АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Учёный совет Института ядерной физики

На правах рукописи

Б.В.Чириков

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА И СТОХАСТИЧНОСТИ

041 – "Теоретическая и математическая физика"

Автореферат диссертации на соискание учёной степени доктора физико-математических наук

Новосибирск

1968

Работа выполнена в Институте ядерной физики Сибирского отделения АН СССР.

Официальные оппоненты:

Академик - САГДЕЕВ Роальд Зиннурович

Член-корреспондент Арм.АН, доктор физ.-мат.наук - ОРЛОВ Юрий Федорович

Доктор физ.-мат.наук - РАБИНОВИЧ Матвей Самсонович

Автореферат разослан " " 1968 г.

Защита диссертации состоится " "

на заседании Совета Института ядерной физики Сибирского отделения АН СССР.

Адрес: г.Новосибирск 90, Академгородок, Институт ядерной физики, конференцзал.

С диссертацией можно ознакомиться в ГПНТБ.

Адрес: Новосибирск, Академгородок, Вычислительный центр.

Учёный секретарь Совета
кандидат физ.-мат.наук А.Г.Хабахпашев

Предлагаемая диссертация является развитием идей и методов кандидатской диссертации автора /1/ и посвящена, главным образом, исследованию многомерных нелинейных колебаний консервативной механической системы в целом, т.е. на неограниченном временном интервале и для произвольных начальных условий. Эта проблема, частным примером которой может служить знаменитая задача трех тел в астрономии, является, вероятно, самой сложной и в то же время наиболее красивой в классической механике. Взятая в целом, она еще ждёт своего решения. Однако уже сейчас можно нарисовать некоторую общую картину движения подобной системы, достаточно подробную, чтобы служить ориентиром для будущих исследований и современных приложений.

В настоящее время имеется два основных подхода к рассматриваемой проблеме. Первый из них связан с отысканием устойчивых периодических или почти - периодических движений. Сюда относится классическая теория нелинейных колебаний (Пуанкаре, Ляпунов, Мандельштам и др.), основной недостаток которой - слишком частные случаи движения - был преодолен в последнее время в знаменитых работах Колмогорова, Арнольда и Мозера (теория КАМ).

При другом подходе, в так называемой эргодической теории, исследуются, наоборот, случаи предельно неустойчивого движения, приводящие к статистическому описанию (Биркгоф, Хопф, Аносов, Синай и др.). Оба подхода дали, особенно в последнее время, ряд блестящих результатов, которые служат надежным основанием любых дальнейших исследований в этой области. Однако, в силу чрезвычайной математической сложности задачи они остаются до сих пор лишь частными, или, лучше сказать, крайними случаями движения. Неизвестно даже при каких условиях происходит переход от одного подхода к другому, т.е. от устойчивого движения к неустойчивому. В этой ситуации представляется целесообразным отказаться от обязательного в математике чисто дедуктивного метода и перейти к более привычному для физики полуэмпирическому методу, который в данном случае означает систему моделей, аналитические оценки и эксперименты, численные или "настоящие". До известной степени такими были исследования школы Мандельштама в плане сочетания теории и эксперимента применительно к частным задачам нелинейных колебаний. Аналогичный подход к сформулированной выше общей проблеме был начат Крыловым /2/, многие идеи которого используются и развиваются в диссертации. Основное отличие данной работы состоит в том, что мы интересуемся не столько макроскопическими молекулярными системами статистической физики, характер движения которых так или иначе надежно установлен, сколько системами с небольшим числом степеней свободы, где эта проблема совсем не тривиальна и представляет не только принципиальный интерес.

Основой нашего анализа нелинейных колебаний является понятие нелинейного резонанса, впервые возникшее, по-видимому, в небесной механике в связи с так называемым либрационным движением планет (Лагранж) и, в более явной форме, в теории ускорителей в связи с механизмом автофазировки (Векслер, Мак-Миллан). Наиболее существенным и, насколько нам известно, новым процессом оказывается взаимодействие нескольких резонансов, всегда имеющее место в нелинейной системе.

В диссертации строится система моделей (см.рисунок), начиная с одномерного нелинейного осциллятора. Нисходящие стрелки указывают на упрощение модели вплоть до элементарной, которая детально исследуется аналитически и с помощью численных экспериментов. Полученные результаты применяются в цепочке все более и более сложных моделей вплоть до многомерного нелинейного осциллятора (восходящие стрелки). Для аналитических исследований в диссертации широко применяется асимптотический метод усреднения Крылова-Боголюбова-Митропольского (метод КБМ) на основе гамильтонова формализма. При этом мы должны, естественно, ограничиться случаем малого (или медленного) возмущения (параметр $\varepsilon \ll 1$). При этом движение невозмущенной системы предполагается известным в той или иной форме. Поскольку, однако, основные результаты диссертации представляют собой оценки по порядку величины, область их применимости может быть продолжена до $\varepsilon \sim 1$.

Отметим сразу два наиболее интересных, на наш взгляд, полученных результата. Во-первых, была обнаружена и исследована так называемая стохастическая неустойчивость, которая с практической точки зрения является наиболее опасной неустойчивостью нелинейных колебаний (и в то же время своеобразным методом ускорения частиц), а с принципиальной точки зрения даёт модель статистических законов, применимую, в отличие от модели современной статистической механики, к системам с малым числом степеней свободы $N \geq 2$ x). Во-вторых, исследована так называемая диффузия Арнольда, которая оказалась своеобразной универсальной неустойчивостью нелинейных колебаний в тех случаях, когда стохастическая неустойчивость отсутствует. Кроме того проведенные исследования позволяют, как нам кажется, представить себе весьма детально общую картину многомерных нелинейных колебаний, в частности, довольно сложную структуру их фазового пространства. С указанным выше ограничением на величину возмущения удаётся проследить переход от колмогоровской области максимальной устойчивости к области предельной неустойчивости эргодической теории и показать, что в общем случае обе области глубоко и довольно сложным образом проникают друг в друга, образуя так называемую систему с разделенным фазовым пространством. Последнее обстоятельство и является главным препятствием на пути построения строгой математической теории. Несмотря на известную расплывчатость этой картины и сомнения в некоторых её деталях, вызывающие естественную неудовлетворенность, она является пока единственным ориентиром в этой неизведанной области, хотя бы для тех же численных экспериментов, проведение которых вслепую весьма неэффективно как показывает опыт. Проделанную в диссертации работу можно поэтому рассматривать как некоторую глубокую разведку или рекогносцировку, призванную способствовать дальнейшим более аккуратным исследованиям.

Переходим к систематическому обзору диссертации.

Небольшая глава 1, посвященная исследованию главным образом изолированного нелинейного резонанса, представляет краткое изложение кандидатской диссертации /1/ и включена для удобства чтения. Наиболее существенным здесь является приближение умеренной нелинейности (§ 1.3):

$$\varepsilon \ll \alpha \ll 1/\varepsilon \qquad (1)$$

(α - безразмерный параметр нелинейности), которое приводит к универсальному описанию нелинейного резонанса после перехода к "медленным" переменным (§ 1.2) и применения метода усреднения КБМ. В § 1.4 рассматриваются основные свойства такого резонанса, а в § 1.6 - некоторые поправки второго приближения; здесь же даётся простой критерий стабилизации резонанса нелинейностью при $\varepsilon \sim \alpha$.

x) По-видимому, первое наблюдение стохастической неустойчивости нелинейных колебаний было произведено фактически Говардом и Хайном /11/, хотя это явление и не было в тот момент понято.

Глава 11 является основной в диссертации, в ней сформулированы главные особенности взаимодействия резонансов и стохастичности.

В § 2.1 из физических соображений вводится параметр (S) и критерий стохастичности:

$$S = \frac{(\Delta\omega)_н}{\Delta} \sim \frac{\Omega_\phi}{\Delta} \sim 1 \qquad (2)$$

где $(\Delta\omega)_н$ - нелинейная ширина резонанса; Ω_ϕ - частота фазовых колебаний; Δ - расстояние между соседними резонансами. Критерий (2) означает перекрытие соседних резонансов и является одним из наиболее важных результатов диссертации^x). Затем выбирается основная модель (см. рисунок) пока как частный случай нелинейного резонанса, удобный для аналитического исследования. Далее, получается критерий устойчивости её движения, совпадающий с (2), и связь с теорией КАМ (§ 2.2). Прежде чем переходить к выяснению характера неустойчивости основной модели в § 2.3 разбирается элементарный пример стохастической (но негамильтоновой) системы, свойства которой полностью изучены. Здесь же вводятся основные понятия эргодической теории: эрго - дичность, перемешивание, корреляции, локальная неустойчивость движения и энтропия Крылова-Колмогорова; выясняется связь последней с термодинамической энтропией. Подчеркивается, что ло - кальная неустойчивость движения; которая развивается по экспо - ненциальному закону, является основным, определяющим, свойством стохастической системы. Затем с помощью критерия локальной неустойчивости Аносова-Синая исследуется структура стохастической неустойчивости основной модели и дается оценка её энтропии (§ 2.4). Выясняется, что для гладкого возмущения всегда имеются области устойчивости, что не позволяет применить результаты современной эргодической теории к рассматриваемой модели. Эта особенность оказывается типичной для нелинейных колебаний вообще. Наконец, в § 2.5 обсуждается характер границы стохастичности и промежуточной зоны, разделяющей области колмогоровской устой - чивости и стохастичности. Указывается, что положение границы стохастичности, как простой линии, может быть определено лишь по порядку величины (2). Уточнение этой оценки неминуемо приведет к проблеме структуры переходной зоны, которая не только сложна, но и существенно зависит от конкретного вида возмущения. По -

x) В последнее время аналогичный критерий был получен Контопулосом /10/.

этому не только доказательства, но и точные формулировки утверждений в этой области становятся чрезвычайно громоздкими и трудно обозримыми. В этом лежит вторая трудность для эргодической теории. По этой же причине большинство результатов диссертации сформулировано в виде оценок по порядку величины.

В последующих параграфах проводится более детальное аналитическое исследование такой системы с разделенным фазовым пространством на еще более простой, но адэкватной задаче, элементарной модели.

Предварительно в § 2.6 исследуется стохастический слой вблизи сепаратрисы колебаний. Неустойчивость движения в этой области была известна еще Пуанкаре и детально исследовалась в последнее время Мельниковым. Однако оценить ширину стохастического слоя удалось лишь с помощью критерия (2), сначала для некоторой специальной системы /3/, а затем в общем случае - в настоящей диссертации. Показано, что стохастический слой вблизи сепаратрисы нелинейного резонанса является зародышем всякой неустойчивости нелинейных колебаний. С другой стороны, движение вблизи сеператрисы описывается основной моделью, чем и оправдывается её выбор в качестве главного объекта исследований в диссертации. Отношение ширины стохастического слоя к ширине резонанса даётся оценкой:

$$\mu \sim e^{-C/s} \qquad (3)$$

где $C \sim 1$ - некоторая постоянная. Эта оценка с новой стороны подтверждает основной критерий стохастичности (2).

В § 2.7 исследуется полная всюду плотная система резонансов, включающая все гармоники возмущающей силы и собственных колебаний осциллятора, что может быть существенно для неаналитического возмущения. Вводится гипотеза о возможности пренебрежения резонансами высших порядков, которая подтверждается численными экспериментами (глава 111). Вводится понятие перенормировки резонансов, существенное для правильного учёта близких резонансов.

В стохастической области ($S \gg 1$) исследуется влияние "островков" устойчивости, возникающих вокруг периодических решений, число которых по теореме Синая растёт экспоненциально с периодом T. (§ 2.8). Эти устойчивые области названы квази -

резонансами за далеко идущую аналогию с обычным нелинейным резонансом в отсутствии перекрытия ($S \ll 1$). В частности, оказывается, что эти квази-резонансы разрушают друг друга при перекрытии. Это вытекает из того, что их общая площадь по оценке расходится с T, между тем как в численных экспериментах не обнаруживается сколько-нибудь значительных устойчивых областей (глава III). Существование и взаимное разрушение всюду плотной системы квази-резонансов и являются той основной особенностью рассматриваемых систем, которая хотя и не даёт возможности распространить на них результаты современной эргодической теории, однако, приводит тем не менее к стохастичности движения с точностью до малой, но конечной меры, убывающей с ростом параметра стохастичности, вообще говоря, $\sim \exp(-Ah\sqrt{S})$ ($A \sim 1$ - константа), а для специальных значений S как S^{-2}. Напомним, что теоремы эргодической теории формулируются обычно с точностью до меры нуль.

Наконец, в § 2.10 исследуется переход к собственно статистическому описанию, т.е. прослеживается, каким образом из динамических уравнений возникает кинетическое уравнение. Мы ограничиваемся здесь основной моделью (§ 2.1). Последняя представляет собой одномерный осциллятор под действием периодического внешнего возмущения, случай, наиболее резко отличающийся от обычной ситуации в классической статистической механике, объекты которой характеризуются огромным числом степеней свободы $N \to \infty$. В общем случае наиболее удобная техника получения кинетического уравнения непосредственно из уравнения Лиувилля при выполнении критерия стохастичности (2) содержится в работах /4,3/. В § 2.10 отмечается, что переход к кинетическому уравнению необходим для регуляризации некорректной задачи вычисления траекторий в стохастической области, некорректной не только с физической точки зрения в силу неустойчивости движения, но также и математически при $t \to \pm\infty$. Получение кинетического уравнения возможно путем разделения динамического процесса перемешивания и собственно диффузии. Следуя общей идее Боголюбова, мы вводим два масштаба времени, один из которых соответствует времени свободного пробега молекулы в теории Боголюбова /5/, а второй - времени диффузии (гидродинамический масштаб времени). Статистическое описание ограничено при этом со стороны малых времен: $t \gtrsim h^{-1}$ (h - энтропия) и справедливо только для достаточно больших ячеек фазового пространства: $\delta I \gtrsim \exp(-Ch/\varepsilon^2)$ (I - действие, $C \sim 1$ - константа). В конце § 2.10 получены попутно общие условия, при которых первые моменты диффузионного уравнения могут быть выражены через вторые моменты.

В заключительных параграфах главы II полученные для элементарной модели результаты обобщаются, используя общий критерий стохастичности (2), на более сложные модели, включая многомерный нелинейный осциллятор. Предварительно в § 2.9 критерий (2) проверяется на нетривиальном примере медленного, или обратимого, прохождения резонанса, которое было исследовано в § 1.5.

Вначале рассматривается случай одномерного нелинейного осциллятора с произвольным периодическим или почти-периодическим (с дискретным спектром) внешним возмущением. Даются оценки для энтропии и коэффициента диффузии. Здесь появляется третий масштаб времени: $\tau_\wedge \sim (\Delta\omega)^{-1}$ ($\Delta\omega$ - ширина спектра возмущения), соответствующий длительности столкновения в теории Боголюбова /5/. В интервале:

$$\tau_\wedge \lesssim t \lesssim \Delta^{-1} \tag{4}$$

(Δ - расстояние между линиями спектра возмущения) при дополнительном условии случайности фаз возмущения кинетическое уравнение может быть получено и для дискретного спектра без каких бы то ни было требований стохастичности движения; в частности, и для линейной системы. Мы называем поэтому такую модель статистических законов - линейной моделью. Она была введена впервые Боголюбовым /6/ и является основой современной статистической механики /7/. В отличие от этой модели применимость рассматриваемой в диссертации нелинейной модели, основанной на стохастичности движения, не ограничена по времени сверху.

Наиболее общие результаты диссертации содержатся, по необходимости в самом сжатом виде, в § 2.12, посвященном движению многомерного нелинейного осциллятора, который предполагается близким к системе с полностью разделяющимися переменными. Даны оценки границы стохастичности:

$$(\varepsilon\alpha)_s \sim (2N)^{-2(\sigma-1)} \tag{5}$$

а также энтропии и коэффициента диффузии (по частоте):

$$D_\omega \sim h^3 \sim \frac{\omega^3}{\sqrt{\bar{m}}}(\alpha\xi)^2 \qquad (6)$$

Здесь $\xi^2 = \varepsilon^2 N_1$ – порядок полного взаимодействия в системе; ε – порядок взаимодействия группы из $\bar{m}$ степеней свободы ($\bar{m}$ – кратное взаимодействие); N, N_1 – число степеней свободы и резонансов, соответственно. Для неаналитического возмущения получена нижняя граница гладкости l (число непрерывных производных возмущающей силы), которое в комбинации с верхней границей Мозера даёт:

$$2N-3 < l \leq 2N+2 \qquad (7)$$

Область колмогоровской устойчивости ($\xi \ll 1$) пронизена пересекающейся ($N \geq 3$) всюду плотной системой стохастических слоев резонансов, вдоль которых возможна диффузия Арнольда /8/. Выяснены условия такой диффузии и получена оценка коэффициента диффузии, которая с некоторыми упрощениями имеет вид:

$$D_A \sim I^2\omega \cdot \frac{\varepsilon^{3/2}}{n\sqrt{\alpha}} \cdot \exp\left(-\frac{4N}{\bar{m}(N-1)} \cdot \left(\frac{\xi_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2N}} \cdot e^{\frac{\bar{m}n}{4n_0 N}}\right) \qquad (8)$$

где n – номер резонансной гармоники, а n_0 – некоторый параметр спектра системы. Существенным является двойная экспоненциальная зависимость от n , ограничивающая действие высших резонансов. Обнаружен новый вид диффузии Арнольда, который мы назвали стримерной диффузией. Она соответствует движению вдоль пересечения двух резонансов, которые сильно разрушают друг друга, образуя стохастическую область (стример) порядка ширины резонанса, а не стохастического слоя (3), как в обычной диффузии Арнольда. Это значительно увеличивает скорость диффузии:

$$D_c \sim I^2\omega \cdot \frac{\varepsilon^{3/2}}{n\sqrt{\alpha}} \cdot e^{-\frac{3}{4}\cdot\frac{\bar{m}n}{n_0}} \qquad (9)$$

Вводится понятие и дается оценка коэффициента двойной диффузии, связанной с пересечением большого числа стохастических слоев или стримеров. При этом длина диффузии оказывается $\sim t^{1/4}$. С учётом дополнительной "внешней" диффузии, которая практически всегда имеет место, диффузия Арнольда, ограниченная сама по себе очень узкими (при $\xi \ll 1$) стохастическими слоями (3), приводит к неустойчивости уже при любых начальных условиях.

Последний параграф главы 11 посвящен обсуждению природы статистических законов и его можно рассматривать как некоторое лирическое отступление. Причина, по которой целесообразно, как нам кажется, снова вернуться к этому вопросу, связана с тем, что в диссертации исследована очень простая модель стохастичности, в которой можно легко проследить во всех деталях возникновение статистических законов в динамической системе. Нам кажется, что такая модель может быть положена в основу общего объяснения статистических законов природы. Для этого необходимо прежде всего исключить свойство иррегулярности (понимаемое как отсутствие алгоритма) "настоящего" случайного процесса как ненаблюдаемое. Далее, вместо обычной постеновки статистического опыта как многократного повторения процесса при заданных макроскопических условиях следует рассматривать единый процесс в интервале: $-\infty < t < +\infty$. Наконец, показывается, что в отношении динамического аспекта движения невозможно выделить замкнутую подсистему из-за экспоненциальной неустойчивости стохастического движения. В этих условиях нарушение статистических законов в рассматриваемой модели могло бы иметь место только для специальных начальных условий всей Вселенной меры нуль. Обсуждаются некоторые варианты исключений даже этой минимальной гипотезы. Из принятой модели вытекает отсутствие "стрелы" (выделенного направления) времени, которое заменяется симметричным по времени свойством перемешивания. Вместе с констатацией факта весьма специальных начальных условий современной Вселенной, связанных с её сильной термодинамической неравновесностью или, лучше сказать, с отсутствием равновесного состояния вообще при гравитационном взаимодействии /9/ это разрешает парадокс необратимости Лошмидта. Попутно указывается, что парадокс Цермело, опирающийся на возвратную теорему Пуанкаре, основан на недоразумении, связанном с широко распространенным неправильным пониманием этой теоремы. Отмечается, что линейная модель современной статистической механики /7/ является возможной, но необязательной и не соответствует реальной молекулярной динамике. В связи с этим обсуждаются некоторые ошибки школы Пригожина. Изложенная точка зрения вполне естественна для эргодической теории, но оказывается, вероятно, несколько неожиданной для физиков. В частности, наш основной вывод о возможности классической механической модели статистических законов получается прямо противоположным выводу Крылова /2/, хотя, как уже отмечалось выше, общий подход к проблеме и многие идеи являются у нас близкими.

Побочным результатом развиваемой концепции явился выбор наилучшего в некотором смысле генератора псевдослучайных чисел, который необходим для решения многих задач (§ 4.7).

В главе III собраны результаты численных экспериментов по детальному изучению свойств элементарной модели, которая задаётся нелинейным преобразованием $\varphi, \psi \to \varphi', \psi'$ вида:

$$\varphi' = \{\varphi + k \cdot f(\psi)\}$$
$$\psi' = \{\psi + \varphi'\} \qquad (10)$$

Здесь скобки $\{\ldots\}$ обозначают дробную часть аргумента: k – параметр; $f(\psi)$ – произвольная функция.

Предварительно даётся общая сравнительная характеристика "настоящих" и численных экспериментов. Отмечается преимущество последних для определенного класса задач в отношении гибкости эксперимента и полной однозначной информации о состоянии системы (§ 3.1). Обсуждается главный "аппаратурный" эффект – ошибки округления и "квантованность" пространства вычислительной машины (ЭВМ). Затем производится выбор модели счёта и методики обработки результатов (§ 3.2). Это (особенно модель) является решающим для достижения предельных параметров численного эксперимента. Продолжительность движения в этих экспериментах равнялась обычно $10^7 - 10^8$ шагов преобразования (10) за исключением одного случая, когда она составляла 10^{10} шагов. Эксперименты проводились на БЭСМ-6 Вычислительного центра СО АН СССР совместно с Израйлевым. В § 3.3 исследуется область колмогоровской устойчивости ($S \ll 1$). Основное внимание обращается на выяснение положения границы вечной устойчивости теории КАМ по отношению к границе стохастичности (2).

Оказалось, что обе границы совпадают в пределах точности оценки (2)[x]. Попутно выяснилось, что накопление ошибок округления идет значительно медленнее, чем по случайному закону. Показано, что накопление ошибок эквивалентно действию некоторого генератора псевдослучайных чисел, который в данном случае оказался "плохим".

Опыты с неаналитическим возмущением показали, что устойчивость движения оказывается даже несколько лучше, чем по нижней оценке (7). Причина этого осталась невыясненной.

В §§ 3.4,5 описываются опыты в области стохастичности ($S \gg 1$). Основной результат состоит в том, что по всем критериям движение является здесь случайным, а суммарная площадь "островков" устойчивости убывает в соответствии с оценками § 2.8. Экспериментальные значения энтропии неожиданно хорошо согласуются с аналитическими оценками.

Наконец, в последнем параграфе этой главы описаны численные эксперименты с многомерной моделью, представляющей собой два связанных осциллятора типа (10). Эксперименты проводились на машине CDC-6600 Вычислительного центра ЦЕРН'а (Женева) совместно с Кайлом и Сесслером. Обнаружена слабая неустойчивость, развивающаяся за время $\sim 8 \cdot 10^8$ шагов, которая может быть интерпретирована как диффузия Арнольда, хотя это и не доказано, так как эксперименты окончились до построения теории диффузии Арнольда. Оказалось, что очень чувствительным и удобным методом индикации слабой диффузии является наблюдение локальной устойчивости движения, что позволяет существенно сократить время счёта.

В последней главе диссертации описаны некоторые приложения развиваемой теории стохастичности. Единственным "полезным" приложением является стохастическое ускорение, предложенное в разных вариантах Ферми /14/ и Бурштейном, Векслером, Коломенским /15/. Основной результат теории, развитой совместно с Заславским /13/, – наличие верхней границы по энергии, зависящей от параметров "стохатрона". Численные эксперименты, проведенные в /13/, показывают хорошее согласие этой границы с общим критерием (2). В последнее время стохастическое ускорение было

x) Близкие результаты получены независимо Ласлетом /12/.

использовано для предварительного нагрева плазмы в одной из термоядерных установок /16/.

Остальные приложения стохастичности являются "вредными" в том смысле, что стохастичность вызывает более или менее опасную неустойчивость системы. Задача теории здесь состоит в том, чтобы указать условия устойчивости.

В § 4.2 эта проблема рассматривается для силовых линий магнитного поля в замкнутой ловушке типа стелларатора. При этом силовые линии можно рассматривать как траектории некоторой гамильтоновой системы. Эта задача рассматривалась впервые Сагдеевым и Заславским /4, 3/ и затем в работе /17/. Роль нелинейности здесь играет так называемый шир магнитного поля. Показано, что существует оптимальное значение шира, отклонение от которого в обе стороны приводит к уменьшению устойчивости силовых линий. Предлагается использовать стохастическую неустойчивость линий для осуществления ловушки Скорнякова /18/, в которой область "турбулентного" магнитного поля окружена "ламинарной" областью. Предполагается, что подобная структура магнитного поля может способствовать устойчивости плазмы /18/.

Еще одной областью приложения служит динамика нелинейных волн (§ 4.6). Исходным пунктом здесь явились численные эксперименты Ферми, Паста, Улама /19/ с нелинейной струной, которые привели к удивительному по тем временам результату - отсутствию равнораспределения энергии между модами колебаний. Этот результат был объяснен в /20/ путем вычисления критерия стохастичности для этой системы. В дальнейшем совместно с Израйлевым и Хисамутдиновым были проведены обширные численные эксперименты, которые в общем подтвердили основные выводы и оценки работы /20/. В этих экспериментах так же, как и в /19/ использовалась, фактически, цепочка нелинейных связанных осцилляторов, приближенно представляющая струну. Эта модель оказалась чрезвычайно удобной как для численных экспериментов (обыкновенные дифференциальные уравнения вместо уравнений в частных производных), так и благодаря своему промежуточному положению между дискретными динамическими системами и непрерывными волнами. Нерешенным вопросом остается здесь связь между свойствами этой модели и нелинейного волнового уравнения первого порядка типа Кортевега-де-Вриза.

Оставшиеся три параграфа главы 1У посвящены приложениям диффузии Арнольда. Наиболее важной является проблема устойчивости встречных протонных и антипротонных пучков (§ 4.3). Требуемое время жизни пучков в накопителях достигает многих часов и даже суток. Нелинейность колебаний появляется здесь, главным образом, за счёт взаимодействия со встречным сгустком. В диссертации рассмотрено так называемое слабо-сильное взаимодействие. Получена оценка границы стохастичности, которая находится в разумном согласии с существующими экспериментальными данными. Диффузия Арнольда приводит к ограничению на ток пучка J огласно уравнению

$$2\gamma^{1/3}\cdot \ln(\alpha\beta\gamma) = 1 \qquad (11)$$

где $\alpha = \left(\ln[\beta(\tau\omega_0\cdot\Delta\nu)^{1/3}]\right)^3$; β^2 - коэффициент связи колебаний; $\gamma = J/J_s$; J_s - ток пучка на границе стохастичности; τ - время жизни пучка; ω_0 -частота обращения; $\Delta\nu \sim J$ - сдвиг частоты бетатронных колебаний встречным сгустком. Выяснено, что наиболее неблагоприятной является круглая форма пучков. Произведены оценки влияния синхробетатронных резонансов, которые могут значительно ухудшить устойчивость. Получены допуски на паразитную модуляцию магнитного поля и высокой частоты.

В § 4.4 исследована устойчивость движения заряженных частиц в ловушке с магнитными пробками при малом значении параметра адиабатичности. Эта задача, возможно, имеет некоторое значение для динамики радиационных поясов Земли. Однако непосредственной целью наших исследований была попытка интерпретировать наиболее детальные эксперименты по движению электронов в магнитной ловушке /21/, которые могут быть сопоставлены с диффузией Арнольда. Непосредственным доказательством влияния резонансов на движение частиц являются провалы в энергетическом спектре частиц в ловушке, соответствующие как раз резонансам между ларморовским вращением и продольными колебаниями. Однако диффузия Арнольда требует в данном случае хотя бы небольшой азимутальной неоднородности поля, что сейчас, после окончания экспериментов, уже невозможно проверить непосредственно. Тем не менее удаётся объяснить все основные экспериментальные результаты, подчас довольно неожиданные. К числу последних относится так называемое нижнее плато на кривой зависимости времени жизни электронов τ от магнитного поля H, когда при уменьшении H после резкого падения τ из-за неадиабатичности оно перестает изменяться с H, но оказывается обратно пропорциональным давлению остаточного газа в ловушке. С точки зрения развиваемой теории это объясняется диффузией на газе до ближайшего работающего резонанса, после чего происходит диффузия Арнольда. Оценка для коэффициента диффузии имеет вид:

$$D_A \sim \mu^2 \cdot \bar{\omega} \cdot \varepsilon \cdot \beta^3 \cdot \exp\left(-\frac{2e^{1/6\varepsilon}}{(\beta\varepsilon)^{1/3}}\right) \tag{12}$$

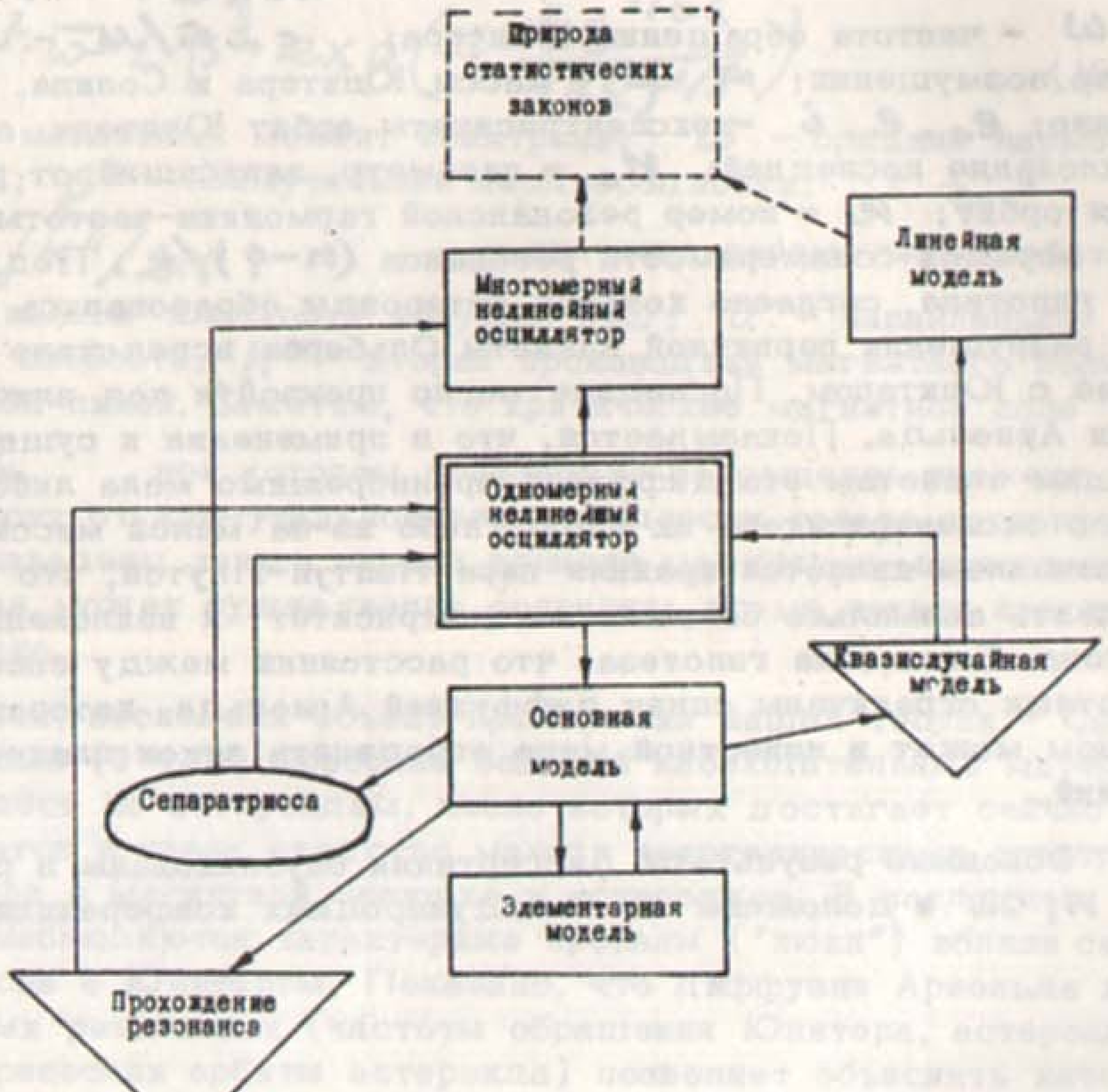
Здесь μ - магнитный момент электрона; $\bar{\omega}$ - средняя ларморовская частота; β^{ε} - азимутальная неоднородность; $\varepsilon = \frac{3}{2} \cdot \frac{v}{\omega} \sqrt{H''/2H}$ - значение параметра адиабатичности в медианной плоскости ловушки /22/; v - параллельная составляющая скорости; H'' - вторая производная магнитного поля вдоль силовой линии. Заметим, что критическое магнитное поле $H_{кр} \sim 1/\varepsilon$, при котором происходит сокращение времени жизни, зависит от азимутальной неоднородности только логарифмически. Произведены также оценки влияния модуляции магнитного поля, которая может существенно сократить время жизни электронов в ловушке.

Наконец, последний объект приложения нашей теории - Солнечная система (§ 4.5). Особенно богатый наблюдательный материал собран здесь по астероидам, число которых достигает сейчас 1660. Бросается в глаза сходство между энергетическими спектрами электронов в магнитной ловушке и астероидов. В последнем опять таки наблюдаются характерные провалы ("люки") вблизи сильных резонансов с Юпитером. Показано, что диффузия Арнольда на трехчастотных резонансах (частоты обращения Юпитера, астероида и частота прецессии орбиты астероида) позволяет объяснить качественно и количественно (по порядку величины) основные особенности спектра астероидов, в том числе и единственное несомненное исключение из общего правила "люков", состоящее в том, что резонансу 1/1 соответствует максимум (группа троянцев). Максимум вблизи резонанса 2/3 является на наш взгляд спорным. Механизм образования "люков" связан с увеличением эксцентриситета резонансных орбит вследствие диффузии Арнольда, сближением их с Юпитером и, как следствие, изменением энергии астероида или даже его захватом Юпитером. При этом интеграл Якоби не сохраняется из-за ненулевого эксцентриситета орбиты Юпитера, так что критерий устойчивости по Хиллу теряет смысл. Оценка времени диффузии по эксцентриситету имеет вид:

$$(\tau\omega) \sim (\varepsilon n e_0 e^{q-1})^{-3/2} \cdot \left(\frac{e}{i}\right)^4 \cdot \exp\left(2\sqrt{\frac{\varepsilon \cdot \exp n/n_0}{n e_0 e^{q-1}}}\right) \tag{13}$$

где ω - частота обращения Юпитера; $\varepsilon \sim \bar{m}/M$ - малый параметр возмущения; $\bar{m}$, M - массы Юпитера и Солнца, соответственно; e_0, e, i - эксцентриситеты орбит Юпитера, астероида и наклонение последней; n_0 - параметр, зависящий от расположения орбит; n - номер резонансной гармоники частоты Юпитера; q порядок соизмеримости резонанса $(n-q)/n$. Поддерживается гипотеза, согласно которой астероиды образовались в результате разрушения первичной планеты Ольберса вследствие сближения её с Юпитером. Последнее могло произойти под влиянием диффузии Арнольда. Показывается, что в применении к существующим большим планетам эта диффузия пренебрежимо мала либо из-за малого эксцентриситета их орбит, либо из-за малой массы соседа. Исключением является крайняя пара Нептун-Плутон, что может объяснить аномально большие эксцентриситет и наклонение орбиты Плутона. Высказана гипотеза, что расстояния между соседними планетами ограничены снизу диффузией Арнольда, которая таким образом может в известной мере определять закон планетных расстояний.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах /13, 17, 23/ и доложены на Международных конференциях /20,24, 25/.



Система моделей взаимодействия резонансов нелинейных колебаний

Литература

1. Б.В.Чириков, Нелинейные колебания в системах, близких к консервативным, кандидатская диссертация, ИЯФ СО АН СССР, 1959 г.
2. Н.С.Крылов, Работы по обоснованию статистической физики, АН СССР, 1950.
3. Н.Н.Филоненко, Р.З.Сагдеев, Г.М.Заславский, Nuclear Fusion, 7. 253 (1967).
4. M.N. Rosenbluth, R.Z. Sagdeev, J.B. Taylor, G.M. Zaslavsky, Nuclear Fusion 6, 297 (1966)
5. Н.Н.Боголюбов, Проблемы динамической теории в статистической физике, Гостехиздат, 1946.
6. Н.Н.Боголюбов, О некоторых статистических методах в математической физике, АН УССР, 1945.
7. И.Пригожин, Неравновесная статистическая механика, Мир, 1964.
8. В.И.Арнольд, ДАН, 156, 9 (1964); Доклад на Международном съезде математиков, Москва, 1966.
9. Я.Б.Зельдович, И.Д.Новиков, Релятивистская астрофизика, Наука, 1967.
10. G. Contopoulos, Bulletin Astronomique, Ser. 3, 2, 223 (1967).
11. F.K. Goward, Сб. Протонный синхротрон на 25 Бэв, 1953; M.D.N. Hine, там же.
12. L.J. Laslett, частное сообщение.
13. Г.М.Заславский, Б.В.Чириков, ДАН, 159, 306 (1964).
14. E. Fermi, Phys. Rev., 75. 1169 (1949).
15. Э.Л.Бурштейн, В.И.Векслер, А.А.Коломенский, Сб. Некоторые вопросы теории циклических ускорителей, АН СССР, 1955.

16. В.Н.Бочаров, В.И.Волосов, А.В.Комин, В.М.Панасюк, Ю.Н.Юдин. Доклад Д-7 на Международной конференции по плазме Fusion III, Новосибирск, 1968.

17. Б.В.Чириков, ДАН, 174, 1313 (1967).

18. Г.В.Скорняков, ЖТФ, 32, 261, 777 (1962).

19. E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam, Studies of Nonlinear Problems I, Los Alamos Report LA-1940 (1955).

20. Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков, Статистические свойства нелинейной струны, сб.Проблема многих тел и физика плазмы (Труды Международного симпозиума, Новосибирск, 1965).

21. А.Н.Дубинина, Л.С.Красицкая, Письма ЖЭТФ, 5, 230 (1967); В.Г.Пономаренко, Л.Я.Трайнин, В.И.Юрченко, А.Н.Яснецкий, ЖЭТФ, 55, 3 (1968).

22. R.J. Hastie, G.D. Hobbs, J.B. Taylor, Доклад С-6 на Международной конференции по плазме Fusion III, Новосибирск, 1968.

23. Б.В.Чириков, ДАН, 125, 1015 (1959); Атомная энергия, 6, 630 (1959).

24. Б.В.Чириков, Пример стохастической неустойчивости нелинейных колебаний, Трубы Международной конференции по ускорителям, Дубна, 1963.

25. Б.В.Чириков, Когда динамическая система становится статистической? Сообщение на Международном съезде математиков, Москва, 1966.

Ответственный за выпуск Б.В.Чириков
Подписано к печати 30.12 68 МН05272
Усл. 1 печ.л., тираж 150 экз.
Заказ № 265, бесплатно.

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, нв.