Жора! Отдай это Борису

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ
АН СССР

На правах рукописи

Б. В. ЧИРИКОВ

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМАХ, БЛИЗКИХ К КОНСЕРВАТИВНЫМ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

г. Новосибирск — 1959 год

Основным направлением в теории нелинейных колебаний, начиная со знаменитых работ Пуанкаре и Ляпунова, работ школы Мандельштама и кончая многочисленными работами настоящего времени, по теории автоматического регулирования является исследование периодических процессов: их существования, характеристик и устойчивости. Вопрос ставится так: будем искать решение нелинейных уравнений в виде периодических функций и посмотрим, является ли оно устойчивым. Такая постановка задачи связана в первую очередь с требованием практических приложений теории к электрическим и механическим колебаниям. Колебания в этих системах обладают, как правило, сравнительно сильным затуханием (особенно в нелинейном режиме) и поэтому в ряде случаев (но далеко не всегда [1]) стремятся к периодическим процессам с частотой, определяемой либо соответствующим предельным циклом (для автоколебаний), либо частотой внешнего возмущения (для вынужденных колебаний). Другой причиной преимущественного изучения периодических колебаний является чрезвычайная сложность нахождения общего решения. Если в случае линейных вынужденных колебаний общее решение получается простым добавлением решения для свободных колебаний, то в нелинейной системе такой метод не проходит из-за неприменимости принципа суперпозиции.

Между тем как с точки зрения теории колебаний, так и с точки зрения приложений представляет интерес изучение общего поведения нелинейной колебательной системы. В особенности это относится к почти консервативным колебательным системам со многими степенями свободы или находящимся под воздействием внешних возмущений, для которых периодические колебания являются исключительным случаем.

В дальнейшем речь будет идти главным образом о таких системах.

Подобные задачи, как например, знаменитая задача трех тел, неоднократно рассматривались в небесной механике, главным образом в связи с космогоническими проблемами. Исследования проводились в основном качественными методами, введенными еще Пуанкаре. Несмотря на ряд чрезвычайно важных и интересных результатов, полученных с помощью качественных методов, они дают весьма неполную картину движения, особенно при наличии внешних возмущений.

С другой стороны, еще в 30-х гг. получил развитие весьма гибкий и мощный метод — так называемый метод усреднения. Примененный впервые, по-видимому, Ван-дер-Полем, он получил строгое математическое обоснование и развитие в работах Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова и их учеников (4). В принципе этот метод подходит для исследования общего решения нелинейных уравнений с малым параметром; именно он и будет использован в настоящей работе. Фактически, однако, такие исследования если и производились в отдельных случаях, то с применением численных методов, что не давало возможности выяснить общие закономерности нелинейных колебаний.

Другая важная область приложений — ускорители заряженных частиц. Нелинейными колебаниями здесь являются как само вращение релятивистской частицы в магнитном поле (зависимость периода от энергии), так и колебания частиц около равновесной орбиты. В последнем случае исследовались, главным образом, периодические и почти — периодические режимы, что давало возможность применить классические методы теории колебаний. Наоборот, для изучения фазовых колебаний, возникающих при взаимодействии вращающейся в магнитном поле релятивистской частицы с ускоряющим высокочастотным полем, с самого начала были применены другие методы, так как требовалось выяснить общее поведение решения. Интересно отметить, что многочисленные исследования фазовых колебаний были проведены вне связи с общей теорией нелинейных колебаний, которая в свою очередь не обратила внимания на эти важные исследования частного случая нелинейной системы.

В результате в теории колебаний, которая издавна считалась объединяющей различные разделы физики единством закономерностей, создалось положение, когда одни и те же физические явления называются различными именами и исследуются различными методами, иногда в работах одних и тех же авторов. Так говорят о фазовых колебаниях заряженных частиц в процессе ускорения, о биениях амплитуды (2)

или о нелинейных колебаниях амплитуды (3) в случае колебаний тех же заряженных частиц около равновесной орбиты, об асинхронных колебаниях (4), о динамическом резонансе (5). Отметим, что в работе (6) была предпринята попытка связать фазовые колебания в ускорителях с общей теорией колебаний, однако авторы специально подчеркивали иную постановку задачи. Такое положение не только представляет большое неудобство в смысле разрозненности исследований, но и приводит иногда к существенным ошибкам (7).

В последнее время интерес к изучению общего поведения нелинейной колебательной системы дополнительно возрос в связи с интенсивными исследованиями в области управляемых термоядерных реакций, а также новых методов ускорения, использующих плазму (8, 9). В таких системах заряженные частицы совершают огромное число колебаний в самосогласованных полях, причем колебания, как правило, нелинейны даже при малых амплитудах. Разумеется, главным физическим процессом в плазме являются не колебания отдельных заряженных частиц, а коллективные движения большого числа частиц, приводящие к сильным флуктуациям самосогласованного поля и зачастую к неустойчивости плазмы. Однако в тех важных для практических применений случаях, когда коллективные колебания достаточно малы, основным процессом в плазменных системах могут оказаться колебания отдельных заряженных частиц в квазистационарных самосогласованных полях.

$$H = p^2/2M + U(q, \lambda_1) + \varepsilon U_1(q, \lambda, \vartheta),$$

$$\lambda_1 = \lambda_1(\tau);\ \lambda = \lambda(\tau, q, \dot{q}, \ddot{q}, \ldots);\ \frac{d\vartheta}{dt} = \Omega(\tau);\ \tau = \varepsilon t. \qquad (1)$$

В настоящей работе предпринята попытка исследования общего характера движения простейших типов нелинейных колебательных систем. Большая часть диссертации посвящена изучению нелинейного осциллятора с одной степенью свободы, описываемого гамильтонианом:

Особенностью гамильтониана является малость или «медленность» возмущений, характеризуемая параметром $\varepsilon \ll 1$. Это дает возможность применять различные приближенные методы. Вместе с тем гамильтониан (1) содержит достаточно разнообразные возмущения. Так, параметр λ_1 характеризует адиабатические процессы, λ — различные диссипативные и автоколебательные процессы, ϑ — резонансные возмущения. Поэтому исследование (1) дает возможность выявить достаточно общие закономерности нелинейных колебаний и распространить полученные результаты на более сложные системы, а именно — на колебательные системы с почти разделяющимися переменными. Последний термин как раз и означает, что движение по каждой степени свободы может быть охарактеризовано гамильтонианом типа (1), в котором связь с другими степенями свободы входит как малое возмущение.

Наиболее существенным результатом работы является обнаружение и изучение своеобразной стохастической неустойчивости, приводящей к более или менее сильным флуктуациям колебаний или даже к неограниченному их росту при отсутствии затухания в системе. Физический смысл этой неустойчивости состоит в том, что движение колебательной системы стремится к статистическому равновесию с внешними возмущениями или имеет, как говорят, «размешивающийся» характер. Движения такого типа известны, вообще говоря, из общей теории динамических систем (10). В работах Н. С. Крылова (11) дан весьма общий критерий «размешивания» и показано, что для всех практически интересных законов взаимодействия при достаточно большом числе степеней свободы движение принимает «размешивающийся» характер. Отличие результатов настоящей работы от упомянутых заключается в следующем. Прежде всего критерий Н. С. Крылова является лишь достаточным. Поэтому он плохо применим к системам с малым числом степеней свободы, которые играют большую роль в приложениях. Кроме того, он совершенно неприменим в магнитном поле, что даже заставило Н. С. Крылова предположить возможность отклонений от обычных статистических законов. Критерии, полученные в настоящей работе, являются и необходимыми, и достаточными, т. е. определяют действительную физическую границу между стабильными колебаниями и стохастическим движением, правда, для значительно более узкого класса динамических систем. Иными словами критерий Н. С. Крылова применим главным образом для обоснования статистической физики, в то время как критерии и методы настоящей работы больше подходят для практических приложений и наиболее легко применимы именно при малом числе степеней свободы. Отметим, что движение в магнитном поле ничем не отличается от остальных случаев.

Основные результаты диссертации содержатся в опубликованных работах (12, 13) и в отчетах (14—17).

В гл. I диссертации исследуется прохождение нелинейного осциллятора с одной степенью свободы через резонанс. Этот процесс оказывается весьма удобным с точки зрения выявления различных особенностей нелинейных колебаний.

Предварительно в § 1 развиваются некоторые методы перехода к «медленным» переменным, использующие гамильтоновскую технику в сочетании с дополнительными приемами. Наиболее важным из них является простой метод введения в гамильтониан производных от q. Точные уравнения в «медленных» переменных имеют вид:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon}{\omega} \cdot \frac{d\lambda_1}{d\tau}\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} - \overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda_1}}\right) - \varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \Theta}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon\omega \frac{\partial U_1}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial W} - \varepsilon \frac{d\lambda_1}{d\tau}\left(\frac{\partial q}{\partial W}\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial q}{\partial \lambda_1}\right) \Big/ \frac{\partial q}{\partial \Theta}, \tag{2}$$

где $W = p^2/2M + U(q, \lambda_1)$ — энергия осциллятора без учета возмущения, $q(W, \Theta, \lambda_1)$ — решение невозмущенной задачи;

$$\Theta = \int \omega(W, \lambda_1)\,dt + \varphi; \quad \frac{dq}{dt} = \omega\frac{\partial q}{\partial \Theta}$$

$2\pi I = \oint p\,dq$ — адиабатический инвариант невозмущенных колебаний; черта означает усреднение по периоду при постоянном λ_1.

В § 2 исследуются уравнения первого приближения метода усреднения в простейшем случае единственного резонанса. Общий случай рассмотрен в § 2 гл. II. Наиболее интересным оказывается медленное прохождение через резонанс, которое имеет место при выполнении неравенства:

$$A = \left|\frac{(\dot{W})_{max}}{\dot{\Omega}}\frac{d\omega}{dW}\right| \gg 1. \qquad (3)$$

Здесь $(\dot{W})_{max}$ — максимальная скорость изменения энергии при резонансе, а $\dot{\Omega}$ — скорость изменения частоты внешнего возмущения. Характерной особенностью нелинейной системы являются колебания ее частоты и энергии около резонансного значения, которые мы будем называть фазовыми по аналогии с теорией ускорителей. Их частота равна по порядку величины:

$$\Omega_{\Phi}^{2} \sim (\dot{W})_{max} \frac{d\omega}{dW} \cdot \qquad (4)$$

Выяснено, что хорошо известное из теории ускорителей явление захвата или автофазировки есть общее свойство нелинейных колебательных систем. Исследовано также другое явление, названное однократным прохождением через резонанс. Наиболее интересная и важная особенность их состоит в своеобразной независимости характера движения от начальных условий. Отметим также, что при стремлении к нулю скорости прохождения через резонанс, в общем случае нет непрерывного перехода к движению по стационарной резонансной кривой. Такой переход имеет место лишь при наличии захвата.

В остальных параграфах главы I рассматриваются различные поправочные эффекты: диссипативные силы, поправка к частоте, адиабатические процессы при прохождении через резонанс и высокочастотные возмущения. Влияние этих эффектов на движение незначительно при условиях:

$$\varepsilon Q \gg 1; \sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}} \ll 1, \qquad [5]$$

где: Q — добротность колебательной системы;
ε — малый параметр, характеризующий величину возмущения (1);
α — коэффициент нелинейности: $\omega' = \frac{d\omega}{dW} = \alpha \frac{\omega}{W}$.

Второе неравенство имеет следующий физический смысл: нелинейное изменение частоты осциллятора ($\sim \omega' W$), т. е. разность между частотой при данной энергии и частотой малых колебаний должна быть велика по сравнению с шириной резонансной кривой ($\sim \varepsilon\omega$). Из (5) следует также, что $\alpha Q \gg 1$.

В гл. II диссертации рассматривается взаимодействие между резонансами, т. е. явления, связанные с одновременным воздействием на нелинейный осциллятор многих возмущений с различными частотами. Такого рода процессы изучались в различных работах (см. например, 18), однако, из-за численных методов исследования были выяснены лишь второстепенные эффекты.

Взаимодействие между резонансами оказывает существенное влияние на движение, если частота фазовых колебаний Ω_{Φ} сравнивается с расстоянием между резонансами $\Delta\Omega$ или превосходит $\Delta\Omega$. Можно следующим образом пояснить физический смысл этого условия. Вследствие механизма автофазировки частота нелинейного осциллятора как бы «привязана» к одной из резонансных частот и совершает вокруг нее медленные фазовые колебания. Если амплитуда этих колебаний, равная по порядку величины их частоте, сравнивается с расстоянием между резонансами или превышает это расстояние, то появляется возможность перехода частоты осциллятора от одного резонансного значения к другому. При условии

$$\chi = \frac{\Omega_{\Phi}^{2}}{(\Delta\Omega)^{2}} \gg 1 \qquad (6)$$

эти переходы происходят, как правило, стохастически.

В § 1 подробно рассмотрен простейший случай взаимодействия резонансов, когда свободные колебания системы являются гармоническими. Доказывается, что при выполнении условия (6) движение действительно носит стохастический характер. Рассмотрен особый случай (медленное периодическое прохождение через один и тот же резонанс), когда стохастичность практически отсутствует, несмотря на выполнение (6). Обнаруженный стохастический характер колебаний нелинейного осциллятора представляет один из простейших случаев «размешивающегося» движения. Критерий (6) может рассматриваться поэтому как критерий «размешивания» для данной динамической системы.

При условии $\chi \ll 1$ колебания осциллятора ограничены. В промежуточном случае $\chi \sim 1$ возможны различные устойчивые режимы как увеличения, так и уменьшения энергии колебаний, аналогичные хорошо известному микротронному режиму в ускорителях.

В § 2 рассмотрен более общий случай, когда собственные колебания осциллятора, как и внешние возмущения, являются ангармоничными. Показано, что основные результаты гл. I и § 1 гл. II остаются в силе. Отличие состоит в том, что фазовые колебания становятся также ангармоничными и это приводит, в частности, к изменению числовых коэффициентов в формулах. Кроме того, вследствие влияния нерезонансных гармоник, фазовые колебания осциллятора испытывают некоторые флуктуации. Дана оценка порядка величины флуктуаций и связанной с ними вероятности захвата при прохождении через резонанс. Расчеты этого параграфа сравниваются с результатами численного интегрирования уравнений колебания простого нелинейного осциллятора (16).

В том случае, когда колебания носят стохастический характер, они могут быть описаны с помощью уравнения типа Фоккера-Планка. Этот вопрос рассматривается в § 3. Получены выражения двух первых моментов функции перехода $\overline{(\Delta I)}$ и $\overline{(\Delta I)^2}$, необходимые для составления уравнения Фоккера-Планка. Если внешние возмущения зависят только от времени, между моментами имеется простое соотношение

$$\overline{\Delta I} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial I}\overline{(\Delta I)^2}. \tag{7}$$

Если же возмущения зависят также от координаты или ее производных, соотношение (7), вообще говоря, значительно усложняется. В этом случае точное решение уравнения Фоккера-Планка представляет большие трудности. Поэтому рассмотрен приближенный метод оценки решения. В качестве примера произведен расчет колебаний заряженной частицы в потенциальной яме произвольной формы под действием переменного электрического поля с учетом радиационного трения (19). Если электрическое поле имеет спектр черного излучения, функция распределения частицы стремится к гиббсовской.

В гл. III диссертации разобраны некоторые приложения исследованных в гл. I, II закономерностей нелинейных колебаний.

В § 1 анализируется асимптотический метод усреднения Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова (20), применительно к колебательным системам. Отличительной чертой метода, значительно упрощающей расчеты, является усреднение по явно содержащемуся времени, что эквивалентно пренебрежению взаимодействием «быстрых» (обычных) колебаний и «медленных» колебаний, вызываемых действием возмущений. При соблюдении определенных условий (главным образом при наличии достаточно сильного затухания в системе) такое пренебрежение допустимо и было строго обосновано (4). При отсутствии затухания вопрос оставался открытым. В диссертации показано, что в этом случае возможно возникновение стохастической неустойчивости, связанной с субгармоническими резонансами между «быстрыми» и «медленными» колебаниями. В результате точное решение может уйти сколь угодно далеко от решения усредненных уравнений. Более того, оказывается, что даже при наличии затухания, колебания хотя и остаются практически ограниченными, могут испытывать значительные флуктуации. Следует отметить, что стохастическая неустойчивость имеет место лишь при конечных значениях малого параметра ε. Если $\varepsilon \to 0$ и входящие в уравнения функции являются аналитическими, неустойчивость в конце концов исчезает. Сказанное выше не означает неприменимости самого метода усреднения. Явление стохастической неустойчивости исследуется этим же самым методом. Неприменимы лишь асимптотические разложения, не учитывающие взаимодействия «быстрых» и «медленных» колебаний.

В § 2 такое взаимодействие рассматривается на примере простой системы, описываемой уравнением

$$\ddot{x} = \varepsilon f(x)\cos\Omega t. \tag{8}$$

Исследование (8) представляет и самостоятельный интерес, поскольку это простейший случай высокочастотной потенциальной ямы, применяемой для получения управляемых термоядерных реакций. Если

$$f(x) = \begin{cases} x - a & \text{при } x > a \\ 0 & \text{при } -a < x < a \\ x + a & \text{при } x < -a, \end{cases}$$

то критерий стохастической неустойчивости имеет вид

$$\chi = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}}\cdot\left|\frac{\varepsilon a \sin\left(\pi\sqrt{2}\,\Omega^2/\varepsilon\right)}{\Omega^2(x_{max} - a)}\right| \gg 1. \tag{9}$$

При выполнении (9) среднее значение энергии следующим образом зависит от числа «медленных» колебаний:

$$\overline{W} \simeq \overline{W}_0 e^{\varepsilon^2 N/8}. \tag{10}$$

В § 3 исследуются условия сохранения адиабатических инвариантов. В последнее время этому вопросу было посвящено несколько работ (21—23). Их общим результатом был вывод о том, что во всех порядках асимптотического разложения адиабатический инвариант сохраняется. Этот результат имеет определенный смысл лишь при апериодическом изменении параметров. Если же параметры изменяются периодически, то метод асимптотического разложения, вообще говоря, не применим. Причина этого состоит в возможности накапливания малых изменений адиабатического инварианта от периода к периоду. Еще в работе (24) было указано на важную роль резонансов в изменении адиабатических инвариантов. Своеобразный резонансный эффект расмотрен также в (25). Однако оба случая являются в известном смысле исключительными. Вообще говоря, адиабатический инвариант испытывает ограниченные колебания или, при определенных условиях, изменяется стохастически. В последнем случае он может измениться на любую величину. Условия возникновения стохастичности существенно облегчаются, если параметры зависят от двух частот, одна из которых много меньше другой (и обе, разумеется, много меньше частоты колебаний системы).

В § 4 рассмотрено движение заряженной частицы в ловушке с магнитными пробками. Такие системы широко применяются сейчас в исследованиях по управляемым термоядерным реакциям. Удержание частицы в ловушке связано с сохранением ее орбитального магнитного момента, который является адиабатическим инвариантом. Параметром в данном случае служит медленно изменяющееся вдоль силовых линий магнитное поле. Вычисления проведены для упрощенного гамильтониана, не учитывающего кривизну магнитной силовой линии. Произведена оценка резонансов высших порядков. В аксиально-симметричном магнитном поле критерий стохастичности имеет вид:

$$\chi = \frac{\left| 2\sqrt{\pi}\, I P_l \dfrac{\partial}{\partial I}\left(\bar{\omega} - l\Omega\right) \right|}{\Omega^2} \gg 1. \qquad (11)$$

Здесь I — адиабатический инвариант, пропорциональный магнитному моменту частицы, $\bar{\omega}$ — среднее значение ларморовской частоты за период медленных колебаний вдоль магнитных силовых линий с частотой Ω, P_l — некоторые коэффициенты, зависящие от формы магнитного поля. Среднее число отражений от пробок до выхода частицы из ловушки составляет

$$N \simeq 2\left(\frac{\Omega}{\pi P_l}\right)^2. \qquad (12)$$

При наличии азимутальной неоднородности магнитного поля возникновение стохастической неустойчивости значительно облегчается; критерий имеет вид:

$$\frac{4}{\pi\sqrt{\pi}} \left| \frac{I P_l^{(k)} \dfrac{\partial}{\partial I}(k\bar{\omega} - l\Omega)}{\Omega_д \sqrt{\left| \dfrac{\partial}{\partial t}(k\bar{\omega} - l\Omega) \right|}} \right| \gg 1, \qquad (13)$$

где $\Omega_д$ — частота аизмутального дрейфа частиц, а индекс «к» означает порядок проходимых резонансов. Он определяется соотношением $к \simeq (\Omega/\bar{\omega})/(\Delta H/H)$;

$\Delta H/H$ — относительная величина азимутальной неоднородности магнитного поля. Для появления неустойчивости в этом случае необходимо также выполнение критерия быстрого прохождения через резонансы:

$$A = \left| \frac{I P_l^{(k)} \dfrac{\partial}{\partial I}(k\bar{\omega} - l\Omega)}{\dfrac{\partial}{\partial t}(k\bar{\omega} - l\Omega)} \right| \ll 1. \qquad (14)$$

Число отражений от пробок до выхода частицы из ловушки при выполнении (13, 14) равно:

$$N \simeq \frac{\Omega^2}{2\pi^2 k^3 \left(P_l^{(k)}\right)^2}. \qquad (15)$$

Результаты расчета совпадают по порядку величины с экспериментальными данными С. Н. Родионова (26) и результатами численного интегрирования (27).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов.* Основные проблемы нелинейной механики, Гостехиздат, 1932.
2. *Ю. Ф. Орлов,* ЖЭТФ, 32, 316, 1957.
3. *А. А. Коломенский,* Докторская диссертация, ФИАН, 1956 г.
4. *Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский,* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958 г.

5. *Арсланов*, Труды Горьковского политехнического института, **13**, 5, 1957 г.

6. *А. А. Андронов, Г. А. Горелик*, ДАН, **49**, 664, 1945.

7. *P. A. Sturrock*, Ann. Phys., **3**, 113, 1958.

8. *Г. И. Будкер*, Доклады на Международной конференции по мирному использованию атомной энергии, Женева, 1956 г.

9. *В. И. Векслер*, там же.

10. *Хопф*, УМН, IV, 113, 1949 г.

11. *Н. С. Крылов*, Работы по обоснованию статистической физики. Изд. АН СССР, 1950.

12. *Б. В. Чириков*. ДАН, **125**, 1015, 1959 г.

13. *Б. В. Чириков*, Атомная энергия, **6**, 630 (1959).

14. *Б. В. Чириков*, Прохождение нелинейной колебательной системы через резонанс, I, II, отчет ИЯФ СО АН СССР, 1958.

15. *Б. В. Чириков*, Резонансные процессы в системах с динамической фокусировкой, отчет ИЯФ СО АН СССР, 1959 г.

16. *В. М. Лагунов. Б. В. Чириков*, Влияние перезонансных гармоник на фазовые колебания в нелинейной системе, отчет ИЯФ СО АН СССР, 1959.

17. *А. Д. Гондра, Б. В. Чириков*, Адиабатические процессы в нелинейных системах, отчет ИЯФ СО АН СССР, 1959.

18. *Ю. А. Митропольский*, Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах, изд. АН УССР, 1955.

19. *Б. И. Шубадеев*, Дипломная работа, 1959.

20. *Н. Н. Боголюбов*, О некоторых статистических методах в математической физике, изд. АН УССР, 1945.

21. *R. Kulsrud*, Phys. Rev, **106**, 205 (1957).

22. *M. Kruskal*, Proc. Third Internat. Conf. on Ionisation. Phenomena in Gases, Venice, 1957.

23. *A. Lenard*, Ann. Phys., **6**, 261, 1959.

24. *Л. И. Мандельштам, А. А. Андронов, М. А. Леонтович*, ЖРФХО, **60**, 413, 1928.

25. *В. М. Волосов*, ДАН, **121**, 22, 1958.

26. *С. Н. Родионов*, Атомная энергия, **6**, 623, 1959.

27. *A. Garren* и др. Доклад № 383 на Второй Международной конференции по мирному использованию атомной энергии, Женева, 1958 г.

г. Новосибирск. Тип. № 1 Полиграфиздата. Заказ № 9788. Тир. 150.