

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 621.372.8

АНАЛИЗ ЭКРАНИРОВАННОЙ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ, СОДЕРЖАЩЕЙ КРУГОВЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОВОДНИКИ И КОПЛАНАРНЫЕ ЛИНИИ НА ЗАЗЕМЛЕННОМ ЭКРАНЕ

© 2007 г. В. В. Тюрнев

Поступила в редакцию 08.08.2006 г.

Впервые предложен метод численного расчета монолитной многопроводной экранированной линии передачи, интегрированной с планарными цепями связи. Получены формулы для расчета матрицы погонной емкости связанных проводников. В квазистатическом приближении рассчитаны электрические параметры волн основного типа. Результаты расчета могут быть использованы при конструировании моноблочных фильтров СВЧ.

ВВЕДЕНИЕ

В технике сверхвысоких частот (СВЧ) в качестве узкополосных селективных устройств все чаще используют диэлектрические моноблочные (ДМ) фильтры [1–3]. Они представляют собой керамический прямоугольный параллелепипед, в котором выполнено несколько параллельных круговых цилиндрических отверстий. Внешняя поверхность керамического блока и внутренняя поверхность его отверстий металлизирована. Конструктивно ДМ-фильтр можно рассматривать как отрезок экранированной однородной многопроводной линии передачи, снабженный входной и выходной цепями связи. Диэлектрические моноблочные фильтры технологичны и надежны в эксплуатации. Они отличаются от микрополосковых фильтров высокой добротностью своих резонаторов. Последнее обстоятельство имеет существенное значение при узкой полосе пропускания фильтра.

Однако широкое использование ДМ-фильтров ограничивается отсутствием специализированных систем автоматизированного проектирования (САПР). Создание таких САПР требует разработки численных методов расчета многопроводных экранированных линий передачи. Недавно нами [4] был предложен метод расчета экранированной многопроводной линии передачи, не содержащей цепей связи. В данной работе делается обобщение этого метода на случай, когда многопроводная линия передачи имеет протяженную связь с копланарными линиями, выполненными на экране.

1. ВОЛНЫ В МНОГОПРОВОДНОЙ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

Рассмотрим волны основного типа в многопроводной линии передачи, поперечное сечение которой изображено на рис. 1. Линия содержит

параллельные круговые цилиндрические проводники, произвольно расположенные внутри экрана прямоугольного сечения. Пространство между экраном и проводниками заполнено однородным диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ_r . На экране многопроводной линии выполнены продольные щелевые отверстия, образующие копланарные линии передачи.

Волны основного типа в такой линии передачи удобно разделить на две группы. Это можно сделать, если столь сложную неоднородную линию передачи рассматривать как две связанные многопроводные линии передачи. Первая многопроводная линия передачи содержит цилиндрические проводники, расположенные внутри замкнутого экрана. Это – однородная линия передачи. Ее проводники будем нумеровать индексом i . Вторая многопроводная линия содержит копланарные линии, образованные щелями в экране. Это – неоднородная линия передачи. Копланарные линии будем нумеровать индексом j .

Тогда волнами первой группы назовем волны первой линии передачи, а волнами второй группы – волны второй линии. Волны первой группы будем нумеровать индексом m , а волны второй группы –

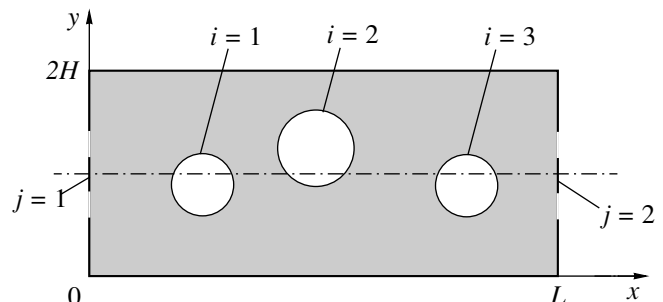


Рис. 1.

индексом n . В нулевом приближении, т.е. когда каждая из связанных линий существует в отдельности, все волны первой группы, будучи поперечными, будут распространяться с одинаковой скоростью, характеризуемой эффективной диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon_m = \varepsilon_r. \quad (1)$$

Волны второй группы, будучи квазипоперечными, будут распространяться с разными скоростями. Однако их скорости совпадут, если пренебречь связью между копланарными линиями и считать, что электрическое поле копланарной линии симметрично по обе стороны экрана. Тогда скорости волн второй группы будут характеризоваться эффективной диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon_n = (1 + \varepsilon_r)/2. \quad (2)$$

В дальнейшем для определенности будем предполагать, что имеется всего две копланарные линии. Тогда индексы j и n могут принимать только значения $j, n = 1 \dots 2$.

Так как все волны первой группы в нулевом приближении имеют одинаковые скорости, то разбиение их на нормальные волны не является однозначным. Для определенности m -й нормальной волной назовем волну, у которой токи на i -м цилиндрическом проводнике заданы условием

$$I_{im} = \delta_{im}, \quad (3)$$

где δ_{im} – символ Кронекера. При этом не накладываются никакие условия на напряжения U_{im} . Напряжения же на полосковых проводниках копланарных линий U_{jm} должны отсутствовать, так как в нулевом приближении эти проводники смыкаются с экраном.

Для волн второй группы нормальные волны определим условием на напряжения

$$U_{jn} = \delta_{jn}. \quad (4)$$

Учет взаимодействия между двумя выделенными многопроводными линиями приводит к образованию связанных волн. Волны первой группы, как и волны второй группы, становятся квазипоперечными, так как их поля выходят за пределы диэлектрика.

Как известно, электрические параметры квазипоперечных волн в области квазистатического приближения могут быть определены решением системы телеграфных уравнений

$$-\partial \vec{U} / \partial z = \mathbf{L} \partial \vec{I} / \partial t, \quad (5)$$

$$-\partial \vec{I} / \partial z = \mathbf{C} \partial \vec{U} / \partial t, \quad (6)$$

где \vec{U}, \vec{I} – векторы напряжений и токов на проводниках, а \mathbf{L}, \mathbf{C} – матрицы погонной емкости и индуктивности проводников линии передачи.

Решение системы уравнений (5), (6) имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{I}_p(z, t) &= \vec{I}_p \exp(ik_p z - i\omega t), \\ \vec{U}(z, t) &= \vec{U}_p \exp(ik_p z - i\omega t), \end{aligned} \quad (7)$$

где вектор токов \vec{I}_p и волновое число $k_p = \sqrt{\varepsilon_p} \omega / c$ являются p -ми собственным вектором и собственным значением однородной системы линейных уравнений

$$(k_p^2 - \omega^2 \mathbf{C} \mathbf{L}) \vec{I}_p = 0, \quad (8)$$

а вектор напряжений \vec{U}_p согласно уравнению (6) определяется формулой

$$\vec{U}_p = k_p \omega^{-1} \mathbf{C}^{-1} \vec{I}_p. \quad (9)$$

В случае узких щелей в копланарных линиях собственные значения k_p системы уравнений (8) могут оказаться настолько близкими, что отвечающие им собственные вектора \vec{I}_p при численном расчете могут получиться линейно зависимыми. Базис таких векторов будет неполным, и потому его нельзя использовать для решения каких-либо граничных задач.

Поэтому вместо численного решения системы уравнений (8) будем использовать собственные значения и собственные вектора нулевого приближения, выражаемые формулами (1)–(4). Подставляя последние в формулу (9), находим электрические параметры линии для волн первой группы

$$I_{im} = \delta_{im},$$

$$U_{im} = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{c} [(\mathbf{C}^{-1})_{im} + (\mathbf{C}^{-1})_{i1} I_{1m} + (\mathbf{C}^{-1})_{i2} I_{2m}],$$

$$I_{1m} = \frac{(\mathbf{C}^{-1})_{2m} (\mathbf{C}^{-1})_{12} - (\mathbf{C}^{-1})_{1m} (\mathbf{C}^{-1})_{22}}{(\mathbf{C}^{-1})_{11} (\mathbf{C}^{-1})_{22} - (\mathbf{C}^{-1})_{12} (\mathbf{C}^{-1})_{21}}, \quad U_{1m} = 0, \quad (10)$$

$$I_{2m} = \frac{(\mathbf{C}^{-1})_{1m} (\mathbf{C}^{-1})_{21} - (\mathbf{C}^{-1})_{2m} (\mathbf{C}^{-1})_{11}}{(\mathbf{C}^{-1})_{11} (\mathbf{C}^{-1})_{22} - (\mathbf{C}^{-1})_{12} (\mathbf{C}^{-1})_{21}}, \quad U_{2m} = 0$$

и для волн второй группы

$$I_{i1} = 0, \quad U_{i1} = \frac{(\mathbf{C}^{-1})_{i1} (\mathbf{C}^{-1})_{22} - (\mathbf{C}^{-1})_{i2} (\mathbf{C}^{-1})_{21}}{(\mathbf{C}^{-1})_{11} (\mathbf{C}^{-1})_{22} - (\mathbf{C}^{-1})_{12} (\mathbf{C}^{-1})_{21}},$$

$$I_{i2} = 0, \quad U_{i2} = \frac{(\mathbf{C}^{-1})_{i2} (\mathbf{C}^{-1})_{11} - (\mathbf{C}^{-1})_{i1} (\mathbf{C}^{-1})_{12}}{(\mathbf{C}^{-1})_{11} (\mathbf{C}^{-1})_{22} - (\mathbf{C}^{-1})_{12} (\mathbf{C}^{-1})_{21}},$$

$$U_{11} = 1,$$

$$I_{11} = \frac{c}{\sqrt{(\epsilon_r + 1)/2}} \frac{(C^{-1})_{22}}{(C^{-1})_{11}(C^{-1})_{22} - (C^{-1})_{12}(C^{-1})_{21}},$$

$$U_{21} = 0, \tag{11}$$

$$I_{21} = \frac{-c}{\sqrt{(\epsilon_r + 1)/2}} \frac{(C^{-1})_{21}}{(C^{-1})_{11}(C^{-1})_{22} - (C^{-1})_{12}(C^{-1})_{21}},$$

$$U_{12} = 0,$$

$$I_{12} = \frac{-c}{\sqrt{(\epsilon_r + 1)/2}} \frac{(C^{-1})_{12}}{(C^{-1})_{11}(C^{-1})_{22} - (C^{-1})_{12}(C^{-1})_{21}},$$

$$U_{22} = 1,$$

$$I_{22} = \frac{c}{\sqrt{(\epsilon_r + 1)/2}} \frac{(C^{-1})_{11}}{(C^{-1})_{11}(C^{-1})_{22} - (C^{-1})_{12}(C^{-1})_{21}}.$$

Таким образом, для нахождения электрических параметров нормальных волн в многопроводной линии передачи необходимо вычислить матричные элементы обратной матрицы емкости C^{-1} , которая определяется формулой

$$\vec{U} = C^{-1} \vec{Q}. \tag{12}$$

2. РАСЧЕТ ДВУМЕРНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Расчет обратной матрицы погонной емкости C^{-1} начнем с расчета двумерного потенциала $\Phi(x, y)$, создаваемого зарядами на всех проводниках. Для этого необходимо получить общее решение уравнения Лапласа

$$\Delta \Phi(x, y) = 0, \tag{13}$$

которое постоянно на поверхности проводников и обращается в нуль на поверхности экрана.

Общее решение задачи Дирихле (13) можно строго представить в виде

$$\Phi(x, y) = \sum_i \Phi_i(x, y|Q_i) + \tag{14}$$

$$+ \sum_i \Phi_j(x, y|U_j) + \sum_i \Psi_j(x, y).$$

Здесь функция $\Phi_i(x, y|Q_i)$ – потенциал произвольно распределенных зарядов с погонной плотностью Q_i на поверхности i -го цилиндрического проводника при отсутствии копланарных линий на экране. Этот потенциал обращается в нуль на поверхности диэлектрика и вне его.

Функция $\Phi_j(x, y|U_j)$ – потенциал j -й копланарной линии, проводник которой находится под напряжением U_j относительно экрана при отсутствии цилиндрических проводников и остальных копланарных линий.

Функция $\Psi_j(x, y)$ – поправка к потенциалу всех цилиндрических проводников при внесении j -й копланарной линии, проводник которой находится под напряжением $U_j = 0$ относительно экрана, и при отсутствии остальных копланарных линий.

Общее выражение для потенциала $\Phi_i(x, y|Q_i)$ получено в работе [4] методом конформных отображений. Оно имеет вид

$$\Phi_i(x, y|Q_i) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \operatorname{Re} f_i(w, w_i|Q_i), \tag{15}$$

где

$$f_i(w, w_i|Q_i) = Q_i \ln \frac{w - w_i^*}{w - w_i} + \tag{16}$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} A_{il} [(w - w_i)^{-l} - (w^* - w_i)^{-l}],$$

$$w = wz(z), \quad w_i = wz(z_i), \tag{17}$$

A_{il} – неопределенные комплексные коэффициенты, характеризующие мультипольные моменты распределения заряда Q_i , l – порядок мультиполя, $z = x + iy$ – комплексное число, сопоставляемое координатам x и y , z_i – комплексное число, сопоставляемое центру i -го проводника.

Функция комплексного аргумента $wz(z)$ в (17) определяется формулой

$$wz(z) = -\operatorname{dn}(zK'(k)/H, k)/k', \tag{18}$$

где $\operatorname{dn}(z, k)$ – эллиптическая функция Якоби (дельта амплитуды), k и $k' = \sqrt{1 - k^2}$ – дополнительные модули эллиптической функции, $K(k)$ и $K'(k) = K(k')$ – связанные полные эллиптические интегралы Лежандра первого рода [5].

Модуль k в формуле (18) является корнем уравнения

$$K(k)/K'(k) = L/H, \tag{19}$$

где L – ширина, а H – полувысота экранированной линии передачи.

Приступим к расчету потенциала $\Phi_j(x, y|U_j)$. Начнем со случая, когда копланарная линия передачи расположена симметрично на левой стороне экрана. На рис. 1 этот случай относится к линии $j = 1$.

Для решения задачи поперечное сечение проводников экрана и копланарной линии (рис. 2а) требуется конформно отобразить на прямоугольник плоского конденсатора (рис. 2в). Отображение будем осуществлять в два этапа. Сначала прямоугольную z -область (рис. 2а) формулой $w = wz(z)$ отобразим на верхнюю половину w -области (рис. 2б). Затем верхнюю половину w -области (рис. 2б)

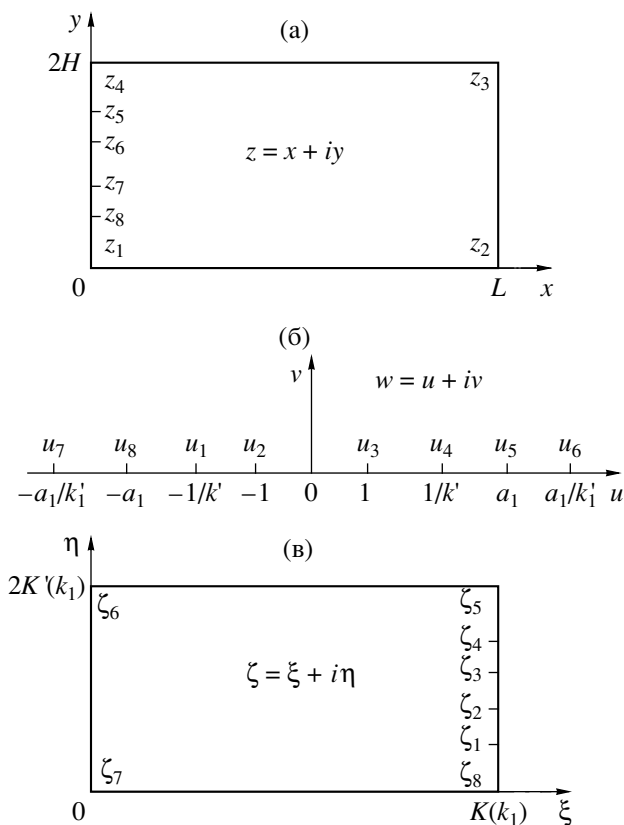


Рис. 2.

отобразим на прямоугольную ζ -область плоского конденсатора (рис. 2в) формулой $w = wz_1(\zeta)$, где

$$wz_1(\zeta) = -\frac{a_1}{k_1} \operatorname{dn}(\zeta, k_1), \quad (20)$$

$$a_1 = \frac{1}{k' \operatorname{sn}\left(\left(\frac{W_1}{2} + S_1\right) \frac{K(k')}{H}, k'\right)}, \quad (21)$$

$$k'_j = \operatorname{sn}\left(\frac{W_j K(k')}{2H}, k'\right) / \operatorname{sn}\left(\left(\frac{W_j}{2} + S_j\right) \frac{K(k')}{H}, k'\right), \quad (22)$$

W_j, S_j – ширина проводника и зазор щели j -й копланарной линии.

Из формул (18) и (20) получаем аналитическую функцию

$$g_1(z) = \operatorname{arcdn}\left(\frac{k'_1}{a_1 k} \operatorname{dn}(zK'(k)/H, k), k_1\right), \quad (23)$$

осуществляющую конформное отображение $\zeta = g_1(z)$, где $\operatorname{arcdn}(z, k)$ – функция, обратная функции $\operatorname{dn}(z, k)$. При таком отображении точкам $z_1, z_2, z_3, \dots, z_8$ на z -области соответствуют точки $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_8$ на ζ -области.

Решение уравнения Лапласа для ζ -области, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$\Phi_1(\xi, \eta | U_1) = U_1 \frac{K(k_1) - \operatorname{Re} \zeta}{K(k_1)}. \quad (24)$$

Так как гармонические функции инвариантны при конформных отображениях, то потенциал копланарной линии, расположенной на левой боковой стенке экрана, выражается формулой

$$\Phi_1(x, y | U_1) = U_1 \frac{K(k_1) - \operatorname{Re} g_1(z)}{K(k_1)}. \quad (25)$$

Аналогичным образом можно рассчитать потенциал копланарной линии передачи, расположенной симметрично на правой стороне экрана ($j = 2$). Он выражается формулой

$$\Phi_2(x, y | U_2) = \frac{U_2}{K(k_2)} \operatorname{Re} g_2(z), \quad (26)$$

где

$$g_2(z) = \operatorname{arcdn}\left(\frac{k'_2}{a_2 k} \operatorname{dn}(zK'(k)/H, k), k_2\right), \quad (27)$$

$$a_2 = \operatorname{sn}\left(\frac{W_2 K(k')}{2H}, k'\right). \quad (28)$$

Функция $\Psi_j(x, y)$, как и другие потенциалы, является гармонической. Она должна обращаться в нуль на металлизированных участках поверхности диэлектрика и в бесконечности. Эта функция призвана обеспечить выполнение электродинамических граничных условий на участках поверхности диэлектрика, свободных от металлизации. Благодаря этой функции потенциалы цилиндрических проводников простираются через щели копланарной линии за пределы диэлектрика.

Пусть поправка к потенциалу $\Psi_j(x, y)$ на поверхности j -й копланарной линии описывается функцией

$$\Phi_j(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } H + W_j/2 + S_j \leq y \leq 2H, \\ \Phi_{jB}(y) & \text{при } H + W_j/2 \leq y \leq H + W_j/2 + S_j, \\ 0 & \text{при } H - W_j/2 \leq y \leq H + W_j/2, \\ \Phi_{jC}(y) & \text{при } H - W_j/2 - S_j \leq y \leq H - W_j/2, \\ 0 & \text{при } 0 \leq y \leq H - W_j/2 - S_j. \end{cases} \quad (29)$$

Искомые функции представим рядами

$$\begin{aligned} \varphi_{iB}(y) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_{jn} U_n \left(\frac{y-y_B}{S_j/2} \right), \\ \varphi_{jC}(y) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_{jn} U_n \left(\frac{y-y_C}{S_j/2} \right), \end{aligned} \quad (30)$$

где $y_B = H + (W_j + S_j)/2$, $y_C = H - (W_j + S_j)/2$, $U_n(y) = \sin(n \arccos y)$. Использование функций Чебышева второго рода $U_n(y)$ обеспечивает быструю сходимость рядов, так как каждый член ряда удовлетворяет условию Мейкснера на краях проводников копланарной линии [6].

Разлагая функцию (29) в ряд Фурье

$$\varphi_j(y) = \sum_{k=1}^{\infty} D_{jk} \sin \left(\frac{k\pi y}{2H} \right) \quad (31)$$

и используя выражения (30), находим коэффициенты

$$\begin{aligned} D_{jk} &= -\frac{S_j}{k} \sum_{n=1}^{\infty} B_{jn} n J_n \left(\frac{k\pi S_j}{4H} \right) \times \\ &\times \cos \left(\pi \frac{k+n}{2} + \pi k \frac{W_j + S_j}{4H} \right) - \\ &- \frac{S_j}{k} \sum_{n=1}^{\infty} C_{jn} n J_n \left(\frac{k\pi S_j}{4H} \right) \cos \left(\pi \frac{k+n}{2} - \pi k \frac{W_j + S_j}{4H} \right), \end{aligned} \quad (32)$$

где $J_n(x)$ – функция Бесселя первого рода.

Из выражения (31) находим поправки к потенциалам левой и правой копланарных линий

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, y) &= \\ &= \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} D_{1k} \sin \left(\frac{k\pi y}{2H} \right) \frac{\text{sh} \left(k\pi \frac{L-x}{2H} \right)}{\text{sh} \left(\frac{k\pi L}{2H} \right)} \text{ при } 0 \leq x \leq L \\ \sum_{k=1}^{\infty} D_{1k} \sin \left(\frac{k\pi y}{2H} \right) \exp \left(\frac{k\pi x}{2H} \right) \text{ при } -\infty < x \leq 0, \end{cases} \quad (33) \\ \Psi_2(x, y) &= \\ &= \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} D_{2k} \sin \left(\frac{k\pi y}{2H} \right) \frac{\text{sh} \left(\frac{k\pi x}{2H} \right)}{\text{sh} \left(\frac{k\pi L}{2H} \right)} \text{ при } 0 \leq x \leq L \\ \sum_{k=1}^{\infty} D_{2k} \sin \left(\frac{k\pi y}{2H} \right) \exp \left(k\pi \frac{L-x}{2H} \right) \text{ при } L \leq x < \infty. \end{cases} \quad (34) \end{aligned}$$

При расчете в бесконечных суммах по индексу l в формуле (16) и по индексу n в формулах (30) и (32) можно оставить всего несколько слагаемых. Для этих сумм во многих практических случаях бывает достаточно сохранить лишь два первых слагаемых. Напротив, в формулах (33) и (34) в бесконечных суммах по k необходимо сохранить значительное число слагаемых. Согласно (32), максимальное значение индекса k должно быть $k_{\max} \geq 8H/S_j$.

Формула (14) вместе с формулами (15), (25), (26), (33) и (34) позволяет по заданным зарядам Q_i на цилиндрических проводниках и заданным напряжениям U_j на копланарных линиях вычислить потенциал $\Phi(x, y)$ в любой точке. Но прежде должны быть определены значения комплексных коэффициентов A_{il} в (16) и вещественных коэффициентов B_{jn} и C_{jn} в (32).

С этой целью для определенного числа точек на поверхности цилиндрических проводников и определенного числа точек на свободных от металлизации участках поверхности копланарных линий записывается и решается система неоднородных линейных уравнений.

Уравнения для точек на поверхности цилиндрических проводников выражают постоянство потенциала $\Phi(x, y)$. Число уравнений для этих точек должно быть в два раза больше числа коэффициентов A_{il} , так как потенциалы точек вещественны, а коэффициенты комплексны. Эквипотенциальные точки следует выбрать аксиально симметрично на поверхности проводника.

Уравнения для точек на копланарных линиях выражают непрерывность нормальной составляющей индукции электрического поля. Они имеют вид

$$\begin{aligned} \epsilon_r(x_j - 0)[\Phi(x_j - 0, y) - \Phi(x_j - \Delta x, y)] &= \\ = \epsilon_r(x_j + 0)[\Phi(x_j + \Delta x, y) - \Phi(x_j + 0, y)], \end{aligned} \quad (35)$$

где $\epsilon_r(x) = \epsilon_r$, если $0 < x < L$, и $\epsilon_r(x) = 1$, если $x < 0$ или $x > L$. Приращение Δx может принимать любое положительное значение, которое много меньше зазора S_j . Число уравнений (35) должно равняться суммарному числу вещественных коэффициентов B_{jn} и C_{jn} . Точки на поверхности копланарных линий следует выбрать на одинаковом расстоянии друг от друга и от края проводника.

3. РАСЧЕТ МАТРИЦЫ ПОГОННОЙ ЕМКОСТИ

Приступим к расчету элементов матрицы C^{-1} . Выделим среди копланарных линий линию с индексом j' . Рассмотрим случай

$$Q_i(U_{j'}) = 0, \quad U_j(U_{j'}) = U_{j'} \delta_{jj'}, \quad (36)$$

где аргумент в круглых скобках указывает на рассматриваемый случай.

Потенциалы цилиндрических проводников $U_i(U_{j'})$ можно вычислить подстановкой (36) в формулу (14).

Для расчета заряда $Q_j(U_{j'})$ на проводнике j' -й копланарной линии запишем уравнение

$$\rho_s = \varepsilon_0 \varepsilon_r \partial \Phi / \partial n, \quad (37)$$

связывающее поверхностную плотность зарядов ρ_s с потенциалом Φ , где n – нормаль к поверхности проводника.

Подставляя (14) в (37) и интегрируя по обеим поверхностям проводника, находим заряд на проводнике j' -й копланарной линии

$$\begin{aligned} Q_j(U_{j'}) = & \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \sum_i [f_i(-a_1/k'_1, w_i|0) - \\ & - f_i(a_1/k'_1, w_i|0)] + 2\varepsilon_0(1 + \varepsilon_r) \frac{K'(k_1)}{K(k_1)} U_1 + \\ & + 2\varepsilon_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} D_{1,2k-1}(U_{j'}) \times \\ & \times \left(1 + \varepsilon_r \operatorname{cth} \left(\pi L \frac{2k-1}{2H} \right)\right) \sin \left(\pi W_1 \frac{2k-1}{4H} \right), \end{aligned} \quad (38)$$

если $j' = 1$, и заряд

$$\begin{aligned} Q_j(U_{j'}) = & \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \sum_i [f_i(a_2, w_i|0) - \\ & - f_i(-a_2, w_i|0)] + 2\varepsilon_0(1 + \varepsilon_r) \frac{K'(k_2)}{K(k_2)} U_2 + \\ & + 2\varepsilon_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} D_{2,2k-1}(U_{j'}) \times \\ & \times \left(1 + \varepsilon_r \operatorname{cth} \left(\pi L \frac{2k-1}{2H} \right)\right) \sin \left(\pi W_2 \frac{2k-1}{4H} \right), \end{aligned} \quad (39)$$

если $j' = 2$.

Аналогичным образом можно вычислить заряды $Q_j(U_{j'})$ на проводниках остальных копланарных линий ($j \neq j'$). Если $j = 2$ они выражаются формулой

$$\begin{aligned} Q_j(U_{j'}) = & \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \sum_i [f_i(a_2, w_i|0) - \\ & - f_i(-a_2, w_i|0)] + 2\varepsilon_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} D_{2,2k-1}(U_{j'}) \times \\ & \times \left(1 + \varepsilon_r \operatorname{cth} \left(\pi L \frac{2k-1}{2H} \right)\right) \sin \left(\pi W_2 \frac{2k-1}{4H} \right), \end{aligned} \quad (40)$$

если $j = 1$, формулой

$$\begin{aligned} Q_j(U_{j'}) = & \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \sum_i [f_i(-a_1/k'_1, w_i|0) - \\ & - f_i(a_1/k'_1, w_i|0)] + 2\varepsilon_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} D_{1,2k-1}(U_{j'}) \times \\ & \times \left(1 + \varepsilon_r \operatorname{cth} \left(\pi L \frac{2k-1}{2H} \right)\right) \sin \left(\pi W_1 \frac{2k-1}{4H} \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Вычислив потенциалы цилиндрических проводников $U_i(U_{j'})$ и заряды на копланарных линиях $Q_j(U_{j'})$, можно согласно (12) рассчитать матричные элементы $(\mathbf{C}^{-1})_{ij'}$ по формулам

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}^{-1})_{i1} = & \left[\frac{U_i(U_1)}{Q_2(U_1)} - \frac{U_i(U_2)}{Q_2(U_2)} \right] / \left[\frac{Q_1(U_1)}{Q_2(U_1)} - \frac{Q_1(U_2)}{Q_2(U_2)} \right], \\ (\mathbf{C}^{-1})_{i2} = & \left[\frac{U_i(U_2)}{Q_1(U_2)} - \frac{U_i(U_1)}{Q_1(U_1)} \right] / \left[\frac{Q_2(U_2)}{Q_1(U_2)} - \frac{Q_2(U_1)}{Q_1(U_1)} \right] \end{aligned} \quad (42)$$

и матричные элементы $(\mathbf{C}^{-1})_{j'j'}$ по формулам

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}^{-1})_{11} = & \frac{U_1}{Q_2(U_1)} / \left[\frac{Q_1(U_1)}{Q_2(U_1)} - \frac{Q_1(U_2)}{Q_2(U_2)} \right], \\ (\mathbf{C}^{-1})_{21} = & \frac{-U_2}{Q_2(U_2)} / \left[\frac{Q_1(U_1)}{Q_2(U_1)} - \frac{Q_1(U_2)}{Q_2(U_2)} \right], \\ (\mathbf{C}^{-1})_{12} = & \frac{-U_1}{Q_1(U_1)} / \left[\frac{Q_2(U_2)}{Q_1(U_2)} - \frac{Q_2(U_1)}{Q_1(U_1)} \right], \\ (\mathbf{C}^{-1})_{22} = & \frac{U_2}{Q_1(U_2)} / \left[\frac{Q_2(U_2)}{Q_1(U_2)} - \frac{Q_2(U_1)}{Q_1(U_1)} \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Выделим среди цилиндрических проводников проводник с индексом i' . Рассмотрим другой случай –

$$Q_i(Q_{i'}) = Q_{i'} \delta_{i'i'}, \quad U_j(Q_{i'}) = 0, \quad (44)$$

где аргумент в круглых скобках, как и раньше, указывает на рассматриваемый случай.

Потенциалы цилиндрических проводников $U_i(Q_{i'})$ можно вычислить по формулам (14), (15), (33) и (34).

Для нахождения заряда $Q_j(Q_{i'})$ на проводнике j -й копланарной линии подставим (44) в уравнение (37) и проинтегрируем по обеим поверхностям проводника. Если $j = 1$, получаем формулу

$$\begin{aligned} Q_j(Q_{i'}) = & \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \sum_i [f_i(-a_1/k'_1, w_i|Q_{i'}) - \\ & - f_i(a_1/k'_1, w_i|Q_{i'})] + 2\varepsilon_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \times \end{aligned} \quad (45)$$

$$\times D_{1,2k-1}(Q_i) \left(1 + \varepsilon_r \operatorname{cth} \left(\pi L \frac{2k-1}{2H} \right) \right) \sin \left(\pi W_1 \frac{2k-1}{4H} \right),$$

если $j = 2$, формулу –

$$Q_j(Q_i) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \sum_i [f_i(a_2, w_i | Q_i) - f_i(-a_2, w_i | Q_i)] + 2\varepsilon_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \times \quad (46)$$

$$\times D_{2,2k-1}(Q_i) \left(1 + \varepsilon_r \operatorname{cth} \left(\pi L \frac{2k-1}{2H} \right) \right) \sin \left(\pi W_2 \frac{2k-1}{4H} \right).$$

Вычислив потенциалы цилиндрических проводников $U_i(Q_i)$ и заряды на копланарных линиях $Q_j(Q_i)$, а также используя ранее рассчитанные элементы $(C^{-1})_{ij}$ и $(C^{-1})_{ji}$, можно рассчитать матричные элементы $(C^{-1})_{ii}$ и $(C^{-1})_{ji}$ по формулам

$$(C^{-1})_{ii} = \frac{U_i(Q_i)}{Q_i} - \sum_j (C^{-1})_{ij} \frac{Q_j(Q_i)}{Q_i}, \quad (47)$$

$$(C^{-1})_{ji} = - \sum_j (C^{-1})_{jj} \frac{Q_j(Q_i)}{Q_i}.$$

Таким образом, определены значения всех элементов матрицы C^{-1} , подставляя которые в формулы (10)–(11), можно рассчитать электрические параметры всех волн многопроводной линии передачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен строгий метод решения двумерного уравнения Лапласа для экранированной многопро-

водной линии передачи, содержащей цилиндрические проводники внутри экранированной области и копланарные линии передачи на экранирующем проводнике.

Рассчитаны элементы обратной матрицы погонной емкости проводников системы цилиндрические проводники–копланарные линии.

В квазистатическом приближении и приближении слабой связи копланарных линий с цилиндрическими проводниками рассчитаны электрические параметры волн основного типа в многопроводной линии передачи.

Полученные результаты могут быть использованы при анализе и синтезе узкополосных диэлектрических моноблочных фильтров СВЧ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам при Президенте Российской Федерации (программа поддержки ведущих научных школ РФ, НШ-6612.2006).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Isota Y., Miyazaki M., Ishida O., Takeda F.* // MTT-S Int. Microwave Symp. Dig. Las Vegas, Nevada, USA, June, 1987. P. 383.
2. *Matsumoto H., Ogura H., Nishikawa T.* // 1994 MTT-S Int. Microwave Symp. Dig. San Diego, CA, USA, 23–27 May 1994. P. 249.
3. *Yao H., Wang C., Zaki K.A.* // IEEE Trans. 1996. V. MTT-44. № 12. P. 2673.
4. *Тюрнев В.В.* // РЭ. 2006. Т. 51. № 7. С. 839.
5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968.
6. *Митра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974.