

*На правах рукописи*

**Максимов Дмитрий Николаевич**

**Проявления волнового хаоса в микроволновых, упругих и  
LCR-бильярдах**

01.04.07 — физика конденсированного состояния

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

**Красноярск 2008**

Работа выполнена в Институте физики им. Л. В. Киренского СО РАН,  
г. Красноярск

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор Садреев А. Ф.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор Логинов В. М.

кандидат физико-математических наук,  
Дзедзисашвили Д. М.

Ведущая организация: Тихоокеанский океанографический институт  
им. В. И. Ильичева ДВО РАН,  
г. Владивосток

Защита состоится " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 2008 года в \_\_\_\_ часов на заседа-  
нии диссертационного совета Д 003.055.02 при Институте физики им. Л. В.  
Киренского СО РАН по адресу: 660036, г. Красноярск, Академгородок, Ин-  
ститут физики им. Л.В. Киренского СО РАН, главный корпус.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института физики им.  
Л.В. Киренского СО РАН.

Автореферат разослан " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 2008 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
доктор физико-математических наук

Втюрин А.Н.

## I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность работы.** Термин "волновой хаос" охватывает широкий круг явлений характерных, для динамики хаотических систем, как квантовых, так и классических. Следует отметить, что рассматриваемые явления впервые были исследованы в рамках теории квантового хаоса [1, 2]. Под теорией квантового хаоса мы будем подразумевать теорию систем, которые в своем классическом пределе демонстрируют хаотическую динамику. Основной чертой квантовых хаотических систем является универсальность статистических свойств, не зависящая от их физической природы. Примерами такой универсальности являются: универсальность распределения ближайших межуровневых расстояний в спектре хаотических систем [3], гауссова статистика собственных функций [4], универсальные флуктуации проводимости [5] и т.д.

Благодаря достижениям нанотехнологии в области методов молекулярно-лучевой эпитаксии и литографии в 1980-х годах появилась возможность создавать различные искусственные полупроводниковые структуры с заданной геометрией, масштабы длин и энергий в которых позволили наблюдать целый ряд не исследованных ранее квантовых эффектов. Поскольку при температурах порядка  $mK$  неупругое рассеяние значительно подавлено, длина фазовой когерентности электрона превышает размер такой структуры. Таким образом, динамика электрона в таких системах определяется только геометрией системы и "чистой" квантовой механикой. Примером таких систем являются бильярды - квантовые ящики с бесконечно высокими потенциальными стенками. Бильярды как динамические системы приобрели популярность, когда стало ясно, что самым наглядным примером динамической системы с перемешиванием траекторий является бильярд отрицательной кривизны. Последующие исследования показали, что бильярды с фокусирующими участками также могут приводить к перемешиванию. Трудно указать такой бильярд (конечно, не очень правильной формы), который не создавал бы хаотических траекторий частиц. Бильярды с регулярными траекториями являются редким исключением [6]. Регулярные бильярды в первую очередь отличаются от хаотических тем, что количество степеней свободы движущейся в них частицы равно количеству интегралов движения [1]. С точки зрения квантово-механического описания это приводит к тому, что уравнение Шрёдингера может быть решено переходом в представление этих интегралов движения. Поэтому такие бильярды называют также интегри-

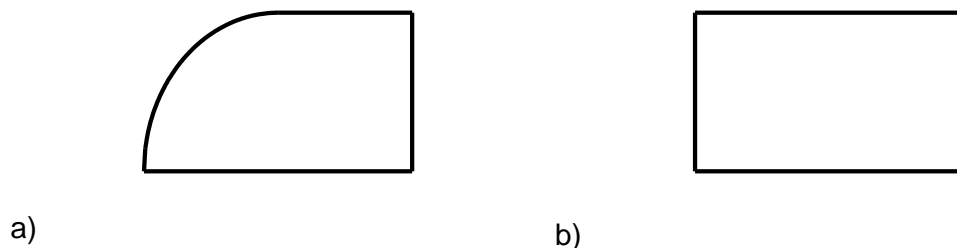


Рис. 1: Биллиарды: а)хаотический, б)регулярный.

руемыми. Возможные формы биллиардов показаны на Рис. 1.

Однако, экспериментальное изучение квантовых биллиардов встречает целый ряд трудностей, обусловленных их сложной физической природой. Так, наблюдение многих эффектов предсказанных в теории идеальных одноэлектронных систем может осложняться электрон-фононным и кулоновским взаимодействием, а также погрешностями измерения при помощи сканирующего электронного микроскопа. Неудивительно, что в такой ситуации целый ряд исследователей обратили внимание на классические системы, динамика пространства волн в которых эквивалентна волновой динамике электрона.

Волновая природа электрона, как оказалось, имеет непосредственную аналогию с другими волновыми процессами. Например, уравнения, описывающие электрон в двумерных наноструктурах в баллистическом режиме, эквивалентны уравнениям электромагнитного  $TM$  поля в плоско-параллельных волноводах, что позволило наблюдать в них целый ряд эффектов характерных для квантового хаоса [7, 8]. Эта эквивалентность также открывает широкие возможности тестирования квантовых электронных устройств в макроскопических волноводных системах. Среди полученных результатов, близких к тематике диссертационного исследования, отметим: универсальность распределения волновой функции для открытых биллиардов [9] и экспериментальное наблюдение вихревой структуры линий плотности потока энергии в эксперименте с рассеянием волн на открытом биллиарде [10, 11].

Упругие системы также привлекают к себе внимание в рамках теории волнового хаоса. Хотя в случае упругих систем отсутствует полная эквивалентность с динамикой волновых процессов в квантовых дотах, динамика колебаний в упругих образцах, выполненных в форме хаотических биллиардов, демонстрирует все основные черты хаотических систем [12, 13]. В настоящий момент изучение хаотической динамики в теории упругости представляет самостоятельный интерес и находит широкий спектр применений [14].

В связи с вышесказанным становится понятен интерес к дальнейшему исследованию хаоса в классических системах, таких как микроволновые и упругие бильярды, а также поиск других классических систем, колебания в которых несут в себе проявления волнового хаоса [15].

**Цель работы.** Целью данной диссертации является изучение новых проявлений волнового хаоса в ряде классических колебательных систем: микроволновых бильярдах, электрических резонансных цепях и упругих пластинах. При помощи методов численного моделирования, мы исследуем волновой хаос в бильярдах, представленных вышеупомянутыми системами, а также исследуем возможность аналитического описания хаоса в таких системах в рамках теории случайных гауссовых волн.

**Основные задачи работы.** Для достижения сформулированных выше целей были поставлены следующие задачи:

1. Исследовать новые проявления волнового хаоса в микроволновых бильярдах:
  - а) получить фазовую корреляционную функцию случайных полей, описывающих распространение волн в хаотических бильярдах;
  - б) исследовать статистические свойства тензора напряжений в случайном поле гауссовых волн.
2. Рассмотреть возможность появления волнового хаоса в электрических резонансных цепях:
  - а) рассмотреть возможные схемы электрических резонансных цепей эквивалентных квантовым бильярдам;
  - б) рассмотреть влияние таких черт электрических резонансных цепей как дискретность, флуктуаций величин импедансов, омическое сопротивление элементов цепи на характер хаотических колебаний.
3. Рассмотреть статистические свойства собственных функций, описывающих колебания упругих пластин, выполненных в форме хаотических бильярдов:
  - а) адаптировать метод случайных гауссовых волн для описания хаоса в изотропных упругих средах;
  - б) в рамках адаптированного подхода получить корреляционную функцию плотности энергии колебаний;

- с) проверить полученные результаты на численном эксперименте.
4. Исследовать статистические свойства нодальных точек в случайном гауссовом поле упругих деформаций:
- а) рассмотреть топологические свойства нодальных точек в случайном поле упругих деформаций;
  - б) получить корреляционные функции нодальной плотности и топологического заряда;
  - б) получить распределение ближайших расстояний между нодальными точками.

**Научная новизна и практическая ценность.** В диссертационной работе были исследованы новые проявления волнового хаоса в микроволновых бильярдах. Были получены фазовая корреляционная функция и распределения компонент тензора напряжений случайных гауссовых волн, описывающих собственные колебания микроволнового поля в хаотических бильярдах. Впервые были предложены электрические резонансные цепи, эквивалентные квантовым бильярдам. Было показано, что случайное поле напряжения, описывающие такие системы, обладает универсальными статистическими свойствами, характерными для микроволновых и квантовых хаотических систем, несмотря на ряд характерных черт, обусловленных их физической природой, таких как дискретность, флуктуации величин импедансов и омическое сопротивление элементов цепи. Таким образом, мы даем утвердительный ответ на вопрос о возможности моделирования хаотической динамики в электрических резонансных цепях. Для описания хаотической динамики упругих систем нами впервые была эффективно применена модель случайных волн в форме, адекватно описывающей статистические свойства собственных функций внутренних колебаний упругих бильярдов, что подтверждается данными численных расчетов. Также впервые были исследованы статистические свойства нодальных точек в случайном поле упругих деформаций. Была проведена классификация нодальных точек и исследованы их статистические свойства, рассчитано распределение ближайших расстояний между ними.

**Апробация работы и публикации.** Основные результаты диссертационной работы докладывались на семинарах отдела теоретической физики. По результатам диссертации опубликовано 5 работ.

**Личный вклад автора.** Личный вклад автора состоит в проведении аналитических расчетов по тематике диссертационного исследования, а так-

же в выполнении численных расчетов, обеспечивающих достоверность полученных результатов.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Объем работы составляет 87 страниц, включающих 31 рисунок и список литературы из 92 наименования.

## II. ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы исследования, сформулированы цели исследования, показана научная новизна и практическая значимость результатов работы, описана структура диссертации.

В **первой главе** приводится краткий обзор экспериментальных и теоретических работ по волновому хаосу в классической физике. Основное внимание уделено хаосу в микроволновых и упругих бильярдах, являющихся центральным предметом изучения диссертационной работы. Также рассматривается возможность проявления волнового хаоса в электрических резонансных цепях. Приводится обзор статистических свойств собственных функций волновых уравнений описывающих динамику волн в бильярдах. Рассматривается аналогия между хаотическими волновыми системами различной физической природы. В частности, упоминаются такие универсальные свойства хаотических систем, как гауссова статистика собственных функций и универсальное распределение межуровневых расстояний.

Отдельный раздел главы посвящен свойствам нодальных точек в случайных гауссовых полях. Объясняется сущность нодальных точек как топологических дефектов в комплексных скалярных и вещественных векторных полях. Приводится обзор работ по теории нодальных точек в квантовых, микроволновых и упругих системах. Обосновывается актуальность исследования нодальных точек собственных функций, описывающих внутренние колебания упругих пластин.

Во **второй главе** рассматривается хаос в микроволновых бильярдах. Особое внимание уделяется аналогии между квантовыми и микроволновыми системами. В связи с этим следует отметить, что обсуждаемые результаты в одинаковой мере справедливы как для  $TM$  мод плоскопараллельных металлических резонаторов, выполненных в форме хаотических бильярдов, так и для квантовых бильярдов, динамика электрона в которых описывается уравнением Шрёдингера.

Волновой хаос исследуется в рамках теории случайных гауссовых волн [17]. Хаотическая волновая функция, являющаяся решением уравнения

Гельмгольца, в таком подходе записывается в виде суперпозиции плоских волн со статистически независимыми случайными фазами, равномерно распределенными в интервале  $[0, 2\pi)$ :

$$\psi = \sum_{p=1}^A \exp \{ ik(\vec{\tau}_p, \vec{r}) + i\vartheta_p \}, \quad (1)$$

где  $\vartheta_p$  - случайные фазы,  $k$  - волновое число,  $\vec{\tau}_p$  - случайные векторы единичной длины. В первом разделе главы рассматриваются статистические свойства фазы  $\theta(\mathbf{x})$  случайной функции (1), представленной в форме  $\psi(\mathbf{x}) = |\psi(\mathbf{x})| \exp[i\theta(\mathbf{x})]$ . На примере вычисления фазовой корреляционной функции случайных гауссовых волн

$$Z(s) = \langle \exp[i\theta(\mathbf{x} + \mathbf{s}) - i\theta(\mathbf{x})] \rangle, \quad (2)$$

демонстрируется техника интегрирования по скоррелированным гауссовым полям. Обсуждаются основные свойства фазовой корреляционной функции (2). В первую очередь мы отмечаем то, что флуктуации фазы волновой функции вносят основной вклад в статистические свойства функции (1). Рассматривается зависимость фазовой корреляционной функции от параметра открытости системы (бильярда)  $\epsilon$ . Для внутрибильярдной волновой функции вида  $\psi = u + iv$ , где  $u, v$ -вещественные случайные поля  $\epsilon$  определяется соотношением  $\epsilon^2 = \langle v^2 \rangle / \langle u^2 \rangle$ . В связи с флуктуациями коэффициента прохождения и параметра открытости в задаче о рассеянии волн на хаотическом бильярде, внутрибильярдная часть функции рассеяния может описываться как реальным  $\epsilon = 0$ , так и комплексным гауссовым полем  $\epsilon > 0$ . Предел  $\epsilon = 1$  соответствует эффективному открыванию системы, описываемой функцией вида (1). Для фазовой корреляционной функции в пределе  $\epsilon = 0$  получен следующий результат:

$$Z_0(s) = \frac{2}{\pi} \arctan \left( \frac{C(s)}{\sqrt{1 - C(s)^2}} \right), \quad (3)$$

В пределе  $\epsilon = 1$  имеем:

$$Z_1(s) = \frac{1}{C(s)} [E(C^2(s)) - (1 - C(s)^2)K(C^2(s))], \quad (4)$$

Где  $E$  и  $K$ -эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно, а  $C(s)$  амплитудная корреляционная функция  $C(s) = J_0(s)$ ,  $J_0$ -бесселева функция первого рода. Корреляционные функции (3, 4) показаны на Рис. 2



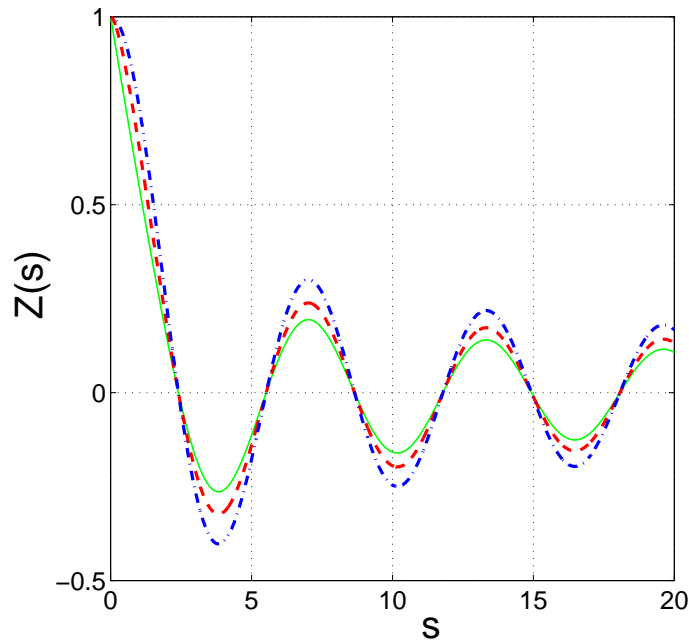


Рис. 2: Фазовые корреляционные функции (3) - штрих-пунктирная линия, (4) - штриховая линия. Амплитудная корреляционная функция  $C(s) = J_0(s)$  - сплошная линия.

в сравнении с амплитудной корреляционной функцией  $C(s) = J_0(s)$ . На Рис. 2 видно, что фазовая корреляционная функция: во-первых, слабо зависит от параметра открытости  $\epsilon$ , во-вторых, близка к амплитудной корреляционной функции, что иллюстрирует наше утверждение об определяющей роли флуктуаций фазы в статистических свойствах (1). Также приводятся результаты численных расчетов подтверждающие полученные результаты.

Во втором разделе главы рассматривается аналогия между тензором напряжений в электродинамике и квантовомеханическим тензором напряжений, введенным в гидродинамической формулировке квантовой механики [16]. Обсуждается физический смысл квантового тензора напряжений. Приводится вывод функции распределения компонент тензора напряжений собственных функций, описывающих рассеяние на хаотическом бильярде. Приведено описание численного эксперимента по стационарному рассеянию волн на хаотическом бильярде, подтверждающего справедливость полученных результатов.

В **третьей главе** проводится исследование хаоса в электрических резонансных цепях. Предложено два типа электрических резонансных цепей эквивалентным квантовым хаотическим бильярдам. Эквивалентность устанавливается на уровне аналогии между системой уравнений описывающих

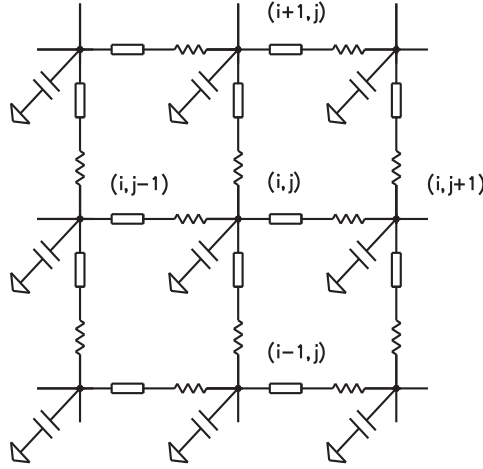


Рис. 3: Пример электрической резонансной цепи, которая может служить эквивалентом квантового билиарда.

колебания в такой цепи (LCR-билиарде):

$$\frac{1}{z_L}[V_{i,j+1} - V_{i,j} + V_{i,j-1} - V_{i,j} + V_{i+1,j} - V_{i,j} + V_{i-1,j} - V_{i,j}] - \frac{1}{z_C}V_{i,j} = 0, \quad (5)$$

где  $z_L, z_C$ -импедансы соответствующих элементов цепи,  $V_{i,j}$  - напряжение на  $i, j$  узле цепи, и уравнением Гельмгольца записаном в приближении сильной связи:

$$\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} + \psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} + (a_0^2 E - 4)\psi_{i,j} = 0, \quad (6)$$

где  $a_0$  - шаг сетки, при этом граничные условия Дирихле на границе произвольной формы могут быть получены заземлением соответствующих узлов цепи. Схема такой цепи показана на Рис. 3. Основным содержанием главы является обсуждение ряда свойств электрических резонансных цепей, которые могут привести к отличию статистических свойств собственных функций, описывающих распределение напряжения на узлах цепи от волновых функций квантовых систем. Приводятся результаты численного исследования трех таких свойств: дискретности электрической резонансной цепи, погрешности в определении величины импедансов ее элементов и влияния активного сопротивления элементов цепи. Показано, что дискретность и флуктуации величин импедансов не вносят существенного вклада в статистические свойства собственных колебаний, в то время как наличие активного сопротивления приводит к необходимости описания колебаний комплексными случайными полями, что эквивалентно рассмотрению билиардов, открытых за счет присоединения к ним одного или нескольких полубесконечных волноводов.

В четвертой главе рассматривается хаос во внутренних собственных колебаниях тонких упругих пластин, выполненных в форме хаотических бильярдов. Описание хаоса строится в рамках модели случайных гауссовых волн. Рассматриваются статистические свойства решений уравнений Гельмгольца

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \psi &= k_l^2 \psi, \\ -\nabla^2 \mathbf{A} &= k_t^2 \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\psi$ ,  $\mathbf{A}$  - потенциалы Гельмгольца,  $k_l = \omega/c_l$ ,  $k_t = \omega/c_t$  - волновые числа для продольно и поперечно поляризованных волн, соответственно и  $\omega^2 = \rho\Omega^2/E$ , а  $\Omega$  - частота колебаний, где  $E$  - модуль Юнга. В двумерном случае потенциал  $\mathbf{A}$  имеет только одну ненулевую компоненту  $A_z$ , а безразмерные продольная и поперечная скорости звука  $c_{l,t}$  даются выражениями

$$c_l^2 = \frac{1}{1 - \sigma^2}, \quad c_t^2 = \frac{1}{2(1 + \sigma)}, \quad (8)$$

где  $\sigma$  - коэффициент Пуассона. Центральный момент нашего подхода состоит в предположении, что оба потенциала являются статистически независимыми случайными гауссовыми функциями, которые записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}) &= \frac{a_l}{ik_l} \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{n=1}^N \exp[i(\mathbf{k}_{ln}\mathbf{x} + \theta_{ln})], \\ A_z(\mathbf{x}) &= \frac{a_t}{ik_t} \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{n=1}^N \exp[i(\mathbf{k}_{tn}\mathbf{x} + \theta_{tn})], \end{aligned} \quad (9)$$

при этом  $\theta_{ln}$ ,  $\theta_{tn}$  являются статистически независимыми случайными фазами. Волновые векторы  $\mathbf{k}_{ln}$  и  $\mathbf{k}_{tn}$  равномерно распределены на окружностях радиусов  $k_l$  и  $k_t$  соответственно. Вектор деформации, описывающий колебания упругих систем дается соотношениями:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t, \quad \mathbf{u}_l = \nabla \psi, \quad \mathbf{u}_t = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (10)$$

что позволило рассчитать корреляционные функции интенсивности и амплитуды колебаний. Для подтверждения справедливости наших результатов был проведен численный эксперимент, в котором были рассчитаны внутренние колебательные моды тонкой упругой пластинки, выполненной в форме хаотического бильярда и проведен численный расчет корреляционной функции

плотности энергии колебаний. Численный эксперимент показал, что корреляционная функция плотности энергии колебаний соответствует результату полученному нами в теории случайных волн:

$$P(s) = 1 + \frac{1}{2}[(\gamma J_0(k_l s) + (1 - \gamma)J_0(k_t s))]^2 + \frac{1}{2\eta}[(\gamma J_2(k_l s) - (1 - \gamma)J_2(k_t s))]^2, \quad (11)$$

где  $J_0$ ,  $J_2$  - бесселевы функции первого рода. Таким образом было подтверждено предположение о случайных гауссовых волнах в упругих билиардах. Нами также было показано, что параметр  $\gamma$ , присутствующий в выражении (11) и определяющий вклады от волн продольной и поперечной поляризации, однозначно определяется эффектом двойного лучепреломления и независимо от типа граничных условий (свободная или зафиксированная граница) связан со скоростями звука следующим соотношением:

$$\gamma = \frac{c_t^2}{c_t^2 + c_l^2}. \quad (12)$$

В **пятой главе** рассматриваются статистические свойства нодальных точек случайного поля деформаций внутренних колебательных мод тонких упругих пластин (билиардов) (Гл. 4), т. е. точек в которых двумерный вектор деформации  $\mathbf{u}(x, y) = [u(x, y), v(x, y)]$  обращается в нуль:

$$u(x_0, y_0) = 0, \quad v(x_0, y_0) = 0. \quad (13)$$

Примеры случайных полей показаны на Рис. 4, 5. В первую очередь рассматриваются топологические свойства нодальных точек. Нодальные точки в векторном поле характеризуются индексом Пуанкаре (топологическим зарядом) [18]. В случайном гауссовом поле структурно стабильными являются только топологические заряды с индексами  $q \pm 1$ . Таким образом, для индекса Пуанкаре имеем:

$$q = \text{sign}(\det M_{\mathbf{x}_0}) = \text{sign}(\lambda_1 \lambda_2), \quad M = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (14)$$

где  $\lambda_{1,2}$  - собственные значения матрицы  $M$  в окрестности нодальной точки  $\mathbf{x}_0$ . В зависимости от этих собственных значений нодальные точки подразделяются на четыре типа [18]: 1) центры, в случае мнимых  $\lambda_{1,2}$  с индексом  $q = 1$ ; 2) узлы, с реальными  $\lambda_{1,2}$  одного знака и  $q = 1$ ; 3) фокусы, с комплексными  $\lambda_1 = \lambda_2^*$  и  $q = 1$ ; и 4) седла с реальными  $\lambda_{1,2}$  противоположных

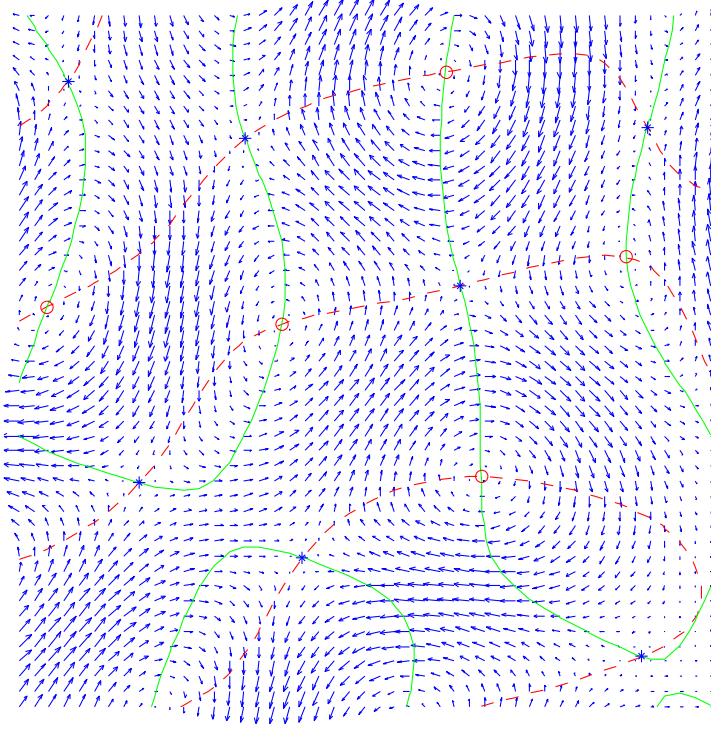


Рис. 4: Случайное поле упругих деформаций, полученное сложением 100 поперечно поляризованных волн,  $\sigma = 0.345$ . Стрелки показывают вектор деформации. Также показаны нодальные линии компонент вектора деформации, на пересечении которых находятся нодальные точки:  $\circ$ -центры,  $*$ -седла.

по знаку значений и  $q = -1$ . Собственные значения матрицы  $M$  выражаются следующим образом:

$$\lambda_{1,2} = \frac{u_x + v_y}{2} \pm \sqrt{D}/4, \quad (15)$$

где введено следующее обозначение:

$$D = (u_x + v_y)^2 - 4 \det M. \quad (16)$$

Если  $q = 1$ ,  $D > 0$ , то нодальная точка классифицируется как узел, в случае  $q = 1$ ,  $D < 0$  мы будем иметь фокус (или, центр если  $u_x + v_y = 0$ ). Наконец, в случае  $q = -1$  нодальная точка является седлом.

Далее нами приводится расчет плотностей всех типов нодальных точек. Суммарная плотность всех типов нодальных точек, как оказалось, дается следующим соотношением:

$$\rho = \langle \delta(u)\delta(v)|J| \rangle, \quad (17)$$

где  $J = \det(M)$ :

$$J = u_x v_y - v_y u_x. \quad (18)$$

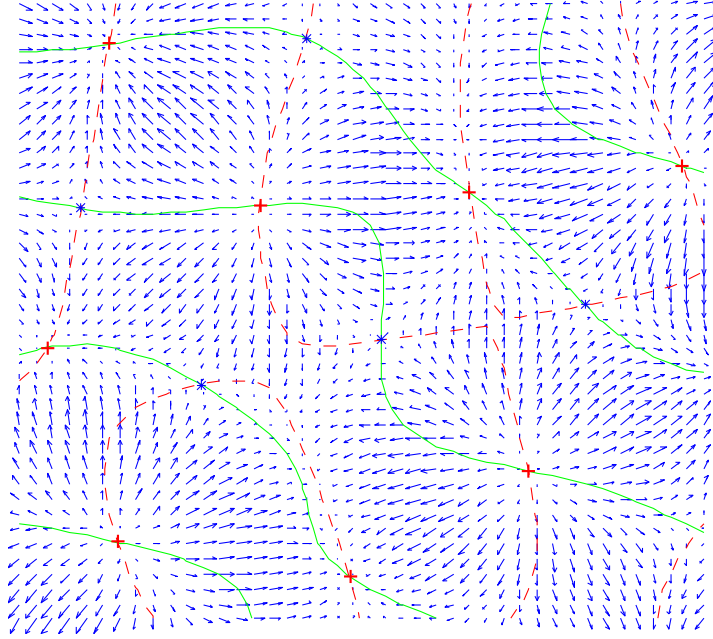


Рис. 5: Случайное поле упругих деформаций, полученное сложением 100 продольно поляризованных волн,  $\sigma = 0.345$ . Стрелки показывают вектор деформации. Также показаны нодальные линии компонент вектора деформации, на пересечении которых находятся нодальные точки:  $+$ -узлы,  $*$ -седла.

Расчет нодальной плотности осуществляется путем интегрирования по скоррелированным гауссовым полям и дает следующий результат:

$$\rho = \frac{(\gamma k_l^2 + (1 - \gamma)k_t^2)^2}{2\pi\sqrt{\gamma k_l^2 + 3(1 - \gamma)k_t^2}\sqrt{3\gamma k_l^2 + (1 - \gamma)k_t^2}}. \quad (19)$$

это выражение не имеет предела соответствующего плотности нодальных точек для функции Берри (1) [19]  $\rho = \frac{k^2}{4\pi}$ .

Нами также дается вывод корреляционной функции топологического заряда и описана методика численного расчета корреляционной функции нодальной плотности [19], которая определяется следующим образом:

$$G(s) = \frac{1}{\rho^2} \langle \delta(u)\delta(v) | J | \delta(u_s)\delta(v_s) | J_s | \rangle, \quad (20)$$

где  $s$  - расстояние между скоррелированными точками. Результат такого расчета показан на Рис. 6 в сравнении с корреляционной функцией нодальной плотности для функции Берри (1). На Рис. 6 видно, что, несмотря на различие в физической природе случайных полей, корреляционные функции близки друг к другу.

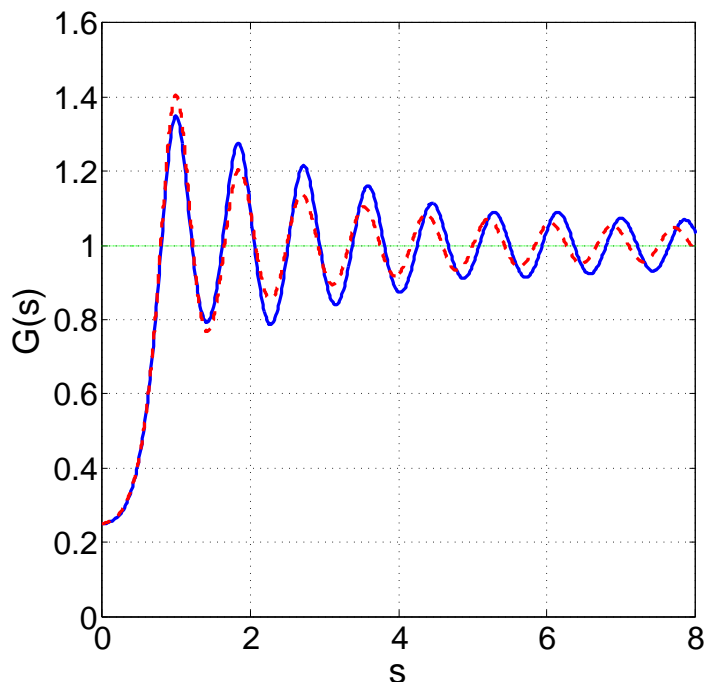


Рис. 6: Корреляционная функция нодальной плотности (20) случайного гауссова поля упругих деформаций - сплошная линия,  $\sigma = 0.345$ . Для сравнения штриховой линией показана корреляционная функция нодальной плотности для функции Берри (1) [19].

В последнем разделе главы обсуждаются два приближенных подхода для построения распределения ближайших расстояний между нодальными точками. Приводятся данные численных расчетов, показывающие, что вероятность появления нодальной точки в качестве ближайшего соседа данной точки может быть с хорошей точностью аппроксимирована распределением Пуассона со средним значением заданным корреляционной функцией нодальной плотности. Для учета конкуренции между нодальными точками за право быть ближайшим соседом данной была также рассмотрена аппроксимация биномиальным распределением. Численно показано, что такой подход является наиболее точным в диапазоне расстояний, близких к среднему значению. Отмечен тот факт, что нодальные точки в случайном поле упругих деформаций не являются в полной мере случайными, что объясняется корреляциями нодальной плотности (Рис. 6).

В **заключении** сформулированы основные результаты работы и краткие выводы.

### III. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ, ВЫНОСИМЫЕ АВТОРОМ НА ЗАЩИТУ

Исследованы новые проявления волнового хаоса в микроволновых бильярдах.

1. Получена фазовая корреляционная функция случайных гауссовых волн, описывающих рассеяние на хаотическом бильярде.
2. Получены распределения компонент тензора напряжений в случайном поле гауссовых волн.

Впервые были численно исследованы электрические резонансные цепи эквивалентные квантовым бильярдам (LCR-бильярды):

1. Предложены два типа электрических резонансных цепей, эквивалентных квантовым хаотическим бильярдам.
2. Рассмотрено влияние на статистические свойства собственных функций LCR-бильярдов таких черт электрических резонансных цепей как дискретность, флуктуации величин импедансов, омическое сопротивление элементов цепи. Как было показано, дискретность цепи и флуктуации величин импедансов не вносят существенного вклада в статистические свойства собственных функций закрытых хаотических бильярдов, в то время как введение омического сопротивления приводит к необходимости описания хаотических колебаний при помощи комплексных гауссовых полей, что эквивалентно открытым квантовым бильярдам.

В рамках теории случайных гауссовых волн рассмотрены статистические свойства собственных функций, описывающих внутренние колебания тонких упругих пластин, выполненных в форме хаотических бильярдов:

1. Для описания хаоса во внутренних колебаниях тонких упругих пластин мы предложили рассмотреть потенциалы Гельмгольца в виде двух нескоррелированных случайных гауссовых функций, что привело к случайному полю деформации, являющемуся результатом интерференции продольно, и поперечно поляризованных плоских волн со случайными фазами.
2. В рамках предложенного подхода мы получили корреляционные функции амплитуды и плотности энергии колебаний с учетом двойного лучепреломления на границе бильярда.



3. Численно найдены собственные функций упругого бильярда, выполненного в форме стадиона Бунимовича и рассчитана корреляционная функция плотности энергии колебаний. Совпадение результатов подтвердило справедливость предположения о том, что потенциалы Гельмгольца являются статистически независимыми случайными функциями.

Впервые исследованы статистические свойства нодальных точек в случайном гауссовом поле упругих деформаций:

1. Рассчитана плотность нодальных точек в случайном поле упругих деформации, а также проведена их топологическая классификация. Рассчитана плотность всех типов топологических дефектов в зависимости от упругих постоянных.
2. Аналитически рассчитана корреляционная функция топологического заряда. Численно рассчитана корреляционная функция нодальной плотности.
3. Исследовано распределение ближайших расстояний между нодальными точками. На численном эксперименте было показано, что вероятность появления нодальной точки в качестве ближайшего соседа данной может быть с хорошей точностью аппроксимирована распределением Пуассона со средним значением заданным корреляционной функцией нодальной плотности. Для учета конкуренции между нодальными точками за право быть ближайшим соседом данной была также рассмотрена аппроксимация биномиальным распределением. Численно показано, что такой подход является наиболее точным в диапазоне расстояний, близких к среднему значению.

#### **IV. КРАТКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ И ВЫВОДЫ**

1. Получена фазовая корреляционная функция и распределение компонент тензора напряжений случайных гауссовых волн, описывающих хаотические колебания в квантовых и микроволновых бильярдах. Результаты подтверждены численно и экспериментально.
2. Предложено два типа электрических резонансных цепей, эквивалентных квантовым и микроволновым хаотическим бильярдам и показана возможность возникновения волнового хаоса в электрических резонансных цепях (LCR-бильярдах).

3. Впервые предложено рассмотреть потенциалы Гельмгольца как статистически независимые случайные гауссовы функции для описания хаоса в продольных колебаниях тонких упругих пластин.
4. Получены корреляционные функции амплитуды и плотности энергии хаотических колебаний с учетом двойного лучепреломления на границе бильярда. Справедливость полученного результата подтверждена численным экспериментом.
5. Исследованы статистические свойства нодальных точек в случайном гауссовом поле упругих деформаций, проведена их топологическая классификация, рассчитана плотность всех типов топологических дефектов. Получены корреляционные функции топологического заряда и нодальной плотности. Рассчитано распределение ближайших расстояний между нодальными точками.

### **СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

1. E. N. Bulgakov, D. N. Maksimov, A. F. Sadreev. Electric circuit networks equivalent to chaotic quantum billiards. // *Phys. Rev. E.*- 2005.- Т.71, №4. 046205-7.
2. D. N. Maksimov, A. F. Sadreev. Gaussian random waves in elastic media. // *Письма в ЖЭТФ.*- 2007.- Т.86, №9.- С.670-774.
3. D. N. Maksimov, A. F. Sadreev. Phase correlation function of complex random Gaussian fields. // *Europhys. Lett.*- 2007.- Т.80, №5.- С.50003-50006.
4. D. N. Maksimov, A. F. Sadreev. Statistics of nodal points of in-plane random waves in elastic media. // *Phys. Rev. E.*- 2008.- Т.77, №5.- 056204-7.
5. K.-F. Berggren, D. N. Maksimov, A. F. Sadreev, R. Hohmann, U. Kuhl, and H.-J. Stöckmann. Quantum stress in chaotic billiards. // *Phys. Rev. E.*- 2008.- Т.77, №6.- 066209-11.

## Список цитируемой литературы

- [1] Х.-Ю. Штокманн. *Квантовый хаос: введение.*- Москва: Физматлит, 2004.- 376с.
- [2] П. В. Елютин. Проблема квантового хаоса. // УФН.- 1988.- Т.155, №3.- С.397-442.
- [3] O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit. Characterization of Chaotic Quantum Spectra and Universality of Level Fluctuation Laws. // Phys. Rev. Lett.- 1984.- Т.52, №1.- С.1-4.
- [4] S. W. McDonald and A. N. Kaufmann. Wave chaos in the stadium: Statistical properties of short-wave solutions of the Helmholtz equation. // Phys. Rev. A.- 1988.- Т.37, №8.- С.3067-3086.
- [5] H. U. Baranger and P. A. Mello. Mesoscopic transport through chaotic cavities: A random S-matrix theory approach. // Phys. Rev. Lett.- 1994.- Т.73, №1.- С.142-145.
- [6] Г. М. Заславский. Р. З. Сагдеев. *Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса.* - Москва: Наука, 1988.- 368с.
- [7] H.-J. Stöckmann and J. Stein. Quantum chaos in billiards studied by microwave absorption. // Phys. Rev. Lett.- 1990.- Т.64, №19.- С.2215-2219.
- [8] S. Sridhar. Experimental observation of scarred eigenfunctions of chaotic microwave cavities. // Phys. Rev. Lett.- 1991.- Т.67, №7.- С.785-788.
- [9] P. Seba, F. Haake, M. Kus, M. Barth, U. Kuhl, and H.-J. Stöckmann. Distribution of the wave function inside chaotic partially open systems. // Phys. Rev. E.- 1997.- Т.56, №3.- С.2680-2686.
- [10] A. I. Saichev, H. Ishio, A. F. Sadreev, and K.-F. Berggren. Statistics of interior current distributions in two-dimensional open chaotic billiards. // J. Phys. A: Math. Gen.- 2002.- Т.35.- L87-L93.
- [11] M. Barth and H.-J. Stöckmann. Current and vortex statistics in microwave billiards. // Phys. Rev. E.- 2002.- Т.65, №6.- 66208-7.
- [12] R. L. Weaver. Spectral statistics in elastodynamics. // J. Acoust. Soc. Am.- 1989.- Т.85, №3.- 1005-1013.

- [13] O. Legrand, C. Schimdt, and D. Sornette. Quantum Chaos Methods Applied to High-Frequency Plate Vibrations. // *Europhys. Lett.*- 1992.- T.18, №2.- C.101-106.
- [14] G. Tanner and N. Sondergaard. Wave chaos in acoustics and elasticity. // *J. Phys. A: Math. Theor.*- 2007.- T.40, №50.- R443-R509.
- [15] K.-F. Berggren, A. F. Sadreev. Chaos in Quantum Billiards and Similarities with pure-tone random models in acoustics, microwave cavities, and electric networks. *Proceedings of the Conference on Mathematical Modelling of Wave Phenomena, 2002*, edited by B. Nilsson and L. Fishman Vaxjo University Press, Vaxjo pp. 133-147.
- [16] В. Паули. *Труды по квантовой теории. Квантовая теория. Общие принципы волновой механики. Статьи 1920-1928.* - Москва: Наука, 1975.- 688с.
- [17] M. V. Berry. Regular and irregular semiclassical wavefunctions. // *J. Phys. A: Math. Gen.*- 1977.- T.10, №10.- C.2083-2091 .
- [18] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. *Современная геометрия.*- Москва: Наука, 1979.- 760с.
- [19] A. I. Saichev, K.-F. Berggren, and A. F. Sadreev. Distribution of nearest distances between nodal points for the Berry function in two dimensions. // *Phys. Rev. E.*- 2001.- T.64, №3.- 036222-11.





---

Подписано к печати                      2008  
Тираж 60 экз., у.-п.л.:1.    Заказ №16

---

Отпечатано на ротапинтере в типографии Института физики СО РАН  
660036, Красноярск, Академгородок, ИФ СО РАН