконтирования $\delta(n)$, где n — количество раундов игры до текущего. Например, если ставка дисконтирования составляет 5%, то $\delta(n) = (1 + 0,05)^{-n}$. Таким образом, $M_t^i(n) = \Sigma_{m=1}^n \varphi_{t-m}^i \cdot \delta(m), i \in I, t \in T,$ – игровая оценка игрока i, участвовавшего в n раундах игры, к моменту времени t. Таким образом определена коалиционная ТП-игра с перекрывающимися поколениями и априорными вероятностями формирования коалиций и вектор Шепли в ней. В последующей работе, основываясь на результатах [1], планируется дать аксиоматическое обоснование предложенному понятию «обобщенного вектора Шепли».

[1] В. А. Камионко, В. М. Маракулин. Аксиоматизация вектора Шепли в играх с априорными вероятностями образования коалиций // Журнал Новой экономической ассоциации, 2020, Т. 46, № 2. С. 12-29.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, доц. В. М. Маракулин

УДК 519.863

О налогообложении в моделях рамсеевского типа, ориентированных на повышение благосостояния

В. И. Лифенко

Новосибирский государственный университет

Наиболее важными инструментами управления экономикой являются различные формы налогообложения. В зависимости от того, какая форма выбрана и как точно построена, будет зависить эффективность взаимоотношений между государством и субъектами, котороые платят налоги.

В настоящей работе рассматривается экономическая система, состоящая из государства и конечного числа предприятий, каждое из которых ведет свою производственную деятельность в соответствии с условиями, указанными в моделях рамсеевского типа [1].

Государство облагает налогом доходы всех предприятий. Цель государства - повысить благосостояние населения за счет выплат субсидий, средства для которых берутся из налоговых сборов. Необходимо установить оптимальное поведение инвесторов, найти долю отчислений на субсидии и отыскать оптимальные значения ставки налогообложения для двух схем: плоской и прогрессивной шкалы.

Таким образом, с помощью аппарата методов оптимального управления, математическрого анализа и дифференциальных уравнений была исследована задача распределения доходов от производства между потреблением, инвестициями и налоговыми выплатами. Были выведены формулы для определения параметров рациональных стратегий функционирования системы для обеих форм налогообложения.

Работа поддержана грантом РФФИ № 20-010-00151.

---

1 *Ашманов С. А.* Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984.

Научный руководитель – канд. техн. наук С. М. Анцыз

УДК 519.863

О моделях рамсеевского типа с учетом налога на прибыль конечного числа инвесторов

А. А. Панкратова

Новосибирский государственный университет

На рассмотрение представлена модель двухуровневой задачи оптимального управления, основанная на классической модели Рамсея [1]. В данной модификации рассматривается система, включающая в себя государство и конечное число инвесторов.

Государство варьирует значение процентной ставки ρ для максимизации налоговых сборов N, предвидя, что инвесторы используют оптимальное для себя управление:

$$\int_0^T N(t)e^{-\delta t}dt = \int_0^T \sum_i \rho(Y_i - I_i) \cdot (Y_i(t) - I_i(t))e^{-\delta t}dt.$$

Каждое предприятие осуществляет свою производственную деятельность в соответствии с общим правилом: максимизация своего потребления с учетом того, что на инвестиции I_i идет доля $s_i(t)$ от выпуска Y_i, а государство облагает предприятие налогом на прибыль.

Проведено исследование двух форм налогообложения для производственных функций типа Кобба-Дугласа. Налогообложение, ставка которой фиксирована константной величиной на протяжении всего промежутка рассматриваемого времени, является пропорциональным. Прогрессивная шкала предполагает, что налоговая ставка моделируется непрерывной возрастающей линейной функцией.

Таким образом, построена и исследована динамическая модель функционирования двухуровневой иерархической системы государство - инвесторы. Меняя вид параметров этой модели, можно определить влияние этих факторов на оптимальную стратегию развития системы в целом.

Результатом исследования стал сравнительный анализ полученных данных, показавший превосходство плоской шкалы налога на прибыль для государства, и прогрессивной формы налога для инвестора. Полученные выводы позволили сделать предположения о новой форме ставки налогообложения, выгодной одновременно для обоих уровней управления.

Задача исследования заключается в оптимизации налоговой ставки для максимизации налоговых поступлений в бюджет государства.

$$\int_0^T N_p(t)e^{-\delta t}dt = \int_0^T \rho(Y - I) \cdot (Y(t) - I(t))e^{-\delta t}dt.$$

Инвестор воспринимает стратегию государства как данную экзогенно, и максимизирует свое потребление, полагая выбор скорости роста налоговой ставки фиксированным.

$$\int_0^T C(t)e^{-\delta t}dt = \int_0^T \frac{(1 - s(t))(1 - \rho(t))}{1 - s(t)\rho(t)} \cdot F(K(t))e^{-\delta t}dt \to \max_{s(t)}.$$

Государство варьирует значение процентной ставки ρ с целью максимизации налоговых сборов предвидя, что инвестор использует оптимальное для себя управление.

Для производственных функций типа Кобба-Дугласа проведено исследование двух форм налогообложения: пропорционального налогообложения – система налогообложения, при которой налоговая ставка устанавливается в едином фиксированном проценте к объекту налогообложения на протяжении всего времени, и прогрессивной шкалы налогообложения, ставка которой моделируется непрерывной возрастающей линейной функцией. Результатом исследования стал сравнительный анализ полученных данных, показавший превосходство плоской шкалы налога на прибыль для государства, и прогрессивной формы налога для инвестора. Полученные выводы позволили сделать предположения о новой форме ставки налогообложения, выгодной одновременно для обоих уровней управления.

Работа частично поддержана грантами РФФИ № 19-010-00910 и № 20-010-00151 Работа поддержана грантом РФФИ № 20-010-00151.

1 *Ашманов С. А.* Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984.

Научный руководитель – канд. техн. наук С. М. Анцыз

УДК 519.83

Разработка алгоритма согласования инвестиционных стратегий участников ресурсного мегапроекта

М. В. Пилипенко

Новосибирский государственный университет

В Российской Федерации наибольшая доля налоговых поступлений в бюджет приходится на нефтегазовый сектор, в котором функционирует множество различных компаний. За продолжительное время конкурентной борьбы сформирован определённый список лидеров. Объектом исследования является нефтегазовый мегапроект ВСНГК, который представлен множеством участников: государство, компании по добыче и переработке углеводородных ресурсов в регионах их размещения.
Анализ опыта функционирования мегапроектов выявил ряд проблем, сопряженных с их существованием. В первую очередь можно выделить проблему согласования и рационального взаимодействия стратегических интересов государства, регионов и компаний.
Методика поиска компромисса между компаниями-участниками, регионами и государством подразумевает следующие этапы:

1. Реализация игровой модели.
2. Поиск равновесия.
3. Анализ полученных результатов.

Предположим, что взаимоотношения участников описываются в виде двухуровневой иерархической игры. Множества игроков-участников будут описываться как верхний (государство) и нижний (компании) уровни иерархии. Решение задачи заключается в нахождения нормализованных равновесий по Нэшу, при котором участникам не выгодно отклоняться от равновесной стратегии в одиночку. Алгоритм игры представлен следующим образом: первый ход делает игрок верхнего уровня, выбирая и сообщая свою стратегию игрокам нижнего уровня, зная это значение, игроки нижнего уровня выбирают свою стратегию. Сводя поиск равновесия по Нэшу к задаче оптимизации, на основе функций полезности строится функция Никайдо-Исода и решается задача нахождения максимума $\max\limits_{\omega \in X} \Psi_\gamma(z,\omega)$:

$$\Psi_\gamma(z,\omega) = H_0(\omega_0, z_{-0}) - H_0(z_0, z_{-0}) - \frac{\gamma}{2} \parallel z_0 - \omega_0 \parallel^2$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\left[H_{ij}(\omega_{ij}, z_{-ij}) - Hij(z_{ij}, z_{-ij}) - \frac{\gamma}{2} \parallel z_{ij} - \omega_{ij} \parallel^2\right], z,\omega \in \mathbb{R}^{19} \tag{1}$$

Исходя из свойств функции Никайдо-Исода и совместного множества стратегий существует единственное решение этой задачи. Это решение определяет функцию $\omega_\gamma(z) = \operatorname*{argmax}\limits_{\omega \in X} \Psi_\gamma(z,\omega)$

[1] Пляскина Н.И., Харитонова В.Н. Особенности межотраслевого мегапроекта как объекта государственного стратегического планирования и управления // Организационно-технологические аспекты стратегического планирования межотраслевых ресурсных мегапроектов

[2] Митрофанова И.В., Митрофанова И.А., Горшкова О.П., Старостина Е.С. Развитие методических подходов к экономической оценке эффективности мегапроектов // Economics: Yesterday, Today and Tomorrow. 2018, Vol. 8, Is. 6A

Научный руководитель – д-р экон. наук, проф. Н.И. Пляскина

УДК 519.863

Об учёте налогообложения в одной модели развития экономики

Л. В. Пилипушко

Новосибирский государственный университет

В настоящей работе рассматривается новая модификация классической модели Рамсея-Касса-Купманса, предложенная С.М. Анцызом [1].

$$\int_0^T f(k(t))dt \to \min_{s(t)}, \tag{1}$$

$$(1 - s(t))f(k(t))e^{-\delta t} \geq \frac{nC}{T}, \tag{2}$$

$$\dot{k}(t) = s(t)f(k((t)) - \mu k(t), \tag{3}$$

$$0 \leq s(t) \leq 1, k(0) = k_0, k(T) \geq k_T, \tag{4}$$

где $f(k(t))$ – вогнутая, возрастающая, неоклассическая функция, $k(t)$ – фондовооруженность, $s(t)$ – доля выпуска на инвестиции, δ – коэффициент дисконтирования, μ – коэффициент амортизации. Минимальный объём благосостояния задан величиной C.

Одной из главных компонент исследования стратегий макроэкономического развития является учёт налогов, устанавливаемых государством. Существует три вида шкалы налогообложения: плоская, прогрессивная и регрессивная. В макроэкономическом анализе наибольший интерес обычно представляют первые две.

Целью данной работы является исследование влияния налогобложения на эту модель. Например, при ставке ρ плоской шкалы налогообложения уравнение (3) примет вид:

$$\dot{k}(t) = s(t)(f(k(t)) - \rho k(t)) - \mu k(t). \tag{5}$$

В докладе будет приведён анализ получившейся модификации.

Работа поддержана грантом РФФИ № 20-010-00151.

[1] Antsyz S.M.: On Refinement of the Simplest Growth Model // 17th International Asian School-Seminar Optimization Problems of Complex Systems (OPCS), Moscow, Novosibirsk (Russia), Almaty (Kazakhstan). IEEE Xplore, 2021. – P. 9-12.

Научный руководитель – канд. техн. наук, с. н. с. С.М. Анцыз

УДК 330.4

Моделирование динамики добычи нефти в зависимости от изменения производственных и ценовых параметров

А. Е. Тархова

Новосибирский государственный университет

Рост добычи сланцевой нефти в США оказался одним из определяющих факторов, который привел к падению нефтяных цен в мире в 2014–2016 гг. На сегодняшний день нефть, добываемая из сланцевых горных пород, стала новым регулятором рынка, потеснив с этой позиции ОПЕК. Добыча такой нефти характеризуется весьма нетривиальной динамикой, поэтому является актуальной и интересной областью исследования.

Теоретическую и методическую основу исследования составили работы специалистов в области экономики и математики: А.Г. Маланичев, Э.А. Геворкян, И.В. Филимонова, О.Б. Брагинский, М.А. Новак и другие.

Целью данной работы является построение математической модели, описывающей динамику добычи сланцевой нефти на территории США.

Для достижения поставленной цели в ходе исследования были решены следующие *задачи*:

1.Выявление зависимостей объемов добычи сланцевой нефти от ценовых и производственных параметров с учетом временного лага.

2. Составление дифференциального уравнения на основе статистических данных и анализ его решений в различных случаях.

3.Сравнение расчетных и фактических значений и разработка рекомендаций по прогнозированию объема добычи сланцевой нефти.

Объектом исследования является нефть марки WTI.*Предметом исследования* являются объемы добычи нефти, извлекаемой из сланцевых пород.

За основу построения математической модели взято уравнение производственных мощностей и его модификация для нефтегазовой отрасли. Путем анализа периодов по 5 лет, начиная с 2008 года была установлена зависимость искомых величин от различных параметров. Основным параметром, входящим в конструируемую дифференциальную модель, стала цена нефти марки WTI. Для удобства анализа, опираясь на табличные данные EIA, мы приняли цену традиционной нефти в качестве постоянной. Также во внимание был принят временной лаг экономических показателей, оптимальное значение которого устанавливалось с помощью метода линейной регрессии. Таким образом, с учетом всех выявленных зависимостей и подбора эмпирических констант было получено дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом.

В результате рассмотрения случаев было построено аналитическое решение, описывающее динамику добычи сланцевой нефти, что позволяет использовать его для прогнозирования параметров нефтяного рынка.

Научный руководитель – д-р экон. наук, проф. И. В. Филимонова

УДК 51.77

Лидерство ритейлера при условии свободы входа производителей на рынок с налогообложением

О. А. Тильзо

Новосибирский государственный университет

Модель монополистической конкуренции типа Диксита – Стиглица [1] модифицирована введением ритейлинга. Рассматривается функция полезности потребителей квадратичного вида [2], при этом функция спроса имеет линейный вид.

Оказалось, что при условии свободы входа производителей на рынок у ритейлера есть несколько вариантов при выборе стратегии поведения. В работе рассматриваются различные ситуации равновесия по Штакельбергу при налогообложении. Подробно рассмотрен случай лидерства ритейлера $RL(II)$, который был проанализирован относительно предпочтений ритейлера, потребителей и общества.

В результате определено, что оптимальное налогообложение с точки зрения общественного благосостояния в случае $RL(II)$ может быть и положительным, и отрицательным, а с точки зрения потребительского излишка оптимальное налогообложение принимает только положительные значения.

Работа продолжает исследования [3-5].

Исследование частично выполнено в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0019).

[1] A. Dixit, J. Stiglitz. Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity // American Economic Review, 1977, Vol. 67, No. 3. P. 297-308.

[2] G.I.P. Ottaviano, T. Tabuchi, J.-F. Thisse. Agglomeration and trade revised // International Economic Review, 2002, Vol. 43, No. 2. P. 409–436.

[3] O. Tilzo, I. Bykadorov. Retailing Under Monopolistic Competition: A Comparative Analysis // IEEE Xplore, 2019. P. 156–161. DOI: 10.1109/OPCS.2019.8880233

[4] O. Tilzo, I. Bykadorov. Monopolistic Competition Model with Retailing // CCIS, 2020. Vol. 1275. P. 287–301. DOI: 10.1007/978-3-030-58657-7_24

[5] О. А. Тильзо. Лидерство ритейлера при монополистической конкуренции // Материалы 59-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2021: Математика. Новосибирск. НГУ, 2021. С. 79.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доц. И. А. Быкадоров

УДК 519.86:330.45

Имитационная модель оценки влияния углеродного налога на эффективность развития нефтяной компании

Е. В. Тимошенко

Новосибирский государственный университет

В мире наблюдается глобальное изменение климатических условий, которое проявляется в росте температуры и обусловлено увеличением концентрации парниковых газов в атмосфере. [1] В целях сокращения выбросов парниковых газов Европейский Союз планирует внедрение механизма трансграничного углеродного регулирования, включая введение обязательного углеродного налога. [2] По оценке экспертов годовая плата углеродного налога для компаний нефтяной и газовой промышленности будет достигать €1–3,5 млрд. [3]

Цель работы - оценить влияние углеродного налога на эффективность развития нефтяной компании и выбрать эффективную стратегию поведения в условиях введения углеродного налога. Для решения задачи разработана имитационная модель следующего вида:

$$TR_t = TR_t^{in} * V_t^r + TR_t^p * V_t^p + TR_t^{exr} * V_t^r + TR_t^{exp} * V_t^p$$

$$R_t = OC_t^r * V_t^r + OC_t^p * V_t^p + D_t^r * V_t^r + D_t^p * V_t^p + N_u + a$$

$$N_u = (V_t^p * n_t + V_t^r * l_t - P_t) * C_t * f(V_t^p * n_t + V_t^r * l_t - P_t)$$

$$NP_t = TR_t - R_t$$

$$ECI_t = \frac{NP_t}{R_t} \to max$$

где $f(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ 1, x > 0 \end{cases}$ $t = 1, ..., T$ – индекс года, TR_t^{exr}, TR_t^{exp} – выручка от экспорта единицы перерабатываемой и добываемой продукции, TR_t^{in}, TR_t^p – выручка от внутреннего потребления перерабатываемой и добываемой продукции, TR_t–общая выручка от реализации продукции, OC_t^r, OC_t^p–затраты на 1 перерабатываемой и добываемой продукции, D_t^r, D_t^p –доход государства от деятельности компании за 1 перерабатываемой и добываемой продукции, NP_t –чистая прибыль компании, N_u–углеродный налог, V_t^r, V_t^p–объём перерабатываемой и добываемой продукции, l_t, n_t–доля выбросов углерода на 1 перерабатываемой и добываемой продукции, C_t–углеродный налог за тонну углерода, a–доля затрат на уменьшение выбросов углерода, R_t-общегодовые затраты, ECI_t–эффективность затрат компании.

Данная модель позволяет выбрать эффективную стратегию поведения компании, при которой достигается максимальная прибыль на затраченные ресурсы с учетом введения углеродного налога.

---

[1] Стратегия социально-экономического развития Российской Федерации с низким уровнем выбросов парниковых газов до 2050 года. (б. д.)., URL: http://government.ru/docs/43708/

[2] Углеродный налог в ЕС. (2021). 5.
URL: https://www2.deloitte.com/content/dam/Deloitte/ru/Documents/tax/lt-in- focus/russian/ 2021/20-07-2021.pdf

[3] Россия может торговать воздухом, очищенным от CO2. (2020, ноябрь 24).
URL: https://www.kommersant.ru/doc/4584070

Научный руководитель – д-р экон. наук, проф. Н. И. Пляскина

УДК 519.863

Об оптимизации кредитования в новой модели рамсеевского типа

Т. А. Хворова

Новосибирский государственный университет

Работа посвящена исследованию динамической модели экономического роста, а именно, модификации модели рамсеевского типа, предложенной в [2]. Все модели, предложенные в [1], содержали систему неравенств, которые необходимы для поддержания уровня благосостояния населения. Такая система ограничений значительно усложняет получение решений и их анализ. В настоящей работе определено условие, достаточное для выполнения этого требования.

Инвестор решает задачу рационального распределения капитала между инвестициями и потреблением, учитывая ограничение на потребление. Также, для того, чтобы поддерживать необходимый уровень благосостояния используется механизм получения и погашения кредитов.

Исследования частично поддержаны грантом РФФИ № 20-010-00151.

---

[1] Antsyz S.M. On Models of Economic Development, Taking Into Account Lending // Proceedings of the 15th International Asian School-Seminar «Optimization Problems of Complex Systems» (OPCS 2019). Publisher IEEE Catalog Number: CFP19U46-ART, 2019, pp. 4-7.

[2] Antsyz S.M. One Refinement of the Simplest Growth Model // 17th International Asian School-Seminar Optimization Problems of Complex Systems (OPCS), Moscow, Novosibirsk (Russia), Almaty (Kazakhstan). IEEE Xplore, 2021. – P. 9-12.

Научный руководитель – канд. техн. наук С. М. Анцыз

УДК 512.54

Сравнительный анализ двух подходов к моделированию развития экономики

М. В. Цекот

Новосибирский государственный университет

Рассматриваются две модели экономического развития, одной из которых является новая модель [2] экономического развития с уравнением динамики Солоу (2). Новыми условиями являются минимизация усилий (1) и добавочное условие (3). Условие (3) накладывается для ограничения минимального объёма благосостояния заданой величиной С. Для данной модели необходимо найти оптимальную норму (управление) сбережений s(t).

$$\int_0^T f(k(t))[e^{-\delta t}]\,\mathrm{d}t \to \min_{s(t)} \tag{1}$$

$$\dot{k}(t) = s(t)f(k((t)) - \mu k(t) \tag{2}$$

$$(1 - s(t))(f(k(t)) \geq C(t) \tag{3}$$

где f - неокласическая производственная функция от каптиаловооружённости k, δ - коэффициент инфляции (дисконтирования), μ - коэффициент амортизации. [1].

Вторая модель - модель Рамсея - Касса - Купманса [1]. В ней капиталовооружённость также удовлетворяет (2). В этой модели было предложено ввести норму (управление) сбережений s (t), где s (t) рассматривается как функция времени, для дальнейшего оптимизирования.

После нахождения оптимальной нормы сбережений в первой модели, в данной работе будет произведено сравнение этих двух моделей. Сравнение необходимо для дальнейшего введения некоторой функции, которая сделает одну из моделей наиболее предпочтительной.

Работа частично поддержана грантами РФФИ № 19-010-00910 и № 20-010-00151

---

[1] С. А. Ашманов. Введение в математическую экономику. – М.: Наука. – 1984.

[2] S. M. Antzys On Models of Economic Developement, Taking Into Account Lending: Proceedings 2019 15th International Asian School-Seminar Optimization Problems of Complex Systems (OPCS 2019), Novosibirsk Akademgorodok. Russia: Publisher IEEE. Catalog Number: CFP19U46-ART: 2019, pp. 4-7

Научный руководитель – канд. тех. наук, доц. С. М. Анцыз

УДК 519.688

Модель динамики газопылевой среды с интенсивным переносом импульса между фазами на основе библиотеки OpenFPM

М. С. Арендаренко

Новосибирский государственный университет

В работе рассмотрено решение модельных задач динамики газопылевой среды с монодисперсными частицами. Модель среды представляет собой нестационарные уравнения неразрывности и движения для газа и для пыли, а также уравнение энергии для газа. Система уравнений в частных производных численно решается мотедом SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics, гидродинамика сглаженных частиц) [1]. Взаимодействие пыли и газа учитывалось классическим методом Монагана-Кочеряна [2].

Численный метод реализован на языке C++ с использованием структур открытой библиотеки OpenFPM [3], предназначенной для автоматического распараллеливания реализаций методов частиц. Основным преимуществом этой библиотеки являются готовые и интуитивно понятные, автоматически распараллеливаемые векторные структуры данных, использование которых идентично как в случае расчётов на персональном компьютере, так и в случае использования ресурсов суперкомпьютера.

Расчёты проведены на многопроцессорной машине с распределённой памятью. Получены зависимости времени счёта программы от количества процессоров.

[1] Monaghan J.J., Smoothed particle hydrodynamics // Annual Rev. Astron. Astrophys. 1992. №30 P. 543-574.

[2] Monaghan J.J., Kocharyan A., SPH simulation of multi-phase flow // Computer Physics Communications. 1995. №87. P. 225-235.

[3] OpenFPM: A scalable open framework for particle and particle-mesh codes on parallel computers / Pietro Incardona, Antonio Leo, Yaroslav Zaluzhnyi, Rajesh Ramaswamy,
Ivo F. Sbalzarini // Computer Physics Communications. 2019. №241. P. 155-177

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук О.П. Стояновская

УДК 51-76

Замедление EM-алгоритмов реконструкции изображений в эмиссионной томографии

М. А. Братенков

Новосибирский государственный университет

Во всех современных эмиссионных томографах для реконструкции изображений используются итерационные EM-алгоритмы. Обычно это алгоритмы OSEM с возможным включением сглаживания или фильтрации. Одним из известных свойств OSEM является быстрая сходимость к некоторому «наилучшему возможному» решению и последующее быстрое зашумление восстановленного изображения. Это влечёт за собой известную проблему выбора «наилучшей» итерации для восстановленного изображения. «Плохой» выбор «наилучшей» итерации может привести к существенным ошибкам на восстановленном изображении. Алгоритмы OSEM являются эвристическими алгоритмами, основанными на алгоритме MLEM, для которого доказана сходимость к решению максимального правдоподобия. В настоящей работе доказана сходимость к решению максимального правдоподобия замедленного алгоритма MLEM, что дает возможность замедлять сходимость алгоритмов OSEM. Это замедление может упростить задачу выбора «наилучшей» итерации для алгоритмов OSEM. Кроме того, замедленные алгоритмы могут давать немного лучшие решения, чем исходные алгоритмы OSEM.

Научный руководитель – канд. физ.-мат.наук, доц. П. С. Рузанкин

УДК 517.95

Об одной модели фильтрации газа в деформируемой пористой среде

Р. А. Вирц

Алтайский государственный университет

В работе рассматривается система уравнений, описывающая фильтрацию газа в вязкоупругой пористой среде. В основу математической модели положены законы сохранения масс газовой и твердой фаз, закон Дарси, реологическое соотношение для пористой среды и закон баланса сил. Близкие по структуре системы уравнений рассматриваются в работах [1], [2], [3].

В двумерном случае, когда конвективным слагаемым можно пренебречь, система определяющих уравнений сводится к уравнениям для нахождения эффективного давления и пористости. Фильтрация газа происходит в конечной области, граница которой состоит из проницаемой области для газа, соответствующей нагнетательной скважине, непроницаемых боковых границ и поверхности с заданным на ней гидростатическим давлением.

Настоящий доклад посвящен численному и аналитическому исследованию полученной начально – краевой задачи. Актуальность исследования связана с применением такого рода задач в области газодобычи, миграции зягрязнений в земной коре и других приложениях, связанных с фильтрацией газов в пористых средах.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации («Современные методы гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» тема № FZMW-2020-0008).

[1] Connolly J. A. D., Podladchikov Y. Y. Temperature-dependent viscoelastic compaction and compartmentalization in sedimentary basins //Tectonophysics. 2000. Vol. 324, No.3. P. 137-168.

[2] Simpson G., Spiegelman M., Weinstein M. I. Degenerate dispersive equations arising in the study of magma dynamics //Nonlinearity. 2006. Vol. 20, No.1. P. 21.

[3] Virts R.A., Papin A.A., Tokareva M.A. Non-isothermal filtration of a viscous compressible fluid in a viscoelastic porous medium //Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing. 2020. Vol. 1666, No.1. P. 012041.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. А. А. Папин

УДК 519.673

Анализ параметрической чувствительности моделей динамических систем на основе данных численного моделирования

Д. А. Воробьева

Новосибирский государственный университет

В настоящее время построение и исследование математических моделей динамических систем используется в самых различных областях естественных наук. Так, современная математическая биология использует параметрические модели биологических систем, в частности системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), а также модели динамических систем, описанных в других формализмах. Параметрами являются численные значения величин, таких как коэффициенты ОДУ, отражающие определённые свойства моделируемой системы и влияющие на решения модели.

Отметим, что очень часто исследуемые системы обладают множеством параметров, что затрудняет проведение анализа параметрической чувствительности, особенно для моделей, описанных в неклассических формализмах. Тем не менее, независимо от используемого формализма, для любого фиксированного в численном эксперименте набора параметров решение модели можно представить в виде таблично заданной функции, которую можно рассматривать как временной ряд, и, тем самым, свести задачу исследования параметрической чувствительности к задаче анализа временных рядов.

В качестве примера в работе использовалась хорошо изученная модель Лотки-Вольтерра [3] (система из двух ОДУ) - модель взаимодействия двух популяций типа «хищник - жертва». Она имеет параметры $\alpha, \beta, \gamma, \delta$- коэффициенты, отражающие взаимодействия между популяциями и внутренние свойства отдельных популяций. Ключевую роль в моей работе играет алгоритм динамической трансформации временной шкалы [1], с помощью которого была получена матрица расстояний между решениями моделей Лотки-Вольтерра при варьировании параметров, указанных выше. Применив метод главных координат [2] к данной матрице, было выявлено, к изменению каких из параметров рассматриваемая модель оказалась более чувствительна.

Данный прием не опирается на свойства формализма, в котором описана моделируемая система, поэтому его можно применять для анализа чувствительности других моделей динамических систем.

[1] Giorgino T. Computing and visualizing dynamic time warping alignments in R: The dtw package // Journal of Statistical Software. 2009. № 7 (31). С. 1–24.

[2] Ефимов В. М., Д. А. Полунин, В. Ю. Ковалева, К. В. Ефимов. Метод главных координат как способ расчета главных компонент. В кн.: Марчуковские научные чтения 2020: материалы. Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2020. С. 161–162.

[3] Трубецков Д. И. ФЕНОМЕН МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЛОТКИ–ВОЛЬТЕРРЫ И СХОДНЫХ С НЕЙ // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2011. № 2 (19). С. 69–88.

Научный руководитель – канд. биол. наук А. И. Клименко

УДК 519.622.2+519.688

Методы численного решения уравнений движения заряженной частицы в электромагнитном поле

Е. С. Воропаева

Новосибирский государственный университет
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

Одной из центральных проблем в моделировании поведения плазмы является определение траекторий и скоростей движения заряженных частиц в электромагнитном поле. Наиболее известным методом решения этой задачи является метод Бориса [1] второго порядка точности, который относится к разностным схемам типа "чехарда". Модификации метода Бориса направлены на уточнение решения уравнений движения или ускорение процедуры расчётов.

В настоящей работе проводится сравнительный анализ ряда известных модификаций метода Бориса. На тестовых задачах показана предпочтительность новой модификации, основанной на точном решении дифференциального уравнения для скорости заряженной частицы на шаге по времени. Исследуется скорость работы методов при использовании интерполяции для вычисления электромагнитного поля. Работа является развитием и продолжением исследования, опубликованного в [2, 3].

---

[1] Boris P. Relativistic plasma simulation—optimization of a hybrid code // Proceedings of 4th Conference on Numerical Simulation of Plasmas. Naval Research Laboratory, Washington D. C., 1970, P. 3-67.

[2] Воропаева Е. С., Вшивков К.В., Вшивкова Л. В., Дудникова Г. И., Ефимова А. А. Алгоритмы движения в методе частиц в ячейках // Вычислительные методы и программирование. 2021. 22, 281–293. doi 10.26089/NumMet.v22r418

[3] Voropaeva E., Vshivkov K., Vshivkova L., Dudnikova G., Efimova A. Algorithms of motion in the particle-in-cell method // Journal of Physics: Conference Series. 2021. 2028, 012011. doi:10.1088/1742-6596/2028/1/012011

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. В. А. Вшивков

УДК 519.622

Идентификация параметров математической модели динамики социальной напряженности общества на реальных событиях

А. И. Глухов

Новосибирский государственный университет

В последние годы во всем мире наблюдается рост социальной напряженности общества, причины которого могут быть как экономическими и социальными, так и, например, ответной реакцией на карантинные меры с целью предотвращения распространения новой коронавирусной инфекции.

Понимание динамики социальных настроений важно для стабильного и устойчивого развития различных социальных групп, а также общества, региона и страны в целом. Математическое моделирование и решение обратных задач все чаще используется для построениия тех или иных сценариев социальной динамики общества.

Исследована математическая модель динамики социальной напряженности [1], выраженной в виде различных акций, и сформулирована в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений на основе компартментных моделей эпидемиологии.

Реализован явный метод Рунге-Кутта-Мерсона 5-го порядка для решения прямой задачи. Обратная задача сформулирована в виде задачи минимизации функционала, глобальный минимум которого находится методом дифференциальной эволюции. Анализ идентифицируемости реализован с использованием ортогонального метода [2]. Составлен фазовый портрет исследуемой системы [1]. Приведены результаты численных расчётов прямой и обратной задачи. Разработанный алгоритм решения обратной задачи апробирован на статистических данных по событиям во Франции (2018–2019 годов) [3].

[1] Morozov, A.; Petrovskii, S.V.; Gavrilets, S. Dynamics of Social Protests: Case study of the Yellow Vest Movement. SocArXiv 2019

[2] Miao, H., Xia, X., Perelson, A. S., Wu, H. (2011). On identifiability of nonlinear ODE models and applications in viral dynamics. SIAM review. Society for Industrial and Applied Mathematics, 53(1), 3–39.

[3] Wikipedia (2021). Gelbwestenbewegung. https://de.wikipedia.org/wiki/Gelbwestenbewegung.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, М.А. Шишленин

УДК 517.9+519.6

Численное моделирование кровотока в системе сосудов с анастомозами

Т. Е. Железко

Новосибирский государственный университет

Согласно статистике, заболевания сердечно-сосудистой системы являются главной причиной смертности во всём мире. Поэтому разработка новых методов лечения и диагностики данных заболеваний является важным и актуальным направлением научных исследований в настоящее время. Значительную роль в решении этих задач занимает математическое моделирование, так как оно позволяет заменить медицинские исследования на живых организмах численными экспериментами на компьютере. Такой переход приводит не только к сокращению затрачиваемых на исследования ресурсов, но и к персонализации методов лечения, а также к более точным методам диагностики.

Профиль пульсовой волны является крайне информативным параметром при диагностике сердечно-сосудистых заболеваний, так как он формируется при участии всех крупных сосудов и является интегральной характеристикой состояния кровеносной системы[1]. Соответственно, важно исследовать условия формирования профиля и изучить, какие отделы системы кровообращения значительно влияют на него. В частности, нас интересует поведение пульсовой волны при прохождении через анастомоз – слияние кровеносных сосудов, так как это распространенное явление в системе кровообращения.

Целью данной работы является численное моделирование анастомоза в ладонной дуге и исследование поведения пульсовой волны при прохождении через данный анастомоз. Была использована одномерная модель гемодинамики, являющаяся усреднением по «поперечному» направлению уравнений Навье-Стокса. Модель представляет собой квазилинейную гиперболическую систему уравнений[2]. В работе исследовано поведение пульсовой волны при прохождении через систему сосудов с анастомозом в зависимости от различных параметров системы.

---

[1] J. Wang, J. H. Parker. Wave propagation in a model of the arterial circulation // Journal of Biomechanics. 2004. V. 37. P. 457-470.

[2] Davydova S.G., Kiselev I.N., Biberdorf E.A. Influence of the vessel shape and the equation of state on the formation of a pulse wave in the 1D hemodynamics model // Mathematical Modelling of Natural Phenomena. 2018. V. 15, No. 5.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Э. А. Бибердорф

УДК 519.6

Реализация численных методов описания движения жидкости в плоском канале на равномерной декартовой сетке

М. И. Кигель

Новосибирский Государственный университет

В настоящее время одним из самых распространенных методов повышения добычи нефти и газа является гидроразрыв пласта (ГРП), эффективность которого обусловлена использованием математического моделирования. Модель движения жидкости в трещине - ключевая составляющая моделей ГРП, поэтому повышение скорости методов решения ее уравнений остается актуальным. В работе на примере уравнений модели движения ньютоновской жидкости в плоском канале, аппроксимированных на равномерной декартовой сетке, проведено сравнение различных методов решения получившейся системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Для конструирования системы была введена одномерная нумерация ячеек, позволяющая перейти к СЛАУ. Были рассмотрены 1) прямой метод Гаусса (LU-разложение) из библиотеки IMSL Fortran, 2) два прямых метода из той же библиотеки, основанных на LDL^T разложении с различными матрицами перестановок и учитывающих разреженность матрицы, 3) обобщенный метод минимальных невязок (GMRes) из библиотеки IMSL Fortran и 4) стабилизированный метод бисопряжённых градиентов (BiCGStab) реализованный самостоятельно. Показано, что при использовании сетки с менее чем 1600 элементами наиболее быстрым является метод LU-разложения.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук В. Н. Лапин

УДК 517.518.83

Валидация упрощённой формулы для вычисления аэродинамического сопротивления фрактальных агрегатов в режиме Кнудсена–Эпштейна

П. К. Ковылина, А. Н. Сусленкова

Новосибирский государственный университет

Для моделирования движения твердых частиц в газе в режиме трения Кнудсена-Эпштейна необходимо знать площадь лобового сечения частицы. Нахождение площади лобового сечения для несферических частиц является нетривиальной задачей. Для описания некоторого типа несферических частиц - рыхлых агрегатов, рассматриваемых как совокупность склеенных сфер - мономеров, используется фрактальная размерность.

Авторы [1] построили явную функцию двух переменных (количества мономеров N и фрактальной размерности агрегатов D_{f}), аппроксимирующую площадь лобового сечения фрактальных агрегатов. В работе [2] приведено новое более реалистичное аналитическое выражение для площади лобового сечения фрактальных агрегатов, представляющее собой неявную функцию.

Целью настоящей работы является получение явного выражения для расчета лобового сечения, максимально приближающего результаты прямого численного моделирования (DNS) агрегатов с малым количеством мономеров [3, 4] и известные аналитические представления для агрегатов с большим количеством мономеров. Для этого мы провели сравнение выражений, полученных в [1] и в [2], и определили диапазон D_{f}, в котором более простая для вычислений функция из [1] может заменить выражение из [2]. Установлено, что для D_{f} от 2 до 3 функция из [1] близка к выражению, полученному в [2].

[1] O.P. Stoyanovskaya, A.N. Suslenkova, T.R.Kusnatdinov, Computing the aerodynamic drag of fractal aggregates in free-molecular and transition regimes, Journal of Physics: Conference Series, 2020, Volume 1640, ID 012010 DOI: :10.1088/1742-6596/1640/1/012010.

[2] R. Tazaki (2021), MNRAS 504, 2811–2821 (2021) DOI:10.1093/mnras/stab1069

[3] R. Gopalakrishnan, C. J. Hogan, T. Thajudeen (2011), The Journal of Chemical Physics, 135(5): http://dx.doi.org/10.1063/1.3617251.

[4] T. Thajudeen , R. Gopalakrishnan & C. J. Hogan Jr. (2012), Aerosol Science and Technology, 46(11):1174-1186, https://doi.org/10.1080/02786826.2012.701353.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, О. П. Стояновская

УДК 51-76

Развитие математического моделирования для улучшения качества диагностики методом ОФЭКТ в ядерной кардиологии

И. П. Колинко

Новосибирский государственный университет
Институт теоретической и прикладной механики, Новосибирск

Метод однофотонной эмиссионной компьютерной томографии (ОФЭКТ) широко используется для диагностики сердечно-сосудистых заболеваний. В последние годы были достигнуты значительные успехи в технологическом развитии детекторных устройств метода ОФЭКТ. Однако, в программном обеспечении используется устаревший алгоритм OSEM (Ordered Subset-Expectation Maximization), основанный на нерегуляризированном подходе к решению обратной некорректной задачи реконструкции. Это приводит к неточности решения и неоднозначности клинической интерпретации изображений. Целью данной работы является исследование регуляризированного алгоритма, основанного на байесовском подходе *Maximum a Posteriori* с гиббсовской априорной плотностью вероятности (*MAP-GIBBS* [1]). Для выполнения исследований использовался метод математического моделирования, в рамках которого осуществлялась компьютерная имитация всей процедуры обследования пациента методом ОФЭКТ. В качестве «виртуального пациента» использовался разработанный в ИТПМ СО РАН математический антропоморфный фантом, описывающий распределение препарата Tc-МИБИ в органах грудной клетки пациента. Исследовались случаи здорового миокарда левого желудочка (ЛЖ) сердца и миокарда с ишемическим и инфарктным поражениями. Компьютерная имитация сбора «сырых» данных (виртуальный томограф) осуществлялась с помощью метода Монте-Карло [3]. Реконструкция 3D изображения всего фантома была выполнена с использованием алгоритмов OSEM и MAP-GIBBS. Областью интереса в кардиологии является изображение миокарда ЛЖ. Для анализа изображений ЛЖ был развит метод полярных карт [2], который является стандартом в клинической практике. Все этапы моделирования обсуждались с врачами-радиологами и сверялись с клиническими данными. Полученные результаты указывают на перспективность использования алгоритма MAP-GIBBS в методе ОФЭКТ.

[1] Geman, S.; Geman, D. Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian restoration of Images. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 1984, 6, 721–741.

[2] Kolinko I. P., Denisova N. V.Development of the “polar map” method in nuclear cardiology//AIP Conference Proceedings. 2021. V 2351.

[3] М. А. Гурко, Н. В. Денисова. Моделирование сбора «сырых» проекционных данных в однофотонной эмиссионной компьютерной томографии//Журнал технической физики.[Принято в печать]

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Н. В. Денисова

УДК 51-72

Сравнение подходов решения систем нелинейных уравнений в моделях гидроразрыва пласта

А. Р. Кочарина

Новосибирский государственный университет

Гидроразрыв пласта (ГРП) в настоящее время – один из наиболее эффективных методов интенсификации добычи нефти и газа. Его проведение на российских месторождениях невозможно без поддержки математического моделирования. Большинство моделей ГРП включают в себя уравнения движения жидкости, деформации породы и ее разрушения, что приводит к необходимости решения систем нелинейных уравнений (СНУ), получающихся после их аппроксимации, на каждом шаге распространения трещины.

Поэтому в области математического моделирования и численных методов является актуальной задача решения СНУ таким итерационным методом, который дает результат за наименьшее время.

В работе на примере модели радиальной трещины проведено сравнение методов решения такой СНУ. Движение жидкости в этой модели осесимметрично и описывается в рамках приближения модели ньютоновской жидкости уравнениями неразрывности и количества движения, которые можно записать в виде одного дифференциального уравнения второго порядка для давления. Это уравнение после аппроксимации запишется в виде СЛАУ с трехдиагональной матрицей с зависящими от раскрытия коэффициентами. СЛАУ, полученная при аппроксимации уравнений упругого равновесия будет, как и в общем случае, полностью заполненной. Из двух полученных систем можно составить одну общую систему уравнений для раскрытия и давления, но уже будет нелинейной.

Для ее решения были рассмотрены три метода: метод Ньютона, метод релаксации и метод Левенберга-Марквардта. В ходе работы реализованы все три метода, проведено их сравнение по точности и скорости. Показано, что

метод релаксации дает результат гораздо медленнее (до 30 раз), чем метод Ньютона, так что, несмотря на простоту его реализации, его применение неэффективно;

метод Ньютона дает результат гораздо быстрее, чем метод Левенберга-Марквардта (до 20 раз), если взять параметр регуляризации достаточно большим, при котором метод Левенберга-Марквардта почти превращается в метод градиентного спуска.

Метод Левенберга-Марквардта имеет более широкую область сходимости по сравнению с методом Ньютона, что и обусловливало его применение, однако в рассмотренной задаче всегда оказалось легко выбрать начальное приближение, обеспечивающее сходимость метода Ньютона.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук В.Н. Лапин

УДК 517.95

Аналитическое исследование математической модели карциномы

Э. И. Леонова

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

Данная работа посвящена математическому моделированию злокачественной опухоли. Опухоль рассматривается как пористая среда, которая состоит из опухолевых клеток ($i = 1$), здоровых клеток ($i = 2$) и внеклеточного матрикса ($i = 3$) [1]. Модель описывается следующими уравнениями:

$$\frac{\partial(\phi\rho_i^0 s_i)}{\partial t} + \nabla\cdot(\phi\rho_i^0 s_i\mathbf{u}_i) = \Gamma_i(s_i, c),\ i = 1, 2,$$

$$\frac{\partial((1-\phi)\rho_3^0)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_3^0(1-\phi)\mathbf{u}_3) = 0,$$

$$s_i\phi(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_3) = -K_0\frac{k_{0i}}{\mu_i}(\nabla p_i + \rho_i^0\mathbf{g}),\ i = 1, 2,$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \nabla\cdot(D\nabla c) = Q_1(s_1, c) + Q_2(s_2, c).$$

Здесь ϕ - пористость среды; $\rho_i^0 = const$ - истинные плотности i-й фазы; s_1, s_2 - насыщенности опухолевых и здоровых клеток ($s_1 + s_2 = 1$); $\Gamma_i(s_i, c)$ - интенсивности обмена массой компонента смеси; $\mathbf{u}_i$ - скорость i-й фазы; $K_0 = const$ - тензор фильтрации; k_{0i} - фазовые проинцаемости; $\mu_i = const$ - динамические вязкости; p_i - давления фаз; **g** - вектор ускорения силы тяжести; c - концентрация питательных веществ; D - тензор коэффициента диффузии; Q_1, Q_2 - интенсивности обмена питательных веществ клетками [2]. В работе иссследуется начально-краевая задача для исходной системы.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2020-0008).

[1] A. Tosin. Initial/boundary-value problems of tumor growth within a host tissue // Journal of Mathematical Biology, 2013, Vol. 66, № 1-2, P. 163-202.

[2] А. Н. Сибин, А. А. Папин. Тепломассоперенос в тающем снеге // Прикладная механика и техническая физика, 2021, Т. 62, № 1 (365), С. 109-118.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. А. А. Папин

УДК 517.9; 519.6

Моделирование кровотока в системе сужающихся сосудов

И. Д. Макаренко

Новосибирский государственный университет

Актуальность изучения кровообращения человека обусловлена высоким уровнем смертности и инвалидизации населения во всем мире вследствие сердечно-сосудистых заболеваний. Одним из основных инструментов исследования кровеносной системы является математическое моделирование. Его преимущества заключаются в масштабируемости математической модели в зависимости от поставленной задачи и возможности заменить эксперименты на живом организме численным экспериментом на компьютере.

В существующих на данный момент моделях некоторые вопросы еще недостаточно проработаны. В частности, несмотря на то, что ряд самых крупных сосудов имеет ярко выраженную коническую форму, во многих моделях (см., например, **??**) артериальная система представлена в виде ветвящейся системы цилиндрических сосудов. Недостатком этого подхода является большое число отражений волн от точек ветвления, которые практически отсутствуют в реальной системе. В работе[2] показано, что замена последовательно соединенных цилиндрических сосудов одним коническим позволяет избежать появления лишних отражений. Цель настоящей работы заключается в построении модели для разветвленной системы, состоящей из сужающихся сосудов.

На основе одномерной модели гемодинамики для конических сосудов [1] создана соответствующая компьютерная модель. При этом в численном методе был учтен ряд отличительных особенности математической модели.

[1] И.Н.Киселев, Э.А.Бибердорф, В.И.Баранов, Т.Г.Комлягина, В.Н.Мельников, И.Ю.Суворова, С.Г.Кривощеков, Ф.А.Колпаков Персонализация параметров и валидация модели сердечно-сосудистой системы человека// Матем. биология и биоинформ., 10:2 (2015), 526–547

[2] Davydova S.G., Kiselev I.N., Biberdorf E.A. Influence of the vessel shape and the equation of state on the formation of a pulse wave in the 1D hemodynamics model // Mathematical Modelling of Natural Phenomena, 2018, V. 13, № 5

Научный руководитель – канд. физ-мат. наук Э. А. Бибердорф

УДК 519.6; 51-76

Триггерная модель динамики асептического воспаления

Т. С. Михаханова

Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий
Новосибирский государственный университет

Воспаление – это универсальная реакция организма, лежащая в основе большинства патологий и заболеваний человека. К числу наиболее изученных в лабораторных и клинических условиях вариантов воспаления является воспаление в кожной хирургической ране. Суть воспаления заключается в формировании защитно-приспособительного ответа, который бы частично или полностью ликвидировал очаг повреждения. Данные процессы обеспечиваются и регулируются, прежде всего, системой иммунитета, а также нервной и эндокринной системами через сложные клеточно-молекулярные механизмы взаимодействия клеток между собой и с различными биоактивными веществами. При благоприятном исходе это обычно длится несколько дней. Однако в некоторых случаях внутренние или внешние факторы могут затруднить процесс заживления: раны могут заживать в течение очень долгого времени или не заживать совсем. В связи с этим для клинической практики представляет большой интерес как сама возможность прогнозирования сценария развития иммунного ответа по измерениям в первые часы повреждения, так и конкретный набор данных, обеспечивающих адекватность прогноза.

В настоящей работе представлены результаты численного анализа качественных свойств решения известной математической модели динамики асептического воспаления в центральной зоне раневого повреждения. Получены четыре стационарных состояния, которые показывают, что модель может адекватно описывать не только острый воспалительный ответ, но и некоторые его тяжелые хронические формы. Исследован триггерный механизм функционирования системы, который обеспечивается только изменением начальных условий. Результаты имеют вполне ясный биологический смысл. Они также показывают, что модель может быть использована как инструмент для предсказания сценария заживления хирургической раны еще до начала операции.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук О. Ф. Воропаева

УДК 51-76

Улучшение количественной оценки опухолевых поражений в методе ОФЭКТ

А. В. Нестерова

Новосибирский государственный университет

При обследовании пациентов с онкологическими поражениями методом однофотонной эмиссионной компьютерной томографии (ОФЭКТ) оценивается распределение радиофармацевтического препарата (РФП) в тканях тела пациента. Интенсивность накопления РФП зависит от уровня кровотока: чем сильнее кровоток в опухоли по сравнению со здоровыми тканями, тем выше захват РФП. В последние годы существенный интерес вызывает количественная оценка уровня РФП в поражениях, поскольку она может быть полезной для определения степени их злокачественности. Во многих исследованиях для улучшения количественных значений активности в алгоритм реконструкции был введен учет «расплывания» изображения точечного источника за счет коллиматора. Этот эффект учитывается с помощью функции рассеяния точки (ФРТ). Однако, на изображениях, полученных с учетом ФРТ, наблюдались граничные артефакты, которые ставили под сомнение правильность количественной оценки.

Целью данной работы является улучшение количественной оценки опухолевых поражений малых размеров в методе ОФЭКТ. Исследования выполнены с помощью метода математического моделирования. В качестве объекта исследования использовался математический фантом, имитирующий равномерное фоновое распределение РФП с выделенной областью поражения –«горячей точкой». Был смоделирован процесс сбора данных, приближенный к клинической практике. Реконструкция изображений была выполнена с использованием итерационного стандартного алгоритма OSEM (Ordered Subset Expectation Maximization) с учетом и без учета ФРТ. Численные эксперименты показали, что изображения без учета ФРТ дают существенно сниженное значение активности в опухоли, в то время как изображения с учетом ФРТ дают завышенное значение. Полученные результаты соответствуют опубликованным в литературе экспериментальным и клиническим данным, показывающим, что на малых поражениях граничные артефакты «сливаются», что приводит к завышенным значениям активности. Поведение решения в итерационном процессе алгоритма с учетом ФРТ показывало увеличение активности в зоне поражения с ростом числа итераций алгоритма. Для получения оптимального решения было предложено использовать специально разработанный статистический критерий остановки итерационного процесса. Численные эксперименты продемонстрировали перспективность данного подхода для практического приложения в области диагностической ядерной медицины.

---

[1] В. В. Воеводин. Вычислительные основы линейной алгебры. – М.: Наука. – 1977.

[2] И. И. Древний, С. С. Старый. Линейное алгебраическое уравнение с одной неизвестной // Мат. сборник древних греков, 1730, Т. 1, № 1. P. 1-5.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Н. В. Денисова

УДК 519.688

Разработка версии квазистатического кода для моделирования кильватерного ускорения LCODE с произвольной геометрией.

Н. В. Охотников

Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет

Напряженность ускоряющего поля в линейных ускорителях ограничена величиной, при которой происходит электрический пробой. Это значение достигает нескольких сот МэВ/м. Это приводит к необходимости создания установок длиной в десятки километров. В связи с этим, в последнее время начали активно развиваться альтернативные методы ускорения заряженных частиц, одним из которых является кильватерное ускорение — метод ускорения пучка заряженных частиц в волне, возбужденной в плазме коротким ультрарелятивистским пучком заряженных частиц или лазерным импульсом. Данный способ позволяет достичь темпа ускорения в десятки ГэВ/м, и тем самым существенно уменьшить размеры линейного ускорителя.

Моделирование является неотъемлемой частью успешного эксперимента по кильватерному ускорению, поскольку происходящие процессы сложно описать аналитически, а характерные расстояния и времена изучаемых процессов очень малы. Для моделирования кильватерного ускорения в ИЯФ СО РАН был разработан программный комплекс LCODE, позволяющий получить распределение заряда, полей и кильватерного потенциала посредством решения уравнений Максвелла методом частиц в ячейках.

Старая версия кода, разработанная на языке программирования C, устарела и затрудняет дальнейшую разработку и поддержку программы, поэтому было принято решение переписать ее на языке Python. Использование абстрактных конструкций языка, а также методов ООП позволило повысить гибкость и читаемость кода, расширить функционал и добавить новые схемы параллелизации расчетов, при этом не сильно проиграв в скорости вычислений благодаря JIT-компиляции средствами Numba. С помощью новой версии программы стало возможным производить решение оптимизационных задач непосредственно в скриптах запуска, менять параметры системы в ходе вычислений, а также привести выходные данные расчетов к общепринятым стандартам.

В ходе данной работы разработана рабочая 2d версия LCODE на языке Python 3.7. Написаны модуль генерации и движения частиц, диагностический модуль, добавлена параллельность с использованием MPI. Выполнено моделирование задач с известным аналитическим решением для проверки корректности кода. Проведено сравнение с другими кодами по моделированию кильватерного ускорения.

Научный руководитель – А. А. Горн

УДК 532.543

Исследование задачи об определении мутности воды при расчистке русла

Т. А. Пекарская

Алтайский государственный университет

Задача осаждения разрабатываемого грунта определённого гранулометрического состава долгое время изучается теоретически и экспериментально [1], [3]. С её помощью определяются изменения мутности воды при производстве подводных земляных работ, выполняемых в речном русле.

Пусть потоки жидкости и пульпы полагаются стационарными, постоянной ширины и глубины. Грунт считается состоящим из конечного числа «n» - фракций. Поперечная и вертикальная составляющие v_y и v_z, скорости потока малы по сравнению с продольной составляющей v_x. Система координат выбрана таким образом, что начало координат совпадает с центром струи пульпы на свободной поверхности потока. Ось «OX» направлена вдоль потока по свободной поверхности, «OY» - перпендикулярно к ней, «OZ» - в глубину потока. Мутность S_i - «i»-ой фракции в потоке определяется уравнением турбулентной диффузии:

$$v_0 \frac{\partial S_i}{\partial X} = D\left(\frac{\partial^2 S_i}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 S_i}{\partial Z^2}\right) - U_i \frac{\partial S_i}{\partial Z},$$

которая будет дополнена граничными условиями. Здесь v_0 - средняя скорость потока; H - средняя глубина потока; U_i - гидравлическая крупность «i»-ой фракции; S_i - мутность «i»-ой фракции в потоке; C - коэффициент Шези; D - коэффициент турбулентной диффузии, который считается следующим образом [3]:

$$D = \frac{gHv_0}{\rho MC}.$$

Здесь:

$$M = f(C) = \begin{cases} 0,7C + 6, \quad 10 \le C < 60; \\ 48, \quad C > 60. \end{cases}$$

В работе сделан анализ изменения мутности. При росте значения диаметра частиц от $5 \cdot 10^{-3}$ мм до $5 \cdot 10^{-2}$ мм значение средней и максимальной по сечению мутности в зависимости от фракции пульпы при $x = 500$ м количественно возрастает.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (номер темы: FZMW-2020-0008).

[1] Алексеевский Н.И., Иванов В.В., Федорова Т.А. Изменение мутности воды на участках строительства переходов трубопроводов через реки // Водное хозяйство России. - 2010. - № 4. - С. 42-57.

[2] Методическое руководство по проектированию РП.1.204-1-84 кабельные переходы связи через водные преграды с учетом требований охраны окружающей среды. М. 1984 г.

[3] Промахова Е.В., Чалов С.Р. Современные технологии определения мутности воды // Маккавеевские чтения - 2014. - М.: Географ. ф-т МГУ, 2015. -С. 82-94.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, А. Н. Сибин

УДК 519.6

Сравнительный анализ методов решения СЛАУ в трёхмерных начально-краевых задачах

М. С. Пехтерев[1], В. С. Гладких[2], В. П. Ильин[2]

[1]*Новосибирский государственный университет*

[2]*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН*

Рассматриваются итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений с разреженными матрицами высоких порядков, возникающих при абсолютно устойчивых неявных конечно-объемных аппроксимациях трёхмерных начально-краевых задач для уравнения тепло- массопереноса на неструктурированных сетках в расчётных областях со сложной конфигурацией многосвязных кусочно-гладких граничных поверхностей и контрастными материальными свойствами. На каждом временном шаге алгебраические системы решаются с помощью параллельных предобусловленных алгоритмов сопряжённых направлений в подпространствах Крылова. Для ускорения итерационных процессов применяются вариационные методы выбора начальных приближений с использованием численных решений с предыдущих временных шагов. Обсуждаются вопросы переноса предложенных подходов на более общие постановки задач, а также повышения производительности вычислительных методов и технологий при многократном решении алгебраических систем с последовательно определяемыми разными правыми частями и с масштабируемым распараллеливанем алгоритмов на основе аддитивных методов декомпозиции областей. Эффективность предложенных подходов исследуется для неявных схем Эйлера и Кранка-Николсона по результатам численных экспериментов на представительной серии методических задач.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. В. П. Ильин

УДК 004.94

Стохастический подход к моделированию инфекционных и хронических заболеваний

П. Н. Подзолков

Тюменский государственный университет

Прогнозирование развития хронических и инфекционных заболеваний является актуальной задачей для здравоохранения. Для моделирования развития и распространения инфекционных заболеваний наиболее широко применяются компартментальные эпидемиологические модели [1]. Распространённый подход к моделированию хронических заболеваний основан на использовании цепей Маркова [2]. Оба подхода подразумевают представление процесса развития заболевания у конкретного индивида в виде последовательности состояний, через которые он проходит. При этом в каждый момент времени индивид может находиться только в одном состоянии.

Таким образом, для моделирования развития как инфекционных, так и хронических заболеваний возможно использование одной базовой модели, которая определяется схемой состояний – набором состояний индивида, для каждого из которых определены вероятности (в общем случае зависящие от времени) переходов в другие состояния. При этом отличительной особенностью моделей инфекционных процессов является влияние количества индивидов, находящихся в определённых состояниях, на вероятности переходов между состояниями для отдельного индивида.

Для формирования модели конкретного заболевания, после построения схемы состояний, выполняется оценка указанных вероятностей. Она основана на обработке данных о пациентах из электронных историй болезни, включающих результаты обследований, протоколы осмотра и диагнозы, по которым определяется состояние индивида в конкретный момент времени. Соответственно, для каждого индивида формируется строка, содержащая информацию о пройденных состояниях, разделённых пропусками различной длины, которые соответствуют промежуткам времени между обследованиями.

Далее для всего набора данных выполняется «выравнивание», т.е., смещение по времени для оценки относительных времени наступления и завершения каждого состояния. После выравнивания большого количества последовательностей можно получить статистические оценки для продолжительности каждого состояния заболевания. Далее на основе этих оценок определяются вероятности переходов между состояниями в конкретные моменты времени.

Предложенный подход в настоящее время адаптируется для предсказания риска сердечно-сосудистых заболеваний и респираторных инфекций.

[1] Tolles J., Luong T.B. Modeling epidemics with compartmental models // Jama. 2020. V. 323. № 24. P. 2515–2516.

[2] Стандартизация моделирования прогрессирования хронических заболеваний / Д.М.Андреев [и др.] // Проблемы стандартизации в здравоохранении. 2017. №. 9–10. С. 12–23.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, проф. И. Г. Захарова

УДК 519.633

Обработка данных многолетних наблюдений планктонного сообщества озера Байкал

А. Ю. Приходько

Новосибирский государственный университет

Актуальными сегодня являются проблемы глобального потепления, уменьшения концентрации кислорода в атмосфере и роста концентрации CO2. В связи с этим становится важным поиск и изучение факторов, влияющих на качество воздуха и рост температуры на планете. Установлено, что планктонное сообщество вырабатывает до 50% всего кислорода, находящегося в атмосфере Земли. При этом незначительные изменения в окружающей среде могут влиять на скорость производства кислорода, круговорот вещества и энергии, осуществляющийся водной экосистемой. Кроме того, планктон служит индикатором чистоты водоемов, а зоопланктон составляет кормовую базу рыб, а следовательно влияет и на нерп, и на околоводных птиц.

Целью работы является идентификация параметров математической модели пространственной динамики основных компонент планктонного сообщества с учетом изменения климата.

Идентификация параметров системы проводится по данным водных экосистем.

В основе используемой модели лежит упрощённая модель Фэшема с добавлением кислорода. Так же в модель добавляется диффузионный член, отображающий неравномерность распределения фитопланктона по глубине.

Обратная задача решается методами глобальной оптимизации. Приведены результаты расчетов.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, М. А. Шишленин

УДК 519.6

Зависимость силового воздействия волн на прибрежные сооружения от формы набегающей волны

В. С. Скиба

Новосибирский государственный университет

Работа посвящена проблеме [1] численного моделирования различных сценариев взаимодействия длинных поверхностных волн типа цунами с большими частично погруженными в воду сооружениями, расположенными на мелководье. Изучено влияние формы набегающих волн на такие характеристики их взаимодействия с неподвижными полупогруженными телами разной протяженности и осадки, как значения максимальных заплесков, амплитуд отраженных и прошедших за них волн, максимальных силовых нагрузок. Сравнения проводились на примере набегающих на тело уединенной волны, одиночной волны положительной полярности [1] и N-волны [2] с лидирующей волной повышения или понижения. Выявлены различия в закономерностях силового воздействия длинных волн разной формы. Показано, что при одинаковой амплитуде и одинаковой крутизне переднего склона набегающих волн наибольшее силовое воздействие на полупогруженное тело прямоугольного сечения оказывает N-волна с лидирующей волной понижения.

Численное моделирование выполнено в рамках математической модели двумерных потенциальных течений идеальной жидкости с помощью конечно-разностного метода на криволинейных сетках, адаптирующихся к подвижной свободной границе, дну и поверхности неподвижного тела. Тестирование численного алгоритма осуществлялось на задаче о накате волн различной формы на вертикальную стенку с использованием контроля сходимости решений на последовательности измельчающихся сеток. Показано, что, как и в случае наката волн на плоский откос [3], наибольший заплеск на вертикальную стенку получается при накате N-волн с лидирующей волной понижения. Для задачи о накате уединенной волны на стенку выполнено успешное сопоставление численных решений с известными экспериментальными данными и результатами расчетов других авторов.

[1] O.I. Gusev, G.S. Khakimzyanov, L.B. Chubarov. Numerical investigation of the wave force on a partially immersed rectangular structure: Long waves over a flat bottom // Ocean Engineering. 2021. Vol. 221. Article 108540.

[2] S. Tadepalli, C.E. Synolakis. The run-up of N-waves on sloping beaches // Proceedings of Royal Society of London. A. 1994. Vol. 445. P. 99-112.

[3] Yu.I. Shokin, A.D. Rychkov, G.S. Khakimzyanov, L.B. Chubarov. A combined computational algorithm for solving the problem of long surface waves runup on the shore // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2016. Vol. 31, No. 4. P. 217-227.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Г. С. Хакимзянов

УДК 519.6+532.5

Трехмерная численная модель распыла и испарения жидкости в газе

Д. Тарраф

Новосибирский государственный университет

В процессе получения технического углерода,продукты сгорания природного газа поступают в зону смешения, где происходит перемешивание их с впрыскиваемым сырьем, сопровождающееся дроблением и испарением капель сырья [1,2]. Важно, чтобы сырье полностью испарялось до начала пиролиза, поскольку технический углерод образуется при разложении углеводородов в газообразном состоянии. Если же происходит разложение жидких капель сырья при высоких температурах, то образуются частицы кокса, загрязняющие продукт. Поэтому развитие моделей и алгоритмов процесса распыла и испарения сырья, подаваемого в реактор с потоком продуктов сгорания природного газа, является одним из приоритетных направлений в области современного производства углерода.

Для моделирования этого процесса,уравнения Навье-Стокса для двух несжимаемых изотермических несмешивающихся жидкостей,с использованием пакета OpenFoam [3] решались методом VOF [4], Идея VOF метода состоит в том, что сырье, продукт его испарения и газ рассматриваются как единая трехкомпонентная среда, и пространственное распределение фаз в расчетной области определяется при помощи специальных функций маркеров $Ci(x, y, z, t), i = 1, 2, 3$, величины которых задают объемные доли сырья, продукта его испарения и газа в расчетной ячейке.

Численная модель позволит определять дисперсный состав распыляемого сырья, степень его испарения, а также проектирования оптимальной геометрии реактора.

---

1. Гульмисарян Т.Г., Капустин В.М., Левенберг И.П./Технический углерод: морфология, свойство, производство. М.: «Издательство «Каучук и Резина», 2017. – С. 586

2. В. Ю Орлов, А.М. Комаров, Л.А. Ляпина /Производство и использование технического углерода для резин – Ярославль, Издательство Александр Рутман, 2002 – 512 с.

3. Greenshields C. J. User Guide –The OpenFOAM Foundation

4. Hirt, C. W. Nichols, B. D. (1981) Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries. Journal of Computational Physics 39 (1981), 201-226.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. С. Г. Черный

УДК 519.246.3

Использование регрессионных моделей для прогнозирования уровня физической работоспособности космонавта

В. Н. Устюгов

Омский государственный университет имени Ф.М.Достоевского

Работа посвящена решению актуальной задачи моделирования влияния тренировочного процесса на физическую работоспособность космонавта в условиях длительного космического полета. Цель работы состояла в выборе метода прогнозирования физиологической работоспособности на основе данных о текущем значении этой величины, а также, объеме нагрузки в локомоторной тренировке. Ранее были предприняты попытки прогнозирования физиологической работоспособности в**??**, был предложен алгоритм вычисления физиологической стоимости (ФС) по данным о ежедневных тренировках **??**

С использованием языка Python в работе опробованы методы линейной регрессии, нейросетевая регрессия, решающие деревья. Кроме того, предложен и реализован гибридный метод, в котором деревья решений комбинируются с линейной регрессией. Также в данной работе рассмотрен иной способ оценки физической работоспособности, заключающийся в прогнозировании суммы сердечных сокращений за определённую часть тренировки, который, в отличие от ФС, имеет интегральный характер. Данная работа призвана сравнить новый способ с уже имеющимся.

[1] Сонькин В.Д., Егоров А.Д., Зайцева В.В., Сонькин В.В., Степанцов В.И. *Экспертная система управления физическими тренировками экипажа в длительном космическом полёте* //Авиакосмическая и экологическая медицина, 2003 — Т 37, №5, С 41-46.

[2] Eremeev A.V., Borisovsky P.A., Kovalenko Y.V., Lysova N.Y., Fomina E.V. (2020) *Estimation of Physical Performance Level of Man in Long Space Flight Based on Regular Training Data.* In: Lames M., Danilov A., Timme E., Vassilevski Y. (eds) Proceedings of the 12th IACSS 2019. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol 1028. Springer, Cham, 2020. P. 166-175.

[3] Eremeev A., Lysova N., and Fomina E. *Mathematical modeling of physical performance of cosmonauts on ISS – a step towards the system of countermeasures to negative effects of microgravity in missions to Moon and Mars.* Book of Abstracts of the 22nd IAA Humans in Space Symposium, 2019. P. 17.

[4] Fomina, E.V., Grushevskaya, U.A., Lysova, N.Yu., Shatov, D.S.: *Optimization of training in weightlessness with respect to personal ...* In: School-Seminar on Optimization Problems and Their Applications (OPTA-SCL 2018) CEUR-WS, vol. 2098, pp. 134-140

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. А.В. Еремеев

МЕТОДЫ МОНТЕ-КАРЛО И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

УДК 519.24

Модель временных рядов индекса холодового стресса на метеостанциях в Арктической зоне России, построенная на основе стохастических генераторов погоды

М. С. Акентьева

Новосибирский государственный университет

В работе [1] был предложен итерационный алгоритм моделирования случайных векторов с заданными одномерными распределениями и корреляционной матрицей. В данной работе исследуются некоторые его свойства, в частности, зависимость точности воспроизведения корреляций от числа реализаций случайных векторов, используемых в алгоритме. Рассматриваются способы уменьшения трудоёмкости, например, возможность ускорения сходимости за счёт специального выбора начальных данных.

В качестве приложения построена численная стохастическая модель временных рядов индекса холодового стресса (биоклиматический индекс, использующейся для описания воздействия на организм человека низких температур воздуха и ветра в холодное время года) на метеостанциях в Арктической зоне России. Был использован подход, при котором сначала по данным многолетних наблюдений на рассматриваемых метеостанциях строится численная стохастическая модель временных рядов метеопараметров, определяющих этот индекс, а затем по полученным модельным траекториям строятся временные ряды индекса холодового стресса на основе соответствующих определяющих формул. Моделирование временных рядов метеопараметров осуществлялось вышеуказанным итерационным алгоритмом.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 21-71-00007, https://rscf.ru/project/21-71-00007/

[1] Zheng Z., Dai H., Wang Y., Wang W. A sample-based iterative scheme for simulating non-stationary non-Gaussian stochastic processes // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2021. – V. 151, 107420.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, В. А. Огородников

УДК 519.245

Случайный сферический процесс дрифта-диффузии в погранслое с большим числом Пекле

И. А. Аксюк

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет

Процесс дрифта-диффузии встречается во многих практических задачах, например, при расчете захвата малых частиц массивным телом, расчет емкости в электростатике, гидродинамического трения и скорости реакции макромолекул, и во многих других примерах.

Для решения уравнения дрифта-диффузи-реакций мы будем использовать метод Случайного Блуждания по Сферам, в обобщенном виде, предложенном в работе[1]. Траектории движения частиц здесь моделируются шаг за шагом, в последовательности специально моделируемых случайных сфер. При этом случайное распределение на поверхности сферы моделируется согласно распределению вероятностей фон Мизеса-Фишера. Главный интерес для нас представляет не само решение, а потоки частиц на границы области. При этом известной трудной проблемой для традиционных детерминированных методов является расчет профилей решения в погранслое при больших числах Пекле. Поэтому одной из центральных задач, которые решаются в данной работе, является применение алгоритма блуждания по сферам для расчета потоков в пограничном слое с большим числом Пекле. Для такой постановки задачи характерно преобладание дрифта над диффузией. Мы исследуем потоки при разных граничных условиях, и при различных источниках частиц. Мы продемонстрируем эффективность метода для расчета потоков вблизи границ при больших числах Пекле.

---

[1] Sabelfeld K.K. Random walk on spheres method for solving drift-diffusion problems. Monte Carlo Methods Appl. 2016; 22 (4): 265–281.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. К.К. Сабельфельд

УДК УДК 519.245

Арифметическая разрешимость моделей Эренфойтовых теорий с разрешимыми типами

В. Л. Брызгалов

Лицей № 130 города Новосибирска

В данной работе показано, что важные для практических вычислений объективные сведения о трудоемкости основных математических операций целесообразно получать с помощью применения соответствующих комбинаций с псевдослучайными числами. Это позволяет избежать не нужных в данном случае специальных модификаций расчетов, включенных в компиляторы различных языков программирования.

Был построен набор вероятностных плотностей, для которых формулы метода обратной функции распределения (см., например, [1]) содержат нужные математические операции. В свою очередь, затраты на применение этих формул измерялись с помощью специальной системы NMPUD (см., например, [2]), разработанной в лаборатории математического моделирования лицея № 130 города Новосибирска. Расчеты производились одновременно на нескольких персональных компьютерах.

В результате замеров выяснилось, что математические операции можно условно разделить на три группы по величине компьютерных затрат на них. В первую группу – с малыми затратами – входят сложение, умножение, деление и взятие квадратного корня. Во вторую группу – с умеренными затратами – входят вычисления значений тригонометрических функций (и обратных к ним) и логарифмов. В третью группу – с экстремально большими затратами – входят вычисления степенной и показательной функций.

[1] А. В. Войтишек. Лекции по численным методам Монте-Карло. – Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2018.

[2] D. A. Cherkashin, A. V. Voytishek. Using the inverse distribution function method and the modified superposition method in the NMPUD computational system// Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 2099, No. 012071.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. А. В. Войтишек

УДК 519.245

Решение нелинейной системы уравнений Бюргерса с помощью клеточных автоматов и глобального стохастического алгоритма блуждания

О. В. Бухашеев

Новосибирский государственный университет

Система уравнений Бюргерса представляет собой особую форму системы уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости без давления и уравнения неразрывности. Уравнения Бюргерса являются важными дифференциальными уравнениями в частных производных, широко используемыми для различных физических приложений, таких как моделирование гидро и газодинамики, транспортных потоков, ударных волн.

Постановка задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y}, \bar{x} \in D \times [0, t_{max}] \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D\Delta v - u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y}, \bar{x} \in D \times [0, t_{max}] \\ u(x, y, 0) = f(x, y) \\ v(x, y, 0) = g(x, y) \\ u|_{\partial D} = \varphi_1 \\ v|_{\partial D} = \varphi_2 \end{cases},$$

где D - ограниченная область с границей ∂D. Численные эксперименты проводятся на примере единичного квадрата. В данной работе для решения этой начально-краевой задачи применяется синхронная многочастичная клеточная автоматная модель и глобальный алгоритм случайного блуждания по сетке, который в отличие от других алгоритмов блуждания вычисляет решение в любом желаемом семействе n заданных точек. Система из уравнений Бюргерса является нелинейной, поэтому классические стохастические методы блуждания по сферам неприменимы к ней. Идея основана на итерационном по времени процессе нахождения решения системы с известным полем скорости, которое вычисляется из решения на предыдущем шаге. Синхронная многочастичная клеточная автоматная модель основана на известных клеточных автоматах дрейфа–диффузии–рекомбинации. Численные решения сравниваются с точным решением системы и между собой. Анализируются точность и компьютерное время обоих алгоритмов.

[1] Kireeva, A., Sabelfeld, K.K., Kireev, S. Parallel simulation of drift-diffusion-recombination by cellular automata and global random walk algorithm. J Supercomput 77, 6889–6903 (2021).

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. К. К. Сабельфельд

УДК УДК 519.245

Компьютерное моделирование случайных величин согласно кусочно-полиномиальным приближениям их плотностей распределения

М. Г. Гаджиахмедов

Новосибирский государственный университет

Для целого ряда практически значимых вероятностных распределений (например, для степенного распределения) соответствующие формулы и алгоритмы компьютерного моделирования выборочных значений (см., например, [1]) являются весьма трудоемкими. Для таких распределений весьма целесообразным может оказаться их замена на распределения с плотностями, пропорциональными кусочно-полиномиаль-ным приближениям исходной плотности, и с применением соответствующих вариантов модифицированного метода дискретной суперпозиции [1]. Именно из соображений реализуемости и экономичности метода суперпозиции следует вывод о нецелесообразности использования полиномов высокого порядка при приближении плотностей – достаточно ограничиться использованием кусочно-постоянного или кусочно-линейного приближений.

В данной работе на примере моделирования степенного распределения показано, что несмотря на то, что компьютерное моделирование кусочно-постоянного распределения экономичнее моделирования кусоч-но-линейного распределения, соображения о необходимой точности приближения исходной плотности говорят о приоритете использования именно кусочно-линейного приближения. При этом нами получены общие формы оценок сверху для соответствующих погрешностей приближений плотностей.

[1] А. В. Войтишек. Лекции по численным методам Монте-Карло. – Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2018.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. А. В. Войтишек

УДК 519.24

Условные численные стохастические модели периодически коррелированных гидрометеорологических процессов

Гао Ди

Новосибирский государственный университет

В работе описаны подходы к численному стохастическому моделированию условных гауссовских последовательностей применительно к периодически коррелированным гауссовским процессам [1]. Показано, что даже при фиксированных значениях в течение одного или нескольких периодов условные последовательности периодически коррелированными не являются. Исключение составляет специальный случай, когда матричная корреляционная функция $R_0, R_1, R_2, \ldots$ исходного периодически коррелированного процесса имеет вид $R_0, R_1, R_1, \ldots$ при специальных ограничениях на матрицу R_1. В этом случае условная ковариационная матрица является блочно-теплицевой, а условная последовательность является периодически коррелированной. Показано, что условные последовательности, построенные для периодически коррелированных гауссовских процессов асимптотически являются периодически коррелированными гауссовскими последовательностями при любых фиксированных значениях в начальных точках. На основе специальных матричных корреляционных функций периодически коррелированного процесса численно исследована скорость выхода векторного процесса на стационарный уровень.

Рассмотренные подходы используются для моделирования условных рядов температуры воздуха на основе данных многолетних наблюдений.

[1] Я.П. Драган, В.А. Рожков, И.Н. Яворский. Методы вероятностного анализа ритмики океанологических процессов. – Л.: Гидрометеоиздат. – 1987.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук В.А. Огородников

УДК 519.2

Моделирование двойного стохастического Пуассоновского процесса и приложения в анализе нейронных сигналов и корреляций дислокаций

С. П. Глазков

Новосибирский государственный университет

Естественные науки продолжают развиваться и изучать все более сложные физические, биологические и другие явления. Однако, их чрезвычайная сложность не позволяет ограничиваться натурными экспериментами. В таком случае, зная ключевые свойства данных явлений, их можно смоделировать, построив соответствующие математические модели, в частности, когда речь идет о случайном поведении, применимы методы Монте-Карло.

В данном докладе пойдет речь об исследовании работы нейронов. Науке известно, что нервная система человека использует электрические сигналы, подающиеся головным мозгом в каждую клетку. Но как именно информация передается через эти сигналы, как закодирована эта информация в них, остается загадкой. Тем не менее, известно, что сигналы имеют структуру точечных случайных процессов, в которых информация определяется не только средней частотой этих сигналов, но и корреляциями между различными последовательностями сигналов. Таким образом, моделирование нейронных сигналов представляет собой построение точечных процессов по заранее заданным среднему значению и корреляционной функции. Точечный процесс, используемый здесь - это двойной Пуассоновский процесс, то есть процесс Пуассона, у которого интенсивность сама является случайным процессом. В качестве интенсивности берется логнормальный случайный процесс, который при логарифмировании, как следует из названия, является Гауссовским. Чтобы численно смоделировать двойной Пуассоновский процесс с такой функцией интенсивности, воспользуемся алгоритмом "разрежения"(англ. thinning process [1]). Суть алгоритма заключаются в том, чтобы ограничить сверху интенсивность $\lambda(x)$ некоторой детерминированной мажорантой $\lambda^*(x)$, по которой строится точечный процесс $N^*(x)$, состоящий из точек $X_1^*, X_2^*, ..., X_n^*$. Далее, на каждом шаге цикла берем стандартное случайное число U_j, и проверяем неравенство $U_j \leq \lambda(X_j^*)/\lambda^*(X_j^*)$. В случае его выполнения X_j^* становится следующей точкой нового процесса $N(x)$. По итогу выполнения алгоритма получим смоделированный случайный процесс $N(x)$ с желаемой функцией интенсивности.

[1] Lewis P.A.W., Shedler G.S. Simulation of nonhomogeneous Poisson processes by thinning. Monterey, California / Naval Postgraduate School, 1979.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. К. К. Сабельфельд

УДК 519.245

Корреляция потока экситонов в случайном пьезоэлектрическом поле

И. В. Долганов

Новосибирский государственный университет

Настоящая работа посвящна численному исследованию корреляционной структуры потока экситонов, движущихся в случайном поле скоростей. Для решения этой задачи применяется метод стохастического моделирования траекторий экситонов, реализация которого осуществляется методом случайного блуждания по сферам. Алгоритм моделирования предложен в работе [1].

В данной работе этот метод я применяю для нахождения потоков в задаче дрейфа-диффузии-реакции, который является расширением алгоритма, разработанного для решения стационарных задач дрейфа диффузии. Именно в этой задаче он играет первостепенную роль. Метод может применяться и в других задачах, так как поток к границе появляется во множестве прикладных задач, например, при расчете захвата мелких частиц массивным кластером, емкости в электростатике, гидродинамическом трении и скорости реакции макромолекул с ограниченной диффузией и многих других.

Моделирование частиц происходит следующи образом: вычисляется положение координаты выхода на сферу экситона, которое имеет форму распределения фон Мизеса-Фишера. Поскольку задача нестационарная, вычисляется и случайное время выхода экситона на сферу и поглощение его внутри сферы, для этого применяется алгоритм Деврoя. Потоки на границу рассчитываются как для постоянного вектора скорости дрейфа, так и для случайно изменяющегося вектора скорости дрейфа. Затем методом двойной рандомизации вычисляется корреляционная функция потока от времени.

[1] K.K. Sabelfeld. Random walk on spheres algorithm for solving transient drift-diffusion-reaction problems. Monte Carlo Methods and Applications, 2017, vol.23, N 3, 189-212.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. К. К. Сабельфельд

УДК УДК 519.245

Сравнительный анализ основных компьютерных алгоритмов приближения плотности распределения случайной величины по заданной выборке

А. С. Дюбенкова

Новосибирский государственный университет

В данной работе, основанной на материалах диссертации [1] и сопутствующих статьях А. В. Войтишека и Т. Е. Булгаковой, показано, что подробно исследованный алгоритм построения многомерного аналога полигона частот является одновременно частным случаем как вычислительного ядерного алгоритма (для специальной, связанной с вычислительной сеткой, кусочно-постоянной ядерной функции), так и вычислительного проекционного алгоритма (для специальной, связанной с вычислительной сеткой, системы ортонормированных кусочно-постоянных вспомогательных функций) для компьютерного приближения неизвестной плотности распределения случайной величины по заданной выборке. Соображения теории условной оптимизации рассматриваемых функциональных алгоритмов, связанные с выбором количества узлов аппроксимационной сетки и необходимого подмножества выборочных значений для достижения заданного уровня погрешности за минимальное время вычислений, показывают целесообразность использования на практике именно этого частного случая – многомерного аналога полигона частот.

[1] Т. Е. Булгакова. Оптимизация функциональных вычислительных статистических оценок и алгоритмов. – Новосибирск, 2020 (Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук / ИВМиМГ СО РАН).

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. А. В. Войтишек

УДК 519.245

Минимизация функций и обработка изображений методами Метрополиса и имитации отжига

Цз. Ли

Новосибирский государственный университет

Для решения сложных задач глобальной оптимизации в последнее время разрабатываются новые эффективные алгоритмы на основе методов Монте-Карло на марковских цепях [1]. В частности, для байесовской реконструкции изображений и построения МАР-оценок в ядерной медицине применяются методы Метрополиса [2] и имитации отжига [3]. Реконструкция изображений в ядерной медицине сводится к минимизации функций многих переменных с многочисленными локальными минимумами. Стохастические алгоритмы оптимизации позволяют учитывать стохастическую природу шума и имеющуюся априорную информацию.

В работе на тестовых примерах изучаются особенности применения методов Метрополиса и имитации отжига для вычисления МАР-оценок и реконструкции изображений с пуассоновским шумом.

[1] G. Winkler. Image Analysis, Random Fields and Markov Chain Monte Carlo Methods. Berlin: Springer, 2003.

[2] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, E. Teller. Equation of state calculations by fast computing machines, Journal of Chemical Physics. 1953, 21 (6), 1087–1092.

[3] S. Kirkpartrick, C. D. Gelett, M. P. Vecchi. Optimization by simulated annealing, Science. 1983, 220 (1983), 621-630.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. С. М. Пригарин

УДК 519.245

Статистическое моделирование освещённости земной поверхности в условиях слоистой облачности

Ш. Ли

Новосибирский государственный университет

При распространении солнечного света в земной атмосфере существенную роль может играть эффект многократного «переотражения» излучения между атмосферной облачностью и земной поверхностью. Цель работы – исследование освещенности земной поверхности в условиях сплошной облачности. Освещенность вычисляется методом Монте-Карло. Для решения задачи большое число траекторий фотонов в системе «облачность – подстилающая поверхность» моделируется на компьютере. При этом с использованием известных стохастических алгоритмов имитируется свободный пробег и рассеяние фотонов в облачной среде, а также отражение на подстилающей поверхности (см., например, [1, 2, 3]). Представлены результаты вычислений освещённости подстилающей поверхности для различных толщин облачного слоя, зенитных углов солнца и альбедо подстилающей поверхности. Предполагалось, что подстилающая поверхность является ламбертовской. В качестве оптической модели слоистой облачности использовалась модель “OPAC Stratus continental” из [4].

[1] Г. И. Марчук, Г. А. Михайлов, М. А. Назаралиев, Р. А. Дарбинян, Б. А. Каргин, Б. С. Елепов. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. - Новосибирск: Наука. - 1976.

[2] Г. А. Михайлов, А. В. Войтишек. Численное статистическое моделирование (методы Монте-Карло). - М.: Издательский центр «Академия». - 2006.

[3] С. М. Пригарин Моделирование переноса оптического излучения методом Монте-Карло. - Lambert Academic Publishing. - 2019.

[4] M. Hess, P. Koepke, I. Schult. Optical properties of aerosols and clouds: the software package OPAC // Bull. Am. Met. Soc., V. 79 (1998), P. 831-844.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. С. М. Пригарин

УДК 519.245

Рандомизация вычислений в линейной алгебре: большие системы уравнений и приложения в методе фундаментальных решений.

В. Т. Наумов

Новосибирский государственный университет

Решение больших систем линейных алгебраических уравнений традиционными детерминированными, как прямыми, так и итерационными алгоритмами сопряжено с большими трудностями именно в силу высокой размерности задачи, которая в практических задачах может достигать многих миллионов. Например, в поисковом алгоритме Google PageRank размерность превосходит десятки миллиардов. Ясно, что скорость вычислений имеет здесь большое значение. В таких многомерных задачах методы Монте-Карло сравнительно выигрывают по скорости вычислений по сравнению с детерминированными алгоритмами.

В данном докладе будут рассмотрены алгоритмы для решения систем линейных алгебраических уравнений и подсчета итераций $A^k b$, где A - матрица большой размерности. Основная идея заключается в том, что мы сводим исходную задачу к новой, но уже со стохастической по столбцам матрицей и стохастическим вектором b. Пусть $b \in R^n$ стохастический вектор, $b \geq 0$, A — стохастическая по столбцам матрица $n \times n$, A_k обозначает k-ый столбец матрицы. Рассмотрим несмещенную оценку произведения Ab, $\xi = A_k$, где k - индекс, выбранный согласно распределению $p_i = b_i$, $i = 1, \cdots, n$. Из записи $Ab = \sum_{i=1}^{n} b_i A_i$ следует, что мы можем рассматривать столбцы матрицы как значения случайного вектора, а вектор b как плотность распределения этого вектора. В итоге получаем $Ab = E\xi = E\{A_k | p = b\}$. Эта процедура распространяется на итерацию любой степени. В работе проведена серия численных экспериметов по исследованию свойств данного алгоритма, предоженного в [1], изучено поведение погрешности и трудоемкости алгоритма для матриц различной структуры. Алгоритмы имплементированы и исследованы также в приложении к методу фундаментальных решений для уравнений Лапласа и дрифта-диффузии-реакций.

[1] K. Sabelfeld, A new randomized vector algorithm for iterative solution of large linear systems, Applied Mathematics Letters, 2021, vol. 126, article 107830

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. К. К. Сабельфельд.

УДК 551.5

Динамико-стохастическом подход решения задачи усвоения данных для глобальной модели переноса-диффузии парниковых газов

М. В. Платонова

Новосибирский государственный университет

Под усвоением данных понимают совместное использование математической модели и данных наблюдений для получения оптимальной оценки системы[1]. С помощью математической модели системы рассчитывают некоторый прогноз (предполагаемое значение системы)[2]. В качестве наблюдений используют данные измерительных приборов. Фильтр Калмана является одним из основных методов динамико-стохастического подхода усвоения данных, фильтр Калмана – подход, при котором оптимальная оценка достигается при минимуме матрицы ковариаций ошибок.[3]

В данной работе рассматривалась задача усвоения данных для модели переноса и диффузии в атмосфере. Были проведены эксперименты с модельными данными для шага анализа алгоритма усвоения данных. Для шага прогноза использовались результаты расчетов трехмерной модели переноса и диффузии. В качестве данных наблюдений на этапе анализа использовались данные со спутника (содержится информация обо всех основных парниковых газов, включая двуокись углерода, окись углерода, метан и озон).

[1] Evensen, G. Data assimilation. The ensemble Kalman filter. Berlin Heideberg: Spriger-Verlag, 2009.307 p.

[2] Klimova E.G. Methods of estimation of greenhouse gases concentration in the atmosphere using observations and transport and diffusion model, based on the ensemble Kalman filter // All-Russian Conference "Spatial Data Processing for Monitoring of Natural and Anthropogenic Processes, SDM 2017; Novosibirsk; Russian Federation; 29 August 2017-31 August 2017; - Volume 2033, 2017, з 191-1952017.

[3] Klimova E.G. Application of ensemble Kalman filter in environment data assimilation // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. – Vol. 211 (2018) 012049 . – doi:10.1088/1755-1315/211/1/012049.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, доц. Е. Г. Климова

УДК УДК 519.245

Преобразования спектральных компьютерных моделей гауссовских случайных процессов и полей

И. А. Рыжов, И. А. Трофимов

Лицей № 130 города Новосибирска

В данной работе исследованы преобразования гауссовских спектральных компьютерных моделей стационарных в широком смысле случайных функций. Исследуемые преобразования могут быть использованы, в частности, при построении стохастической тестовой системы функций для получения определенного «разнообразия» этих функций, а также для построения случайных двумерных областей (см., например, [1, 2]).

Известно (см., например, [2]), что спектральные модели случайных процессов и полей строятся на основе использования интегральных сумм для спектральных представлений однородных случайных функций. В этих суммах моделируемые слагаемые являются независимыми, что, в силу центральной предельной теоремы, позволяет моделировать только гауссовские случайные процессы и поля.

Для получения негауссовских случайных функций можно, как предложено в работах [1, 2], использовать преобразования компьютерных моделей гауссовских полей. В данной работе показано, какие типы траекторий можно получать с помощью таких преобразований.

Полученные в ходе исследования иллюстративные материалы будут использованы, наряду с компьютерной системой NMPUD [3], при разработке электронного учебника по методам Монте-Карло.

---

[1] А. В. Войтишек, Е. Г. Каблукова, Т. Е. Булгакова. Использование спектральных моделей случайных полей при исследовании алгоритмов численного интегрирования // Вычислительные технологии. – 2004. – Т. 9, специальный выпуск «Избранные доклады VII международного семинара-совещания ‘Кубатурные формулы и их приложения’, Красноярск, август 2003 г.». – С. 50–61.

[2] А. В. Войтишек. Функциональные оценки метода Монте-Карло. – Новосибирск: НГУ, 2007.

[3] И. А. Рыжов, И. А. Трофимов. Исследование экономичности алгоритмов моделирования случайных величин с помощью компьютерной системы NMPUD. // Материалы 59-й Международной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». Математика. – Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2021. – С. 126.

D. A. Cherkashin, A. V. Voytishek. Using the inverse distribution function method and the modified superposition method in the NMPUD computational system// Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 2099, No. 012071.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. А. В. Войтишек

УДК 519.245

Моделирование временной и пространственной структуры радиационных излучений экситонов с учетом многократных рекомбинаций.

В. А. Сапожников

Новосибирский государственный университет

Работа посвящена численному моделированию транспорта экситонов (экситон - квазичастица, описывающая связанную пару электрон-дырка) в полупроводниковых материалах с учетом многократных рекомбинаций экситон-фотон-экситон. Исследуется модель движения экситонов в тонком слое полупроводника с учётом рекомбинаций двух типов: экситон- фотон и фотон-экситон, происходящих в кристаллической решетке материала. Движение экситонов, описываемое уравнением дрифта- диффузии-рекомбинаций, моделируется методом блужданий по малым сферам [1]. Для моделирования траекторий фотонов используется интегро-дифференциальное уравнение радиационного переноса [2]. Связывая уравнения дрифта-диффузии-рекомбинаций и переноса фотонов добавлением рекомбинационных членов, составляется система уравнений, описывающая модель с учётом многократных рекомбинаций. Построенная стохастическая модель реализована, и проводится анализ полученной модели на основании численного моделирования в тонком слое полупроводника. Модель допускает учет дислокаций и других дефектов в кристаллической решетке. На траекториях экситонов и фотонов вычисляются различные функционалы, такие как поток фотонов и экситонов на границу слоя, а также интенсивность катодолюминесценции, которая используется для визуализации дислокаций в кристаллах. Дополнительные исследования уделены моделированию точки случайного распределения экситона на поверхности сферы при выходе из нецентральной точки шара, что позволяет повысить эффективность метода в задачах с частичным отражением экситонов на границе слоя.

---

[1] K.K. Sabelfeld. Random walk on spheres algorithm for solving transient drift-diffusion-reaction problems. Monte Carlo Methods and Applications, 2017, vol.23, N 3, 189-212

[2] Метод Монте-Карло в атмосферной оптике Г. И. Марчук, Г. А. Михайлов, М. А. Назаралиев и др. ; Под общ. ред. акад. Г. И. Марчука ; АН СССР. Сиб. отд-ние. Вычислит. центр. - Новосибирск : Наука. Сиб.отд-ние, 1976. - 283 с.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. К. К. Сабельфельд

УДК УДК 51.72

О применении различных версий двустороннего метода исключения для компьютерного моделирования степенного распределения

С. Д. Хоснутдинова

Новосибирский государственный университет и
ФГБУ «НМИЦ им. ак. Е.Н. Мешалкина» Минздрава России

Рак предстательной железы (РПЖ) – это злокачественное новообразование, развивающееся из эпителия протоков и желез предстательной железы. Одним из радикальных методов лечения рака простаты является дистанционная лучевая терапия (ДЛТ). При создании оптимального дозового распределения в лечении РПЖ методом ДЛТ предпочтительна методика 3D-планирования. Такая методика осуществляется в системах дозиметрического планирования (СДП). СДП – это программное обеспечение, позволяющее моделировать распределения дозы облучения внутри тела пациента. Алгоритмы оптимизации в СДП позволяют рассчитывать требуемую дозу, в соответствии клиническими ограничениями.

Цель исследования: оценка влияния изменений параметров оптимизации Grid Spacing и Beamlet Width в СДП Monaco при 3D-планировании ДЛТ пациентов с РПЖ. Задачи исследования: 1) формирование группы пациентов с РПЖ; 2) расчет планов лучевой терапии в системе планирования Monaco; 3) изучение изменений критериев Grid Spacing и Beamlet Width; 4) сравнение и анализ изменений параметров оптимизации.

Материалы и методы: В исследование было включено 5 пациентов со злокачественным новообразованием предстательной железы. Для экспериментальной работы использовалась система планирования Monaco версии 3.20.02., алгоритм расчета дозы, в которой основан на методе Монте-Карло. Планировалось рассчитать 20 планов лечения методикой объемно-модулированной дуговой терапией (VMAT) с различным и показателями параметров оптимизации Grid Spacing и Beamlet Width (2x2, 2x3, 3x2, 3x3 cm). Результаты: 1) было рассчитано 20 дозиметрических планов (4 плана для каждого пациента); 2) предварительный анализ показал, что параметр Beamlet Width оказывает большое влияние на качество плана (по таким параметрам, как покрытие мишени и гомогенности), чем Grid Spacing.

Вывод: Изменение параметров оптимизации влияет не только на качество плана, но также оказывает влияние на время работы. Дополнительный анализ данных позволяет определить оптимальные значения параметров в планирующей системе на основании индексов гомогенности и конформности.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук В.Е. Блинов, О.А.Пашковская

УДК УДК 519.245

О применении различных версий двустороннего метода исключения для компьютерного моделирования степенного распределения

Д. А. Черкашин

Лицей № 130 города Новосибирска

Проведенные нами исследования с помощью компьютерной системы NMPUD [1] показали, что для ряда важных для приложений вероятностных распределений моделирующие формулы метода обратной функции распределения [2] могут оказаться весьма трудоемкими. К таким распределениям относится степенное распределение с параметром s и с плотностью

$$f_\xi(u) = (s+1)u^s;\;\; 0 < u < 1,\;\; s > 0. \tag{1}$$

В данной работе исследована возможность применения двустороннего метода исключения [2] с кусочно-постоянными мажорантой и минорантой (на сетке с количеством узлов M) и его аналога – алгоритма Ziggurat [3] – для экономичного моделирования степенного распределения (1).

Особое внимание в проведенном исследовании занимала проблема приравнивания вероятностей, важной для убыстрения реализации модифицированного метода суперпозиции [2] при моделировании вспомогательного выборочного значения согласно плотности, пропорциональной кусочно-постоянной мажоранте. Предложен приближенный алгоритм построения соответствующей неравномерной сетки, особенно эффективный при достаточно больших значениях параметров s и M.

[1] D. A. Cherkashin, A. V. Voytishek. Using the inverse distribution function method and the modified superposition method in the NMPUD computational system // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 2099, No. 012071.

[2] А. В. Войтишек. Лекции по численным методам Монте-Карло. – Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2018.

[3] G. Marsaglia, W. W. Tsang. The ziggurat method for generating random variables // Journal of Statistical Software. – 2000. – Vol. 5. – Issue 8.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. А. В. Войтишек

УДК 519.245

Моделирование изображений позитронно-эмиссионной томографии методом Монте-Карло

С. Чжан

Новосибирский государственный университет

Работа посвящена статистическому моделированию сигналов ПЭТ-ска-нера. ПЭТ (позитронно-эмиссионная томография) — это диагностический метод ядерной медицины, в котором получают изображение внутренних органов человеческого тела на основе сложного компьютерного алгоритма реконструкции. Позитронно-эмиссионный томограф состоит из неподвижного кольца детекторов и подвижного стола, на котором размещается пациент с радиофармпрепаратом. Перед тем, как гамма-квант попадёт в детектор ПЭТ-сканера, он может испытать взаимодействие с окружающей средой. Выделяют следующие основные типы взаимодействия фотонов с веществом [1]: фотоэлектрический эффект, комптоновское (некогерентное) рассеяние, рэлеевское (когерентное) рассеяние, образование электронно-позитронных пар и фотоядерные реакции. Основным процессом в ПЭТ является комптоновское рассеяние. При этом особый интерес представляет исследование влияния многократного комптоновского рассеяния на результаты ПЭТ. Для вычисления сигналов, регистрируемых детекторами ПЭТ-сканера, используется метод Монте-Карло и локальные оценки [2, 3]. В работе представлены результаты моделирования для тестовых фантомов и проведен анализ влияния многократного комптоновского рассеяния.

[1] В.А. Климанов. Физика ядерной медицины. Часть 1. М.: НИЯУ МИФИ, 2012.

[2] Г. А. Михайлов, А. В. Войтишек. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Академия, 2006.

[3] С. М. Ермаков, Г. А. Михайлов. Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. С. М. Пригарин

УДК 51-76

Исследование динамики границ органов в живых системах по данным МРТ

А. Р. Акулова, М. С. Котенева, В. Ю. Ноговищева

Новосибирский государственный университет

Одна из приоритетных задач современной науки – это изучение динамики границ органов в живых системах для диагностики аномалий развития. Это комплексная задача, включающая в себя медицинские аспекты и моделирование в терминах механики сплошной среды и уравнений математической физики. В таких исследованиях, особенно при диагностике мозга плода человека, используют два основных метода: УЗИ и МРТ. Сегодня МРТ является наиболее точным и информативным способом диагностики. Вместе с тем существуют факторы, ограничивающие разрешение получаемого МРТ изображения. Для того чтобы уменьшить влияние таких артефактов, разрабатываются алгоритмы для получения изотропного изображения с высоким пространственным разрешением. В настоящее время существует большое число алгоритмов, которые в той или иной мере решают эту задачу. Некоторые из них основаны на алгоритмах автоматической сегментации органа, по которому ведётся восстановление изотропного изображения. Основной целью данной работы является дообучение нейронной сети, которая выполняет автоматическую сегментацию мозга плода. Получены следующие результаты:

1. Обработан уникальный набор данных для дообучения нейронной сети, основанный на базе МРТ-снимков МТЦ СО РАН, включающий в себя 4569 изображений мозга плода. Единица такого массива включает в себя триплет изображений: само МРТ-изображение и две битовые маски - локализация и сегментация головного мозга плода.

2. Дообучена сверточная нейронная сеть для автоматической сегментации головного мозга плода, основанная на архитектуре P-Net для 2D-изображений. Улучшена автоматическая сегментация на изображениях, где присутствуют движение плода или артефакты съемки.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. А. П. Чупахин

УДК УДК 532

Исследование стабильности аттракторов в нелинейном режиме для внутренних волн

Е. В. Замараева

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет

Данная работа посвящена исследованию внутренних волн, генерируемых в океане при взаимодействии приливных течений с подводными горными хребтами. В замкнутой системе, когда имеют место два параллельных горных хребта, как например в Лусонском проливе, внутренние волны могут отражаться от поверхностей, и в силу дисперсионного соотношения, фокусировать энергию на т.н. аттракторе [1]. Целью данной работы является экспериментальное исследование нелинейных эффектов, возникающих при образовании аттрактора. Эксперименты были выполнены на установке в Институте Гидродинамики, представляющей из себя резервуар из оргстекла с наклонными стенками по бокам и совершающей колебания пластиной - генератором волн -, разделяющей резервуар на две равные части. Для визуализации волн использовался синтетический шлирен-метод. Анализ данных производился с помощью приложения PIVLab в среде Matlab. Исследовано возникновение триадного резонанса при различных амплитудах колебания генератора посредством построения частотно-временных характеристик, а также его влияние на разрушение аттрактора. Вычислен энергетический спектр для волн в системе при разных амплитудах колебания. Показано, что при больших амплитудах возникает волновая турбулентность, а на умеренных амплитудах наблюдается особый переходный режим с преобладанием стоячих волн.

Научный руководитель – к.ф.-м.н., Н.Д. Шмакова

УДК 532.135

Нестационарные течения Пуазейля в вязкоупругой жидкости Максвелла с двумя временами релаксации

С. Р. Кармушин

Новосибирский государственный университет

Одной из характерных особенностей движения вязкоупругих сред, привлекающих внимание исследователей, является аномальное поведение жидкости при определенных параметрах течения. Ярким проявлением развития неустойчивости потока является эффект сдвигового расслоения (shear banding), когда в течении неньютоновской жидкости возникает конечное число однонаправленных слоев, отличающихся скоростью сдвига. Это явление охватывает широкий класс течений, характеризующихся возникновением внутренних разрывов и, в конечном итоге, приводит к резкому уменьшению сопротивления при транспортировке вязкоупругих жидкостей в каналах и трубах.

В работе [1] предложена и проанализирована нелинейная гиперболическая модель Джонсона–Сигалмана–Олдройда с двумя временами релаксации (JSO2), особенностью которой является немонотонная зависимость напряжения сдвига от скорости деформации. Модель позволяет рассматривать описанные выше неустойчивости в течении жидкости. В работе [2] исследовано течение Куэтта в рамках модели JSO2 и построена численная модель для расчета нестационарных решений с учетом сдвигового расслоения потока.

В данной работе рассмотрены одномерные нестационарные течения несжимаемой вязкоупругой жидкости между параллельными пластинами и в трубе (течение Пуазейля) в рамках модели JSO2. Проведены нестационарные расчеты различных режимов течения, продемонстрировано возникновение внутренних линий скольжения при увеличении скорости потока (shear banding). Построены стационарные решения и исследована их структура. Показано, что стационарные решения с внутренними линиями скольжения могут быть получены как численный предел нестационарных течений. На основе нестационарных расчетов построены диаграммы зависимости напряжения сдвига от скорости для течений Куэтта и Пуазейля. Проанализировано явление гистерезиса при циклическом изменении скорости потока.

---

[1] D. S. Malkus, J. A. Nohel, B. J. Plohr Analysis of new phenomena in shear flow of non-newtonian fluids // SIAM J. Appl. Math. 1991. V. 51, N 4. P. 899–929

[2] В. Ю. Ляпидевский Течение Куэтта вязкоупругой среды максвелловского типа с двумя временами релаксации // // Тр. МИАН. 2018. Т. 300. С. 146–157

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. В. Ю. Ляпидевский, д-р физ.-мат. наук, проф. РАН С. В. Головин

УДК 51-76

Математическое моделирование гемодинамики в бифуркации аорты при наличии аневризмы

Л. Р. Мержоева

Новосибирский государственный национальный исследовательский университет

Аневризма брюшного отдела аорты является опасной и распространенной аномалией сосудистой системы. Её образование ведёт к нарушению нормального режима кровотока, дегенеративные изменения состава и структуры стенок могут привести к ее разрыву [1]. С точки зрения гидродинамики бифуркация аорты при наличии аневризмы представляет собой сложную систему, элементы которой связаны между собой и оказывают влияние друг на друга. Описание течения жидкости в бифуркации является актуальной задачей и предметом многих исследований [2].

Целью данной работы является изучение гемодинамических свойств моделей бифуркации аорты при наличии и отсутствии аневризмы на участке материнского сосуда. Расчеты проводятся с использованием пакета ANSYS 17.2, исследуются стационарная и нестационарная задачи для идеализированной конфигурации.

Согласно результатам расчета, было обнаружено убывание значений функции вязкой диссипации при увеличении объема, увеличение значений при возрастании скорости потока на входе. Влияние геометрии на функции диссипации проявилось менее однозначным образом. Было обнаружено влияние наличия аневризмы на гидродинамические свойства конфигураций вверх по потоку.

[1] E. Vignali, E. Gasparotti, S. Celi, S. Avril. Fully-Coupled FSI Computational Analyses in the Ascending Thoracic Aorta Using Patient-Specific Conditions and Anisotropic Material Properties// Frontiers in Physiology, 2021.

[2] P. Correa, J. R. Mac Intvre, J. M. Comba, M. A. Cachile, J. P. Hulin, H. Auradou.Three-dimensional flow structures in X-shaped junctions: Effect of the Reynolds number and crossing angle// Phys. Fluids 31, 2019.

[3] Ю. О. Куянова, С. С. Пресняков, А. В. Дубовой, А. П. Чупахин, Д. В. Паршин. Численное исследование гидродинамики тройника в модельной задаче об опти-мизации угла установки низкопоточного сосудистого анастомоза// ПМТФ, Т. 6, 2019.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. А. П. Чупахин

УДК 532.5

Динамика тонкого жидкого слоя в следе за ударом упругим телом с учетом гравитации

К. Е. Найденова

Алтайский государственный университет

Исследуется нестационарная двумерная задача о динамике тонкого слоя жидкости в следе за ударом упругим телом. Нестационарный поток в слой жидкости и его толщина на входе являются заданными параметрами и, в целом, могут иметь вид численных массивов, вычисленных при анализе удара упругого тела. Упругое тело движется вправо, проникая в слой жидкости, который не ограничен по горизонтальной переменной [1]. Отношение вертикальной и горизонтальной начальных скоростей удара считается малым параметром. Динамика жидкого слоя в следе за ударом описывается системой уравнений Навье-Стокса, для упрощения которых вводятся безразмерные переменные и функции. Решение системы находится методом разложения искомых функций по малому параметру. Параметры течения на входе в слой жидкости таковы, что в главном приближении течение является инерционным и важным является только эффект гравитации, а поверхностное натяжение и вязкость жидкости пренебрежимо малы. Выведены аналитические формулы для формы свободной поверхности, давления и скорости движения жидкости в следе в главном и первом приближениях. Предполагается, что поток жидкости на входе в слой ускоряется. Такие начальные условия приводят к неограниченному росту толщины слоя жидкости в определенном месте в следе и в определенный момент времени в главном приближении. Данная проблема решается введением струи в месте роста толщины, положение которого определяется методом характеристик. Полученные численные результаты сравниваются с результатами для динамики тонкого жидкого слоя без гравитации. Данное исследование мотивировано экспериментами по осаждению капель в кольцевом газожидкостном потоке [2]. Исследование динамики тонкого слоя жидкости в главном приближении без учета гравитации проведено в [3].

---

[1] T.I. Khabakhpasheva, A.A. Korobkin. Oblique elastic plate impact on thin liquid layer // Physics of Fluids. 2020. V.32(6), 062101.

[2] A.V. Cherdantsev, D.B. Hann, B.N. Hewakandamby, B.J. Azzopardi. Study of the impacts of droplets deposited from the gas core onto a gas-sheared liquid film // International Journal of Multiphase Flow. 2017. V.88. pp.69–86.

[3] K.A. Shishmarev, T.I. Khabakhpasheva, A.A. Korobkin. Free-surface flow behind elastic plate impacting on a thin liquid layer // Journal of Physics: Conference Series "Lavrentyev Readings on Mathematics, Mechanics and Physics"2020. 012059.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, К. А. Шишмарев

УДК 533

Структура детонационного углерода продуктов детонации бензотрифуроксана с горючими и инертными добавками

Г. К. Образцов

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет(НГУ)

Проблема изучения деталей механизма кинетики химической реакции и формирования конденсированной фазы углерода в ходе детонации взрывчатых веществ изучается уже много лет. Было предложено множество моделей формирования углеродных частиц, в том числе алмазной фазы. При этом определяющие механизмы у разных авторов могут сильно отличаться. Поэтому представляет интерес экспериментальное исследование. Особенно любопытны смеси на основе бензотрифуроксана - безводородной взрывчатки, для которой характерны более крупные частицы алмаза в продуктах детонации. Опыты со смесью на основе БТФ могут помочь углубить представление о механизме формирования углеродных структур в ходе детонации.

В данной работе с помощью электронного просвечивающего микроскопа были получены изображения сохраненных продуктов детонации углерода смеси бензотрифуроксан/гексоген 50/50, перемешанных на микронном уровне, а также бензотрифуроксана с добавлением стеариновой кислоты в соотношении 80/20 и приведена интерпретация полученных данных.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Э. Р. Прууэл

УДК 532.5

Экспериментальное исследование аттракторов внутренних волн, генерируемых угловыми колебаниями пластины в линейно стратифицированной жидкости

Я. Е. Рудая

Новосибирский государственный университет

Исследование внутренних волн имеет множество приложений в геофизике и климатологии [1]. Внутренние волны в океане возникают в стратифицированной жидкости при взаимодействии приливных течений с рельефом океанического дна. В лабораторных экспериментов часто рассматривается система отсчета, связанная с приливным течением, т.е. жидкость находится в покое, а колебания осуществляет погруженное в жидкость тело. Дисперсионное соотношение для таких волн имеет вид

$$\frac{\omega}{N} = sin\theta, \tag{1}$$

где ω - частота колебания, N - частота плавучести, θ – угол распространения волны с горизонталью.

Из дисперсионного соотношения (1) следует специфический закон отражения волновых лучей от наклонной стенки: падающая и отраженная волны распространяются под одним и тем же углом к вектору силы тяжести, что приводит к фокусировке волновой энергии. При определенном сочетании геометрии области и угла распространения волновых лучей фокусировка может привести к концентрации энергии волн вблизи замкнутых геометрических конфигураций, называемых волновыми аттракторами [2].

Целью работы является экспериментальное исследование квази-двумерных аттракторов $(1, 1)$ внутренних волн, генерируемых угловыми колебаниями пластины. Экспериментальная установка представляет собой резервуар из оргстекла длиной 110 см, шириной 23 см и глубиной 50 см, с наклонненными под углом $32°$ боковыми стенками и помещенной в центре пластиной, совершающей колебания с определенными амплитудой и частотой. Т.о. колебания пластины в однородно–стратифицированной жидкости генерируют два симметричных волновых аттрактора. Для визуализации течения используется синтетический шлирен-метод. Рассмотрено влияние амплитуды колебаний на структуру волнового аттрактора. Показано, что при умеренной амплитуде колебаний развивается триадный резонанс. С увеличением амплитуды колебаний наблюдается волновая турбулентность. При достаточно большой амплитуде колебаний также возникают вторичные короткие волны на частоте возмущения, с групповой скоростью противоположно направленной групповой скорости основной волны. Датчик силы, закрепленный на пластине позволяет напрямую измерить работу, совершаемую в системе. Проведено сравнение данных с датчика с энергией, вычисленной из экспериментальных данных. Планируется сравнение экспериментальных данных с численными расчетами.

---

[1] Ferrari, R. What goes down must come up // Nature. – 2014. – 513. – 179–180.

[2] Maas, L. R. M., Benielli, D., Sommeria, J., Lam, F.-P. A. Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid // Nature. – 1997. – 388. – 557–561.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук Е. В. Ерманюк

УДК 534.121.1 + 532.3 + 517.95

Движение подводного тела вдоль замороженного канала с линейно изменяющейся толщиной льда

Т. А. Сибирякова

Алтайский государственный университет

Рассматриваются гидроупругие волны, создаваемые подводным телом, движущимся вдоль замороженного канала прямоугольного сечения конечной глубины и конечной ширины. Лед моделируется тонкой упругой пластиной с изменяющейся толщиной поперек канала и постоянной толщиной вдоль канала, а края ее приморожены к стенкам. Прогиб ледового покрова описывается в рамках линейной теории упругости [1].

Рассматривается случай линейного изменения толщины ледового покрова, симметричного относительно центральной линии канала. Жидкость под пластиной невязкая и несжимаемая. Течение жидкости, вызванное прогибом пластины, является потенциальным. Движущееся подводное тело моделируется трехмерным диполем, который, двигаясь с постоянной скоростью в неограниченной жидкости, генерирует поток и давление, соответствующие жесткой сфере, движущейся с той же скоростью. Радиус сферы связан со скоростью диполя и его интенсивностью. Потенциал скорости диполя, помещенного в прямоугольный канал с жесткими стенками, определяется методом зеркальных отображений. Задача в изначальной постановке сформулирована с учетом нелинейных кинематического и динамического условий.

Введением малых параметров проведен асимптотический анализ уравнений в безразмерной форме и определны случаи, когда линейная теория остается корректной. Рассмотрен случай движения сферы малого радиуса. Определены прогибы и распределение деформаций в ледовом покрове. Задача с использованием преобразования Фурье вдоль канала и введения нормальных мод колебаний упругой балки с переменной толщиной решена в случае установившегося движения в системе координат, движущейся совместно с подводным телом. Исследована зависимость прогибов и удлинений от параметра изменения толщины ледового покрова.

Проведено сравнение с результатами для канала с постоянной толщиной льда [2]. Периодические гидроупругие волны, распространяющиеся вдоль канала с линейно изменяющейся толщиной, исследованы в [3].

[1] V. Squire, R. Hosking, A. Kerr, P. Langhorne. Moving loads on ice. Kluwer Academic Publishers, 1996. 230 p

[2] K. A. Shishmarev, T. A. Khabakhpasheva, A. A. Korobkin. Ice response to an underwater body moving in a frozen channel //Applied Ocean Research, 2019, V. 91, 101877.

[3] K. Shishmarev, K. Zavyalova, E. Batyaev, T. Khabakhpasheva. Hydroelastic Waves in a Frozen Channel with Non-Uniform Thickness of Ice // Water 2022, 14, 281.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доц. К. А. Шишмарев

УДК 519.622.2

Решение задачи о разлете газопылевого шара в вакуум как тест для численных моделей механики двухфазных сред

А. Н. Сусленкова

Новосибирский государственный университет
Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева СО РАН

В работе представлено аналитическое решение нелинейной задачи о сферически-симметричном разлете газопылевого шара в вакуум. В этой задаче динамика несущей и дисперсной фаз моделируется уравнениями невязкого сжимаемого газа, несущая и дисперсная фазы обмениваются импульсами, а твердые частицы не имеют собственного давления и являются монодисперсными.

Предположим, что в каждый момент времени плотность газа в газовом и плотность пыли в пылевом шаре однородны по пространству. При сделанном предположении рассматриваемая система уравнений в частных производных сводится к нелинейной системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка, которая не имеет аналитического представления решения в общем случае. Для нахождения численного решения система двух ОДУ преобразуется в эквивалентную систему четырех ОДУ первого порядка, которая решается явным методом Эйлера. Для удобства использования опубликован генератор эталонных решений, реализованный в среде Scilab [1].

Показана воспроизводимость этого решения при численных расчетах методом SPH-IDIC [2]. Решение может быть полезно для исследования точности, дисперсионных и диссипативных свойств численных методов механики двухазных сред.

Работа проведена за счет средств гранта РНФ 19-71-10026.

---

[1] https://github.com/MultiGrainSPH/OneDustBall_Scilab_OpenFPM

[2] O. P. Stoyanovskaya, V. V. Grigoryev, A. N. Suslenkova, M. N. Davydov and N. V. Snytnikov, Two-Phase Gas and Dust Free Expansion: Three-Dimensional Benchmark Problem for CFD Codes, https://doi.org/10.3390/fluids7020051

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, О. П. Стояновская

УДК 51-76

Гемодинамика бифуркационной аневризмы абдоминального отдела аорты

Д. В. Тихвинский

Новосибирский государственный университет

Бифуркационные аневризмы абдоминального отдела аорты являются широко распространенным заболеванием: от 1.5% до 5% людей старше 65 лет имеют данную патологию [1]. Целью данной работы является изучение гемодинамики при различных диаметрах аневризмы и выходящих из неё сосудов. По результатам исследования оказалось, что реальное распределение диаметров проксимального, по отношению к аневризме, отдела аорты и диаметров подвздошных артерий не соответствует закону Мюррея[2], который часто используется в литературе для предсказания таких диаметров диаметров: ${r_1}^\gamma = {r_2}^\gamma + {r_3}^\gamma$. Отличие составляет примерно 20% и является статистически значимым. Для численного моделирования были построены идеализированные геометрии абдоминального отдела аорты. По результатам расчетов, проведённых в пакете ANSYS 17.2, было обнаружено немонотонное поведение мощности вязкой диссипации в конфигурации при радиусе аневризмы равной примерно 4.5см, что соответствует предельной наблюдаемой в клинике величине аневризмы.

[1] Wanhainen A, et al., European Society for Vascular Surgery (ESVS) 2019 Clinical Practice Guidelines on the Management of Abdominal Aorto-iliac Artery Aneurysms, European Journal of Vascular and Endovascular Surgery (2018).

[2] Hari Hara Sudhan Lakshmanan, Joseph J. Shatzel, Sven R. Olson, Owen J.T. McCarty, Jeevan Maddala, Modeling the effect of blood vessel bifurcation ratio on occlusive thrombus formation, Comput Methods Biomech Biomed Engin. 2019 Au-gust ; 22(11): 972–980.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, Д.В.Паршин

УДК 533

Измерение скорости в быстропротекающих процессах методом, основанным на эффекте Доплера

А. С. Туманик

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ)

Для исследования быстропротекающих процессов, связанных со взрывом необходимы экспериментальные методики измерений с временным разрешением лучше одной микросекунды. Ярким примером такого процесса является детонация взрывчатого вещества (ВВ), скорость которой достигает нескольких километров в секунду. Этот факт накладывает серьезные требования на аппаратуру, с помощью которой можно изучать процесс. Помимо этого, при использовании ВВ в качестве ускорителя образца или при непосредственном изучении хода детонации ВВ измерительные устройства должны работать в экстремальных условиях (высокие температуры, ударные волны, световое излучение). Одним из подходов, удовлетворяющих указанным требованиям, является использование PDV (Photonic Doppler velocimetry) методики, которая основана на свойстве света изменять частоту при отражении от движущихся объектов (эффект Доплера).

Был проведен ряд экспериментов, в ходе которых с помощью ВВ была разогнана подложка с пылью из различных металлов. С помощью одновременного использования двух различных методик (PDV, скоростная рентгенография) были определены скорости исследуемых процессов. Полученные результаты были проанализированы, и на основе анализа была произведена взаимная калибровка двух методик.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, Э. Р. Прууэл

УДК 539.3

Реализация метода дискретных элементов для оценки упругих характеристик пористых материалов

В. Д. Чепеленкова

Новосибирский государственный университет

Метод дискретных элементов (DEM) основан на приближении сплошной среды частицами (элементами), воспринимаемыми как твёрдые тела с некоторым набором упругих характеристик. Поведение всей системы в таком случае описывается взаимодействиями этих частиц в точках контакта, подчиняющимися законам классической механики [1].

DEM имеет преимущество перед другими методами при моделировании сред с нарушениями сплошности (трещины, разломы и т. п.). Стандартные сеточные методы предполагают необходимость сгущения сетки в подобных областях, тогда как метод дискретных элементов является бессеточным и дополнительных изменений не требует.

Недостатком этого подхода является необходимость калибровки параметров модели на масштабе взаимодействия частиц для корректного описания механических свойств среды на макроуровне [2]. В частности, калибровочными экспериментами являются расчет угла естественного откоса для сыпучих сред и коэффициента Пуассона для упругих сред, которые известны для широкого класса материалов.

На основе метода дискретных элементов был разработан и программно реализован алгоритм численного моделирования геомеханических процессов в упругих и сыпучих средах, выполняемый на графическом процессоре с помощью архитектуры параллельных вычислений CUDA. Для полученной модели были проведены калибровочные тесты, в качестве которых были выбраны вычисление угла естественного откоса материала и определение его предела прочности при одноосном сжатии. Численные эксперименты проводились на кластере ЦКП ССКЦ ИВМиМГ СО РАН.

[1] Stefan Luding (2008) Introduction to discrete element methods, European Journal of Environmental and Civil Engineering, 12:7-8, 785-826, DOI: 10.1080/19648189.2008.9693050

[2] Yan, Z., Wilkinson, S.K., Stitt, E.H. et al. Discrete element modelling (DEM) input parameters: understanding their impact on model predictions using statistical analysis. Comp. Part. Mech. 2, 283–299 (2015). https://doi.org/10.1007/s40571-015-0056-5

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, В. В. Лисица

УДК 531.4

Моделирование скольжения лыжи по снежной поверхности

В. И. Шукало

Новосибирский государственный университет

Оптимизация лыжного скольжения является важной и нетривиальной задачей спорта высоких достижений на сегодняшний день. В работе приведен обзор характеристик лыж и скользящей лыжной поверхности, а также факторов, оказывающих влияние на скольжение, и существующих способов улучшения этих характеристик [1]. Разработана математическая модель, описывающая движение лыжи под действием силы действующей со стороны лыжника и силы трения. Модель в общем виде описывается уравнением:

$$m\ddot{x} = -k(\dot{x})F(t)\sin\alpha + F(t), \tag{1}$$

Здесь x - координата лыжи, m - масса лыжника, k - коэффициент трения, $F(t)$ - сила со стороны лыжника, - угол между палкой и плоскостью скольжения. Коэффициент трения учитывает трение скольжения, трение пропахивания, сухое трение, жидкостное трение, трение по причине капиллярного сцепления.

Для определения периодического закона для силы приложенной лыжником для продвижения, которой соответствует член F(t) в правой части уравнения данные взяты из реальных гонок чемпионата кубка мира 2020-2021, а также опираясь на литературные данные [2].

[1] Kuzmin, L.. Investigation of the most essential factors influencing ski glide. Licentiate, 2006 Luleå University of Technology.

[2] E.Müller, Science and skiing, E FN Spon, 1997

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, Д.В.Паршин

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

УДК 519.2

Принцип умеренно больших уклонений для независимых случайных величин в пространстве случайных величин с заданным сублинейным математическим ожиданием

Е. В. Ефремов

Новосибирский государственный университет

Рассматривается последовательность $\{X_n\}$ независимых случайных величин (определение см. в [1]) в пространстве случайных величин с заданным сублинейным математическим ожиданием $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ (определение см. в [2]). Предполагается, что

$$\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[-X_i] = 0, \quad i \in \mathbb{N},$$

$$\mathbb{E}[X_i^2] = \sigma_i^2,$$

$$\sigma^2 := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 > 0.$$

Также выполнено равномерное моментное условие

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[e^{q|X_i|^\alpha}] \leqslant M, \quad \text{для некоторых } q > 0,\ \alpha \in (0,1],\ M < \infty.$$

Пусть $x = x(n)$ последовательность такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x(n)}{\sqrt{n}} = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{2-\alpha}(n)}{n} = 0$. Обозначим $S_k := \sum\limits_{i=1}^{k} X_i, \quad k \in \mathbb{N}, \quad S_0 := 0.$

Теорема 7. *Последовательность с.в.*

$$s_n = \frac{S_n}{x(n)}$$

удовлетворяет п.у.б.у. (определение см. в [1]) в $\mathbb{R}$ с н.ф. $\psi(n) := \frac{x^2}{n}$ и ф.у.

$$I(y) := \frac{y^2}{2\sigma^2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Теорема 16 обобщает результат работы [1]

[1] Q. Q. Zhou, A. V. Logachov. Moderate deviations principle for independent random variables under sublinear expectations // Sib. Elektron. Math. Rep., 2021, v. 18. P. 817–826.

[2] S. G. Peng. Nonlinear expectations and stochastic calculus under uncertainty: Springer, 2019. 212 p.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доц. А. В. Логачёв

УДК 519.218.5

Жадное блуждание по целочисленным точкам прямой

Т. Р. Куснатдинов

Новосибирский государственный университет

В точки целочисленной прямой случайным образом помещаются частицы: частица помещается в точку $n \in \mathcal{Z}$ с вероятностью $p_n = \frac{C}{(1+|n|)^\alpha}$, где $C \in (0, 1]$ и $\alpha \geq 0$. Пылесос удаляет эти частички одну за одной в соответствии с "жадным" алгоритмом. Пылесос стартует в начале координат и уничтожает частицу, если она там есть. После уничтожения очередной частицы пылесос выбирает ближайшую точку, где есть частица, перемещается в неё и удаляет частицу. Если две ближайшие точки с частицами находятся на одинаковом расстоянии от пылесоса, слева и справа, то выбирается одна из них с равными вероятностями 1/2.

Пусть для удаления одной частицы требуется одна единица времени и пусть S_n – положение пылесоса после удаления n-ой по счёту частицы. Мы сначала рассматриваем случай $\alpha = 0$ и доказываем, что в этом случае

$$\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} S_n = \infty) = \mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty) = \frac{1}{2}, \tag{1}$$

то есть с равными вероятностями за бесконечное время либо удаляются все точки на правой полуоси и лишь конечное число точек на левой полуоси, либо наоборот.

Мы также находим распределения расстояния от начала координат до ближайшей неудалённой точки и количества удалённых точек на той полуоси, где удалены не все точки. Затем мы рассматриваем случай $\alpha > 0$ и показываем, что при разных α возможно одно из двух – либо удаляется приблизительно "половина" точек, либо все точки.

Научные руководители - д-р. физ.-мат. наук, С. Г. Фосс, П.И. Тесемников

УДК 519.2

Асимптотическая относительная эффективность статистических критериев проверки соответствия регрессионной модели

А. О. Мокроусова

Новосибирский государственный университет

В представленной работе построены два критерия согласия для проверки соответствия регрессионной модели. Впервые проведено сравнение критериев такого типа в смысле асимптотической относительной эффективности (АОЭ) по Питмену (см. [2], [3]).

Критерии проверяют основную гипотезу о линейности, непрерывности и постоянности регрессионной модели вида $Y_i = \theta X_i + \varepsilon_i$ или $Y_i = a + \theta X_i + \varepsilon_i$, где X_i и ε_i, $i = 1, \ldots, n$, образуют взаимно независимые последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин, против одной из четырех альтернатив, которые описывают различные нарушения основной гипотезы: скачок функции на константу, скачок на константу и изменение параметра регрессии (с нарушением непрерывности и без). Кроме того, последняя альтернатива рассматривает случай, когда зависимость изначально была не линейной, а выражалась степенной функцией. Статистиками критериев являются два функционала от эмпирического моста $Z_n^0(t)$, построенного по регрессионным остаткам и определенного в [1] . Первый функционал супремальный $\sup_{t\in[0,1]} \left|Z_n^0(t)\right|$, второй интегральный $\left|\int_0^1 Z_n^0(t)\,dt\right|$.

В результате исследования получена формула для вычисления АОЭ по Питмену для данных критериев и показано, что при равномерном на $[0,1]$ распределении X_i лучше использовать супремальный критерий.

[1] Ковалевский А.П., Шаталин Е.В., Асимптотика сумм остатков однопараметрической линейной регрессии, построенной по порядковым статистикам // Теория вероятностей и ее применения, 2014, том 59, выпуск 3, 452–467.

[2] Никитин Я.Ю., Асимптотическая эффективность непараметрических критериев // Наука, Физмалит, 1995.

[3] Wieand H.S., A condition under which the Pitman and Bahadur approaches to efficiency coincide // The Fnnals of Statistics, 1976, V.4, N. 5, 1003–1011.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, доц. А. П. Ковалевский

УДК 519.2

Вероятностный подход к игре в угадывание в случайной среде

И. А. Смирнов

Новосибирский государственный университет

Рассмотрим следующую игру: всего имеется n возможных вариантов ответа на некоторый вопрос. Первый игрок видит список из $k \ \ (1 < k < n)$ вопросов и должен угадать правильный вариант ответа. Предположим, что проводится серия таких игр, и каждый раз правильный вопрос выбирается случайно. Первый игрок знает вероятности $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_n$ каждого варианта ответа на этот вопрос быть верным. Второй игрок также знает вероятности для каждого варианта ответа быть правильным, кроме того, он знает правильный ответ на данный вопрос. Его задача — добавить к верному ответу $k-1$ неверный так, чтобы вероятность первого игрока угадать была наименьшей.

Требуется найти вероятность угадывания первым игроком правильного ответа в единичной игре и в бесконечной серии таких игр, а также указать стратегии достижения наилучшего результата для обоих игроков.

Классический подход к решению задачи заключается в формулировании ее в терминах теории игр. В результате получится матричная игра с нулевой суммой, и решение этой игры является решением задачи линейного программирования. Было доказано, что вид решения меняется в зависимости от значения вероятностей $r_1, \ldots, r_n$. Однако размерность матрицы выигрышей (вне зависимости от параметров) имеет скорость роста намного выше экспоненциальной (по количеству возможных вариантов ответа), что делает эту задачу не решаемой за приемлемое время на ЭВМ. Поэтому был разработан другой, вероятностный подход к решению задачи, позволяющий существенно снизить размерность системы уравнений.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, доц. А. П. Ковалевский

УДК 519.21

Об одной регенеративной структуре для случайного блуждания

Д. Ю. Цыбульский

Новосибирский государственный университет

Рассмотрим случайное блуждание $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, $n = 1, 2, \ldots$, где $\{\xi_i\}_{i\geq 1}$ – последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин. Будем считать, что $\mathbb{E}\xi_i > 0$.

Определим последовательность $\{T_i\}_{i\geq 0}$ целочисленных случайных величин по правилу

$$T_i = \begin{cases} 0, & i = 0; \\ \min\{n > T_{i-1} : S_k \geq S_n \text{ при } k > n,\ S_k < S_n \text{ при } k < n\}, & i \geq 1. \end{cases}$$

Так как $\mathbb{E}\xi_1 > 0$, то все случайные величины T_i конечны п.н.. Более того (см., напр., [1]), случайные элементы $\{(T_{i+1} - T_i, \xi_{T_i+1}, \ldots, \xi_{T_{i+1}})\}_i$ независимы при $i \geq 0$ и одинаково распределены при $i \geq 1$. Отсюда, в частности, следует, что независимы и одинаково распределены двумерные случайные векторы $\{(T_{i+1} - T_i, S_{T_{i+1}} - S_{T_i})\}_{i\geq 1}$. Можно заметить, что все случайное блуждание разбивается на эти «блоки», следовательно они описывают геометрические свойства S_n. Справедливо следующее утверждение (см. [1])

Теорема 1. Для любых $m, n, > 0$ существует событие $E_{m,n} \in \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ такое, что имеет место равенство

$$\mathbb{P}(T_1 = m,\ S_{T_1} = n | S_n \geq 0 \text{ при всех } n > 0) = \mathbb{P}(E_{m,n}),$$

где $\sigma(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ – сигма-алгебра, порождённая $\xi_1, \ldots, \xi_m$.

Это теорема примечательна тем, что мы можем найти распределение «блоков», не используя информацию о «будущем», хотя все T_i, $i \geq 1$ по определению зависят от будущего (т.е. не являются моментами остановки).

В нашей работе мы изучаем совместное распределение координат типичного блока на примере простого случайного блуждания.

[1] Sergey Foss, Stan Zachary. Stochastic sequences with a regenerative structure that may depend both on the future and on the past // Advances in Applied Probability, 2013, 45 (4), 1083-1110.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. С.Г. Фосс, П.И. Тесемников.

УДК 519.21

Об асимптотике вероятности невыхода неоднородного обобщенного процесса восстановления за невозрастающую границу

А. Д. Шелепова

Новосибирский государственный университет

Пусть $(X_1, v_1), (X_2, v_2), \ldots$ – бесконечная последовательность независимых пар случайных величин таких, что при всех $n = 1, 2, \ldots$

$$\mathbf{E}X_n = 0, \quad 0 < \sigma_n^2 := \mathbf{D}X_n < \infty, \quad v_n > 0 \quad \text{п.н.}, \quad \mathbf{E}{v_n}^{3/2} < \infty, \qquad (1)$$
$$S_n := X_1 + \ldots + X_n, \quad V_n := v_1 + \ldots + v_n \quad \text{и} \quad B_n^2 = \mathbf{D}S_n.$$

$(\mathbf{A})$ Величины $\{X_i\}$ удовлетворяют классическому условию Линдеберга, и при некоторых $c \in (0, \infty)$ и $q \in [1, 2]$ верно

$$A_n := \mathbf{E}V_n \sim c^2 B_n^2, \quad \sum\nolimits_{k=1}^{n} \mathbf{E}v_k^q \Big/ A_n^{q-1/2} \to 0, \quad \text{когда} \quad n \to \infty. \qquad (2)$$

$(\mathbf{G})$ функция $g(\cdot)$ – монотонно невозрастающая,

$$g(0) < 0 \quad \text{и} \quad g(t) = o(\sqrt{t}) \quad \text{при} \quad t \to \infty. \qquad (3)$$

При $t \geq 0$ построим $N(t) = \max\{k \geq 0 : V_k \leq t\}$ – неоднородный процесс восстановления и $S(t) = S_{N(t)}$ – обобщенный процесс восстановления. Введем случайную величину

$$\tau := \inf\big\{t > 0 : S(t) \leq g(t)\big\} \qquad (4)$$

равную первому моменту пересечения сверху вниз уровня $g(t)$ нашим обобщенным процессом восстановления $S(t)$. При $0 \leq T < \infty$ обозначим

$$n(T) := \max\{n > 0 : A_n \leq T\}, \quad U_n = \mathbf{E}[S_n - g(V_n); \tau > V_n]. \qquad (5)$$

Теорема 8. *Пусть выполнены условия* (1), *(A) и (G). Тогда*

$$B_{n(T)}\mathbf{P}(\tau > T) \sim \sqrt{2/\pi}\,U_{n(T)} \quad \textit{при} \quad T \to \infty. \qquad (6)$$

Кроме того, функция $U_{n(T)} \geq U_1 > 0$ монотонно не убывает и является медленно меняющейся в классическом смысле при $T \to \infty$.

[1] А.Д. Шелепова, А.И. Саханенко. Об асимптотике вероятности невыхода неоднородного обобщенного процесса восстановления за невозрастающую границу // Сибирские Электронные Математические Известия, 2021, Т.18, №2. P. 1667-1688.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. А. И. Саханенко

УДК 519.2

Центральная предельная терема для произведений частичных сумм независимых случайных величин

Н. Х. Шлымбетов

Новосибирский государственный университет

Пусть X – случайная величина, ее математическое ожидание обозначим через $\mathbf{E}X$, а дисперсию через $\mathbf{D}X$. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

В работе [1] доказана центральная предельная теорема для произведений частичных сумм независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных величин, имеющих экспоненциальное распределение.

В работе [2] обобщают этот результат на случай, произвольные н.о.р. положительные случайные величины.

В данной работе рассматривается случай, когда положительные случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимые и имеют, вообще говоря, разное распределение. Имеет место следующее утверждение:

Теорема 9. *Пусть случайные величины* $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *независимые в совокупности,* $\mathbf{E}X_i = \mu > 0, \sigma^2 = \mathbf{D}X_i$ *для всех* $i \in \mathbb{N}$ *и выполнено условие Ляпунова* $\exists \alpha > 0, C > 0 : \sup\limits_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{E}|X_i|^{2+\alpha} \leq C$*. Тогда*

$$\left(\frac{\prod\limits_{k=1}^{n} S_k}{n! \mu^n} \right)^{\frac{1}{\gamma\sqrt{n}}} \xrightarrow{d} e^{\sqrt{2}Y}, \text{ при } n \to \infty \tag{1}$$

где $S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k,\ k = 1, 2, \ldots, Y \sim N(0, 1), \gamma = \frac{\sigma}{\mu}$ *(коэффициент вариации).*

[1] Arnold B C, Villasenr J A. The asymptotic distribution of sums of records. // Extremes, 1998, 1: 351-363

[2] G. Rempala, J. Wesolowski. Asymptotics for products of sums and U-statistics. // Electronic Communications in Probability. v. 7, 2002, pp.47–54.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доц. А. В. Логачев

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

УДК 519.85

Алгоритм имитации отжига для упаковки прямоугольных предметов в параллельные полосы

А. А. Акимов

Новосибирский государственный университет

Имеется сервер облачного сервиса. На сервере расположено несколько ядер и ограниченное количество виртуальных машин, которые нужно разместить на параллельно стоящих ядрах так,чтобы сервер завершил работу за минимальное время. Виртуальные машины рассматриваются как прямоугольники. Высота такого прямоугольника равна времени работы виртуальной машины,а ширина прямоугольника - мощности соответствующей виртуальной машины. Ядра считаются параллельными полосами. Нужно минимизировать итоговую высоту этих полос, т.е.максимальную из высот сделать как можно меньше.

Для решения задачи разработан алгоритм имитации отжига, использующий для кодировки решений ориентированные деревья [1]. Кодировка упаковки в ориентированное дерево и декодировка обратно выполняется за полиномиальное время. Окрестности решений получаются путем перестановки листа или смены двух вершин, не являющихся листами, местами. Критерием остановки алгоритма имитации отжига является количество смен температуры без улучшения рекорда.

При каждой смене температуры применяется процедура уплотнения. Начальное решение строится с помощью NFDH. Алгоритм реализован на языке C++. Приводятся результаты расчетов на реальных данных компании Huawei и сравнение с генетическим алгоритмом, использующим skyline декодировку [2].

[1] Руднев А. С. Вероятностный поиск с запретами для задачи упаковки кругов и прямоугольников в полосу. Дискретный анализ и исследование операций. 2009. Т. 16, № 4. С. 61—86.

[2] I. Vasilyev, A.V. Ushakov, M.V. Barkova, D.Zhang, J. Ren, J. Chen Fast Heuristic Algorithms for the Multiple Strip Packing Problem. CCIS, 2021, vol. 1476, p. 284-297

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Ю. А. Кочетов

УДК 519.7

Применение эвристических методов для поиска булевых функций с высокими криптографическими характеристиками

Н.Д. Атутова

Новосибирский государственный университет
Лаборатория криптографии JetBrains Research

В основном успех криптоанализа достигается за счёт нахождения слабостей в математических свойствах булевых функций, описывающих компоненты шифра. Целью работы является построение булевых функций с высокими значениями нелинейности и алгебраической иммунности - характеристиками, повышающими стойкость к линейному и алгебраическому криптоанализу.

Нелинейность булевой функции f - расстояние Хэмминга от данной функции до множества всех аффинных функций [1]. *Алгебраическая иммунность* булевой функции f - минимальное число d такое, что существует булева функция g степени d не тождественно равная нулю, для которой выполняется равенство $fg = 0$ или $(f+1)g = 0$ [1].

Одним из перспективных способов построения булевых функций считается подход, использующий эвристические методы, в основе которых лежит структурированный перебор с параметрами для достижения желаемого результата.

В работе предложен и реализован комбинированный подход на основе генетического алгоритма и локального поиска (в частности, поиск восхождением к вершине) для построения булевых функций, экспериментально доказана его эффективность для малого числа переменных ($n \leq 8$) и в результате сравнительного анализа ряда известных вариаций мутации, скрещивания и отбора порождённых особей найдены самые эффективные модификации в рамках задачи. Вывод новых целевых функций позволил применить многокритериальную оптимизацию с добавлением других криптографических свойств. Для малого числа переменных ($n = 8$) удалось найти 2989 булевых функций с максимальной алгебраической иммунностью ($AI_f = 4$) и высоким значением нелинейности ($N_f = 114$) при теоретической оценке $N_f \leq 120$. Работа выполнена при поддержке лаборатории криптографии JetBrains Research.

[1] Токарева Н. Н. Симметричная криптография. Краткий курс: учебное пособие // Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2012.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук А.В. Куценко, канд. физ.-мат. наук. Н.Н. Токарева

УДК 519.8

Локальный поиск для задачи маршрутизации арендованного грузового транспорта

К. С. Байков

Новосибирский государственный университет

В работе рассматривается задача маршрутизации, возникающая при планировании акции по сбору вторсырья. Предполагается, что заданы временные интервалы, внутри которых вторсырье должно быть вывезено с пунктов сбора, а также конечный набор сценариев, определяющих ожидаемые объемы собираемого на каждом из пунктов вторсырья и реализующихся известное число раз в течение года. Для вывоза вторсырья на переработку используются арендованные грузовики различной вместимости. Стоимость аренды грузовика зависит от его типа и продолжительности аренды. Требуется построить общие для всех сценариев маршруты объезда пунктов сбора, а также определить тип грузовиков в каждом из сценариев, чтобы минимизировать суммарную годовую стоимость аренды.

Для решения задачи были разработаны различные модификации локального поиска, такие как имитация отжига, iterated local search и другие, а также различные эвристики для нахождения первого решения. Проведено сравнение их эффективности с решателем Gurobi. Сравнение проводилось на реальных данных, а так же на искусственных данных, демонстрирующих различные варианты расположения точек сбора. Тестирование показало что приближенные методы способны находить решение, близкое к оптимальному, причем значительно быстрее.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, А.А. Мельников

УДК 519.7

Об оценках числа бент-функций из некоторых подклассов, находящихся на определённых расстояниях от исходной

Д. А. Быков

Новосибирский государственный университет

Булевы функции от чётного числа переменных, чьё расстояние Хэмминга до множества всех афинных функций максимально, называются бент-функциями. К известным классам бент-функций от $2n$ переменных принадлежит конструкция Мэйорана–МакФарланда $\mathcal{M}_{2n}$ 1973 г., а также классы $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, введеные Карле в [1]. Возникает вопрос, сколько бент-функций гарантированно лежит на конкретном расстоянии от любой бент-функции из некоторого множества (или класса). Это полезно для понимания внутреннего устройства множества всех бент-функций, ведь в случае бент-функций сложно понять, как соотносятся разные их классы, и малоизвестны их метрические характеристики. В частности, в [2] получено точное число бент-функций из $\mathcal{M}_{2n}$, лежащих на минимально возможном расстоянии 2^n от бент-функций из того же класса $\mathcal{M}_{2n}$.

Класс $\mathcal{C}$ — функции вида $x \cdot \pi(y) \oplus \chi_{L^\perp}(x)$, где L — линейное подпространство $\mathbb{F}_2^n$ и π — любая подстановка на $\mathbb{F}_2^n$, такая что для любого $a \in \mathbb{F}_2^n$ $\pi^{-1}(a \oplus L)$ — афинное подпространство. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 10. *На расстоянии $2^{2n-1}+2^k(2^n-2w)$ от бент-функций из $\mathcal{C}$ от $2n$ переменных, таких что $\dim\, L^\perp = k$, лежит не менее $C_{2^n}^w(2^{n-k}-1)$ бент-функций из $\mathcal{M}_{2n}$, где $w \in \{0,1,\dots,2^n\}$ и $0 \le k < n$.*

Теорема 11. *На расстоянии 2^{2n-1} от бент-функций из $\mathcal{C}$ от $2n$ переменных лежит не менее $2^{2^n}(2^{n-1})!$ бент-функций из $\mathcal{M}_{2n}$.*

Также уточнен приведенный в [1] критерий, когда $f \oplus \chi_L$ — бент-функция, для случая $f \in \mathcal{M}_{2n}$ и разложимого в прямое произведение афинных подпространств L, $\dim L = n$. Это можно использовать для оценок числа бент-функций на минимальном расстоянии от такой исходной f. *Работа выполнена при поддержке лаборатории криптографии JetBrains Research.*

[1] Carlet C. Two new classes of bent functions. // LNCS 765, 1994, 77–101.

[2] Kolomeec, N. The graph of minimal distances of bent functions and its properties. // Des. Codes Cryptogr. 85, 2017, 395–410.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Н. А. Коломеец

УДК 519.7

Алгоритмы отыскания трансверсалей в латинских гиперкубах фиксированного порядка

С. Ю. Владимирова

Новосибирский государственный университет

Существование трансверсали в латинском гиперкубе нечетного порядка является открытой задачей. Существует много частных численных решений данной проблемы для латинских гиперкубов фиксированного порядка и размерности. Сложность численного доказательства данной задачи состоит в том, что при увеличении размерности или порядка латинского гиперкуба, экспоненциально возрастает число случаев для перебора. Данную проблемы пытаются решать на специализированных вычислительных машинах.

Латинские кубы и трансверсали используются в теории кодирования и теории графов.

В данной работе исследуются латинские гиперкубы пятого порядка. Для доказательства существования трансверсалей в латинских гиперкубах данного порядка была предложен следующий алгоритм:

Пусть для размерности k справедливо следующее: любой частичный латинский подкуб порядка 3, кроме линейного, имеет 6 различных по составу частичных трансверсалей, тогда если при соединении любых 3 подкубов порядка 3 размерности k, получится куб порядка 3 размерности $k + 1$, который также имеет шесть различных по составу частичных трансверсалей, то любой латинский куб размерности выше k и порядка 5 имеет трансверсаль.

Целью данной работы является написание алгоритма нахождение минимальной размерности, для которой будет выполнено условие алгоритма, описанного ранее.

В ходе работе были исследованы частичные латинские гиперкубы порядка 3 для размерностей 2, 3 и 4, полученных вырезкой из латинских гиперкубов порядка 5 соответствующей размерности. Был написан алгоритм для нахождения основных классов кубов, образующие множества частичных латинских гиперкубов для размерностей 2 и 3. Для каждого представителя основного класса, было посчитано количество частичных трансверсалей, различных по составу.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доц. А.Л.Пережогин

УДК 519.8

Алгоритмы решения двумерной задачи о рюкзаке с делением крупных предметов пополам

Я. С. Глотова

Новосибирский государственный университет

Задано множество виртуальных машин. Для каждой виртуальной машины известны объёмы CPU и RAM, прибыль и интервал времени, в течение которого данная виртуальная машина доступна. Все виртуальные машины делятся на большие и малые в зависимости от объёма CPU. Сервер имеет NUMA-архитектуру с двумя узлами. Большие виртуальные машины делятся пополам, располагаясь на обоих узлах, а малые помещаются на один из узлов. Требуется найти такое подмножество виртуальных машин и их расположение на сервере, что общая прибыль была бы максимальной, а объёмы CPU и RAM сервера не превышались в любой момент времени [1].
Рассмотрены различные классы тестовых примеров с целью найти сложные. Для решения задачи разработан алгоритм поиска по большим окрестностям, основанный на использовании нескольких методов «разрушения» и «восстановления» [2]. На этапе «разрушения» из решения удаляются предметы, удовлетворяющие условиям метода. На этапе «восстановления» строится новое решение на основе полученного на предыдущем этапе. Начальное решение строится жадным образом.
Для исследования классов тестовых примеров использовался коммерческий пакет Gurobi. Разработана программа на языке C++, реализующая данный алгоритм. Вычислительные эксперименты проводились на рандомизированных исходных данных. Приводится сравнение результатов работы алгоритма с результатами, полученными с помощью коммерческого пакета Gurobi.

---

[1] Ratushnyi, A., Kochetov, Y. A Column Generation Based Heuristic for a Temporal Bin Packing Problem // MOTOR 2021, Lecture Notes in Computer Science. 2021. Vol. 12755, P. 96–110.

[2] M. Gendreau, J.-Y. Potvin. Handbook of Metaheuristics. Springer; 3rd edition (2018).

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Ю. А. Кочетов

УДК 519.85

Алгоритм генетического локального поиска для упаковки прямоугольных предметов в параллельные полосы

Н. А. Гончаров

Новосибирский государственный университет

Имеется вычислительный кластер, состоящий из нескольких идентичных машин, каждая из которых включает в себя несколько процессоров. Известно множество вычислительных задач, которые необходимо выполнить на этом кластере. Требуется распределить вычислительные задачи по машинам на кластере, чтобы свести к минимуму время завершения всех задач. Машины рассматриваются как параллельные полубесконечные полосы фиксированной ширины, а вычислительные задачи — прямоугольные предметы с заданными шириной и высотой. Ширина полосы определяет количество процессоров на машине, ширина прямоугольного предмета — количество процессоров, необходимых для выполнения задачи, высота прямоугольного предмета — время выполнения задачи. Необходимо упаковать без вращений и пересечений все прямоугольные предметы в параллельные полосы, минимизируя высоту упаковки.

Для решения задачи разработан алгоритм генетического локального поиска. В качестве кодировки решений используется перестановка предметов. Декодирующая процедура основана на Skyline-алгоритме [1]. На каждой итерации генетического алгоритма после скрещивания и мутации выполняется процедура локального улучшения нового решения, использующая несколько окрестностей. Алгоритм реализован на языке программирования C#. Приведены результаты расчётов на данных компании Huawei, а также проведено сравнение с коммерческим решателем Gurobi и алгоритмом имитации отжига, использующим кодировку ориентированных деревьев.

[1] I. Vasilyev, A.V. Ushakov, M.V. Barkova, D.Zhang, J. Ren, J. Chen Fast Heuristic Algorithms for the Multiple Strip Packing Problem. CCIS, 2021, vol. 1476, 284-297

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Ю. А. Кочетов

УДК 519.7

Выделение частот поперечных колебаний пучка частиц в коллайдере

В. С. Денисов

Новосибирский государственный университет

В настоящее время ускорители заряженных частиц и коллайдеры являются одними из самых важных источников информации об элементарных частицах. Ввиду сложности устройства, их параметры могут изменяться в результате случайных флуктуаций питания в электронике, паразитных эффектов, ошибок при установке и эксплуатации. Все это может сделать невозможной дальнейшую стабильную работу комплекса. Поэтому очень важно осуществлять контроль всех параметров пучка в ускорителе-коллайдере, одной из которых является бетатронная частота. Ее контроль позволяет проводить изучение характеристик коллайдера, а также его настройку. На коллайдере ВЭПП-2000 реализована концепция круглых встречных пучков, что выражается в близости бетатронных частот поперечных колебаний порядка 10^{-3}. Именно поэтому определение частот с высокой точностью является необходимым условием работы данного коллайдера.

Для повышения точности определения частот в спектре сигнала производится выделение соответствующих колебаний в отдельные вектора. Для этого применяются матричные методы: метод главных (PCA), а также независимых (ICA) компонент. Для повышения эффективности, нередко производят предварительную фильтрацию шумов, с целью повысить качество исходных сигналов. Актуальной задачей является проверка применимости данных методов к обработке выборок, полученных с коллайдера, а также, в случае повышения точности, реализация в виде программного обеспечения, способного на автономную работу.

В рамках данной работы было разработано программное обеспечение на языке программирования Python, с использованием библиотек Numpy, Scipy, а также фреймворка PyQt5, проведено исследование точности определения частот путем их выделения в отдельные вектора; произведено сравнение методов предварительной обработки.

Научный руководитель – д-р техн. наук, доц. С. Н. Постовалов, Ю.А. Роговский

УДК 519.7

Двухшаговый star-алгоритм для агрегирования моделей

С. Е. Зинченко

Новосибирский государственный университет

Методы машинного обучения обеспечивают автоматический поиск закономерностей в данных, в связи с ростом вычислительных мощностей и объемов накопленных данных они становятся популярнее в последнее время. В настоящей работе фокусируется внимание на задаче агрегации нескольких прогнозных моделей в случае регрессионного анализа. В частности, рассматривается проблема выбора модели. Она состоит в том, чтобы научиться из набора решений выбирать лучшее с точки зрения некоторого критерия. Таким критерием может быть, например, математическое ожидание квадрата отклонения прогноза от истинного значения.

Для сравнения различных решений можно использовать так называемые порядки сходимости, введенные в работе [2]. Там же приводятся оптимальные порядки для задач типа выбора модели в конечном случае, из которых следует, что общепринятый метод решения подобных задач - минимизация эмпирического риска - не является оптимальным.

В статье [1] предлагается двухшаговый star-алгоритм, который имеет оптимальный порядок сходимости в смысле [2]. В настоящей работе предложена модификация star-алгоритма, проведено ее теоретическое исследование в случае бесконечного класса функций и найдена оценка избыточного риска. Результаты получены без жестких требований к совместному распределению признаков и целевой метки. Оценка получена в интервальном виде, что важно для многих приложений.

Из полученных результатов следует, что модифицированный star-алгоритм является оптимальным с точностью до логарифмического фактора в случае бесконечных классов решений. На основании данного алгоритма и проведенных экспериментов предлагается новый способ обучения моделей нейронных сетей.

[1] Audibert J. Y. Progressive mixture rules are deviation suboptimal //Advances in Neural Information Processing Systems. – 2007. – V. 20.

[2] Tsybakov A. B. Optimal rates of aggregation //Learning theory and kernel machines. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2003. – P. 303-313.

Научный руководитель – д-р техн. наук В.Б. Бериков

УДК 519.8

Онлайн-алгоритм для динамической задачи векторной упаковки

А. П. Иго

Новосибирский государственный университет

В работе рассматривается векторная задача упаковки, возникающая из приложений в области облачных сервисов. Задан набор предметов, поступающих и отбывающих в режиме онлайн. Размерность предметов имеет несколько измерений и определяется типом предметов, число которых сравнительно невелико. Все контейнеры одинаковы и разбиты на две равные части. Необходимо минимизировать количество используемых контейнеров.

Для решения задачи предложен онлайн-алгоритм, использующий данные прогноза об объеме, требуемом для размещения предметов каждого из типов. Эта информация используется для формирования шаблонов упаковки части предметов. Для упаковки оставшихся предметов используется онлайн-эвристика FirstFit. Аналогичный подход, представленный в работе [1], используется применительно к постановке в которой допускается миграция предметов. Мы рассматриваем постановку, где миграции запрещены.

Алгоритм был реализован на языке Java и протестирован на примерах, основанных на реальных данных, возникших в работе облачного сервиса.

---

[1] Shi J. et al. Fast multi-resource allocation with patterns in large scale cloud data center // Journal of computational science. – 2018. – Т. 26. – С. 389-401.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, А. А. Мельников

УДК 519.174.7

О совершенных раскрасках обобщенного графа Петерсена и их свойствах

Д. В. Керкеснер, Д. А. Кондакова

Новосибирский государственный университет

В докладе рассматриваются совершенные раскраски обобщенного графа Петересена. Определены допустимые матрицы параметров раскрасок в k цветов при $2 \leqslant k \leqslant 9$. Для найденных раскрасок определены эквивалентные цвета и проверены такие свойства, как дистанционность относительно вершины или ребра, антиподальность, периодичность, орбитность. Установлены раскраски, получающиеся друг из друга расщеплением или склеиванием цветов.

Раскраской вершин графа $G = (V, E)$ в k цветов называется произвольное отображение $\varphi\colon V \to \{1, \dots, k\}$. Раскраска называется *совершенной*, если вершины одного цвета имеют одинаковый цветовой состав окружения.

Совершенная раскраска может быть задана $(k \times k)$-матрицей параметров $M = (m_{ij})$, в которой элемент m_{ij}, $i, j \in \{1, \dots, k\}$, равен числу соседей цвета j в окружении вершины цвета i.

Матрицу размеров $k \times k$ назовем *допустимой* матрицей параметров совершенной раскраски, если существует совершенная раскраска графа с такими параметрами.

Обобщенным графом Петерсена называется граф $\Pi(n)$ с множествами вершин $V = \{0, 1, 2, \dots, 2n-1\}$ и ребер $E = \{(i, i+1), (i, (i+2) \bmod 2n) \mid i = 0, 2, \dots, 2n-2\} \cup \{(i, (i+4) \bmod 2n) \mid i = 1, 3, \dots, 2n-1\}$.

Теорема 12. *При $2 \leqslant k \leqslant 9$ для совершенных раскрасок обобщенного графа Петерсена в k цветов существует $n(k)$ допустимых матриц параметров:*

k	2	3	4	5	6	7	8	9
$n(k)$	3	5	7	2	5	2	5	0

.

Теорема 13. *При нечетном $11 \leqslant k \leqslant 19$ не существует совершенных раскрасок додекаэдра $\Pi(10)$ в k цветов.*

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доц. Е. В. Горкунов

УДК 519.7

Алгоритм кластеризации временных рядов и оценка его качества на примере анализа гликемических кривых

Д. Е. Кладов

Новосибирский государственный университет

Научно-исследовательский институт клинической и экспериментальной лимфологии – филиал ФИЦ ИЦиГ СО РАН

В работе решается задача иерархической кластеризации временных рядов. Предложен алгоритм решения этой задачи. На вход алгоритму подается неразмеченная выборка, состоящая из временных рядов одинаковой размерности. Выходом алгоритма является разбиение выборки на кластеры.

Для данного алгоритма исследована эффективность использования силуэт-индекса качества кластеризации для выбора оптимального числа кластеров и оценки статистической значимости полученных решений. Способ оценивания статистической достоверности проводится с помощью метода Монте-Карло, который заключается в многократном сравнении качества кластеризации на реальной выборке с качеством кластеризации на искусственно сгенерированной выборке из фиксированного распределения. Кластеризация принималась достоверной для данного числа выделенных кластеров, если значение индекса на реальной выборке оказывалось больше значения 95% квантиля для искусственных данных [1].

В качестве выборки реальных данных использован датасет, состоящий из временных рядов, которые были получены в результате непрерывного мониторинга глюкозы у 406 взрослых пациентов с сахарным диабетом 1 типа. Гипогликемическими считались те временные ряды, в которых уровень глюкозы достигал значения < 3.9 ммоль/л хотя бы 15 минут подряд. Для анализа использовались ночные, ранние утренние и дневные промежутки времени: 0.00-5.59, 4.00-7.59 и 8.00-23.59 соответственно. Предложенная методика показывает достоверную кластеризацию на уровне $p < 0.05$.

По результатам кластеризации в ночные, ранние утренние и дневные промежутки времени получилось 14, 8, 12 кластеров без гипогликемии и 9, 9, 13 кластеров с гипогликемией соответственно. Различия в кластерах касались начального и конечного уровня глюкозы, наличия или отсутствия нисходящего/восходящего тренда. Прослеживалась зависимость между исходным значением глюкозы, быстрой падения и временем возникновения гипогликемии.

Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда 20-15-00057.

[1] И.Л. Кирилюк, О. В. Сенько. Оценка качества кластеризации панельных данных с использованием методов Монте-Карло // КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ. 2020. Т. 12, N 6. С. 1501–1513.

Научный руководитель – д-р техн.наук, проф. В. Б. Бериков

УДК 519.8

Локальный поиск для задачи размещения точек сбора вторсырья

Б. В. Корницкий

Новосибирский государственный университет

В работе рассматривается задача размещения, возникающая при планировании акции по сбору вторсырья. Предполагается, что задан набор возможных мест для развертывания пунктов приёма, временные интервалы, внутри которых вторсырье должно быть вывезено с пунктов, его стоимость, а также конечный набор сценариев, определяющих ожидаемые объемы собираемого на каждом из пунктов вторсырья и реализующихся с известной вероятностью. Для вывоза вторсырья на переработку используются арендованные грузовики различной вместимости. Стоимость аренды грузовика зависит от его типа и продолжительности аренды.

Требуется найти множество развернутых пунктов, так чтобы максимизировать количество собираемого вторсырья со всех точек с учетом рентабельности проводимой акции. Для нахождения близких к оптимальным расстановкам пунктов разработаны модификации алгоритма локального поиска, использующие суррогатную модель для быстрой оценки транспортных затрат при заданном размещении. Проведено сравнение эффективности этих алгоритмов. Для контроля качества находимых решений для задачи маршрутизации была разработана модель смешанно-целочисленного программирования.

Тестирование проводилось на реальных данных, которые были предоставлены волонтерской акцией "Зеленая белка", а также на искусственно сгенерированных данных. Все модификации продемонстрировали способность находить решения близкие к оптимальным. При этом алгоритмы значительно опережают точный метод.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, А. А. Мельников

УДК 519.7

Нахождение кратчайшего пути ограниченной стоимости.

И. С. Ладыгин

Новосибирский государственный университет

Задача заключается в следующем. Дан граф, каждое ребро/дуга которого имеет два веса – длину и стоимость. Требуется найти путь между заданной парой вершин, который имеет минимальную длину среди всех путей ограниченной стоимости.

Данная задача является NP-трудной. В литературе описаны оптимальные экспоненциальные алгоритмы [1], а также полиномиальные приближённые алгоритмы [2], [3].

В данной работе предложена модификация алгоритма, описанного в [4]. Алгоритм основан на использовании множителя Лагранжа, вариация которого позволяет строить допустимое решение. Для уменьшения трудоемкости предложено строить специальные иерархические структуры, в которых пути имеют ограниченное число ребер. В результате трудоемкость построения одного пути равно $O(m)$, где m – число ребер. Описанный способ актуален для больших разреженных графов.

[1] R. Widyono: The design and evaluation of routing algorithms for real-time channels, TechnicalReport TR-94-024, University of California at Berkeley & International Computer Science Institute, June 1994.

[2] D.S. Reeves and H. F. Salama: A distributed algorithm for delay-constrained unicast routing, IEEE/ACM Transactions on Networking, 8(2):239-250, April 2000.

[3] Q. Sun and H. Langendorfer: A new distributed routing algorithm for supporting delay-sensitive applications, Computer Communications, 21:572-578, 1998.

[4] Alpár Jüttner, Balázs Szviatovszki, Ildikó Mécs and Zsolt Rajkó: Lagrange Relaxation Based Method for the QoS Routing Problem, in IEEE INFOCOM-2001, 859-868.

Научный руководитель – д-р. физ.-мат. наук, проф. А.И. Ерзин

УДК 519.7

Одна задача покрытия точек на плоскости одинаковыми кругами

Д. К. Листопадова

Новосибирский государственный университет

Даны непересекающиеся множества *обязательных* P и *необязательных* Q точек на плоскости, $|Q| = n$. Множество P разбито на k подмножеств, каждое из которых должно быть покрыто одним кругом. Требуется покрыть k одинаковыми кругами все точки множества P так, чтобы было покрыто как можно больше точек множества Q.

Наиболее близкими к рассматриваемой проблеме являются задача покрытия минимальным числом одинаковых кругов всех точек ($Q = \varnothing, k$ минимизируется) [1], а также задача покрытия заданным количеством одинаковых кругов максимального числа точек ($P = \varnothing, k$ задано) [2]. Эти задачи являются NP-трудными. Сложность же рассматриваемой задачи в случае, когда k является элементом входа, установить не удалось.

Получены следующие результаты. Показано, что для решения задачи достаточно рассмотреть $O(n^2)$ положений каждого круга, что влечёт полиномиальную разрешимость задачи в случае $k = const$. Предложен полиномиальный алгоритм, строящий $\frac{1}{2}$-приближённое решение. Для одномерного случая, когда все точки расположены на прямой, предложен полиномиальный алгоритм построения оптимального решения, трудоёмкость которого равна $O(kn^2)$.

[1] Carmi P., Katz M., Lev-Tov N.: Covering points by unit disks of fixed location. In Proceedings of the International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC), volume 4835 of Lecture Notes in Computer Science, pages 644–655, 2007.

[2] Xiao B., et al.: Algorithms for Disk Covering Problems with the Most Points. Proceedings of the IASTED International Conference on Parallel and Distributed Computing and Systems 15(2), 2003.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. А. И. Ерзин

УДК 519.7

Минимальное расстояние кодов из матриц Уилсона $W_{2,l}$

А. Д. Марьин

Новосибирский государственный университет

Двоичным кодом длины n называется некоторое множество двоичных векторов длины n. Код C называется *линейным*, если он является подпространством двоичного векторного пространства размерности n. *Минимальное расстояние* кода C - это минимальное расстояние Хэмминга между двумя различными кодовыми словами x и y кода C. Матрица H, имеющая r строк и n столбцов называется *проверочной матрицей* кода C, если $Hx^T = 0^r$ тогда и только тогда, когда $x \in C$. Через $W_{s,l}^N$ будем обозначать *матрицу Уилсона*, строки которой пронумерованы s - элементными, а столбцы l - элементными подмножествами множества $\{1, .., N\}$ элемент (U, V) которой равен 1 тогда и только тогда, когда подмножество U содержится в подмножестве V и 0 иначе. Определим код $C_{s,l}^N$ как линейный код с проверочной матрицей $W_{s,l}^N$.

Определенные выше матрицы $W_{s,l}^N$ часто возникают в разнообразных проблемах теории кодирования, например, в задачах локального восстановления данных [1] и комбинаторике [3], [4].

Данная работа посвящена вычислению минимальных расстояний кодов $C_{s,l}^N$. При $s = l - 1$ и любых $l > 1$, N в работе [1] было найдено минимальное расстояние кода $C_{s,l}^N$. Данный результат в несколько других терминах был получен независимо в [2].

Для перечисления и получения начальных примеров кодовых слов минимального веса была использована cudafy с распараллеливанием. Отметим, что теорема ниже была доказана полностью аналитически, без привлечения компьютера, в то время как компьютерным перебором также было получено альтернативное доказательство некоторых ее случаев.

Теорема. Пусть d - минимальное расстояние кода $C_{2,l}^N$. Тогда верно следующее:

1. $d = 4$, если $l = 3$, при всех $N \geq 4$;
2. $d = 6$, если l нечетно и $l > 3$, при всех $N \geq (\frac{3l+1}{2})$;
3. $d = 7$, если l кратно 4, при всех $N \geq \frac{7}{4}l$;
4. $d = 8$, если l кратно 2 и некратно 4, при всех $N \geq l + 2$.

---

[1] A. Wang, Z. Zhang, M. Liu, Achieving arbitrary locality and availability in binary codes, IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT), 1866-1870, 2015.

[2] V. N. Potapov, Splitting of hypercube into k-faces and DP-colorings of hypergraphs (Published online), arXiv: 1905.04461, 2019.

[3] R. M. Wilson. On set systems with restricted intersections modulo p and p-ary t-designs. Discrete mathematics, 309(3), 606-612, 2009.

[4] D. de Caen A note on the ranks of set-inclusion matrices. Department of Mathematics and Statistics Queen’s University Kingston, Ontario, Canada, 2001.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук И. Ю. Могильных

УДК 519.7

Приближенные алгоритмы для задачи упаковки гистограмм в полосу

Г. Е. Мелиди, С. А. Назаренко

Новосибирский государственный университет

Задача упаковки гистограмм в полосу возникла при определении моментов старта проектов разработки кластеров, составляющих нефтегазовое месторождение, при заданном лимите ежегодной добычи [1]. Данная задача является обобщением классической NP-трудной задачи упаковки в контейнеры (Bin Packing Problem), которая, в свою очередь, возникает в множестве приложений. Задача же упаковки гистограмм в полосу минимальной длины ранее не исследовалась. В рассматриваемой задаче 2-BCPP необходимо упаковать гистограммы, состоящие из двух столбиков (2-BCs) в единичную полосу минимальной длины. Гистограммы можно перемещать по полосе, но нельзя менять порядок стобиков в гистограмме и разделять их.

Эта задача ранее исследовалась нами в [1–4], где для неё были предложены несколько полиномиальных приближенных алгоритмов, а также найдены гарантированные оценки точности для них. Мы получили точную оценку на погрешность разработанного нами алгоритма в частном случае задачи, когда каждая 2-BC является большой, то есть имеет хотя бы один столбик высоты более 1/2 (задача 2-BCPP|big). Основным результатом представляемого исследования является доказательство того, что задача 2-BCPP|big остаётся NP-трудной, и если каждая 2-BC является большой невозрастающей или неубывающей, тогда разработанный нами ранее алгоритм GA_LO с трудоёмкостью $O(n^2)$ строит упаковку длины не более $OPT+1$, где OPT является длиной оптимальной упаковки. Этот результат позволил нам представить алгоритм трудоёмкости $O(n^{2.5})$ для задачи 2-BCPP|big, который строит упаковку длины не более $4/3OPT + 4/3$.

[1] Erzin A., et al.: Optimal Investment in the Development of Oil and Gas Field. Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2020. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-58657-7-27 (2020)

[2] Erzin A., et al.: Two-Bar Charts Packing Problem. Optimization Letters. URL: https://doi.org/10.1007/s11590-020-01657-1 (2020)

[3] Erzin A., et al.: A 3/2-approximation for big two-bar charts packing. J. of Combinatorial Optimization. URL: https://doi.org/10.1007/s10878-021-00741-1 (2021)

[4] Erzin A., et al.: A Posteriori Analysis of the Algorithms for Two-Bar Charts Packing Problem. Communications in Computer and Information Science. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-92711-0-14 (2021)

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. А. И. Ерзин

УДК 519.72

Быстрый алгоритм прямого доступа к «сжатым» данным

А. Е. Морозов

Новосибирский государственный университет

В эпоху облачных хранилищ особенно актуальна задача эффективного хранения больших массивов данных. Активно используются методы сжатия, которые нарушают однородность данных, заменяя символы исходного алфавита на коды переменной длины, в связи с чем возникает проблема обеспечения оптимального времени произвольного доступа к символам сжатого сообщения.

В данной работе проводится сравнительный анализ существующих схем кодирования, поддерживающих быстрый произвольный доступ к сжатым данным. Учитывается общий объем памяти, занимаемый структурой, и время доступа к произвольной ячейке исходного сообщения (в битовых операциях).

Приведен обзор вспомогательных структур данных, использующихся в алгоритмах: RS-словари [1-2, 6], wavelet-деревья [3], двоичные индексированные деревья [4].

Избыточность структур представлена в явном виде, позволяющем оценить практическую применимость методов. Получена энтропийная оценка избыточности для работ [1-2]. С использованием результатов статьи [5] получена нижняя граница избыточности для класса методов, использующих порядок вероятностей символов исходного алфавита.

Также проведена оценка количества обращений к физическому носителю, актуальная для практических реализаций систем. Рассмотрена адаптивность методов к последовательному доступу.

Основной результат работы: найден алгоритм, предоставляющий оптимальный компромисс между занимаемой памятью и временем доступа, что является важным для практических приложений.

[1] Brisaboa, N.R., Ladra, S. and Navarro, G. DACs: Bringing direct access to variable-length codes. Information Processing and Management, 49(1), 2013, pp. 392-404.

[2] Külekci, M.O., Enhanced variable-length codes: improved compression with efficient random access. Proc. Data Compression Conference, DCC-2014, Snowbird, Utah, 2014, pp. 362–371.

[3] Navarro, G., Wavelet trees for all. Journal of Discrete Algorithms, Volume 25, 2014, pp. 2-20.

[4] Ryabko B. Ya., Fast direct access to variable length codes. arXiv:2107.14577 [cs.IT]

[5] Рябко Б. Я. Кодирование источника с неизвестными, но упорядоченными вероятностями. Пробл. передачи информ., 1979, 15, 2, с. 71-77.

[6] Okanohara D, Sadakane K. Practical entropy-compressed rank/select dictionary. Proceedings of the Ninth Workshop on Algorithm Engineering and Experiments, 2007, pp. 60-70.

Научный руководитель – д-р техн. наук, проф. Б. Я. Рябко

УДК 519.85

Алгоритм «Сломаю-починю» для маршрутизации вертолетов с гибкими требованиями к доставке рабочих

К. О. Моторин

Новосибирский государственный университет

При разработке месторождений нефти и газа на шельфе строятся специальные конструкции — морские платформы. На них живут и работают специалисты, которых надо доставлять и забирать вертолетами. Задан план по доставке и возвращению людей на плановый период для каждой платформы. План гибкий, он задает суммарные объемы доставки и возвращения и минимальные объемы для каждой платформы в каждый день. Известна вместимость вертолета и максимальная длина маршрута. Каждый маршрут начинается и заканчивается на базе. Одну платформу может посещать несколько вертолетов. Требуется найти маршруты для доставки и возвращения всех специалистов на заданном плановом периоде с минимальной суммарной длиной.

Для решения задачи построена математическая модель целочисленного линейного программирования, которая позволяет находить решения пакетом Gurobi при малой размерности задачи. Для задач реальной размерности разработан алгоритм ALNS [1], использующий для построения окрестностей операторы уничтожения и восстановления. Приводятся результаты расчетов на реальных данных Российско-Вьетнамской компании по добычи нефти вблизи города Вунгтау, Вьетнам.

[1] Demetrio Laganà, Gilbert Laporte, Francesca Vocaturo. A dynamic multi-period general routing problem arising in postal service and parcel delivery systems: Computers and Operations Research, 2021.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Ю. А. Кочетов

УДК 519.82

Алгоритмы с оценками для некоторых максиминных задач кластеризации

С. М. Нещадим

Новосибирский государственный университет

В данной работе рассматриваются три задачи нахождения семейства двух непересекающихся подмножеств в конечном множестве точек евклидова пространства. Эти задачи моделируют часто встречающуюся во многих приложениях задачу нахождения семейства непересекающихся подмножеств в множестве объектов, каждое из которых состоит из подобных объектов в смысле некоторого критерия. Такая проблема возникает, например, в анализе и интерпретации данных, машинном обучении и распознавании образов.

Во всех рассматриваемых задачах требуется максимизировать размер минимального по мощности кластера так, чтобы в каждом кластере суммарный внутрикластерный разброс точек относительно центра кластера не превышал заранее заданного порога:

$$F\left(\mathcal{C}_i, z_i\right) = \sum_{y \in \mathcal{C}_i} \|y - z_i\|_2 \leq A, \quad i = 1, 2,$$

где $\mathcal{C}_i$ — i-ый кластер, z_i — центр i-го кластера и A — заданный порог.

В первой задаче центры кластеров — произвольные, но заданные на входе точки пространства. Во второй задаче центры кластеров неизвестны, но принадлежат входному множеству. В третьей задаче центром кластера служит среднее арифметическое всех его элементов.

Известно [1], что все три рассматриваемые задачи NP-трудны даже в одномерном случае.

Основным результатом работы являются приближенные алгоритмы с гарантированными оценками точности для всех трех задач. Для первых двух задач предложены $1/2$-приближенные алгоритмы для произвольной размерности пространства. Также построен $1/2$-приближенный алгоритм для одномерного случая третьей задачи.

---

[1] Khandeev V., Neshchadim S. Max-Min Problems of Searching for Two Disjoint Subsets // Lecture Notes in Computer Science, vol. 13078, p. 231-245. https://doi.org/10.1007/978-3-030-91059-4_17

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук В. И. Хандеев

УДК 519.85

Алгоритм локального поиска для маршрутизации вертолетов при доставке и возвращении рабочих с нефтяных скважин

Е. А. Овчинникова

Новосибирский государственный университет

Рассматривается задача оптимизации маршрутов на доставку рабочих к нефтяным платформам на шельфе и возвращении их обратно на базу вер- толетами. Известно количество вертолетов и их вместимость. Для каждой платформы задано число рабочих, которых надо доставить, и число рабо- чих, которых надо забрать. Любую платформу можно посещать несколькими вертолетами и доставлять рабочих партиями. Необходимо построить марш- руты для доставки и возвращения рабочих со всех платформ с минимальной суммарной длиной.

Для решения задачи построена математическая модель целочисленного линейного программирования и разработан алгоритм локального поиска с за- претами [1]. Рассмотрены окрестности, которые позволяют менять местами две платформы в одном маршруте, и перераспределять платформы из раз- ных маршрутов. Алгоритм заканчивает работу после выполнения заданного числа итераций. Результатом работы является лучшее найденное решение. Алгоритм реализован на языке Python. Обсуждаются результаты расчетов на реальных данных для нефтяного шельфа вблизи города Вунгтау, Вьетнам.

---

[1] Glover F., Laguna M. Tabu Search. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.,1997.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Ю. А. Кочетов

УДК 519.8

Метод генерации столбцов для динамической задачи упаковки в контейнеры

А. В. Ратушный

Новосибирский государственный университет

Рассматривается новая NP-трудная задача динамической упаковки в контейнеры, возникшая в облачных вычислениях. Имеется конечное число предметов (виртуальных машин). Для каждого из них мы знаем время начала, время обслуживания и два размера (количество ядер и объём оперативной памяти). Все предметы разделяются на два типа - большие и маленькие, в зависимости от количества ядер. Каждый контейнер (сервер) состоит их двух одинаковых частей (левой и правой). Маленькие предметы помещаются полностью на одну из частей, тогда как большие предметы делятся на две одинаковые части и помещаются на обе половины сервера. Нашей целью является упаковка всех предметов в минимальное количество серверов за весь интервал планирования.

Для этой задачи разработана эвристика, основанная на методе генерации столбцов [1] и First Fit алгоритме, чтобы получить нижние и верхние оценки оптимума. Выбираются моменты времени для решения статической задачи. Затем полученные решения распространяются на весь рассматриваемый интервал планирования несколькими способами. Предложенный подход был реализован на языке программирования C++. Вычислительные эксперименты для реальных тестовых примеров указывают на небольшой разрыв между границами. Средняя относительная погрешность составляет не более 0,9% для недельного интервала и около 50000 виртуальных машин. Для сокращения размерности использовалась идея редукции из [2]. Среднее время работы алгоритма на персональном компьютере составляет 26 секунд.

---

[1] Ratushnyi, A., & Kochetov, Y. (2021). A Column Generation Based Heuristic for a Temporal Bin Packing Problem. Mathematical Optimization Theory and Operations Research - 20th International Conference, MOTOR 2021, Proceedings (pp. 96-110).

[2] van Bevern, R., Mnich, M., Niedermeier, R. et al. Interval scheduling and colorful independent sets. J Sched 18, 449–469 (2015). https://doi.org/10.1007/s10951-014-0398-5

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Ю. А. Кочетов

УДК 519.7

Свойства разностных характеристик побитового XOR по модулю 2^n

И. А. Сутормин

Новосибирский государственный университет

ARX - одна из современных архитектур шифров, в которой используются только три операции: сложение по модулю 2^n ($\boxplus$), циклический сдвиг и покомпонентное сложение по модулю 2 ($\oplus$, XOR). Для шифров важно знать степень устойчивости к различным видам криптоанализа. Степень устойчивости ARX шифров к разностному криптоанализу [1] сложно определить. При проведении этого криптоанализа используются разностные характеристики. Для одной из таких характеристик $\mathrm{adp}^{\oplus}(\alpha, \beta \to \gamma)$ было введено обобщение, определяющее разностные характеристики XOR k аргументов

$$\mathrm{adp}^{\oplus}(\alpha^1, \alpha^2, \ldots \alpha^k \to \alpha^{k+1}) = \mathrm{P}[x^i \in \mathbb{Z}_2^n, i = 1 \ldots k | \bigoplus_{i=1}^{k} (\alpha^i \boxplus x^i) = (\bigoplus_{i=1}^{k} x^i) \boxplus \alpha^{k+1}].$$

Теорема 14. *Пусть* $\alpha^1, \ldots, \alpha^{k+1} \in \mathbb{Z}_2^n$, $\alpha^i = (\alpha_n^i, \ldots \alpha_1^i)$. *За* $\alpha 1$ *обозначается вектор* $(\alpha_n, \ldots \alpha_1, 1) \in \mathbb{Z}_2^{n+1}$, $\mathrm{wt}(\alpha)$ *— количество единиц в соответствующем векторе. Тогда для* $\mathrm{adp}^{\oplus}$ *выполняется следующее равенство*

$$\mathrm{adp}^{\oplus}(\alpha^1 1, \ldots \alpha^k 1 \to \alpha^{k+1} 1) = \frac{1}{2^k} \sum_{\text{четный } \mathrm{wt}(B)} \mathrm{adp}^{\oplus}(\alpha^1 \boxplus B_1, \ldots \alpha^k A_k \boxplus B_k \to \alpha^{k+1} A_{k+1} \boxplus B_{k+1})$$

Для вектора последних значений $A = (A_1 \ldots A_{k+1})$, $A_i \in \mathbb{Z}_2$, *в котором найдется* $A_i \neq 1$, *выполняются следующее равенство:*

$$\mathrm{adp}^{\oplus}(\alpha^1 A_1, \ldots \alpha^k A_k \to \alpha^{k+1} A_{k+1}) = \frac{1}{2^{\mathrm{wt}(A)}} \sum_{B \preceq A} \mathrm{adp}^{\oplus}(\alpha^1 \boxplus B_1, \ldots \alpha^k A_k \boxplus B_k \to \alpha^{k+1} A_{k+1} \boxplus B_{k+1})$$

Работа выполнена при поддержке лаборатории криптографии JetBrains Research.

[1] Eli Biham and Adi Shamir. Differential cryptanalysis of DES-like cryptosystems. Journal of Cryptology, 4(1):3–72, January 1991.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук Н. А. Коломеец, канд. физ.-мат. наук А. А. Городилова

УДК 519.177

Исследование целочисленности двудольных бирегулярных мультиграфов

В. В. Трефилова

Новосибирский государственный университет

Понятие целочисленного графа было введено Харари и Швенком в работе [1] в 1974 году. Граф называется целочисленным, если спектр его матрицы смежности состоит из целых чисел.

Объектом нашего исследования являются бирегулярные двудольные мультиграфы со степенями вершин 3 и 4. Мультиграфом называется граф, в котором разрешается присутствие кратных рёбер (их также называют «параллельными»), то есть рёбер, имеющих те же самые конечные вершины. Мультиматрица – матрица, в которой все элементы неотрицательны и целочисленны. Мультиматрицу назовём (a, b)-бирегулярной, если суммы элементов в каждой строчке равны a и суммы в каждом столбце равны b. В дальнейшем мы рассматриваем $(3, 4)$-бирегулярные матрицы и их сингулярные числа. Такую матрицу назовем целочисленной, если квадраты её сингулярных чисел – целые числа.

Пусть имеется некоторая мультиматрица A размера $m \times n$. Назовём свитчингом следующую операцию:

$$\begin{pmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{lj} & a_{lk} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{ij}+1 & a_{ik}-1 \\ a_{lj}-1 & a_{lk}+1 \end{pmatrix},$$

где $i, l \in \{1, ..., m\}$ и $j, k \in \{1, ..., n\}$.

В данной работе методом случайного поиска были получены следующие результаты:

- для матриц 3×4 были найдены все 8 целочисленных спектров и соответствующие им матрицы;
- для матриц 6×8 были найдены 102 целочисленных спектра и соответствующие им матрицы.

[1] Harary F. and Schwenk A. J. Which graphs have integral spectra? Graphs and Combinatorics. Springer-Verlag, Berlin, 1974. P. 45–51

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук С.В. Августинович

УДК 519.8

Приближенный алгоритм для двухэтапной транспортной задачи

С. Ю. Утюпин

Новосибирский государственный университет

В работе рассматривается двухэтапная транспортная задача, где склады должны быть обеспечены товарами в объемах, позволяющих удовлетворить спрос потребителей. Предполагается, что мы знаем общий спрос, распределенный по складам, но само распределение неизвестно. На первом этапе мы должны решить в каком количестве привезти на склады товары от производств. Затем спрос на складах перераспределяется и в некоторых складах образуется дефицит. На втором этапе мы должны перераспределить товары между складами для устранения дефицита. Таким образом, мы принимаем решение в условиях неполной информации, а затем корректируем его. Стоимость транспортировки единицы товара на втором этапе значительно выше, чем на первом. Требуется решить, сколько товаров доставить на склады на первом этапе, чтобы суммарные затраты на двух этапов в худшем случае распределения спроса были минимальными.

Задача может быть сформулирована как трехуровневая задача линейного программирования. Для решения подзадачи второго уровня поиска распределения спроса в худшем сценарии разработана эвристика. Ее эффективность сравнивается с решателем Gurobi, решающим одноуровневую переформулировку подзадачи. Тестирование продемонстрировало способность эвристики стабильно находить решение близкое к оптимальному. При этом она значительно опережает точный метод по скорости.

Для решения основной задачи разработан алгоритм локального поиска, на каждом шаге которого решается подзадача нахождения наихудшего перераспределения. Результаты расчета по модели сравниваются с обычным подходом, основанном на независимой оптимизации решений каждого из этапов.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, А. А. Мельников

УДК 519.8

Алгоритм имитации отжига для робастной задачи размещения предприятий с ограничениями на мощности

В. А. Фролов

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

В последнее время все большее внимание уделяется задачам с неточными данными. Это связанно с тем, что в период планирования, а также в ходе осуществления плана расходы, сопряженные с открытием либо с обслуживанием предприятия, могут меняться. Примером исследования таких ситуаций является работа "Threshold robustness in descrete facility location problems: a bi-objective approach" [2], в которой демонстрируются математические постановки робастных задач размещения и приводятся методы их решения.

В данной работе рассматривается робастность по аналогии со статьей [2]. Предлагается математическая модель робастной задачи размещения предприятий с ограничениями на мощности. Для её решения разрабатывается алгоритм имитации отжига. Для организации поиска адаптирована окрестность с учетом особенностей задачи. Алгоритм реализован, проведены численные эксперименты, выполнен сравнительный анализ с известным коммерческим решателем Baron [3] на тестовых примерах из электронной библиотеки «Дискретные задачи размещения» Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН [1].

---

[1] Дискретные задачи размещения. Библиотека тестовых задач. [Электронный ресурс] URL: http://math.nsc.ru/AP/benchmarks/CFLP/cflp.html

[2] Emilio Carrizosa, Anton Ushakov, Igor Vasilyev. Threshold robustness in discrete facility location problems: a bi-objective approach. Optim. Lett. 2015. Vol. 9, pp. 1297-1314.

[3] NEOS Interfaces to BARON [Электронный ресурс] – URL: https://neos-server.org/neos/solvers/go:BARON/GAMS.html

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доц. Т. В. Леванова

УДК 519.7

Классификация булевых функций от четырёх переменных с максимальной алгебраической иммунностью и показателем корреляционной иммунности, равным 1.

И. С. Хильчук

Новосибирский государственный университет

Основными компонентами симметричных шифров являются булевы функции, от криптографических свойств которых зависит способность шифра противостоять различным видам криптоанализа. В данной работе представлена классификация булевых функций от четырёх переменных, обладающих максимальной алгебраической иммунностью и корреляционной иммунностью, равной единице.

Алгебраической иммунностью $AI(f)$ булевой функции f от n переменных называется минимальное число d такое, что существует не тождественно равная нулю булева функция g от n переменных степени d, для которой выполняется $fg = 0$ или $(f \oplus 1)g = 0$, см [1]. Булева функция f от n переменных называется *корреляционно-иммунной порядка* r ($CI(f) = r$), $1 \le r \le n$, если для любой её подфункции $f_{i_1,\dots,i_r}^{a_1,\dots,a_r}$, полученной фиксацией r переменных, выполняется равенство

$$wt(f_{i_1,\dots,i_r}^{a_1,\dots,a_r}) = \frac{wt(f)}{2^r}.$$

Булев куб — граф $\mathbb{E}^n$, вершинами которого являются все двоичные векторы длины n, т. е. $V = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{Z}_2\}$, а ребрами соединяются только те векторы, расстояние Хэмминга между которыми равно единице. Число n называется размерностью булева куба. *Носитель* булевой функции — множество всех векторов, на которых функция принимает значение 1: $supp(f) = \{x \in \mathbb{Z}_2^n : f(x) = 1\}$.

В работе проанализированы подмножества вершин булева куба $\mathbb{E}^4$, являющиеся носителями булевых функций от 4 переменных с $AI(f) = 2$, $CI(f) = 1$. Данные функции разбиваются на три подкласса в соответствии с весом Хэмминга: $wt(f) = 6$ (36 функций), $wt(f) = 8$ (200 функций), $wt(f) = 10$ (60 функций).

Рассмотрим функции веса 6 с $AI(f) = 2$, $CI(f) = 1$ и индуцированные их носителями подграфы булева куба $\mathbb{E}^4$. Для каждой такой функции нулевой вектор принадлежит множеству $supp(f)$, индуцированный подграф содержит две изолированные вершины и две пары смежных вершин $(a_i, b_i), i = 1, 2$, при этом вершины a_1, a_2 находятся на расстоянии 2 друг от друга, а вершины b_1, b_2 — на расстоянии 4. Все подграфы, индуцированные носителями таких функций, изоморфны между собой. Обозначим данное множество индуцированных подграфов как G_s^6.

Теорема 15. *Не существует других подграфов булева куба $\mathbb{E}^4$, изоморфных подграфам из G_s^6 и содержащих нулевой вектор булева куба. От того, какой вершиной индуцированного носителем подграфа является нулевой вектор булева куба, зависит вид алгебраической нормальной формы функции f.*

Подобные утверждения получены также для функций от 4 переменных с $AI(f) = 2$, $CI(f) = 1$ веса 8 и 10. Работа выполнена при поддержке лаборатории криптографии JetBrains Research.

[1] Токарева Н.Н.Симметричная криптография. Краткий курс: учебное пособие//Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2012.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доц. Н. Н. Токарева

УДК 519.714.71

Алгоритм декомпозиции булевых функций, представленных в виде конъюнктивно-инверсных графов

О. Д. Цибилев

Новосибирский государственный университет

Булевы функции являются центральной конструкцией булевой алгебры. Они широко применяются во многих областях математики и ее приложениях, таких как теория кодирования, криптография и криптоанализ, логический дизайн, синтез и оптимизация электронных схем и т.д. С булевыми функциями связан ряд известных алгоритмических задач алгебры. Одной из таких задач является задача разложения булевой функции на конъюнкцию сомножителей, имеющих непересекающиеся наборы переменных (задача декомпозиции/факторизации). Меньшие по сравнению с исходными функциями компоненты могут быть подвержены более глубокой оптимизации и верификации. При технической реализации декомпозированные функции позволяют получать более скоростные, компактные и энергоэффективные устройства.

Также, развитие вычислительных мощностей, совместно с усложнением решаемых ими задач, привело к значительному росту сложности используемых булевых функций на практике, что показало значимость вопроса о компактном и в то же время эффективном представлении булевых функций в компьютере, а также привело к важной идее о том, что конверсия булевых функций из исходного формата в другой формат, «удобный» для проведения оптимизирующих преобразований, не является всегда оправданным, а некоторых случаях и не является практически реализуемой задачей. Таким образом, есть необходимость в алгоритмах, работающих с заданными представлениями булевых функций.

В связи с этим для задачи факторизации булевых функций был разработан обобщенный алгоритм, основанный на неявном вычислении формальной производной за счет рекурсивного разбиения, допускающий настройку на разные формы представлений булевых функций. Также, произведены эксперименты по настройке полученного обобщенного алгоритма для широко-распространенного индустриального формата описания логических схем так называемых конъюнктивно-инверсных графов (And-inverter graph). Полученный алгоритм декомпозиции булевых функций реализован на языке программирования Python с использованием библиотеки py-AIG.

В настоящее время проведено тестирование производительности полученного алгоритма на части индустриальных бенчмарков и их представительство продолжает расширяться.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук П.Г. Емельянов

УДК 519.17

Разбиения ребер полного графа на изоморфные подграфы

В. Ю. Черкашин

Новосибирский государственный университет

Понятие самодополнительного графа было введено не менее 60 лет назад [1]. Граф называется самодополнительным, если он изоморфен своему дополнению. В работе дается несколько конструкций n-разбиений полного графа, то есть, разбиений полного графа на n частей, которые изоморфны друг другу.

Основным объектом нашего исследования является полный граф K_n - простой неориентированный граф, в котором смежны любые две вершины.

Назовём дизъюнктное разбиение множества рёбер $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k$ правильным, если все графы $G_i = (V, E_i)$ попарно изоморфны между собой. Такие графы назовём k-дополнительными, а набор неотрицательных чисел $d_1, d_2, \ldots d_n$ будем называть (n, k)-допустимым, если найдётся k-дополнительный граф с соответствующим набором степеней.

Теперь сформулируем основную теорему:

Теорема 16. *Пусть p – произвольное простое число, а k – делитель числа $p(p-1)/2$. Тогда полный p-вершинный граф допускает k-разбиение.*

Также описаны все правильные разбиения

а) графа K6 на 3 части;

б) графа K6 на 5 частей;

в) графа K7 на 3 части;

г) графа K7 на 7 частей;

и соответствующие им допустимые наборы.

Таким образом, обоснован метод, позволяющий для простых n строить k-разбиения для полных n-вершинных графов.

[1] Horst Sachs. Über selbstkomplementäre Graphen. Debrecen: Publicationes Mathematicae Debrecen, 1962, T. 9, C. 270—288.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук С.В. Августинович

УДК 519.1

О максимальном числе открытых треугольников в графах с одинаковым числом вершин и ребер

О. И. Черных

Новосибирский государственный университет

Будем называть *открытым треугольником (ОТ)* простой неориентированный граф, состоящий из трех вершин и двух ребер. Другими словами, ОТ — это индуцированный путь длины 2. В [1] найдено максимальное число ОТ в графах с n вершинами и поставлена задача об определении максимального числа ОТ в графах с n вершинами и m ребрами. Обозначим это число через $f(m.n)$. В настоящей работе задача решена при $m = n$, т. е. найдено $f(n, n)$.

Обозначим через T_i и S_i графы, полученные добавлением i висячих ребер, инцидентных произвольной вершине графов K_3 и C_4, соответственно. Отметим, что эти графы содержат $i+3$ и $i+4$ вершины, соответственно. Доказана следующая

Теорема 17. *Пусть* $n = m$. *Тогда* $f(3, 3) = 0$; $f(4, 4) = 4$; $f(5, 5) = 6$ *и* $f(n, n) = (n^2 - 3n)/2$ *при* $n \geq 6$. *При этом, в случае* $n \neq 6$ *оптимальные графы единственны и равны* K_3, C_4, S_1 *и* T_i *при* $i \geq 4$. *Для* $n = 6$ *оценка* $f(6, 6) = 9$ *достигается на трех графах:* T_3, S_2 *и* $K_{2,3} \cup K_1$.

[1] Pyatkin A., Lykhovyd E., Butenko S. The maximum number of induced open triangles in graphs of a given order // Optimization Letters. 2018. Vol. 13, no. 8. P. 1927–1935.

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. А. В. Пяткин

УДК 519.7

Задача упаковки гистограмм в полосу.

К. И. Шаранхаев

Новосибирский государственный университет

Задача упаковки гистограмм в полосу впервые поставлена в [1] и формулируется следующим образом. Задано множество гистограмм, каждая из которых состоит из нескольких столбиков единичной длины и высоты не более 1, а также горизонтальная полоса единичной высоты, которая разбита на ячейки – квадраты со стороной 1. Требуется найти допустимую упаковку гистограмм в минимальное число ячеек полосы. При этом, в допустимой упаковке столбцы каждой гистограммы нельзя менять местами и разрывать, но можно перемещать вертикально в пределах полосы.

Ранее достаточно детально была исследована задача упаковки гистограмм состоящих из двух столбиков каждая, которая является обобщением NP-трудных задач упаковки в контейнеры и двумерной векторной упаковки [2], [3], [4].

В данной работе рассмотрена задача упаковки в полосу гистограмм, состоящих из трёх столбиков каждая. Эта задача, очевидно, остаётся NP-трудной, поэтому предложено несколько полиномиальных алгоритмов для построения приближённых упаковок, как для общего, так и для частных случаев. Для общего случая предложен алгоритм, который строит упаковку длины не более $3OPT + 2$, где OPT – оптимум задачи. Если в каждой гистограмме один столбик имеет высоту больше 1/2, то мы её назвали 1-большой. Если два столбика выше 1/2, то такая гистограмма 2-большая. Показано, что задача упаковки 1-больших гистограмм остаётся NP-трудной. Для задач упаковки 1- и 2-больших гистограмм предложены полиномиальные алгоритмы и получены нетривиальные гарантированные оценки точности строящихся решений.

[1] Erzin A., et al.: Optimal Investment in the Development of Oil and Gas Field. Kochetov Y., Bykadorov I., Gruzdeva T. (eds) Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2020. CCIS, vol 1275, 336-349. Springer, Cham. (2020)

[2] Erzin A., et al.: Two-Bar Charts Packing Problem. Optimization Letters 15(6), 1955-1971 (2021)

[3] Erzin A., et al.: A 3/2-approximation for big two-bar charts packing. J. of Combinatorial Optimization 42, 71-84 (2021)

[4] Erzin A., Shenmaier V.: An Improved Approximation for Packing Big Two-Bar Charts. http://arxiv.org/abs/2101.00470 (2021)

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. А. И. Ерзин

УДК 519.7

Эффективные алгоритмы решения соразмерной двухмашинной задачи open shop с маршрутизацией на дереве

А. А. Шмырина

Новосибирский государственный университет

Задача Open Shop с маршрутизацией задается множеством работ, множеством машин и транспортной сетью. В узлах сети, заданной реберно-взвешенным графом, расположены работы. Машины перемещаются между ними и выполняют операции работ, при этом начинают и заканчивают движение в одной и той же заданной вершине. Требуется построить расписание выполнения всех работ для машин, время завершения которого будет минимальным. Задача Open Shop с маршрутизацией является NP-трудной даже в простейшем нетривиальном случае, когда число машин и число вершин сети равно двум [1].

В моей работе рассматривается частный случай двухмашинной задачи, в которой операций каждой работы имеют одинаковую длительность. Задача в такой постановке тоже является NP-трудной даже для двухвершинной сети [2]. Целью работы является построение приближенного алгоритма с оценкой точности, неулучшаемой относительно некоторой стандартной нижней оценки. Известно, что для случая с не более чем тремя вершинами оценка точности такого алгоритма равна 7/6 [2]. В текущей работе показано распространение этого результата на случай, когда структура сети является деревом.

Кроме того, рассматривается задача с двумя машинами и разными скоростями передвижения машин для сетей с малым числом вершин.

[1] Averbakh I., Berman O., Chernykh I. The routing open-shop problem on a network: complexity and approximation // European Journal of Operational Research. 2006. Vol. 173., Issue 2., P. 531–539.

[2] Pyatkin A., Chernykh I. On complexity of two-machine routing open shop problem. Submitted to MOTOR-2022.

Научный руководитель – канд. физ.-мат. наук, доц. И. Д. Черных

УДК 519.8

Алгоритм решения задачи о рюкзаке с прямоугольными объектами при ограничениях на расположение центра тяжести

С. М. Шперлинг

Новосибирский государственный университет

Задан набор прямоугольников, для каждого из которых известна длина, ширина и масса, а также большой прямоугольник (рюкзак) с известными длинной и шириной. Требуется выбрать набор прямоугольников и их упаковку в рюкзак без пересечений, чтобы разница между их общим центром тяжести и геометрическим центром рюкзака не превосходила заданной величины по каждой из осей, а свободное место в рюкзаке было бы минимальным.

Построена модель частично-целочисленного линейного программирования. Эта модель позволяет находить оптимальные решения задачи при небольшой размерности, до 50 прямоугольников. Для больших размерностей построен алгоритм имитации отжига, в котором решения представляются в виде перестановки прямоугольников, а в роли декодирующей процедуры выступает известный skyline алгоритм [1]. В целевую функцию заносится штраф за выход центра тяжести из требуемой зоны. Для поиска наилучшей перестановки применяется окрестность, в которой два прямоугольника меняются местами. Такие пары выбираются по следующему правилу с целью сократить штраф за несоблюдение условий на центр тяжести. Выбирается объект, центр тяжести которого находится ближе всего к общему центру тяжести, а также одна из осей, по которой нарушено условие. Находится второй объект, центр тяжести которого на противоположной стороне от требуемой зоны и отклонение его центра тяжести от этой зоны близко к отклонению первого объекта. При нулевом штрафе два прямоугольника выбираются случайно. Приводятся результаты численных экспериментов для примеров с числом прямоугольников до 300.

---

[1] I. Vasilyev, A. V. Ushakov, M. V. Barkova: Fast Heuristic Algorithms for the Multiple Strip Packing Problem. CCIS, vol. 1476, 285 - 297 (2021).

Научный руководитель – д-р физ.-мат. наук, проф. Ю.А. Кочетов

Авторский указатель

Содержание

Научное издание

МНСК-2022

МАТЕМАТИКА

Материалы
60-й Международной научной студенческой конференции

10–20 апреля 2022 г.

Корректор Т. И. Тихонова
Верстка Т. И. Тихоновой
Обложка Е. В. Неклюдовой

Подписано в печать 20.04.2022 г.
Формат 60x84/8. Уч.-изд. л. 24. Усл. печ. л. 22,3.
Тираж 42 экз. Заказ № 89.
Издательско-полиграфический центр НГУ.
630090, Новосибирск, ул. Пирогова 2.

Секция

МАТЕМАТИКА

ISBN 978-5-4437-1303-8

9 785443 713038

Новосибирский государственный университет

*НАСТОЯЩАЯ НАУКА