

К 535
А-47

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ОРДЕНА ЛЕНИНА СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ им. Л. В. КИРЕНСКОГО

Препринт № 273Ф

КВАНТОВЫЙ ХАОС В СТАЦИОНАРНЫХ
КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЯХ

К.Н.Алексеев, Г.П.Берман

Красноярск 1984 г.

К 535
А-4:

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ОРДЕНА ЛЕНИНА СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ им. Л.В.КИРЕЕВСКОГО

Препринт № 273Ф

КВАНТОВЫЙ ХАОС В СТАЦИОНАРНЫХ
КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЯХ

К.Н.Алексеев, Г.П.Берман

Красноярск 1984

КРАСНОУРСКАЯ
КРАЕВАЯ
БИБЛИОТЕКА

М. 120148

УДК 535.375.5

Рассмотрена динамика нелинейной квантовой системы в стационарном когерентном состоянии. Найдены условия перехода от регулярного движения к хаотическому.

The nonlinear quantum system dynamics in a stationary coherent state are considered. The conditions for the transition from regular to a chaotic motion are found.

© Институт физики им. Л.В.Киренского СО АН СССР

I. Введение

Известно, что при определенных условиях в классических динамических системах возникает стохастизация движения [1,2]. Квантовое рассмотрение таких систем связано со значительными трудностями как аналитическими, так и численными, и в настоящее время изучены лишь простейшие системы. Динамическое поведение квантовых систем, стохастических в классическом пределе, оказывается более устойчивым по сравнению с классическим стохастическим движением по крайней мере для систем с полутора степенями свободы: одна степень свободы, взаимодействующая с внешним регулярно зависящим от времени полем [3-6].

Ниже будет показано, что даже в простейшем случае полутора степеней свободы можно указать класс квантовых систем, для которых имеет место стохастизация движения. Эти квантовые системы связаны с так называемыми стационарными когерентными состояниями (SCS) [7-II]. Хотя в физическом отношении такие системы не являются типичными, их рассмотрение в связи с проблемой стохастичности в квантовых системах может представлять самостоятельный интерес.

Известно, что когерентное состояние определяется как собственное состояние оператора уничтожения

$$a_S |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle, \quad (1.1)$$

где $a_S = a(t=0)$ (S - означает представление Шредингера) $\alpha = \alpha(t=0)$. В представлении Гейзенберга (индекс y)

оператор $a_g(t)$ зависит от времени и когерентное состояние $|\alpha\rangle$ (I.1) называется стационарным когерентным состоянием (SCS), если оно является собственным состоянием оператора $a_g(t)$ для всех t :

$$a_g(t)|\alpha\rangle = \alpha(t)|\alpha\rangle \quad (I.2)$$

Понятно, что уравнение (I.2) накладывает достаточно жесткие условия на возможный класс гамильтонианов. Оказывается, однако, что в этом классе можно выделить системы, обладающие свойством стохастичности в определенной области параметров. Стохастичность при этом аналогична стохастичности в классических системах.

2. Основные уравнения

Следуя [7-II], опишем некоторые, используемые в дальнейшем свойства SCS. В представлении Гайзенберга имеем для оператора $a_g(t)$:

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{a}_g(t) &= [a_g(t), \mathcal{H}_g(t, a_g(t), a_g^\dagger(t))] = \\ &= \frac{\partial \mathcal{H}_g}{\partial a_g^\dagger(t)} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Рассмотрим класс гамильтонианов, обладающих SCS, т.е. для которых выполняется условие (I.2). Согласно [II] необходимым и достаточным условием стационарности когерентного состояния является:

$$[a_g(t), \dot{a}_g(t)]|\alpha\rangle = 0, \quad (2.2)$$

где SCS $|\alpha\rangle$ в представлении Гайзенберга не зависит от t и определено уравнениями (I.1), (I.2). Как известно, состояние $|\alpha\rangle$ представимо в виде разложения по энергетическим состояниям $|h\rangle$:

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = \hat{\mathcal{D}}(\alpha, \alpha^*) |0\rangle \quad (2.3)$$

где

$$\hat{\mathcal{D}}(\alpha, \alpha^*) \equiv \exp(\alpha a_s^+ - \alpha^* a_s)$$

Условие (2.2) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} & [a_g(t), [a_g(t), \mathcal{H}_g(t)]] |\alpha\rangle = \\ & = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial a_g^{+2}(t)} \mathcal{H}_g(t, a_g(t), a_g^+(t)) \right\} |\alpha\rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Запишем гамильтониан \mathcal{H}_g в форме:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_g(t, a_g(t), a_g^+(t)) &= \mathcal{H}_g^{(0)}(t, a_g(t)) + \\ &+ a_g^+(t) \mathcal{H}_g^{(1)}(t, a_g(t)) + \\ &+ a_g^{+2}(t) \mathcal{H}_g^{(2)}(t, a_g(t), a_g^+(t)), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$\mathcal{H}_g^{(l)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_i^{+\ell}(t) h_{\ell}(t, a_g(t)) \quad (2.6)$$

В общем случае \mathcal{H} может быть выбран неэрмитовым. Необходимое и достаточное условия существования SCS может быть также представлено в виде требования существования функции $\mathcal{L}(t)$, удовлетворяющей уравнениям [II]:

$$h_{\ell}(t, \alpha(t)) = 0; \quad \ell = 0, 1, \dots \quad (2.7)$$

$$i\hbar \dot{\alpha}(t) = \mathcal{H}_g^{(t)}(\alpha(t), t) \quad (2.8)$$

Необходимость условий (2.7), (2.8) следует из уравнения:

$$\langle \alpha | i\hbar \dot{a}_g(t) - [a_g(t), \mathcal{H}_g(t)] | \alpha \rangle = 0 \quad (2.9)$$

при условиях (1.2), (2.4), (2.6). Доказательство достаточности использует состояние

$$|\Psi, t\rangle = F(t) U^\dagger(t) |\alpha(t)\rangle, \quad (2.10)$$

где $|\alpha(t)\rangle$ - собственная функция гамильтониановского оператора a_g в (1.1) с собственным значением $\alpha(t)$:

$$a_g |\alpha(t)\rangle = \alpha(t) |\alpha(t)\rangle, \quad (2.11)$$

а функция $\alpha(t)$ удовлетворяет уравнениям (2.7), (2.8). Состояние $|\alpha(t)\rangle$ представимо в виде:

$$\begin{aligned} |\alpha(t)\rangle &= \hat{D}(\alpha(t), \alpha^*(t)) |0\rangle = \\ &= \exp\{\alpha(t) a_g^\dagger - \alpha^*(t) a_g\} |0\rangle \end{aligned} \quad (2.12)$$

В (2.10) $U(t)$ - оператор эволюции, подчиняющийся уравнению:

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{U}(t) &= U(t) \mathcal{H}_g(t); \\ \mathcal{H}_g(t) &= U^\dagger(t) \mathcal{H}_g(t) U(t) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Функция (2.10) является собственной функцией оператора $a_g(t) = U^\dagger(t) a_g U(t)$ с собственным значением $\alpha(t)$. Действительно, из (2.10), (2.11) имеем:

$$\begin{aligned}
 a_g(t) |\psi, t\rangle &= U^\dagger(t) a_s U(t) |\psi, t\rangle = \\
 &= U^\dagger(t) a_s U(t) F(t) U^\dagger(t) |\alpha(t)\rangle = \\
 &= F(t) U^\dagger(t) a_s |\alpha(t)\rangle = \alpha(t) |\psi, t\rangle
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

Доказательство достаточности условий (2.7), (2.8) для удовлетворения уравнения (1.2) сводится согласно [II] к следующему. Потребуем выполнение условий (2.7), (2.8) и представим $F(t)$ в (2.10) в виде:

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \exp \varphi(t); \\
 \varphi(t) &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^t K_g^{(0)}(t', \alpha(t')) dt' + \int_0^t \dot{\alpha}(t') \alpha(t') dt'
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

В этом случае состояние $|\psi, t\rangle$ оказывается стационарным:
 $\partial/\partial t |\psi, t\rangle = 0$, откуда следует

$$|\psi, t\rangle = |\psi, 0\rangle = |\alpha(0)\rangle = |\alpha\rangle
 \tag{2.16}$$

Учитывая (2.16), получаем из (2.14)

$$a_g(t) |\psi, 0\rangle = \alpha(t) |\psi, 0\rangle
 \tag{2.17}$$

Таким образом, состояние $|\psi, 0\rangle = |\alpha\rangle$ является SCS. Эволюция волновой функции SCS в представлении Шредингера описывается выражением:

$$\begin{aligned}
 |\alpha, t\rangle &= U(t) |\alpha\rangle = U(t) |\psi, t\rangle = \\
 &= U(t) F(t) U^\dagger(t) |\alpha(t)\rangle = \\
 &= F(t) |\alpha(t)\rangle = F(t) \hat{D}(\alpha(t), \alpha'(t)) |0\rangle,
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

где $\alpha(t)$ удовлетворяет уравнениям (2.7), (2.8), а функция имеет вид (2.15), или с учетом (2.8):

$$F(t) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^t \left[\mathcal{H}_g^{(0)}(t', \alpha(t')) + \alpha(t') \mathcal{H}_g^{(1)*}(t', \alpha(t')) \right] dt' \right\} \quad (2.19)$$

3. Динамический хаос в SCS.

Покажем каким образом эволюция квантовой системы в SCS может приводить к хаосу. В качестве примера рассмотрим эрмитовый гамильтониан:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \hbar\omega a^\dagger a + \hbar^2\mu \left[a^{\dagger 2} \alpha(t) (a - \alpha(t)) + \right. \\ & \left. + (a^\dagger - \alpha^*(t)) \alpha^*(t) a^2 \right] + \lambda \hbar^{1/2} (a^\dagger + a) f(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

В (3.1) $f(t)$ - заданная функция времени; $\alpha(t)$ - функция, подлежащая определению; ω, μ, λ - параметры. Представим (3.1) в виде (2.5), (2.6):

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_g^{(0)}(t) &= \hbar^{1/2} \lambda a_g(t) f(t) - \hbar^2 \mu \alpha^{*2}(t) a_g^2(t); \\ \mathcal{H}_g^{(1)}(t) &= \hbar\omega a_g(t) + \hbar^2 \mu \alpha^*(t) a_g^2(t) + \\ &+ \hbar^{1/2} \lambda f(t); \\ \mathcal{H}_g^{(2)}(t) &= \hbar^2 \mu \alpha(t) (a_g(t) - \alpha(t)); \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для гамильтониана (3.1), (3.2) уравнение (2.7) для $h_0(t, \alpha(t))$ удовлетворяется тождественно, а уравнение (2.8) имеет вид:

$$i \dot{\alpha}(t) = \omega \alpha(t) + \mu \hbar |\alpha(t)|^2 \alpha(t) + \frac{\lambda}{\sqrt{\hbar}} f(t) \quad (3.3)$$

выберем для простоты анализа $f(t)$ в виде периодической во времени последовательности δ -импульсов:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (3.4)$$

В этом случае уравнение (3.3) принимает вид:

$$i \frac{dz(\tau)}{d\tau} = z(\tau) + |z(\tau)|^2 z(\tau) + \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - n\tilde{T}), \quad (3.5)$$

где

$$z(\tau) = \sqrt{\frac{\mu \hbar}{\omega}} \alpha(t); \quad \varepsilon = \lambda \sqrt{\frac{\mu}{\omega}}; \quad \tau = \omega t; \quad \tilde{T} = \omega T \quad (3.6)$$

Уравнение (3.5) представимо в гамильтоновском виде:

$$\frac{dz}{d\tau} = -i \frac{\partial \mathcal{K}(t, z, z^*)}{\partial z^*}; \quad \frac{dz^*}{d\tau} = i \frac{\partial \mathcal{K}(t, z, z^*)}{\partial z}; \quad (3.7)$$

$$\mathcal{K}(t, z, z^*) = z z^* + \frac{1}{2} z^2 z^{*2} + \varepsilon (z + z^*) \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - n\tilde{T}) \quad (3.8)$$

Оценка критерия стохастичности для системы (3.5) была проведена в [6] в связи с изучением классического предела ($\hbar = 0$)

для динамики нелинейного квантового осциллятора, возбуждаемого периодической последовательностью δ -импульсов. Обозначим:

$$z_n \equiv z(t_n - 0); \bar{z}_n = z(t_n + 0); t_n = n\tilde{T}. \quad (3.9)$$

Имеем из (3.5)

$$z_n = e^{-i(1+|\bar{z}_{n-1}|^2)\tilde{T}} \bar{z}_{n-1} \quad (3.10)$$

$$\bar{z}_{n-1} = z_{n-1} - i\varepsilon$$

Из (3.10) получаем рекуррентное соотношение:

$$z_n = e^{-i(1+|z_{n-1}-i\varepsilon|^2)\tilde{T}} (z_{n-1} - i\varepsilon) \quad (3.11)$$

Вместо канонических переменных z, z^* введем канонически сопряженные действия I_n и фазу θ_n по формуле:

$$z_n = \sqrt{I_n} e^{-i\theta_n} \quad (3.12)$$

В переменных I_n, θ_n преобразования (3.11) принимают вид:

$$I_n = I_{n-1} + 2\varepsilon\sqrt{I_{n-1}} \sin \theta_{n-1} + \varepsilon^2 \quad (3.13)$$

$$\theta_n = \text{arctg} \left(\text{tg} \theta_{n-1} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{I_{n-1}} \cos \theta_{n-1}} \right) + (1+I_n)\tilde{T}$$

Условие стохастичности для преобразований (3.13) может быть представлено в виде [1,2,6]:

$$\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} = \frac{1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{I_n}} \sin \theta_n}{1 + \frac{\varepsilon^2}{I_n} + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{I_n}} \sin \theta_n} + 2\varepsilon \sqrt{I_n} \cos \theta_n > 1 \quad (3.14)$$

При относительной малости возмущения ($\varepsilon/\sqrt{I_n} \ll 1$) условие стохастичности для преобразований (3.11), (3.12) имеет согласно (3.14) вид:

$$K_n = 2\varepsilon \sqrt{I_n} > 1 \quad (3.15)$$

Таким образом, если потребовать, чтобы функция $\mathcal{L}(t) = (\omega/\mu\hbar)^{it} Z(\tau)$ в гамильтониане (3.1) удовлетворяла уравнению (3.5), то когерентное состояние $|\mathcal{L}\rangle$ для системы с гамильтонианом (3.1) оказывается SCS. При этом среднее значение оператора $a_j(\tau)$ в этом состоянии описывается функцией $Z(\tau)$:

$$\langle \mathcal{L} | a_j(\tau) | \mathcal{L} \rangle = Z(\tau) \quad (3.16)$$

Поведение функции $Z(\tau)$ существенно зависит от величины параметра стохастичности K_n (3.15). При $K_n < 1$ функция $Z(\tau)$ регулярно меняется во времени. При $K_n > 1$ поведение функции $Z(\tau)$ является стохастическим. Эволюция волновой функции в представлении Шредингера описывается для гамильтониана (2.18), (2.19), (3.2) выражением:

$$\begin{aligned} |Z, \tau\rangle &= U(\tau) |\Psi, 0\rangle = F(\tau) |Z(\tau)\rangle = \\ &= \exp \left\{ \frac{i\omega}{\mu\hbar} \int_0^\tau (1 + 2|Z(\tau')|^2) |Z(\tau')\rangle \langle Z(\tau')| d\tau' \right\} |Z(\tau)\rangle; \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$Z(\tau) = \mathcal{D}(Z(\tau), Z^*(\tau)) |0\rangle$$

4. Результаты численного анализа

С целью изучения условий перехода от регулярного движения к хаотическому был проведен численный анализ преобразований (3.II). Поскольку параметр K_n в форме (3.I5) зависит от значения действительной $I_n = |z_n|^2$ и меняется в процессе эволюции системы, он определяет границу стохастичности лишь по порядку величины. Численный анализ показывает, что при $K_n < 1$ движение в основной области фазового пространства является регулярным. На рис. 1 изображена характерная траектория на фазовой плоскости $X_n = \text{Re } z_n$ и $Y_n = \text{Im } z_n$ при условии $K_n < 1$. Движение в этом случае имеет явно выраженный регулярный характер. При $K_n > 1$ типичная стохастическая траектория показана на рис. 2. На фазовой плоскости I_n, θ_n эта же траектория изображена на рис. 3. Устойчивому режиму движения (рис. 1) соответствует процесс $X(\tau)$, изображенный на рис. 4, а его спектр $|A_k|^2$:

$$A_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{\varepsilon \pi i k n}{N}}, \quad (4.1)$$

$$A_{N-k} = A_{-k} = A_k^*$$

представлен на рис. 5. Из рис. 4,5 видно, что движение в этом случае содержит значительную долю регулярной компоненты. При $K_n > 1$ вид процесса $X(\tau)$ (см. рис. 2,3) и его спектр показаны на рис. 6 и 7, соответственно. Движение в этом случае является локально неустойчивым: на рис. 8 приведена зависимость от времени логарифма расстояния между траекторией, изображенной на рис. 2,3,6 и близкой к ней:

$$P(\tau) = |z(\tau) - z'(\tau)|. \quad (4.2)$$

Рис. 6-8 иллюстрируют типичный при $K_n > 1$ стохастический режим движения системы, описываемый преобразованиями (3.II)

5. Заключение

В заключение отметим, что приведенный пример динамической квантовой системы, обладающей SCS , показывает, что даже в простейшем случае полутора степеней свободы квантовые системы могут допускать стохастическую динамику. Класс гамильтонианов, допускающих SCS , является, однако, довольно специальным. В основном это связано с выделением в исходный гамильтониан некоторой функции $\alpha(t)$, определяющейся из соответствующих динамических уравнений. Таким образом, регулярное поведение функции $\alpha(t)$ приводит к наличию в исходном гамильтониане соответствующей регулярной зависимости от времени. При определенных условиях на параметры исходного гамильтониана ($K > 1$) требования существования SCS приводят к стохастическому поведению функции $\alpha(t)$, через которую вычисляются различные наблюдаемые. Последнее означает, однако, появление случайного процесса в исходном гамильтониане.

Представляется, однако, полезным изучение указанного класса гамильтонианов в связи с проблемой стохастичности в динамических квантовых системах и возможное расширение его на случай систем, представляющих физический интерес. Отметим также, что распространение результатов на случай систем с большим числом степеней свободы не представляет трудностей.

1. Заславский Г.М., Чirikov B.V. УФН, 1971, 105, 3.
2. Chirikov B.V., Phys.Reports, 1979, 52, 263.
3. Berman G.P. and Zaslavsky G.M., Physica A, 1978, 91, 450.
4. Casati G., Chirikov B.V., Izrailev F.M. and Ford J., Stochastic Behavior of a Quantum Pendulum under a Periodic Perturbation, in: Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems, Lecture Notes in Physics, v.93, Springer, 1979, p.334.

5. Шепелянский Д.Д. Теор. мат. физика, 1981, 19, 117.
6. Bergman G.P. and Zaslavsky G.M., Physica A, 1982, 111, 17.
7. Mehta C.L. and Sudarshan E.C.G., Phys. Lett., 1966, 22, 574.
8. Mista L., Phys. Lett., 1967, 25A, 646.
9. Kano Y., Phys. Lett., 1976, 56A, 7.
10. Mehta C.L. et al., Phys. Rev., 1967, 157, 1198.
11. Trias A., Phys. Lett., 1977, 61A, 149.

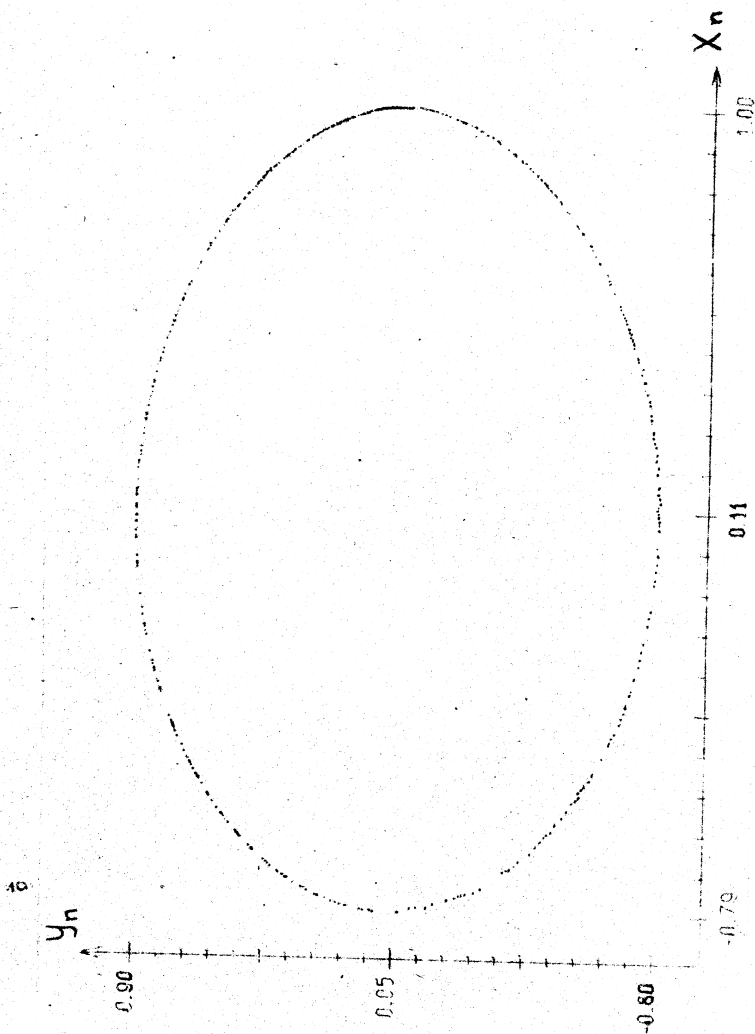


Рис. 1. Траектория на фазовой плоскости $x_n = \text{Re } z_n, y_n = \text{Im } z_n; X_0 = 1; y_0 = 0; \varepsilon = 0.1; \bar{T} = 3; K_1 = 0.6.$

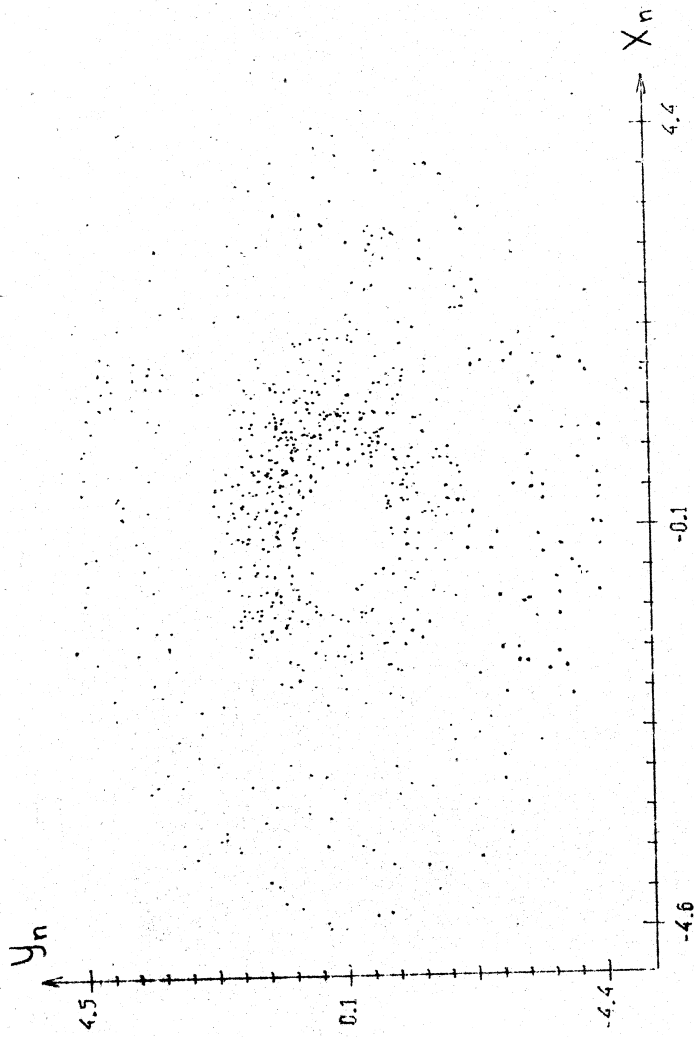


Рис. 2. Траектории на фазовой плоскости X_n, Y_n ; $X_0 = 1$; $Y_0 = 0$; $\varepsilon = 0.1$; $\bar{T} = 10$; $K_0 = 2$.

M. 120148

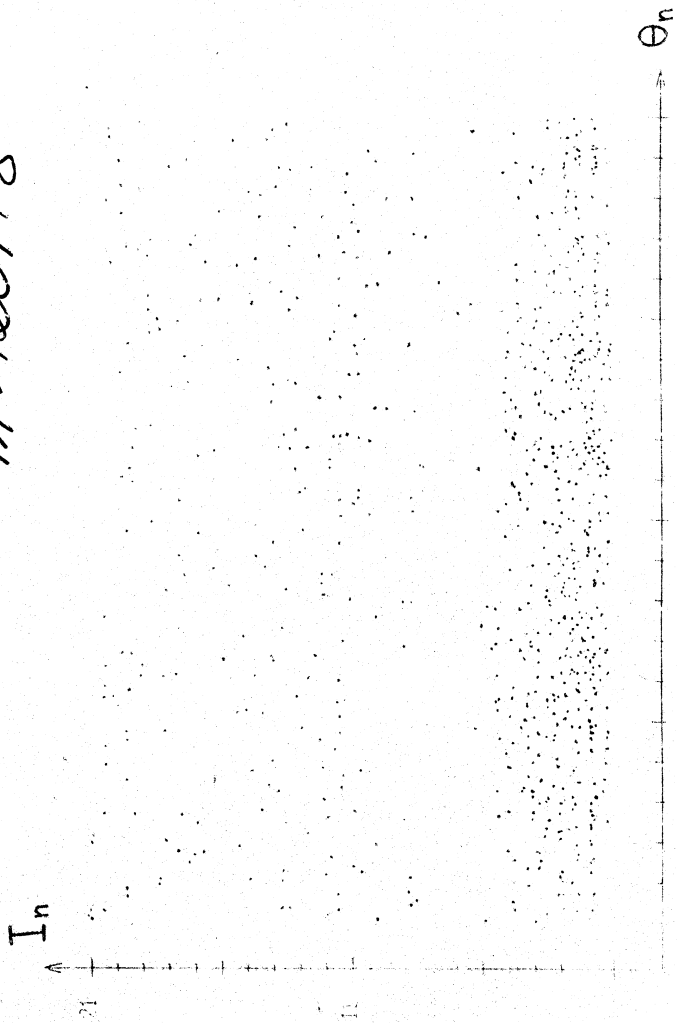


Рис. 3. Траектория (рис. 2) на фазовой плоскости I_n, θ_n

РАЙОННАЯ
КНИЖНАЯ
БОТЕНКА

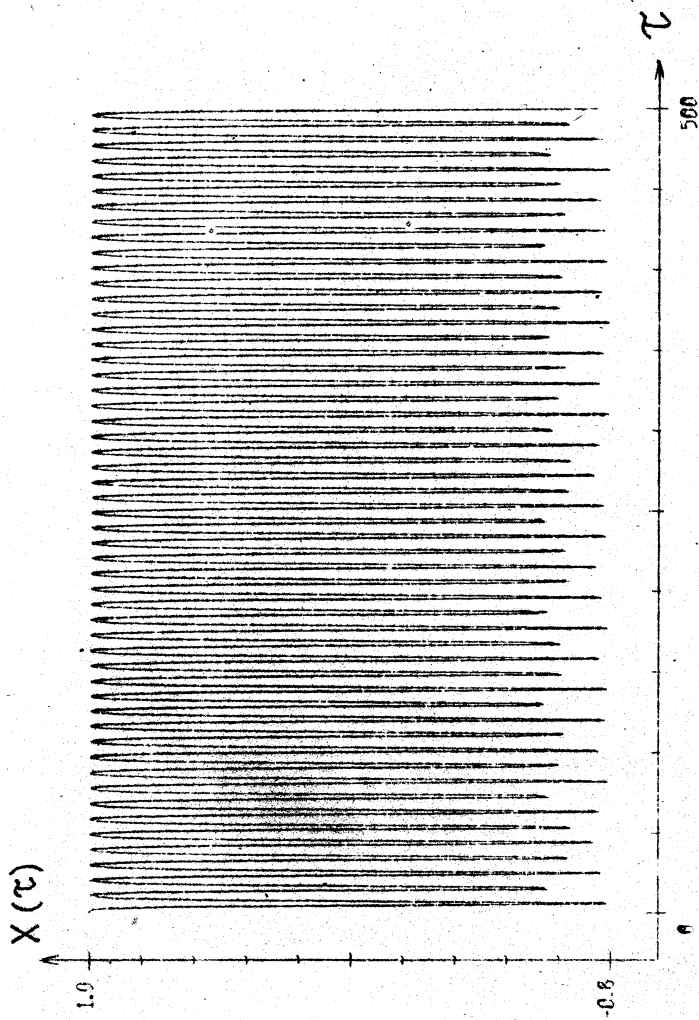


Рис. 4. Зависимость $X(\tau)$ для траектории, изображенной на рис. 1. ($\tau = h$)

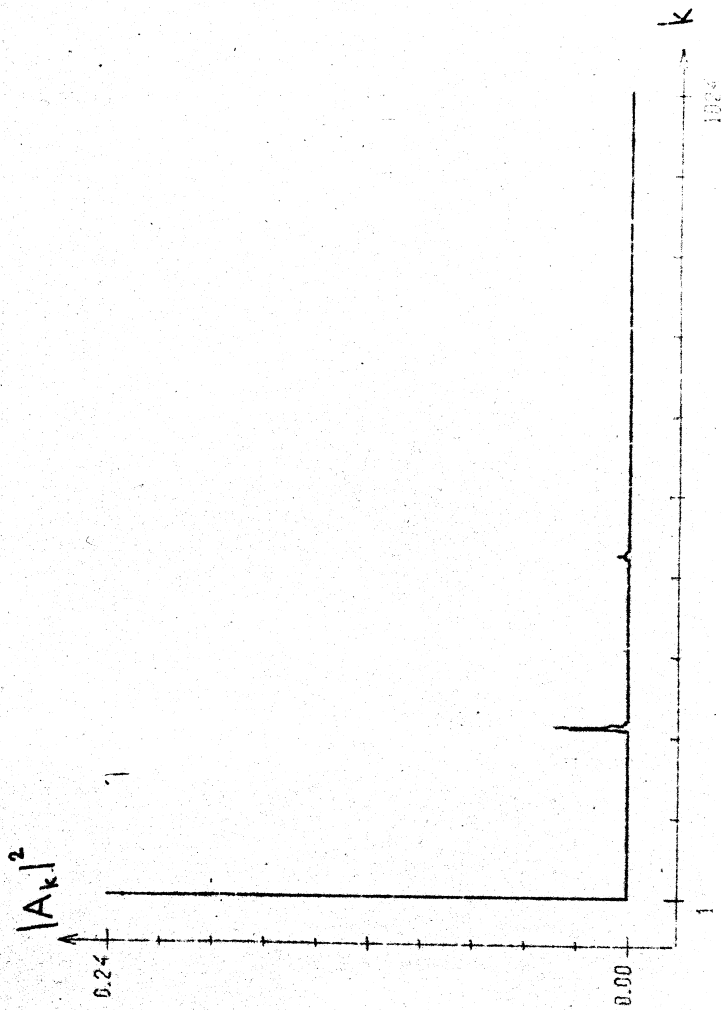


Рис. 5. Спектр $|A_k|^2$ процесса $X(\tau)$, изображенного на рис. 4.

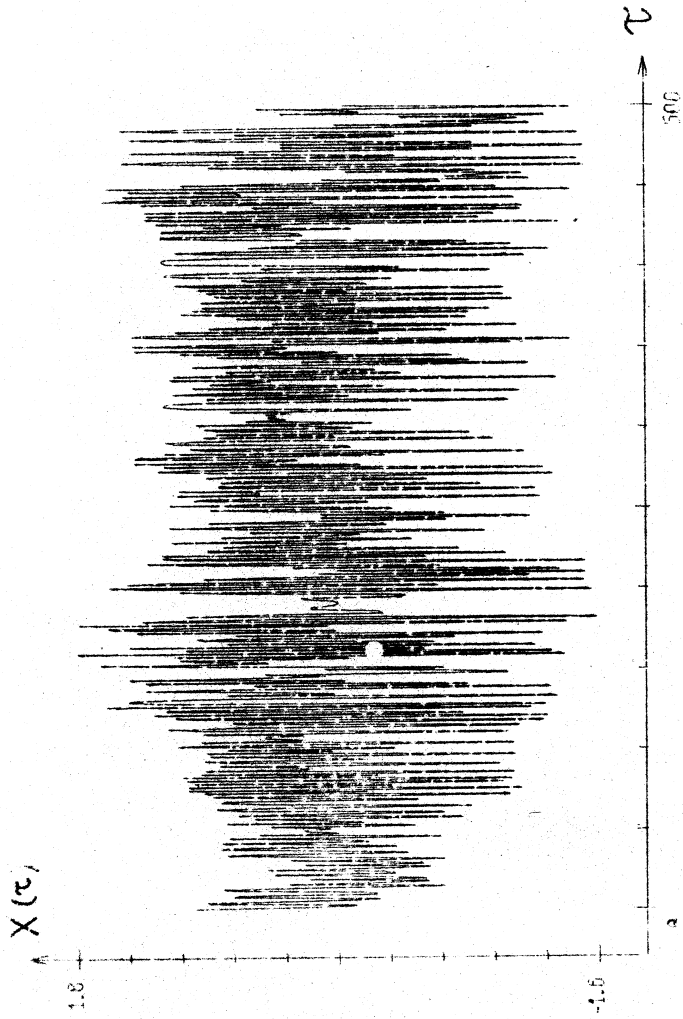


Рис. 6. Зависимость $X(\tau)$ для траектории, изображенной на рис. 2,3 ($\tau = n$).

$|A_k|^2$

0.034

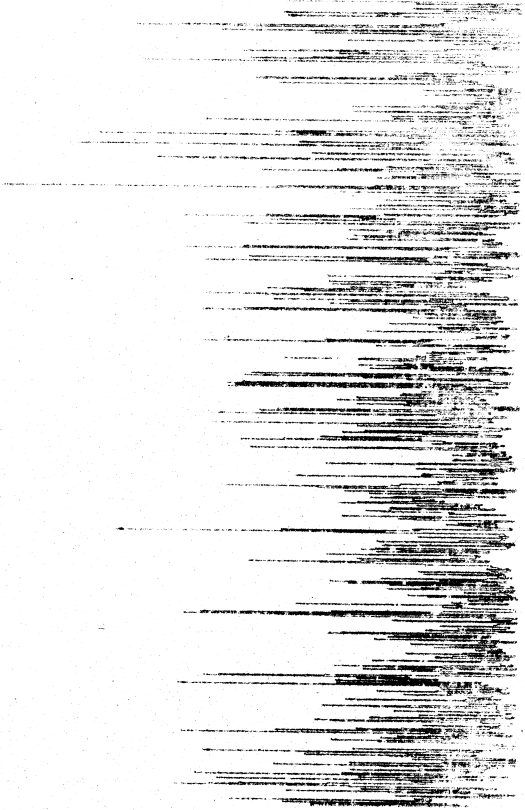


Рис. 7. Спектр $|A_k|^2$ процесса $X(t)$, усредненного на рис. 6.

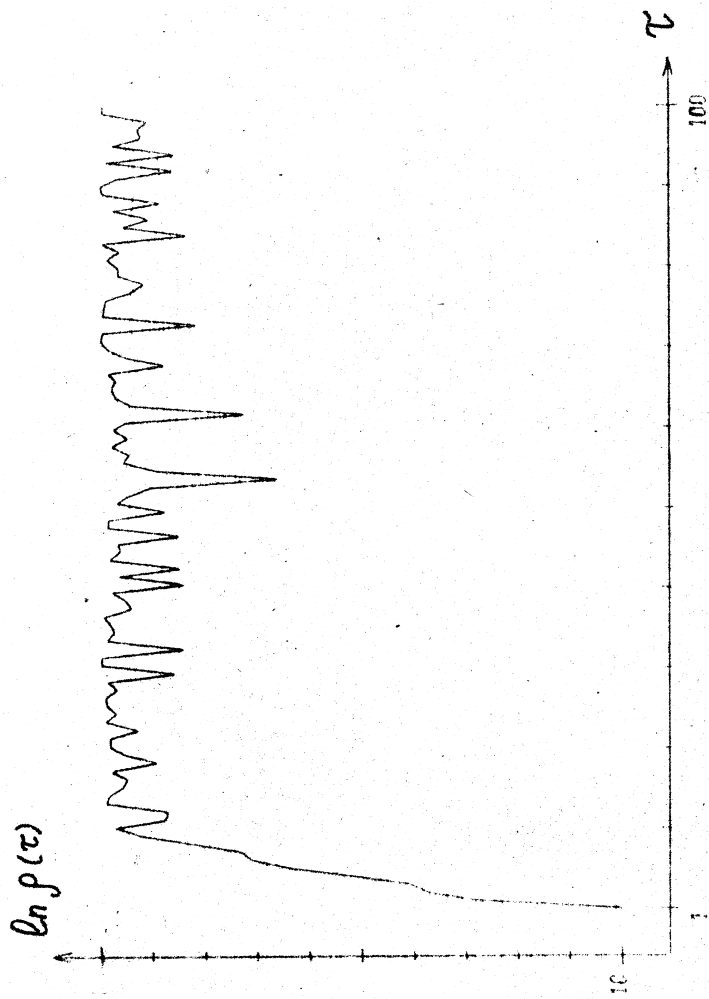


Рис. 8. Локальная неустойчивость траектории, изображенной на рис. 2,3,6; $p(0) = 5 \cdot 10^{-7} (\epsilon = h)$

Ответственный за выпуск К.Н.Алексеев

660036 Красноярск, Академгородок,
Институт физики им. Л.В.Киренского СО АН СССР
Заказ № 269 . Объем п.л. 1.5, Тираж 150 экз.
Подписано к печати 11.06.84 г. АЛО6905