

---

**НЕЛИНЕЙНАЯ И КВАНТОВАЯ  
ОПТИКА**


---

УДК 535.14

**ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КВАНТОВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ  
НА МНОГОУРОВНЕВЫХ БАЗОВЫХ ЭЛЕМЕНТАХ  
С ПОМОЩЬЮ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОПЕРАТОРОВ  
СЕЛЕКТИВНЫХ ПОВОРОТОВ**

© 2007 г. А. С. Ермилов, В. Е. Зобов

*Институт физики им. Л.В. Киренского Сибирского отделения РАН, 660036 Красноярск, Россия*

Поступила в редакцию 12.01.2007 г.

Для получения возможности экспериментальной реализации квантовых вычислений на  $d$ -уровневых базовых элементах (кудитах) при  $d > 2$  необходимо разработать схемы технического осуществления элементарных логических операторов. Нами найдены последовательности операторов селективных поворотов, представляющих операторы квантового преобразования Фурье (матрицы Уолша–Адамара) для  $d$  от 3 до 10. Для простых чисел 3, 5 и 7 применен известный метод линейной алгебры, тогда как для факторизуемых чисел 6, 9 и 10 – представление виртуальных спинов, ранее примененное нами для  $d = 4$  и 8. Селективные повороты могут быть реализованы, например, с помощью импульсов радиочастотного магнитного поля для систем из квадрупольных ядер или с помощью лазерных импульсов для атомов и ионов в ловушках.

PACS: 42.50.-p

**ВВЕДЕНИЕ**

Квантовый компьютер будет способен выполнять моделирование физических систем и решение определенных задач более эффективно, чем классический компьютер [1], поэтому над его созданием работают много исследователей. К настоящему времени наибольший успех в квантовых вычислениях достигнут на двухуровневых базовых элементах (кубитах). В качестве примеров приведем реализацию методами ядерного магнитного резонанса (ЯМР) алгоритма факторизации Шора на 7 спинах с  $I = 1/2$  [2] и управления состояниями 12 спинов [3]. Однако чаще в природе встречаются квантовые системы с большим чем 2 числом состояний: квадрупольные ядра со спином  $I > 1/2$ , атомы, ионы, радикалы или молекулярные магнетики с электронными состояниями  $S > 1/2$ , спиновые кластеры с сильным спин-спиновым взаимодействием и т.д. По сравнению с двухуровневыми такие системы обладают качественно новыми физическими свойствами, которые могут оказаться решающими при построении квантового компьютера. С другой стороны, в работах по теории вычислений сделаны выводы о преимуществах компьютера на  $d$ -уровневых базовых элементах (кудитах): например, в устойчивости к помехам [4], в скорости роста размерности гильбертова пространства при увеличении числа базовых элементов [5, 6] и т.п.

Тем не менее, поскольку теория вычислений в двоичной логике лучше разработана, многие авторы, выполняя эксперименты на многоуровне-

вой системе, представляют состояния такой системы как состояния нескольких виртуальных кубитов [7, 8]. Это относится к ЯМР-экспериментам на жидких кристаллах, в которых уровни ядра  $^{23}\text{Na}$  с  $I = 3/2$  были представлены [9, 10] двумя виртуальными кубитами, а ядра  $^{133}\text{Cs}$  с  $I = 7/2$  – тремя [11, 12]. Двухкубитный подход применен [13] и к четырем уровням ядер  $^{75}\text{As}$  в полупроводнике, наблюдаемым по эффекту Холла. В работе [14] к системе двух кубитов (реальных) сведена система из ядра  $^{13}\text{C}$  и двух электронных уровней с проекциями  $\pm 1$  и 0 (с учетом вырождения) NV-центра в алмазе. Велось наблюдение флуоресценции отдельного центра.

Значительно меньше работ, авторы которых рассматривают  $d$ -уровневые системы непосредственно как кудиты. Так, например, в работе [15] на трех уровнях дейтерия в жидком кристалле методом ЯМР демонстрируется работа однокубитных элементарных логических операторов (вентилей). В работе [16] эксперимент выполнен на молекулах  $\text{CH}_2\text{FCN}$ , растворенных в жидком кристалле. Три уровня триплетного состояния группы  $\text{CH}_2$  образуют кубит, а ядро F – кубит. Реализован алгоритм проверки четности. Наконец, в работе [17] методами двойного электронно-ядерного магнитного резонанса моделируется запутывание состояний ядра  $^{15}\text{N}$  с электронными состояниями  $S = 3/2$  фуллерена.

Такое соотношение работ обусловлено, в первую очередь, тем, что теория квантовых вычислений на кудитах разработана недостаточно.

В ряде работ [4, 18] доказана возможность представления произвольного унитарного оператора с помощью одно- и двухкудитных универсальных вентилях, предложены несколько вариантов таких вентилях [5, 19–21] и приемов таких представлений [22, 23]. Предложена квантовая сеть для квантового преобразования Фурье (КПФ) на кудитах [24]. Однако только в единичных работах произведен детальный разбор схем реализации вентилях. В частности, обсуждаются пути реализации двухкутитных вентилях на двух ионах [25, 26] или атомах [21] в ловушках с помощью лазерных импульсов, а в работах [27, 28] – вентилях контролируемого сдвига фазы также на двух атомах при больших  $d$ .

Не получены конкретные схемы для реализации основного однокудитного вентиля КПФ, являющегося обобщением однокубитного вентиля Адамара. Он играет ключевую роль во многих квантовых алгоритмах, поскольку необходим для реализации многокудитного КПФ [24], а также основного двухкудитного вентиля, получившего название “SUM gate” [19, 20] или “XOR gate” [21].

КПФ осуществляется действием на  $d$ -мерный вектор состояния матрицей Уолша–Адамара [1, 29]:

$$\text{QFT}_d = \frac{1}{\sqrt{d}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{d-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(d-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{d-1} & \omega^{2(d-1)} & \dots & \omega^{(d-1)^2} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{d}\right).$$

Поскольку неясно, как получить оператор с такой матрицей непосредственно воздействием внешних полей, то необходим обходной путь для его экспериментальной реализации. Одним из таких возможных путей для систем с неэквидистантными уровнями является представление матрицы (1) с помощью последовательностей селективных импульсов радиочастотного (РЧ) магнитного поля в ЯМР или лазерных импульсов в оптике. Действие каждого из таких импульсов можно представить матрицей вращения двух состояний системы, разница энергий которых совпадает с частотой импульса [7, 8, 10, 13]:

$$\begin{aligned} \{\theta\}_{\hat{n}}^{r-s} &= \exp(-i\theta\hat{n}\sigma/2) = \\ &= \cos(\theta/2)\sigma_I - i\sin(\theta/2)[n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z], \\ \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\theta$  – угол поворота, верхний индекс  $r-s$  означает селективный импульс на переходе  $r \leftrightarrow s$ , нижний индекс обозначает ось вращения, которая задается направляющими косинусами  $n_x, n_y, n_z$ ;  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  и  $\sigma_I$  – матрицы Паули. Остальные состояния системы в это время не меняются. В ряде работ [1, 5, 21, 25, 27] матрицу селективного вращения записывают в виде произведения трех матриц (2), как показано далее в формуле (5). Оператору (5), записанному в виде (2), соответствует  $\theta = 2\gamma, n_x = \cos\phi, n_y = -\sin\phi, n_z = 0$ . К настоящему времени найдена последовательность лазерных импульсов для реализации КПФ на кудритах ( $d=3$ ) [21] и последовательности РЧ импульсов для  $d=4, 6$  и  $8$  [30].

В предлагаемой работе получают последовательности операторов селективных поворотов для представления матрицы  $\text{QFT}_d$  (1) на многоуровневых системах с ранее не рассматриваемыми значениями  $d=5, 7, 9$  и  $10$ , а также со значениями  $d=3$  и  $6$ . Для двух последних значений нам удалось найти более короткие последовательности, чем в предыдущих работах [21, 30].

В следующем разделе рассматривается представление матриц  $\text{QFT}_d$  в тех случаях, когда число уровней  $d$  является простым:  $d=3, 5$  и  $7$ . При этом применяется предложенная в работе [27] общая процедура для разложения произвольной унитарной матрицы размером  $d \times d$ . Далее для матриц  $\text{QFT}_d$  с факторизуемыми числами  $d=6, 9$  и  $10$ , допускающими запись в виде  $d=(2I_1+1)(2I_2+1)$ , будет применена другая методика [30], основанная на представлении виртуальных спинов  $I_1, I_2$  [7, 8].

### ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ КПФ НА СИСТЕМАХ С 3, 5 И 7 УРОВНЯМИ

Итак, чтобы представить матрицу (1) в виде последовательности операторов селективных поворотов, применим к ней общую процедуру разложения, описанную в работе [27]. Суть процеду-

**Таблица 1.** Значения параметров в последовательности операторов вращения  $\prod_j \{\theta_j\}_{\hat{n}}^{r-s}$  для реализации КПФ на 3-уровневой квантовой системе

$j$	$\hat{n}$	$\theta_j$ , рад	$r-s$
1	$Y$	$7\pi/2$	2-3
2	$Z$	$\pi$	1-2
3	$Y$	$2\arctg(\sqrt{2})$	1-2
4	$Y$	$\pi/2$	2-3

ры в следующем. Допустим, нам надо диагонализировать унитарную матрицу  $V$  размером  $d \times d$ :

$$V = \begin{pmatrix} V_{1,1} & V_{1,2} & \dots & V_{1,d-1} & V_{1,d} \\ V_{2,1} & V_{2,2} & \dots & V_{2,d-1} & V_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V_{d-1,1} & V_{d-1,2} & \dots & V_{d-1,d-1} & V_{d-1,d} \\ V_{d,1} & V_{d,2} & \dots & V_{d,d-1} & V_{d,d} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Для этого будем последовательно действовать на матрицу (3) операторами селективных поворотов  $U_i$ :

$$D = \prod_i U_i V. \quad (4)$$

Каждый оператор  $U_i$  может быть представлен в виде произведения трех селективных импульсов на переходе  $r \longleftrightarrow s$  между соседними уровнями ( $s - r = 1$ ) (действие операторов осуществляется справа налево):

$$U_i = U^{r-s}(\gamma_i, \phi_i) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma_i) & -ie^{i\phi_i} \sin(\gamma_i) \\ -ie^{-i\phi_i} \sin(\gamma_i) & \cos(\gamma_i) \end{pmatrix} = \{-\phi_i\}_Z^{r-s} \{2\gamma_i\}_X^{r-s} \{\phi_i\}_Z^{r-s}, \quad (5)$$

где значения углов  $\gamma_i$  и  $\phi_i$  определяются исходя из полученной на предыдущем этапе матрицы  $V_{i-1}$  ( $V_i = U_i V_{i-1}$ ,  $V_0 = V$ ) и подбираются таким образом, чтобы в результирующей матрице  $V_i$  выбранный матричный элемент  $(V_{s,k})_i$  обращался в нуль:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\gamma_i) &= \left| \frac{(V_{s,k})_{i-1}}{(V_{r,k})_{i-1}} \right|, \\ \phi_i &= \pi/2 + \arg(V_{r,k})_{i-1} - \arg(V_{s,k})_{i-1}. \end{aligned}$$

При этом индексы  $s$  и  $k$  последовательно пробегают по всем элементам матрицы, расположенным ниже главной диагонали, начиная с  $V_{d,1}$  и заканчи-

вая  $V_{d,d-1}$  ( $V_{d,1} \dots V_{2,1}$ ,  $V_{d,2} \dots V_{3,2} \dots V_{d,d-2}$ ,  $V_{d-1,d-2}$ ,  $V_{d,d-1}$ ),

$$s = d, (d-1) \dots (k+1), \quad k = 1, 2 \dots (d-1).$$

Тем самым, применив  $d(d-1)/2$  раз оператор (5), мы приводим матрицу к треугольному виду, который оказывается диагональным, вследствие свойства унитарности исходной матрицы (3). Если теперь мы умножим обе части уравнения (4) на обратную последовательность операторов, то получим следующее представление исходной матрицы:

$$V = \left( \prod_i U_i \right)^\dagger D.$$

Диагональную матрицу  $D$  можно представить в виде последовательности селективных  $Z$ -импульсов:

$$D = \prod_j \{\theta_j\}_Z. \quad (6)$$

После чего мы получим с учетом (5) представление матрицы (3) через операторы селективных поворотов

$$V = \left( \prod_{i=1}^{d(d-1)/2} \{-\phi_i\}_Z \{2\gamma_i\}_X \{\phi_i\}_Z \right)^\dagger \prod_j \{\theta_j\}_Z. \quad (7)$$

Обратимся теперь к матрице QFT $_d$  (1). В силу ее особенностей последовательность (7) удалось усовершенствовать. Во-первых, все элементы первого столбца равны  $1/\sqrt{d}$ , поэтому для их последовательного устранения оператор (5) преобращается более простую форму

$$\begin{aligned} U^{r-s}(\gamma_i, \pi/2) &= \{-\pi/2\}_Z^{r-s} \{2\gamma_i\}_X^{r-s} \{\pi/2\}_Z^{r-s} = \\ &= \{-2\gamma_i\}_Y^{r-s}. \end{aligned} \quad (8)$$

Во-вторых, после устранения первого столбца (и одновременно первой строки) по схеме (4) вторая строка оказалась состоящей из равных действительных чисел, поэтому нам было проще устранить ее (также с помощью простых выражений (8)), а не второй столбец. В результате из общего выражения (7) получается последовательность селективных импульсов для реализации КПФ на произвольной  $d$ -уровневой системе

$$\begin{aligned} \text{QFT}_d &= \prod_{k=d}^2 \{2\gamma_k\}_Y \left( \prod_{i=1}^{(d^2-5d+6)/2} \{-\phi_i\}_Z \{2\gamma_i\}_X \{\phi_i\}_Z \right)^\dagger \\ &\times \prod_j \{\theta_j\}_Z \prod_{k=3}^d \{-2\gamma_k\}_Y. \end{aligned} \quad (9)$$

Мы предлагаем использовать последовательность (9) для тех случаев, когда у кудита число уровней является простым. В приведенных далее табл. 1, 2 и 3 указаны характеристики операторов вращения, позволяющих получить КПФ на системах с 3, 5 и 7 уровнями соответственно. Таблицы составлены в порядке действия операторов на кудит; углы указаны в радианах; оси вращения взяты вдоль трех основных осей:  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ , выбранных относительно вычислительного базиса.

На примере 7-уровневой системы (табл. 3) можно детально проследить получение матрицы (1) по схеме (9):  $Z$ -импульсы 6–10 задают начальную диагональную матрицу (6); импульсы 11–40 заполняют основную часть недиагональных элементов матрицы, по 3 импульса ( $Z-X-Z$ ) на каждый матричный элемент;  $Y$ -импульсы 41–46 заполняют первый столбец; первые же  $Y$ -импульсы 1–5, заполняющие вторую строку матрицы, получены аналогично импульсам 42–46, при этом они являются для них эрмитово-сопряженными и взяты в обратной последовательности.

Заметим, что полученные в результате применения операторных последовательностей матрицы отличаются от (1) фазовыми множителями: для систем с 3, 5 и 7 уровнями соответственно  $\exp(i\pi/2) = i$ ,  $\exp(i\pi) = -1$  и  $\exp(i\pi/4)$ .

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ  
ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ КПФ НА СИСТЕМАХ  
С 6, 9 И 10 УРОВНЯМИ

Общий способ, описанный в предыдущем разделе, может быть применен и в этом случае. Однако поскольку сложность расчетов быстро растет с ростом  $d$  (требуется порядка  $d^2$  операций), то оказывается полезным другой способ, основанный на представлении виртуальных кудитов  $d = d_1 \times d_2$ . Подобное представление позволяет воспользоваться при вычислении результатами, уже полученными для  $d_1$  и  $d_2$ . Так, например,  $d = 6$  можно представить как систему из кубита и кутрита,  $d = 9$  – из двух кутритов,  $d = 10$  – из кубита и кудита с 5 уровнями.

Матрицу КПФ для системы двух виртуальных кудитов с числом уровней  $d_1$  и  $d_2$  будем вычислять по предложенной в работе [30] схеме

$$\begin{aligned} \text{QFT}_d &= (\text{QFT}_{d_1})_1 \longrightarrow \\ &\longrightarrow P(d_1, d_2, \theta) \longrightarrow (\text{QFT}_{d_2})_2 \longrightarrow \text{SWAP}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $(\text{QFT}_d)_i$  – оператор Уолша–Адамара (1), действующий на кудит  $i$ ,  $P(d_1, d_2, \theta)$  – оператор контролируемого сдвига фазы с диагональной матрицей размерности  $(d_1 \times d_2)$  в пространстве состо-

**Таблица 2.** То же, что в табл. 1, но для 5-уровневой квантовой системы

$j$	$\hat{n}$	$\theta_j$ , рад	$r-s$
1	$Y$	$7\pi/2$	4–5
2	$Y$	$-2\arctg(\sqrt{2})$	3–4
3	$Y$	$2\pi - 2\arctg(\sqrt{3})$	2–3
4	$Z$	$-2.078814$	3–4
5	$Z$	$1.397314$	4–5
6	$X$	$1.212827$	4–5
7	$Z$	$3.323021$	4–5
8	$Z$	$-2.492898$	3–4
9	$X$	$1.705778$	3–4
10	$Z$	$2.492898$	3–4
11	$Z$	$-2.436721$	4–5
12	$X$	$1.212827$	4–5
13	$Z$	$2.436721$	4–5
14	$Y$	$2\pi + 2\arctg(2)$	1–2
15	$Y$	$2\arctg(\sqrt{3})$	2–3
16	$Y$	$2\arctg(\sqrt{2})$	3–4
17	$Y$	$\pi/2$	4–5

яний двух кудитов, матричные элементы которого определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle km|P(d_1, d_2, \theta)|km\rangle &= \exp(ikm\theta), \\ k &= 0\dots(d_1 - 1), \quad m = 0\dots(d_2 - 1), \quad \theta = \frac{2\pi}{(d_1 d_2)}. \end{aligned} \quad (11)$$

В формуле (10) и далее в тексте стрелками между операторами указывается порядок во времени действия операторов на кудит. После применения трех первых операторов последовательности (10) получается состояние, побитно обратное истинному, вычисленному в результате применения оператора (1). Поэтому для приведения результата к нужному виду применяется операция перестановки состояний – SWAP.

Для примера рассмотрим подробнее самый простой случай из приведенных, 6-уровневую систему. Согласно формализму виртуальных спинов, представим эту систему состоящей из виртуальных кутрита ( $d_1 = 3$ ) и кубита ( $d_2 = 2$ ), обозначив соответственно состояния системы через  $|00\rangle = |1\rangle$ ,  $|01\rangle = |2\rangle$ ,  $|10\rangle = |3\rangle$ ,  $|11\rangle = |4\rangle$ ,  $|20\rangle = |5\rangle$ ,  $|21\rangle = |6\rangle$ . Для реализации КПФ по схеме (10) надо получить импульсные последовательности, даю-

**Таблица 3.** То же, что в табл. 1, но для 7-уровневой квантовой системы

$j$	$\hat{n}$	$\theta_j$ , рад	$r-s$
1	Y	$7\pi/2$	6-7
2	Y	$-2\arctg(\sqrt{2})$	5-6
3	Y	$-2\arctg(\sqrt{3})$	4-5
4	Y	$-2\arctg(2)$	3-4
5	Y	$-2\arctg(\sqrt{5})$	2-3
6	Z	0.625510	5-6
7	Z	8.438679	4-5
8	Z	6.069378	3-4
9	Z	$16\pi/7$	2-3
10	Z	$\pi/7$	1-2
11	Z	8.774702	6-7
12	X	1.128249	6-7
13	Z	10.401837	6-7
14	Z	2.811002	5-6
15	X	1.532904	5-6
16	Z	-2.811002	5-6
17	Z	2.809033	6-7
18	X	0.998229	6-7
19	Z	-2.809033	6-7
20	Z	3.415574	4-5
21	X	1.832338	4-5
22	Z	-3.415574	4-5
23	Z	3.449457	5-6
24	X	1.439671	5-6
25	Z	-3.449457	5-6
26	Z	3.459925	6-7
27	X	0.998229	6-7
28	Z	-3.459925	6-7
29	Z	4.011769	3-4
30	X	2.084763	3-4
31	Z	-4.011769	3-4
32	Z	4.059562	4-5
33	X	1.832338	4-5
34	Z	-4.059562	4-5
35	Z	4.087912	5-6
36	X	1.532904	5-6
37	Z	-4.087912	5-6
38	Z	10.387608	6-7
39	X	1.128249	6-7
40	Z	-10.387608	6-7
41	Y	$2\arctg(\sqrt{6})$	1-2
42	Y	$2\arctg(\sqrt{5})$	2-3
43	Y	$2\arctg(2)$	3-4
44	Y	$2\arctg(\sqrt{3})$	4-5
45	Y	$2\arctg(\sqrt{2})$	5-6
46	Y	$\pi/2$	6-7

щие последовательно операторы QFT<sub>3</sub>, P(3, 2, π/3), QFT<sub>2</sub> и SWAP.

Оператор QFT<sub>3</sub> получается путем применения последовательности из табл. 1, только теперь эта импульсная последовательность применяется не на приведенных переходах 1-2-3, а вначале на переходах 1-3-5, затем на 2-4-6, образуя в совокупности 8 поворотов (см. схему переходов на рис. 1). Оператор P(3, 2, π/3) получается за 4 поворота:

$$P(3, 2, \pi/3) = \{\pi\}_Z^{1-2} \rightarrow \{\pi\}_Z^{3-5} \rightarrow \\ \rightarrow \{2\pi\}_Z^{1-3} \rightarrow \{7\pi/3\}_Z^{4-6}.$$

Оператор QFT<sub>2</sub> также требует 4 поворота:

$$\text{QFT}_2 = \{7\pi/2\}_Y^{1-2} \rightarrow \{\pi/2\}_Y^{3-4} \rightarrow \\ \rightarrow \{3\pi\}_X^{3-4} \rightarrow \{3\pi/2\}_Y^{5-6}.$$

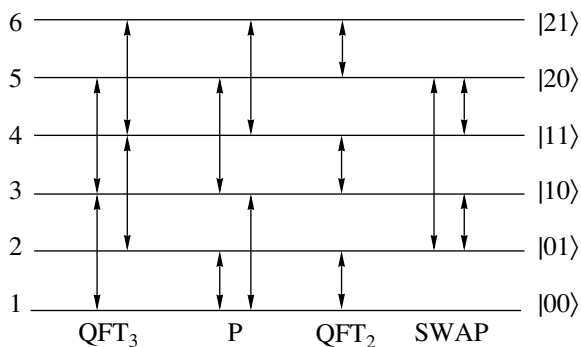
Для получения оператора SWAP потребуется применение оператора  $\{\pi\}_X^{r-s}$  поочередно на переходах 2-5, 2-3 и 4-5 (всего 3 поворота). В результате, для КПФ на 6-уровневой системе получается последовательность из 19 селективных поворотов.

Перейдем к 9-уровневой системе, которую представим состоящей из двух виртуальных кутритов ( $d_1 = d_2 = 3$ ). Тогда для реализации КПФ надо последовательно получить операторы: QFT<sub>3</sub> по первому кутриту, P(3, 3, 2π/9), QFT<sub>3</sub> по второму кутриту и SWAP. Как и в случае 6 уровней, оператор QFT<sub>3</sub> для первого кутрита получается применением последовательности из табл. 1, только уже на переходах 1-4-7, 2-5-8 и 3-6-9 (рис. 2). Для получения QFT<sub>3</sub> на втором кутрите эта же последовательность применяется для переходов 1-2-3, 4-5-6 и 7-8-9. Последовательное применение трех Z-импульсов дает оператор P(3, 3, 2π/9):

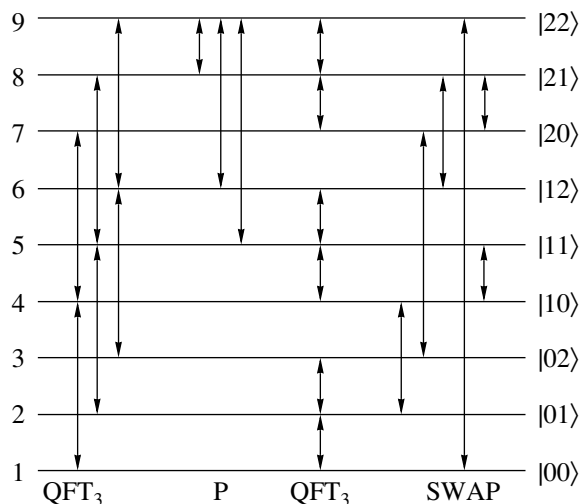
$$P(3, 3, 2\pi/9) = \{-8\pi/9\}_Z^{8-9} \rightarrow \\ \rightarrow \{-8\pi/9\}_Z^{6-9} \rightarrow \{-4\pi/9\}_Z^{5-9}.$$

Оператору SWAP уже потребуется 6 импульсов (табл. 4), так как число уровней, требующих перестановку, возросло по сравнению с предыдущим случаем. В итоге для КПФ на 9-уровневой системе уже потребуется 33 селективных импульса.

Для получения КПФ на системе с 10 уровнями мы представим ее состоящей из 5-уровневого кудита ( $d_1 = 5$ ) и кубита ( $d_2 = 2$ ). Оператор QFT<sub>5</sub> получается по тем же правилам, которые использовались до этого: импульсная последовательность из табл. 2 применяется вместо приведенных в таблице переходов 1-2-3-4-5 вначале на переходах 1-3-5-7-9, а затем на 2-4-6-8-10 (рис. 3), что требует в общей сложности 34 импульса. Оператор



**Рис. 1.** Схема переходов, используемых при реализации КПФ на квантовой системе с 6 неэквидистантными уровнями. Расстояния между уровнями условны. Отдельные переходы объединены в группы и составлены в порядке действия операторов. Номер уровня указан слева, а справа – соответствующее ему состояние пары виртуальных кубитов.



**Рис. 2.** Схема переходов, используемых при реализации КПФ на квантовой системе с 9 уровнями.

$P(5, 2, \pi/5)$  получается применением трех импульсов

$$P(5, 2, \pi/5) = \{-2\pi/5\}_Z^{4-10} \rightarrow \{-4\pi/5\}_Z^{6-8} \rightarrow \{2\pi\}_Z^{8-10}.$$

Оператор  $QFT_2$  получается в результате пятикратного повторения двух импульсов

$$\{\pi/2\}_Y^{r-s} \rightarrow \{-\pi\}_X^{r-s},$$

которые последовательно применяются на переходах 1–2, 3–4, 5–6, 7–8 и 9–10. Наконец, для получения оператора SWAP потребуется 7 импульсов, приведенных в табл. 5. В результате, чтобы получить КПФ на 10-уровневой системе, потребуется последовательность из 54 селективных импульсов. Кроме того, полученная в результате матрица отличается от (1) фазовым множителем  $\exp(i\pi/2) = i$ .

### ОБСУЖДЕНИЕ

Итак, мы нашли для КПФ многоуровневых систем последовательности селективных поворотов, которые позволят их реализовать с помощью РЧ импульсов или лазерных импульсов. Однако для практического осуществления они должны быть доработаны с учетом требований эксперимента. Дело в том, что в приведенных последовательностях мы использовали селективные импульсы, действующие на “запрещенных” переходах, тогда как правила запрета, вообще говоря, не совпадают при воздействии лазерными импульсами на атомные уровни или РЧ импульсами на уровни квадрупольного ядра.

В качестве примера приведем реализацию для квадрупольного ядра в сильном магнитном поле, у которого разрешенными являются переходы с изменением спиновой проекции на единицу, т.е. между соседними уровнями. В этом случае селективные повороты на “запрещенных” переходах могут быть реализованы с помощью нескольких последовательных импульсов, как это обсуждается в работах [13, 31]:

$$\{\theta\}_{\hat{n}}^{r-s} = \{-\pi\}_Y^{(s-1)-s} \dots \{-\pi\}_Y^{(r+1)-(r+2)} \rightarrow \{\theta\}_{\hat{n}}^{r-(r+1)} \rightarrow \{\pi\}_Y^{(r+1)-(r+2)} \dots \{\pi\}_Y^{(s-1)-s}.$$

Кроме того, приведенные в схемах импульсы с вращением вокруг оси Z на практике осуществляют в виде составного Z-импульса [1, 10]

$$\{\theta\}_Z^{r-s} = \{-\pi/2\}_X^{r-s} \rightarrow \{\theta\}_Y^{r-s} \rightarrow \{\pi/2\}_X^{r-s}.$$

Наряду с этим существуют и другие способы: например, с помощью сдвига фазы последующих импульсов [2] или с помощью двух сдвинутых по фазе  $\pi$ -импульсов [16]

**Таблица 4.** Значения параметров в импульсной последовательности для оператора SWAP на 9-уровневой квантовой системе

$j$	$\hat{n}$	$\theta_j$ , рад	$r-s$
1	Y	$\pi$	2–4
2	Y	$\pi$	3–7
3	Y	$\pi$	6–8
4	Y	$2\pi$	1–9
5	Y	$2\pi$	4–5
6	Y	$2\pi$	7–8

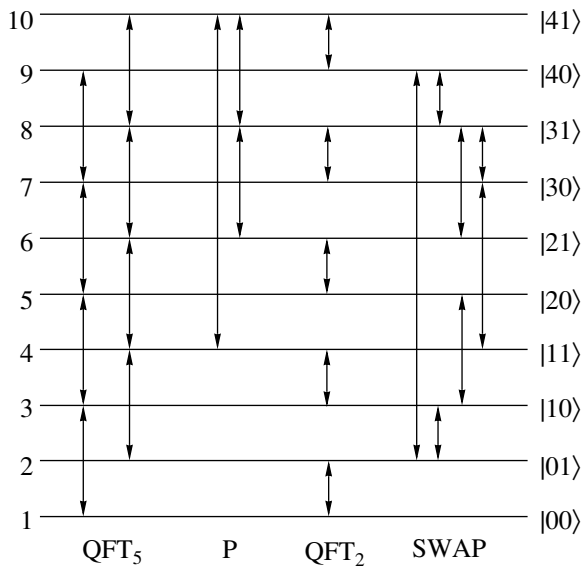


Рис. 3. Схема переходов, используемых при реализации КПФ на квантовой системе с 10 уровнями.

$$\{\theta\}_Z^{r-s} = \{\pi\}_Y^{r-s} \longrightarrow \{\pi\}_{Y+\pi+\theta/2}^{r-s}.$$

Из полученных в итоге выражений видно, что при переходе от импульсов, действующих на реальные спины, к селективным импульсам, действующим на отдельные переходы в многоуровневой системе, возросло число операций. Это находится в полном соответствии с общей теорией квантовых вычислений [32], согласно которой принципиальные преимущества квантовых алгоритмов проявляются на системах из многих квантовых объектов. Частично можно ускорить реализацию КПФ, используя возможность параллельного действия селективными импульсами на несвязанные уровни [28].

Отметим другие подходы к представлению матрицы КПФ (1). В работе [21] предложена последовательность лазерных импульсов для кутрита, которую можно представить последователь-

Таблица 5. Значения параметров в импульсной последовательности для оператора SWAP на 10-уровневой квантовой системе

$j$	$\hat{n}$	$\theta_j$ , рад	$r-s$
1	Y	$-\pi$	2-9
2	Y	$-\pi$	2-3
3	Y	$\pi$	8-9
4	Y	$-\pi$	3-5
5	Y	$-\pi$	6-8
6	Y	$-\pi$	4-7
7	Y	$2\pi$	7-8

ностью 11 селективных поворотов [30]. Полученный в настоящей работе вариант из 4 операторов (табл. 1) может оказаться предпочтительнее при реализации как РЧ, так и лазерными импульсами. В работе [29] дана параметризация  $QFT_d$  для  $d = 3, 4$  и  $5$ , но последовательность импульсов не была получена, поэтому осталось неясным, как использовать эти результаты на практике.

Наконец, на основании полученных результатов несложно получить импульсные последовательности для реализации другого квантового оператора – двухкубитного вентиля SUM [19, 20] (или XOR [21]), схема которого

$$\text{SUM} = (QFT_{d_2})_2 \longrightarrow \\ \longrightarrow P(d_1, d_2, 2\pi/d_2) \longrightarrow (QFT_{d_2}^{-1})_2$$

выражается через матрицы КПФ (1), найденные выше. Обратим внимание, что в отличие от схемы (10) оба оператора  $QFT_d$  действуют на второй кубит, причем один из операторов – это обратное фурье-преобразование. Оператор контролируемого сдвига фазы определяется аналогично (11), однако угол  $\theta$  имеет другое значение. Задача реализации вентиля SUM на многоуровневых системах также актуальна, как и задача реализации КПФ, поскольку вентиль SUM является многоуровневым обобщением основного двухкубитного вентиля CNOT.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Валиев К.А., Кокин А.А.* Квантовые компьютеры: надежды и реальность. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001.
2. *Vandersypen L.M.K., Steffen M., Breyta G., Yannoni C.S., Sherwood M.H., Chuang I.L.* // Nature. 2001. V. 414. P. 883.
3. *Negrevergne C., Mahesh T.S., Ryan C.A., Ditty M., Cyr-Racine F., Power W., Boulant N., Havel T., Cory D.G., Laflamme R.* // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 96. P. 170501.
4. *Gottesman D.* // Lect. Not. Comp. Sci. 1999. V. 1509. P. 302.
5. *Muthukrishnan A., Stroud C.R. (Jr.)* // Phys. Rev. A. 2000. V. 62. P. 052309.
6. *Greentree A.D., Schirmer S.G., Green F., Hollenberg L.C.L., Hamilton A.R., Clark R.G.* // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 92. P. 097901.
7. *Кессель А.Р., Ермаков В.Л.* // ЖЭТФ. 2000. Т. 117. В. 3. С. 517.
8. *Кессель А.Р., Ермаков В.Л.* // Письма в ЖЭТФ. 2000. Т. 71. В. 7. С. 443.
9. *Ermakov V.L., Fung B.M.* // Phys. Rev. A. 2002. V. 66. P. 042310.
10. *Das R., Kumar A.* // Phys. Rev. A. 2003. V. 68. P. 032304.
11. *Khitrin A.K., Fung B.M.* // Phys. Rev. A. 2001. V. 64. P. 032306.

12. *Murali K.V.R.M., Sinha N., Mahesh T.S., Levitt M.H., Ramanathan K.V., Kumar A.* // Phys. Rev. A. 2002. V. 66. P. 022313.
13. *Hirayama Y., Miranowicz A., Ota T., Yusa G., Mura-ki K., Ozdemir S.K., Imoto N.* // quant-ph/0605199.
14. *Низовцев А.П., Кулин С.Я., Jelezko F., Gaebel T., Pora I., Gruber A., Wrachtrup J.* // Опт. и спектр. 2005. Т. 99. № 2. С. 248.
15. *Das R., Mitra A., Kumar V., Kumar A.* // Int. J. Quantum Inf. 2003. V. 1. P. 387.
16. *Gopinath T., Kumar A.* // Phys. Rev. A. 2006. V. 73. P. 022326.
17. *Mehring M., Scherer W., Weidinger A.* // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. P. 206603.
18. *Vlasov A.Yu.* // J. Math. Phys. 2002. V. 43. P. 2959.
19. *Bartlett S.D., De Guise H., Sanders B.C.* // Phys. Rev. A. 2002. V. 65. P. 052316.
20. *Daboul J., Wang X., Sanders B.C.* // J. Phys. A. 2003. V. 36. P. 7063.
21. *Klimov B., Guzman R., Retamal J.C., Saavedra C.* // Phys. Rev. A. 2003. V. 67. P. 062313.
22. *Bullock S.S., O'Leary D.P., Brennen G.K.* // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 94. P. 230502.
23. *Khan F.S., Perkowski M.M.* // quant-ph/0511041.
24. *Muthukrishnan A., Stroud C.R. (Jr.)* // J. Mod. Optics. 2002. V. 49. P. 2115.
25. *McHugh D., Twamley J.* // quant-ph/0506031.
26. *Cen L.-X., Hou B.-P., Chen M.-L.* // quant-ph/0608105.
27. *Brennen G.K., O'Leary D.P., Bullock S.S.* // Phys. Rev. A. 2005. V. 71. P. 052318.
28. *O'Leary D.P., Brennen G.K., Bullock S.S.* // Phys. Rev. A. 2006. V. 74. P. 032334.
29. *Fujii K., Funahashi K., Kobayashi T.* // quant-ph/0508006.
30. *Зобов В.Е., Ермилов А.С.* // Письма в ЖЭТФ. 2006. Т. 83. В. 10. С. 539.
31. *Kessel R., Yakovleva N.M.* // Phys. Rev. A. 2002. V. 66. P. 062322.
32. *Бауместер Д., Экерт А., Цайлингер А.* Физика квантовой информации. Гл. 4. М.: Постмаркет, 2002 (Bouwmeester D., Ekert A., Zeilinger A. The Physics of Quantum Information. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2000).