

# ИЗОТОПИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ В МОДЕЛИ СИЛЬНО КОРРЕЛИРОВАННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ, УЧИТЫВАЮЩЕЙ МАГНИТНЫЙ И ФОНОННЫЙ МЕХАНИЗМЫ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО СПАРИВАНИЯ

*Е. И. Шнейер<sup>a,b,\*</sup>, С. Г. Овчинников<sup>a,c</sup>*

<sup>a</sup> *Институт физики им. Л. В. Киренского Сибирского отделения Российской академии наук  
660036, Академгородок, Красноярск, Россия*

<sup>b</sup> *Сибирский государственный аэрокосмический университет  
660014, Красноярск, Россия*

<sup>c</sup> *Сибирский федеральный университет  
660041, Красноярск, Россия*

Поступила в редакцию 16 июня 2009 г.

Рассматриваются особенности температурного изотопического эффекта в теории типа БКШ, описывающей обменный и фононный механизмы куперовского спаривания в системе сильно коррелированных электронов. Из подгонки рассчитанной величины показателя изотоп-эффекта к наблюдаемой с параметрами  $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ , полученными из расчетов из первых принципов, определена константа связи электрон-фононного взаимодействия, указывающая на то, что вклад традиционного механизма спаривания в сверхпроводящее состояние одного порядка с вкладом магнитного механизма.

PACS: 71.27.+a, 74.20.-z, 74.20.Fg, 74.25.Kc, 74.72.-h

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Характерными особенностями купратов, выделившими их в отдельный класс сверхпроводников и инициировавшими поиски новых механизмов куперовского спаривания, стали высокие температуры сверхпроводящего перехода,  $d$ -тип симметрии параметра порядка и сильные электронные корреляции в системе. Вопрос о том, может ли электрон-фононное взаимодействие в данных соединениях обеспечить наблюдаемые высокие критические температуры, широко обсуждался, и по этому поводу существуют совершенно полярные точки зрения [1–3]. Особенности кристаллической структуры [2] и экспериментальные исследования [4, 5] подтверждают существенную роль электрон-фононного взаимодействия в сверхпроводящем состоянии купратов, однако не указывают на ее доминирующий характер. Как известно, в нормальных металлах

ключевую роль в понимании природы сверхпроводимости сыграло исследование изотопического сдвига температуры сверхпроводящего перехода. В высокотемпературных сверхпроводниках (ВТСП), где показатель изотопического эффекта имеет сильную зависимость от допирования [6–8], ситуация оказалась более сложной. Дело в том, что для большинства купратов при замещении кислорода показатель изотоп-эффекта  $\alpha_o$  в области оптимального допирования минимален, более того, его величина практически на порядок меньше ожидаемой в теории Бардина–Купера–Шриффера (БКШ) [ЦВ то же время в слабодопированных и передопированных образцах наблюдается рост  $\alpha_o$ , при этом в некоторых системах показатель изотоп-эффекта в области малого допирования значительно превышает предельное значение теории БКШ, т. е.  $\alpha_{BCS} = 0.5$ . Такое поведение константы изотопического сдвига не позволяет однозначно трактовать роль электрон-фононного взаимодействия в сверхпроводящем состоянии купратов и делает важным исследование изотопиче-

\*E-mail: shneyder@iph.krasn.ru

ского эффекта в рамках различных подходов. В настоящей работе анализ изотопического эффекта проводится на основе модели, объединяющей магнитный и традиционный фононный механизмы спаривания в системе сильно коррелированных электронов.

## 2. ТЕОРИЯ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО СОСТОЯНИЯ С УЧЕТОМ СИЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ

Как известно, для корректного описания ВТСП-систем необходимо учитывать сильные электронные корреляции, именно они определяют сильные изменения физических свойств купратов с допированием, от антиферромагнитного мотт-Хаббардовского диэлектрика до ферми-жидкостного металла. Существуют различные подходы к данной проблеме. При исследовании сверхпроводящего состояния в купратах точный учет запрета на двухчастичные состояния реализуется на всех стадиях расчета в представлении  $X$ -операторов Хаббарда при вычислении функций Грина методами диаграммной техники [10] или расщепления соответствующих уравнений движения [11]. Аналогичный запрет на двукратно занятые состояния существует также в вариационном методе Монте-Карло для проекционных волновых функций [12], в теориях резонирующих валентных связей [13] и ренормированного среднего поля, построенного на приближении Гутцвиллера [14, 15].

В настоящей работе развивается метод обобщенной сильной связи [16], в рамках которого осуществляется переход от реалистичной многозонной  $p$ - $d$ -модели купратов к эффективной модели Хаббарда. При этом операторы Хаббарда строятся на собственных состояниях гамильтониана  $\text{CuO}_6$ -кластера, полученных в результате его точной диагонализации:  $X_f^{pq} = |p\rangle\langle q|$ . Верхняя и нижняя зоны хаббардовских фермионов описывают возбуждения соответственно одночастичных и синглетных двухчастичных состояний. Дальнейшее исключение межзонных переходов по теории возмущения [17, 18] приводит к эффективной низкоэнергетической  $t$ - $J^*$ -модели. Для системы  $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ , допированной дырками, гамильтониан имеет вид

$$H_{tJ^*} = H_{tJ} + H_{(3)},$$

$$H_{tJ} = \sum_{f\sigma} (\varepsilon - \mu) X_f^{\sigma\sigma} + \sum_f (2\varepsilon - 2\mu + U_{eff}) X_f^{22} + \sum_{fg\sigma} t_{fg} X_f^{2\bar{\sigma}} X_g^{\bar{\sigma}2} + \frac{1}{2} \sum_{fg\sigma} J_{fg} (X_f^{\sigma\bar{\sigma}} X_g^{\bar{\sigma}\sigma} - X_f^{\sigma\sigma} X_g^{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}),$$

$$H_{(3)} = \sum_{fmg\sigma} \frac{\tilde{t}_f \tilde{m} \tilde{m}_g}{U_{eff}} (X_f^{2\bar{\sigma}} X_m^{\sigma\sigma} X_g^{\bar{\sigma}2} - X_f^{2\sigma} X_m^{\sigma\bar{\sigma}} X_g^{\bar{\sigma}2}).$$

Здесь  $\mu$  — химический потенциал системы,  $t_{fg}$  и  $\tilde{t}_{fg}$  — амплитуды внутризонных и межзонных перескоков,  $U_{eff}$  — диэлектрическая щель с энергией переноса заряда,  $J_{fg} = t_{fg}^2/U_{eff}$  — параметр обменного взаимодействия и  $\bar{\sigma} \equiv -\sigma$ . Трехцентровые коррелированные перескоки  $H_{(3)}$  имеют один порядок величины с обменным интегралом и, как следует из работы [1Ш] должны быть учтены в теории сверхпроводимости.

В плане исследования сверхпроводящего  $d$ -волнового состояния переход от модели Хаббарда к низкоэнергетическому  $t$ - $J^*$ -гамильтониану означает пренебрежение запаздывающим спин-флуктуационным механизмом спаривания [11, 20]. Таким образом, мы ограничиваемся мгновенным обменным взаимодействием в  $t$ - $J^*$ -модели. Ранее в приближении непересекающихся диаграмм для массового оператора было показано [11], что влияние эффектов запаздывания на сверхпроводящее спаривание  $d$ -типа в модели Хаббарда незначительно, и это позволяет аппроксимировать его мгновенным взаимодействием. В то же время в реальных соединениях проблема соотношения запаздывающего и незапаздывающего вкладов в спаривающее взаимодействие  $d$ -типа требует дальнейших исследований [21, 22].

Полный гамильтониан системы включает также электрон-фононное взаимодействие

$$H_{tot} = H_{tJ^*} + H_{epi}. \quad (1)$$

В режиме сильных электронных корреляций фурье-образ эффективного взаимодействия электронов посредством обмена виртуальными фононами может быть записан следующим образом [23]:

$$H_{epi} = \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}} \sum_{\sigma\sigma'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}} X_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{2,\bar{\sigma}} X_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^{2,\bar{\sigma}'} X_{\mathbf{k}'}^{\bar{\sigma},2} X_{\mathbf{k}}^{\bar{\sigma},2}.$$

Без учета эффектов запаздывания параметр эффективного электрон-фононного взаимодействия упрощается:

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{q}} = - \sum_{\nu} g_{\nu}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) g_{\nu}(\mathbf{k}', -\mathbf{q}) / \omega_{\mathbf{q},\nu}.$$

Здесь  $g_\nu(\mathbf{k}, \mathbf{q})$  — матричный элемент взаимодействия электрона с исходным импульсом  $\mathbf{k}$  и фонона моды  $\nu$  с импульсом  $\mathbf{q}$  и частотой колебаний  $\omega_{\mathbf{q}, \nu}$ .

В теории типа БКШ с гамильтонианом (1) сверхпроводящий  $d$ -волновой параметр порядка, полученный в обобщенном приближении Хартри–Фока методом неприводимых линейных операторов [24], имеет вид [25]

$$\Delta_{\mathbf{k}} = \frac{2\varphi_{\mathbf{k}}}{N} \sum_{\mathbf{q}} \lambda_{tot} \frac{2\Delta_{\mathbf{q}}\varphi_{\mathbf{q}}}{\xi_{\mathbf{q}} - \mu} \operatorname{th} \left( \frac{\xi_{\mathbf{q}} - \mu}{2k_B T} \right). \quad (2)$$

Здесь  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура,  $\xi_{\mathbf{q}}$  — дисперсия нормальной фазы,  $\mu$  — химический потенциал системы,  $\varphi_{\mathbf{k}} = (\cos k_x a - \cos k_y a)/2$  — угловая часть параметра порядка  $\Delta_{\mathbf{k}} = \Delta_0 \varphi_{\mathbf{k}}$ ,  $a$  — постоянная решетки. Полная константа связи описывает сумму обменного и фононного механизмов спаривания:

$$\lambda_{tot} = \frac{1-x}{2} J + \lambda_{ph} \theta(|\xi_{\mathbf{q}} - \mu| - \omega_D),$$

где  $x$  — концентрация допированных дырок и  $\theta$ -функция, как обычно, ограничивает фононный вклад узким слоем порядка дебаевской частоты  $\omega_D$  вблизи поверхности Ферми. Для магнитного механизма спаривания аналогичное по структуре уравнение было получено ранее в теории резонирующих валентных связей [13], а также методами расщепления двухвременных функций Грина [26] и диаграммной техники [10].

Рассмотрим более подробно константу электрон-фононной связи  $\lambda_{ph} = f(x)G$ . Безразмерный параметр  $f(x) = (1+x)(3+x)/8 - 3C_{01}/4$  описывает ее концентрационную зависимость, происхождение которой, так же как и в случае обменного механизма, связано с необычной статистикой хаббардовских фермионов. В отличие от зон свободных электронов хаббардовские подзоны содержат нечетное число состояний на атом, зависящее от концентрации допированных носителей  $x$  через их полное число  $n_h = 1+x$ . Появление спиновой корреляционной функции  $C_{01} = 2 \langle S_0^z S_1^z \rangle$  указывает на интерференцию магнитного и фононного механизмов спаривания. Мы полагаем, что магнитная система находится в состоянии изотропной спиновой жидкости, для которой среднее любой компоненты спина равно нулю:  $\langle S^\alpha \rangle = 0$ ,  $\alpha = x, y, z$ . Межатомные статические корреляционные функции отличны от нуля,  $\langle S_0^\alpha S_n^\alpha \rangle \neq 0$ , и одинаковы для всех компонент спина, так что  $2 \langle S_0^z S_n^z \rangle = \langle S_0^+ S_n^- \rangle$ . Здесь  $n$  — номер координатной

сферы, т. е.  $C_{01}$  — корреляционная функция ближайших соседей. В силу антиферромагнитного характера корреляций  $C_{01} < 0$ , так что интерференционное слагаемое с  $C_{01}$  усиливает суммарную фононную константу связи.

При выводе уравнения для параметра порядка рассматривалось всего три колебательных моды кислорода: изгибающая, плоскостная дыхательная и апиическая дыхательная. Расчеты из первых принципов электронной структуры и электрон-фононного взаимодействия в  $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$  показали, что основной вклад в собственную энергию электронов обусловлен взаимодействием носителей именно с этими колебаниями [27]. Как оказалось, для  $d$ -волнового спаривания существенно импульсная зависимость матричных элементов электрон-фононного взаимодействия [25]. В то время как при изотропном спаривании  $s$ -типа вклады всех фононных мод суммируются, в  $d_{x^2-y^2}$ -канале возможно подавление константы связи некоторыми колебаниями. Это связано с тем, что взаимодействие электрона с фононом при больших переданных импульсах  $\mathbf{q}$  переносит его на участок поверхности Ферми с другой фазой параметра порядка и, таким образом, разрушает сверхпроводящую пару. Напротив, колебания, матричный элемент которых максимален при малых переданных импульсах, увеличивают константу связи. Этот факт отражает конкуренция изгибающей и дыхательной мод в выражении для параметра  $G$ , пропорционального интенсивностям матричных элементов электрон-фононного взаимодействия:

$$G = \frac{v_{buck}^2}{\omega_{buckl}} - \frac{v_{breath}^2}{\omega_{breath}}. \quad (3)$$

Аналогичный вывод получен ранее в приближении случайных фаз для двумерной модели Хаббарда [28], флуктуирующего обмена (FLEX) для уравнения Элиашберга [22], методами кластерной теории возмущений [30] и функциональной ренормгруппы [31].

Отметим также, что отсутствие вклада апиической дыхательной моды в константу связи, согласующееся с работой [28], следует из ортогональности электронного импульса, лежащего в  $\text{CuO}$ -плоскости, и фононного волнового вектора. Обусловленное слабо экранированным вдоль оси с кулоновским взаимодействием сильное электрон-фононное взаимодействие для данной моды подтверждают эксперименты, в которых наблюдалось индуцированное фотодопированием колоссальное расширение лантановых купратных пленок [5]. В то же время исследование изотопического эффекта в эксперимен-

тах [32, 33] с позиционно-чувствительным замещением  $O^{16} \rightarrow O^{18}$  указывают на отсутствие вклада колебаний апического кислорода в изотоп-эффект и, тем самым, в формирование сверхпроводимости.

Входящее в уравнение (2) выражение для дисперсии нормальной фазы  $\xi_{\mathbf{k}}$  учитывает ближний магнитный порядок в системе:

$$\begin{aligned} \xi_{\mathbf{k}} = & \varepsilon_0 + U_{eff} - \mu + \frac{1+x}{2}t_{\mathbf{k}} + \frac{1-x^2}{4} \frac{\tilde{t}_{\mathbf{k}}^2}{U_{eff}} + \\ & + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}} \left( t_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \frac{1-x}{2} J_{\mathbf{q}} + \frac{1-x}{2} \frac{\tilde{t}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2}{U_{eff}} - \right. \\ & \left. - (1+x) \frac{\tilde{t}_{\mathbf{k}} \tilde{t}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}{U_{eff}} \right) \frac{2}{1+x} \frac{3}{2} C_{\mathbf{q}} + \\ & + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}} \left( t_{\mathbf{q}} - \frac{1-x}{2} J_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - x \frac{\tilde{t}_{\mathbf{q}}^2}{U_{eff}} - \right. \\ & \left. - (1+x) \frac{\tilde{t}_{\mathbf{k}} \tilde{t}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}{U_{eff}} \right) \frac{2}{1+x} K_{\mathbf{q}}. \end{aligned}$$

Здесь  $C_{\mathbf{q}}$  и  $K_{\mathbf{q}}$  — спиновые и кинематические статические корреляционные функции, описывающие перенормировку спектра квазичастиц за пределами приближения Хаббард-I. Подобное уравнение для нижней зоны Хаббарда рассматривалось в работе [34], где отмечалась существенная модификация спектра квазичастиц в  $t$ - $J^*$ -модели магнитными флуктуациями. Параметры электронной структуры  $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$  определены [35] путем проектирования зонной структуры, найденной в приближении локальной плотности, на базис функций Ванье с дальнейшим переходом от  $p$ - $d$ - к  $t$ - $J^*$ -модели в рамках обобщенного метода сильной связи. Самосогласованный расчет корреляционных функций для данных параметров выполнен в рамках подхода (развитого в работах [34, 36]) авторами работы [37], исследовавшими перестройку поверхности Ферми с допированием в нормальной фазе ВТСП-купратов.

### 3. ИЗОТОПИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ

Для анализа изотопического эффекта перейдем от выражения (2) к уравнению для температуры сверхпроводящего перехода  $T_c$  и далее, согласно определению  $\alpha_o = -d \ln(T_c) / d \ln(M_o)$ , получим

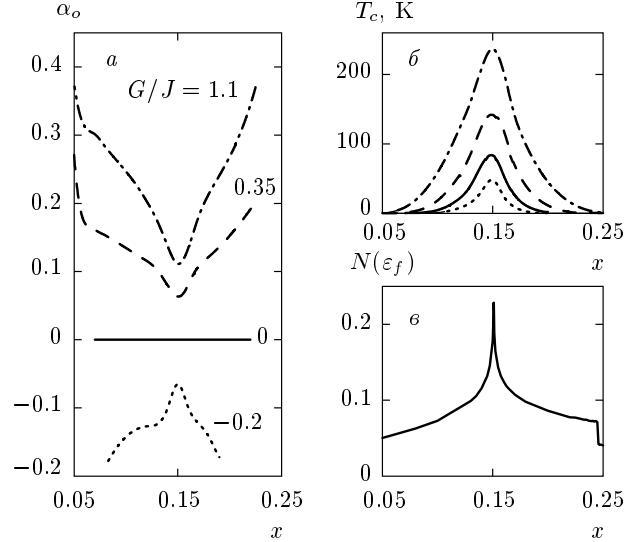


Рис. 1. Концентрационная зависимость показателя изотопического эффекта (а), критической температуры (б) и плотности состояний на уровне Ферми. Температурные кривые соответствуют рисунку а

$$\begin{aligned} \alpha_o = & \frac{\omega_D}{N} \sum_{\mathbf{q}} \lambda_{ph} \delta(|\xi_{\mathbf{q}} - \mu| - \omega_D) \frac{4\varphi_{\mathbf{q}}^2}{\xi_{\mathbf{q}}} \text{th} \left( \frac{\xi_{\mathbf{q}} - \mu}{2k_B T_c} \right) \\ = & \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}} \lambda_{tot}(\mathbf{q}) \frac{4\varphi_{\mathbf{q}}^2}{T_c} \text{ch}^{-2} \left( \frac{\xi_{\mathbf{q}} - \mu}{2k_B T_c} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Как следует из приведенного уравнения, знак показателя изотопического эффекта зависит от параметра эффективного электрон-фононного взаимодействия  $G$ , который мы, в отличие от [25], рассматриваем как свободный. Вследствие конкуренции различных колебательных вкладов (3) данный параметр может быть как положительным, что соответствует сумме обменного и фононного механизмов спаривания, так и отрицательным в случае подавления сверхпроводящего состояния электрон-фононным взаимодействием. При любом  $G > 0$  показатель изотопического эффекта  $\alpha_o$  также положителен; с уменьшением фононного вклада в полную константу связи  $\alpha_o$  уменьшается и для  $G < 0$  становится отрицательным во всей области существования решений (рис. 1а).

Наблюдаемую в купратах ситуацию описывают кривые с  $G > 0$ , для которых концентрационная зависимость  $\alpha_o(x)$  качественно согласуется с экспериментом [6–8]. При этом минимуму изотопического эффекта отвечает максимум критической температуры (рис. 1б), определяемый в нашем

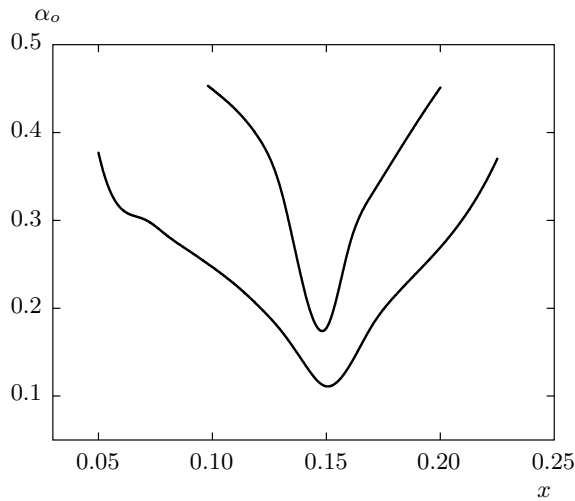


Рис. 2. Показатель изотопического эффекта для чисто фононного (верхняя кривая) и суммы фононного и обменного механизмов спаривания (нижняя кривая) при  $G/J = 1.1$

подходе особенностью Ван-Хова в плотности состояний (рис. 1б). Заметим, что характерную для  $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$  величину показателя  $\alpha_o \sim (0.08-0.11)$  в области оптимального допирования воспроизводят расчеты с  $G/J \sim 1$ , что является указанием на сильную электрон-фононную связь. Наконец, более сильный рост показателя изотоп-эффекта в области малого допирования для реальных соединений, претерпевающих переход из орторомбической фазы в тетрагональную, может быть связан с примесью к сверхпроводящему параметру порядка  $d_{x^2-y^2}$ -типа компоненты с  $s$ -симметрией [38–41]. Однако исследование данного вопроса выходит за рамки настоящей работы, как и эффекты зарядового упорядочения в структуре  $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ , приводящие к аномалиям свойств при  $x = 1/8$ .

Из анализа уравнения (4) следует также, что добавление к традиционному механизму куперовского спаривания любого нефононного приводит к уменьшению показателя изотопического эффекта. Как видно на рис. 2, при заданной концентрации допирования и  $G/J = 1.1$  константа  $\alpha_o$  уменьшается практически в два раза для случая, описывающего сумму фононного и обменного механизмов спаривания, по сравнению с чисто фононным механизмом. Согласно всему сказанному выше, в рамках настоящей теории вклад электрон-фононного взаимодействия в сверхпроводящее спаривание в купратах оказывается сопоставим с обменным вкла-

дом, несмотря на малость изотопического эффекта при оптимальном допировании.

Работа выполнена при финансовой поддержке Президиума РАН в рамках программ 5.7 и «Квантовая физика конденсированных сред», интеграционного проекта СО РАН — УрО РАН № 40, а также РФФИ (грант № 01402-00127).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Г. Максимов, О. В. Долгов, УФН **177**, 983 (2007).
2. Е. Г. Максимов, УФН **170**, 1033 (2000).
3. P. W. Anderson, Science **316**, 1705 (2007).
4. L. Pintschovins, Phys. Stat. Sol. B **242**, 30 (2005); M. L. Kubic and O. V. Dolgov, Phys. Stat. Sol. B **242**, 151 (2005).
5. N. Gedik, D.-S. Yang, G. Logvenov, I. Bozovic, and A. H. Zewail, Science **316**, 425 (2007).
6. M. K. Crawford, W. E. Farneth, E. M. McCarron, R. L. Harlow, and A. H. Moudden, Science **250**, 1390 (1990).
7. J. P. Franck, S. Harker, and J. H. Brewer, Phys. Rev. Lett. **71**, 283 (1993).
8. G. M. Zhao, K. Conder, H. Keller, and K. A. Müller, J. Phys.: Condens. Matter **10**, 9055 (1998).
9. J. Bardeen, L. Cooper, and J. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
10. Ю. А. Изюмов, М. И. Кацнельсон, Ю. Н. Скрябин, Магнетизм коллективизированных электронов, Наука, Москва (1994).
11. Н. М. Плакида, Л. Антон, С. Адам, Г. Адам, ЖЭТФ **124**, 367 (2003).
12. S. Pathak, V. B. Shenoy, M. Randeria, and N. Trivedi, Phys. Rev. Lett. **102**, 027002 (2009).
13. P. W. Anderson, Science **235**, 1196 (1987).
14. F. C. Zhang, C. Gros, T. M. Rice, and H. Shiba, Supercond. Sci. Technol. **1**, 36 (1988).
15. P. W. Anderson, P. A. Lee, M. Randeria, T. M. Rice, N. Trivedi, and F. C. Zhang, J. Phys.: Condens. Matter **16**, R755 (2004).
16. S. G. Ovchinnikov and I. S. Sandalov, Physica C **161**, 607 (1989).
17. Л. Н. Булаевский, Е. Л. Нагаев, and Д. И. Хомский, ЖЭТФ **54**, 1562 (1968).

18. K. A. Chao, J. Spalek, and A. M. Oles, *J. Phys. C* **10**, L271 (1977).
19. В. В. Вальков, Т. А. Валькова, Д. М. Дзедзисашвили, С. Г. Овчинников, *Письма в ЖЭТФ* **75**, 450 (2002).
20. P. Prelovšek and A. Ramšak, *Phys. Rev. B* **72**, 012510 (2005).
21. T. A. Maier, D. Poilblanc, and D. J. Scalapino, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 237001 (2008).
22. T. Dahm, V. Hinkov, S. V. Borisenko, A. A. Kordyuk, V. B. Zabolotnyy, J. Fink, B. Buchner, D. J. Scalapino, W. Hanke, and B. Keimer, *Nature Phys.* **5**, 217 (2009).
23. С. Г. Овчинников, Е. И. Шнейдер, *ЖЭТФ* **128**, 974 (2005).
24. С. В. Тябликов, *Методы квантовой теории магнетизма*, Наука, Москва (1975).
25. Е. И. Шнейдер, С. Г. Овчинников, *Письма в ЖЭТФ* **83**, 462 (2006).
26. N. M. Plakida, V. Yu. Yushankhai, and I. V. Stasyuk, *Physica C* **160**, 80 (1989).
27. F. Giustino, M. L. Cohen, and S. G. Louie, *Nature* **452**, 975 (2008).
28. N. Bulut and D. J. Scalapino, *Phys. Rev. B* **54**, 14971 (1996).
29. T. Dahm, D. Manske, D. Fay, and L. Tewordt, *Phys. Rev. B* **54**, 12006 (1996).
30. P. Piekarz, J. Konior, and J. H. Jefferson, *Phys. Rev. B* **59**, 14697 (1999).
31. C. Honerkamp, Henry C. Fu, and Dung-Hai Lee, *Phys. Rev. B* **75**, 014503 (2007).
32. R. Khasanov, A. Shengelaya, E. Morenzoni, M. Angst, K. Conder, I. M. Savic, D. Lampakis, E. Liarokapis, A. Tatsi, and H. Keller, *Phys. Rev. B* **68**, 220506(R) (2003).
33. A. R. Bishop, A. Bussmann-Holder, O. V. Dolgov, A. Furrer, H. Kamimura, H. Keller, R. Khasanov, R. K. Kremer, D. Manske, K. A. Muller, and A. Simon, *J. Supercond. Nov. Magn.* **20**, 393 (2007).
34. В. В. Вальков, Д. М. Дзедзисашвили, *ЖЭТФ* **127**, 686 (2005).
35. M. M. Korshunov, V. A. Gavrichkov, S. G. Ovchinnikov, I. A. Nekrasov, Z. V. Pchelkina, and V. I. Anisimov, *Phys. Rev. B* **72**, 165104 (2005).
36. А. Ф. Барабанов, В. М. Березовский, *ЖЭТФ* **106**, 1156 (1994).
37. M. M. Korshunov and S. G. Ovchinnikov, *Eur. Phys. J. B* **57**, 271 (2007).
38. A. G. Sun, D. A. Gajewski, M. B. Maple, and R. C. Dynes, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2267 (1994).
39. R. Kleiner, A. S. Katz, A. G. Sun, R. Summer, D. A. Gajewski, S. H. Han, S. I. Woods, E. Dantsker, B. Chen, K. Char, M. B. Maple, R. C. Dynes, and J. Clarke, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2161 (1996).
40. Qiang Li, Y. N. Tsay, M. Suenaga, R. A. Klemm, G. D. Gu, and N. Koshizuka, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4160 (1999).
41. R. A. Klemm, *Phil. Mag.* **85**, 801 (2005).