

01

Объемные плазменные волны в случайно-неоднородном проводнике

© Ю.И. Маньков

Институт физики им. Л.В. Киренского СО РАН,
Красноярск, Россия

E-mail: mankov@iph.krasn.ru

(Поступила в Редакцию 18 октября 2011 г.)

С помощью метода усредненных функций Грина исследованы модификация спектра и затухание объемных плазменных волн, обусловленные трехмерными случайными неоднородностями плотности вырожденного газа электронов в проводнике. На основе самосогласованного приближения, позволяющего учесть многократное рассеяние волн на неоднородностях, определены зависимости от волнового вектора \mathbf{k} частоты и затухания усредненных волн, а также положения ν_m и ширины $\Delta\nu$ пика мнимой части образа Фурье усредненной функции Грина. В длинноволновой области спектра получено уменьшение частоты волны, вызванное неоднородностями, что качественно согласуется с поведением ν_m . При этом в области больших значений корреляционного радиуса неоднородностей и малых k затухание волны стремится к нулю, в то время как ширина пика $\Delta\nu$ остается конечной, что обусловлено неоднородным уширением. Проведено сравнение с данными численных расчетов.

1. Введение

Изучение плазменных волн представляет интерес как с точки зрения фундаментальных вопросов физики проводников, так и в связи с их техническим применением. В последнее время интенсивно развиваются исследования плазменных решеток [1–3], которые могут оказаться перспективными для создания миниатюрных устройств управления оптическими сигналами. Все это делает актуальным исследование плазменных волн в проводниках, в частности изучение влияния на волны неоднородностей среды, поскольку реальные материалы, в том числе и металлические пленки, на основе которых создаются плазменные решетки, не являются идеальными. В пленках большую роль играют случайные неоднородности, возникающие в процессе изготовления и обработки образцов (флуктуации толщины и состава, шероховатости поверхности, поликристалличность и т.д.); неоднородности, в том числе, могут создаваться искусственно. В плазменных решетках используются поверхностные плазменные волны, для которых существенно (см., например, [4,5]) влияние случайных шероховатостей поверхности проводников. С неоднородностями в глубине проводников поверхностные плазменные волны не взаимодействуют, однако они связаны с объемными плазменными волнами, которые восприимчивы к таким неоднородностям. Поэтому в рамках проблематики поверхностных плазменных волн также представляет интерес изучение объемных плазменных возбуждений в случайно-неоднородном проводнике.

Случайные неоднородности в проводнике приводят к модификации спектра объемных плазменных волн и вкладу в их затухание (см. [6–15]). В этих работах, в частности, показано, что наиболее существенные изменения в спектре плазменных волн, обусловленные неоднородностями, происходят в длинноволновой области. Поэтому при изучении влияния случайных неод-

нородностей на плазменные волны можно использовать гидродинамическое приближение [16,17]. Ранее при теоретических исследованиях плазменных волн в случайно-неоднородных проводниках ограничивались [11–14] вторым порядком теории возмущений, т.е. учитывалось двукратное рассеяние волн на неоднородностях. В настоящей работе в рамках гидродинамического подхода изучены объемные плазменные волны в случайно-неоднородном газе электронов проводимости с учетом многократного рассеяния волн на флуктуациях электронной плотности.

2. Модель и волновое уравнение

Объемные плазменные волны в вырожденном неоднородном газе электронов в гидродинамическом приближении описываются (см., например, [17]) линеаризованным уравнением

$$\frac{3}{5} v_F^2(\mathbf{x}) \nabla^2 n_1 - \frac{4\pi e^2 n_0(\mathbf{x})}{m} n_1 - \frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где $n_1 \equiv n_1(\mathbf{x}, t)$ — электронная плотность, обусловленная плазменными волнами, t — время, $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ — пространственные переменные, $n_0(\mathbf{x})$, $v_F(\mathbf{x})$, e и m — соответственно плотность, фермиевская скорость, заряд и эффективная масса электронов проводимости, $n_0(\mathbf{x}) \gg |n_1(\mathbf{x}, t)|$. Чтобы упростить модель будем предполагать, что в уравнении (1) фермиевская скорость электронов однородна, а пространственные флуктуации испытывает их плотность:

$$n_0(\mathbf{x}) = n_0[1 + \gamma\rho(\mathbf{x})], \quad (2)$$

где $\rho(\mathbf{x})$ — центрированная ($\langle \rho(\mathbf{x}) \rangle = 0$) и нормированная ($\langle \rho^2(\mathbf{x}) \rangle = 1$) — функция координат; угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю реализаций

случайной функции $\rho(\mathbf{x})$; γ — относительная средне-квадратичная флуктуация плотности электронов.

Проводя в уравнении (1) преобразование Фурье по времени, получим

$$\nabla^2 n_1(\mathbf{x}, \omega) + [v - \eta\rho(\mathbf{x})]n_1(\mathbf{x}, \omega) = 0, \quad (3)$$

где $v = 5(\omega^2 - \omega_p^2)/3v_F^2$, ω — частота волны, $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n_0/m$ — плазменная частота. В этих обозначениях из уравнения (3) для спектра плазменной волны в однородном газе электронов ($\gamma = 0$) получаем

$$v(k) = k^2, \quad (4)$$

где \mathbf{k} — волновой вектор, $k = |\mathbf{k}|$; $n_1 \propto \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)]$. Этот закон дисперсии на рис. 1 отображается прямой линией $Q = 0$. Выражение (4) приводит к известной формуле для спектра плазменной волны в длинноволновом ($k \gg \omega_p/v_F$) приближении

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3}{5}v_F^2 k^2. \quad (5)$$

Чтобы исследовать плазменные волны в случайно-неоднородном газе электронов ($\gamma \neq 0$) воспользуемся приближением Крайчана [18], позволяющим учесть многократное рассеяние волн на неоднородностях, которое известно также как самосогласованное приближение [19] или приближение когерентного потенциала, учитывающее корреляции неоднородностей [20]. Согласно подходу, изложенному в этих работах, образ Фурье усредненной функции Грина, соответствующей уравнению (3), имеет вид

$$\overline{G}(\mathbf{k}, \nu) = \frac{(2\pi)^{-3}}{\nu - k^2 - \sum(\mathbf{k}, \nu)}, \quad (6)$$

где массовый оператор $\sum(\mathbf{k}, \nu)$ подчиняется интегральному уравнению

$$\sum(\mathbf{k}, \nu) = \eta^2 \int \frac{S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1}{\nu - k_1^2 - \sum(\mathbf{k}_1, \nu)}. \quad (7)$$

Здесь $S(\mathbf{k})$ — спектральная плотность, связанная преобразованием Фурье с корреляционной функцией неоднородностей $K_\rho(\mathbf{r}) = \langle \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle$; $k_1 = |\mathbf{k}_1|$. Равенство нулю знаменателя функции $\overline{G}(\mathbf{k}, \nu)$ дает уравнение

$$\nu(\mathbf{k}) - k^2 = \sum(\mathbf{k}, \nu(\mathbf{k})), \quad (8)$$

решение которого определяет $\nu(\mathbf{k})$ — закон дисперсии усредненной волны.

Выражения, аналогичные (3), (6), (7), но с другими физическими величинами в качестве неизвестного и параметров, описывают распространение волн разной природы в различных случайно-неоднородных средах. Так, в работе [20] было получено численное решение уравнения (7) для спиновых волн в ферромагнетике со

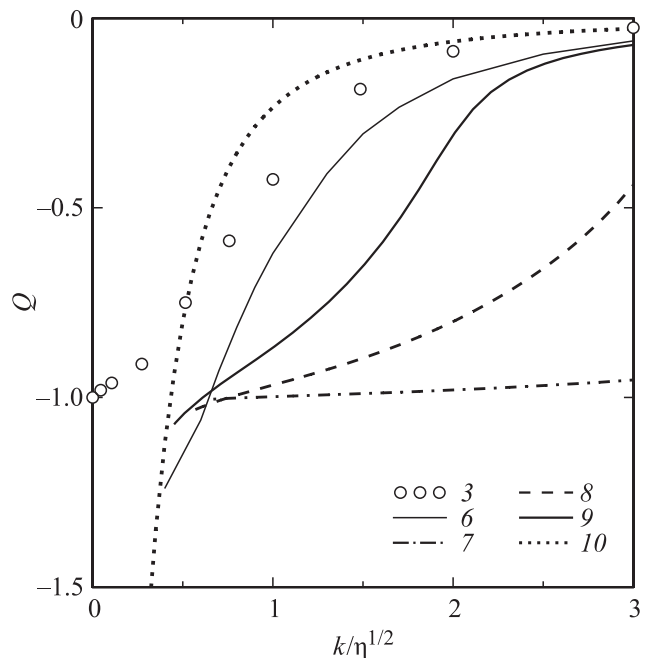


Рис. 1. Спектр ν' плазменных волн и положение ν_m пика функции $\overline{G}''(k, \nu)$: $Q = (\nu_m - k^2)/\eta$ (кривые 3, 6), $Q = (\nu' - k^2)/\eta$ (кривые 7–10). 3 — величина ν_m получена в работе [20]; 6 — ν_m определяются формулами (6), (13), (17); 7–9 — величина ν' найдена по формуле (19); 10 — ν' вычисляется по формуле (10). Кривая 7, построена при $k_c/\sqrt{\eta} = 0.1$, кривая 8 — при $k_c/\sqrt{\eta} = 0.3$, кривые 3, 6, 9, 10 — при $k_c/\sqrt{\eta} = 0.5$. Нумерация кривых соответствует использованной на рис. 2.

случайным параметром анизотропии при экспоненциальном спаде корреляций трехмерных неоднородностей

$$K_\rho(\mathbf{r}) = e^{-k_c r}, \quad S(\mathbf{k}) = \frac{k_c}{\pi^2(k_c^2 + k^2)^2}, \quad (9)$$

где k_c — корреляционное волновое число случайных неоднородностей; $r = |\mathbf{r}|$. Функция $\rho(\mathbf{x})$ и спад корреляций предполагались достаточно плавными (корреляционный радиус $r_c = 1/k_c \gg a_0$; a_0 — межатомное расстояние). Были определены зависимости положения ν_m и ширины $\Delta\nu$ пика функции $\overline{G}''(k, \nu) = \text{Im} \overline{G}(k, \nu)$ от волнового вектора k , которые показаны соответственно на рис. 1 (последовательность точек 3) и рис. 2 (последовательности точек 1–3); ширина пика вычислялась на половине его высоты. Получено смещение положения ν_m пика $\overline{G}''(k, \nu)$ в область меньших частот по сравнению с его положением при распространении волн в однородной среде ($\nu_m - k^2 < 0$). При этом $|\nu_m - k^2|$ и $\Delta\nu$ наиболее велики при малых значениях волнового вектора ($k \ll \eta$) и корреляционного волнового числа ($k_c \ll \eta$).

Зависимости $\nu_m(k)$ и $\Delta\nu(k)$, которые возникают при использовании в выражении (6) численного решения уравнения (7), нельзя безоговорочно отождествлять со спектром $\nu' = \text{Re} \nu(k)$ и затуханием $\nu'' = -\text{Im} \nu(k)$

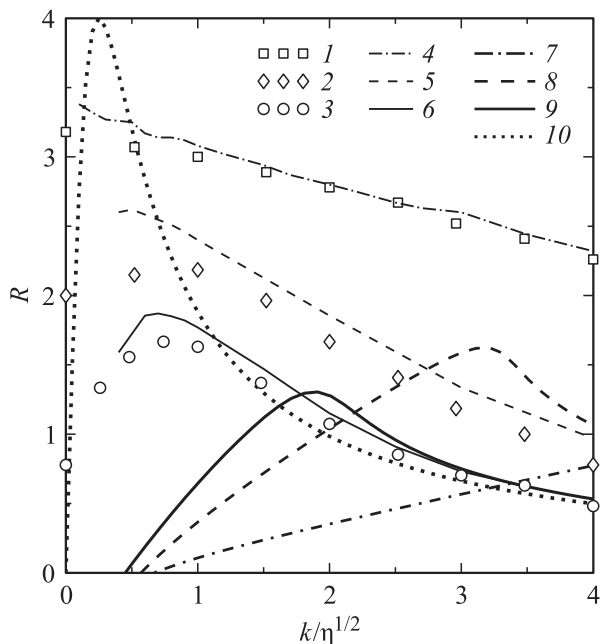


Рис. 2. Затухание ν'' плазменной волны и ширина $\Delta\nu$ пика функции $\overline{G}''(k, \nu)$: $R = \Delta\nu/\eta$ (1-6), $R = 2\nu''/\eta$ (7-10). 1-3 — величина $\Delta\nu$ получена в работе [20]; 4-6 — $\Delta\nu$ определяются формулами (6), (13), (17); 7-9 — величина ν'' найдена по формуле (19); 10 — ν'' вычисляется по формуле (10). Кривые 1, 4, 7, построены при $k_c/\sqrt{\eta} = 0.1$, кривые 2, 5, 8 — при $k_c/\eta = 0.3$, кривые 3, 6, 9, 10 — при $k_c/\sqrt{\eta} = 0.5$.

усредненной плазменной волны, где $\nu(k)$ определяется уравнением (8). Действительно, как отмечалось в [20], функция Грина, вычисленная в самосогласованном приближении, помимо диссипативного вклада, обусловленного волнами, имеет недиссипативную составляющую, которая определяется стохастическим разбросом случайно-неоднородного параметра и известна как неоднородное (флуктуационное) уширение. В связи с этим поиск закона дисперсии волн представляет дополнительный интерес, поскольку знание его позволит оценить вклад неоднородного уширения в положение и форму резонансных линий.

3. Спектр плазменных волн и их затухание

Чтобы определить спектр и затухание объемных плазменных волн, найдем приближенное решение уравнения (7) в аналитическом виде. Для этого обычно используют упрощения, которые направлены на то, чтобы вычислить интеграл в правой части этого уравнения. Критерием приемлемости такого упрощения должно быть соответствие численных и аналитических результатов. В работе [20] был предложен приближенный способ решения уравнения (7), который заключается в замене в подынтегральном выражении $\sum(\mathbf{k}_1, \nu)$ на $\sum(k, \nu)$. Широко известно приближение Бурре [21], которое

следует из уравнения (7), если в его правой части в подынтегральном выражении положить $\sum(\mathbf{k}_1, \nu) = 0$. Оба эти приближения при $k \ll \eta$ и $k_c \ll \eta$ дают смещение положения ν_m пика $\overline{G}''(k, \nu)$ в область более высоких частот, что противоречит численным расчетам работы [20] (рис. 1, последовательность точек 3). Если же в (7) помимо требования $\sum(\mathbf{k}_1, \nu) = 0$ (приближение Бурре) использовать равенство $\nu = k^2$, то для массового оператора после вычисления интеграла следует выражение, не зависящее от ν , подставляя которое в уравнение (8) получаем закон дисперсии усредненных плазменных волн в виде

$$\nu(k) - k^2 = -\frac{\eta^2}{k_c^2 + 4k^2} - 2i\eta^2 \frac{k}{k_c(k_c^2 + 4k^2)}. \quad (10)$$

Отметим, что несмотря на отличие этого выражения от закона дисперсии плазменных волн, полученного ранее [12] на основе кинетического уравнения, в предельных случаях $k \ll k_c$ и $k \gg k_c$ они совпадают с точностью до константы. Формула, аналогичная (10), была получена в работе [22] во втором порядке теории возмущений для спектра и затухания спиновых волн в ферромагнетике со случайной величиной параметра анизотропии. Модификация спектра плазменных волн, которая следует из формулы (10), качественно согласуется с положением ν_m пика функции $\overline{G}''(k, \nu)$, полученным из выражений (6) и (7) ($\nu' - k^2 < 0$ и $\nu_m - k^2 < 0$), однако при $k \ll k_c < \sqrt{\eta}/2$ оказывается, что $|\nu' - k^2| \gg |\nu_m - k^2|$. Но более ярко ограниченность выражения (10) для описания закона дисперсии плазменной волны проявляется в том, что при $k \approx k_c < \sqrt{\eta}/2$ удвоенное затухание волны $2\nu'' \gg \Delta\nu$. В то же время величина $\Delta\nu$, которая формируется за счет как диссипативного вклада, так и неоднородного (недиссипативного) уширения, не должна по крайней мере быть меньше $2\nu''$.

Перейдем к определению приближенного аналитического решения уравнения (7). Для этого воспользуемся подходом, который был предложен ранее [23] при исследовании электромагнитных волн в джозефсоновском переходе со случайными одномерными неоднородностями. Он заключается в том, что мы пренебрегаем угловой зависимостью $\sum(\mathbf{k}_1, \nu)$ и раскладываем знаменатель подынтегрального выражения правой части уравнения (7) в окрестности точки $k_1 = k$ в степенной ряд

$$\nu - k_1^2 - \sum(k_1, \nu) = g - \left[2k + \frac{d\sum(k, \nu)}{dk} \right] (k - k_1) - \left[1 + \frac{1}{2} \frac{d^2\sum(k, \nu)}{dk^2} \right] (k - k_1)^2 - \dots, \quad (11)$$

где $g = \nu - k^2 - \sum(k, \nu)$. В тех случаях, когда в числителе подынтегрального выражения уравнения (7) спектральная плотность $S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)$ и другие множители образуют функцию от k_1 , имеющую в окрестности точки $k_1 = k$ хорошо выраженный максимум, в знаменателе подынтегрального выражения можно ограничиться

первыми двумя или тремя членами разложения (11). Используя в правой части уравнения (7) для спектральной плотности выражение (9) и интегрируя по угловым переменным сферической системы координат с полярной осью вдоль вектора \mathbf{k} , получаем

$$\sum(k, \nu) = \eta^2 \frac{4k_c}{\pi} \times \int_0^\infty \frac{1}{\nu - k_1^2 - \sum(k_1, \nu)} \frac{k_1^2}{(k_c^2 + k^2 + k_1^2)^2 - 4k^2 k_1^2} dk_1, \tag{12}$$

где второй множитель в подынтегральном выражении имеет максимум при $k_1 = k_{1n} \equiv \sqrt{k^2 + k_c^2}$, отсюда при $k > k_c$ следует $k_{1n} \approx k$. Поэтому подставим в выражение (12) разложение (11), ограничиваясь в нем первыми двумя членами, и проинтегрируем методом вычетов. В результате получаем

$$\tilde{\sum}(k, \nu) = \frac{A_1}{\pi K Y (a^2 + K_c^2) [(2K + a)^2 + K_c^2]}, \tag{13}$$

где

$$A_1 = 4KK_c(K + a)^2 \ln \frac{K + a}{\sqrt{K^2 + K_c^2}} + 2[(K^2 - K_c^2)(K + a)^2 - (K^2 + K_c^2)^2] \operatorname{arctg} \frac{K}{K_c} + \pi K(K + a)(a^2 + 2aK - K_c^2) - 4i\pi K K_c(K + a)^2 \tag{14}$$

и введены безразмерные величины

$$\tilde{\sum}(k, \nu) = \frac{\sum(k, \nu)}{\eta}, \quad K = \frac{k}{\sqrt{\eta}}, \quad K_c = \frac{k_c}{\sqrt{\eta}}, \tag{15}$$

$$Y = \frac{2k + d \sum(k, \nu)/dk}{\sqrt{\eta}}, \quad a = \frac{g}{\eta Y}.$$

Дифференциальное уравнение относительно $\sum(k, \nu)$, которое следует из выражения (13), решить не удастся, поэтому рассмотрим его как трансцендентное уравнение, а входящую в него производную $d \sum(k, \nu)/dk$ найдем дифференцируя уравнение (12),

$$\frac{d \sum(k, \nu)}{dk} = \eta^2 \frac{4k_c}{\pi} \times \int_0^\infty \frac{k_1^2}{\nu - k_1^2 - \sum(k_1, \nu)} \frac{d}{dk} \frac{1}{(k_c^2 + k^2 + k_1^2)^2 - 4k^2 k_1^2} dk_1. \tag{16}$$

Интеграл в правой части этого уравнения вычисляем, проводя дифференцирование по параметру k и интегрирование методом вычетов по k_1 . Последнее интегрирование выполняем, используя разложение (11) и ограничиваясь в нем, как и выше, первыми двумя членами. В

результате имеем

$$Y = 2K - \frac{\tilde{\sum}}{K} - \frac{1}{\pi K Y} \left\{ \frac{2K_c}{K_c^2 + K^2} + (K + a) \frac{d}{dK_c} \frac{A_2}{(a^2 + K_c^2) [(2K + a)^2 + K_c^2]} \right\}, \tag{17}$$

где $\tilde{\sum} \equiv \tilde{\sum}(k, \nu)$,

$$A_2 = 2(K + a)(a^2 + 2aK + K_c^2) \left(\ln \frac{K + a}{\sqrt{K^2 + K_c^2}} - i\pi \right) - 4KK_c(K + a) \operatorname{arctg} \frac{K}{K_c} - \pi K_c [(K + a)^2 + K^2 + K_c^2]. \tag{18}$$

Выражения (13) и (17) образуют систему двух трансцендентных уравнений относительно неизвестных $\tilde{\sum}$ и Y . Подставляя значения массового оператора $\sum(k, \nu)$, полученные в результате численного решения этой системы ($\operatorname{Im} a > 0$), в выражение (6), определяем положение ν_m и ширину $\Delta\nu$ пика функции $\overline{G}(k, \nu)$, показанные соответственно на рис. 1 кривой 6 и на рис. 2 кривыми 4–6. Можно отметить качественное согласие, а в некоторых случаях и совпадение этих кривых с последовательностями точек 1–3. Близость численных результатов для функции Грина, полученных в рамках развиваемого здесь подхода и в работе [20], делает обоснованным использование выражений (13) и (17) для определения спектра усредненных волн и их затухания, а также свидетельствует о том, что, используя в выражении (7) разложение (11), мы в основном остаемся в границах самосогласованного приближения и учитываем многократное рассеяние волн на неоднородностях.

При выполнении равенства (8) система уравнений, которую образуют выражения (13) и (17), упрощается ($a = 0$), что позволяет получить ее решения в аналитическом виде. Итак, для закона дисперсии усредненных волн имеем

$$X = \frac{2K^3 \ln \frac{K^2}{K_c^2 + K^2} - 2K_c(K_c^2 + 3K^2) \operatorname{arctg} \frac{K}{K_c} - \pi K^2(K_c + 4iK)}{\pi K_c K^2(K_c^2 + 4K^2) + \sqrt{F}}, \tag{19}$$

где $X = [\nu(k) - k^2]/\eta$,

$$F = \pi^2 K^4 [K_c^2(4K^2 + K_c^2)^2 + 2K_c^2 - 8K^2 + 16iK_c K] - 2\pi K K_c (K_c^4 + 6K^2 K_c^2 + 8K^4) - 8\pi K_c K^5 \ln \frac{K^2}{K_c^2 + K^2} + 2\pi [K_c^4(7K^2 + K_c^2) + 2K^4(3K_c^2 - 4K^2)] \operatorname{arctg} \frac{K}{K_c}. \tag{20}$$

Спектр ν' и удвоенное затухание $2\nu''$ усредненной плазменной волны, которые следуют из этих выражений, показаны соответственно на рис. 1 и 2 линиями 7–9.

Таким образом, получено уменьшение частоты усредненных плазменных волн в случайно-неоднородном электронном газе по сравнению с ее значением в однородной среде, что коррелирует со смещением в область меньших частот положения ν_m пика функции $\overline{G}'(\nu, k)$, определенного в работе [20] (последовательность точек 3 на рис. 1) и вычисленного на основе формул (6), (13), (17) (кривая 6 на рис. 1).

Рис. 2 демонстрирует, что при $k < k_\omega$, где k_ω является решением уравнения $\text{Im} X = 0$ (при $k = k_\omega$ кривые 7–9 пересекают горизонтальную ось), выражение (19) не описывает усредненную волну. Чтобы получить аналитическую оценку k_ω , рассмотрим предельные случаи. Прежде всего отметим, что при $\gamma \rightarrow 0$ правая часть выражения (19) обращается в нуль, в результате чего приходим к формулам (4) и (5) для спектра волн в однородной среде. При $\gamma \neq 0$, $K_c \ll 1$ и $K > K_c$ из выражения (19) в окрестности нуля $\text{Im} X$ получаем

$$X \approx -1 - \frac{3}{4} K_c^2 + \frac{1}{2} K^2 K_c^2 + 2i K_c \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{K_c}{\pi} - K \right). \quad (21)$$

Из этого разложения, используя определения (15) и переходя к размерным величинам, имеем

$$\omega^2 \approx \omega_p^2 (1 - \gamma) + \frac{3}{5} k^2 v_F^2 \left(1 + \frac{3}{10} \frac{k_c^2 v_F^2}{\omega_p^2 \gamma} \right) + \frac{6}{5} i k_c v_F \left(\sqrt{\frac{5\gamma}{6}} \omega_p - \frac{k_c v_F}{\pi} - k v_F \right), \quad (22)$$

где $\omega = \omega' - i\omega''$. Формула (22) описывает спектр ω' и затухание ω'' усредненных плазменных волн при

$$k \geq \sqrt{\frac{5\gamma}{6}} \frac{\omega_p}{v_F} - \frac{k_c}{\pi} \approx k_\omega, \quad (23)$$

когда $\text{Im} \omega \leq 0$. Это выражение аппроксимирует k_ω и показывает, что с уменьшением γ и r_c нижняя граница области существования усредненных волн смещается в сторону более длинных волн.

При $K \gg 1$ из выражения (19), используя определения (15) и переходя к размерным величинам, имеем

$$\omega^2 \approx \omega_p^2 \left[1 - \gamma^2 \frac{5\omega_p^2}{6v_F^2} \left(\frac{1}{k^2} + i \frac{1}{k_c k} \right) \right] + \frac{3}{5} v_F^2 k^2. \quad (24)$$

Видно, что в этом пределе затухание волны обратно пропорционально k и совпадает с асимптотикой мнимой части формулы (10) при $k \gg k_c$. Таким образом, согласно выражению (19), зависимость затухания волны от k сменяется по мере роста k с линейной на обратно пропорциональную, проходя через максимум в точке $k \approx \eta/k_c$. Такой закон изменения $2\nu''$ с увеличением k отображен на рис. 2 (кривые 8 и 9). Из этого рисунка также следует, что $\Delta\nu$ и $2\nu''$ имеют разную зависимость от k . Такое поведение обусловлено тем, что величина $\Delta\nu$, вычисленная в самосогласованном приближении,

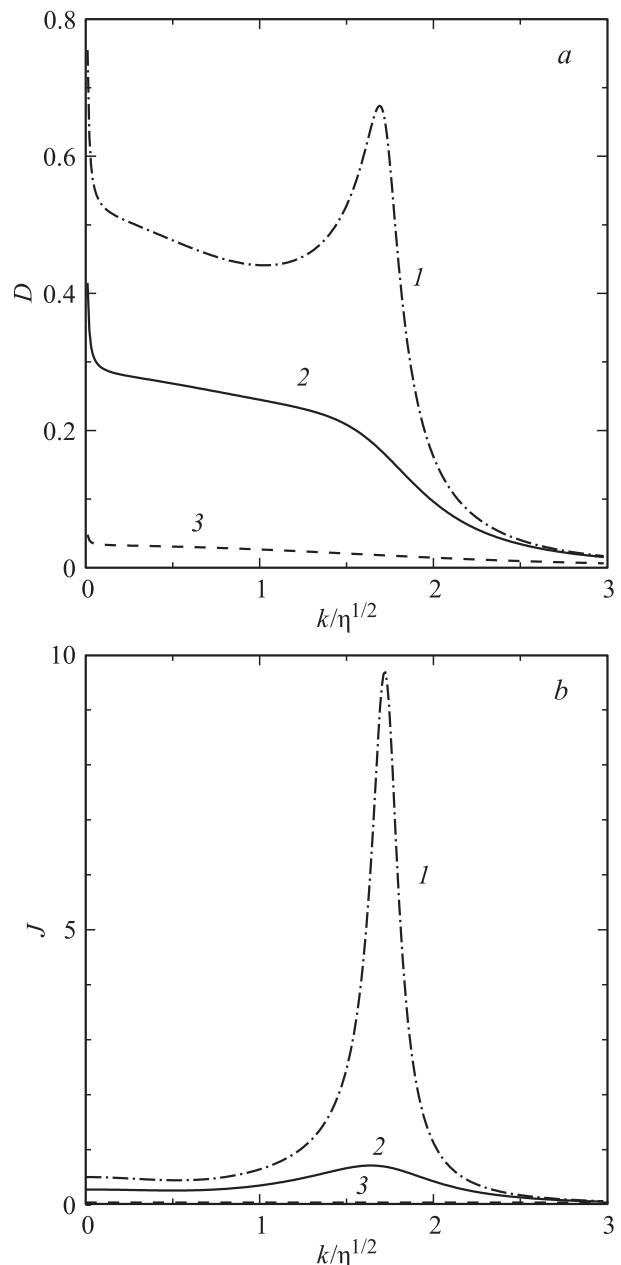


Рис. 3. Нормированные производные массового оператора: $a - D = |d \sum(k, \nu)/dk|/2k$, $b - J = |d^2 \sum(k, \nu)/dk^2|/2$. Кривые построены при $k_c/\sqrt{\eta} = 0.1$ (1), 0.5 (2) и 2 (3).

как отмечалось выше, определяется помимо затухания волн неоднородным уширением. Последовательности точек 1–3 и кривые 4–6 на рис. 2 отражают совместное влияние на ширину $\Delta\nu$ пика функции $\overline{G}''(k, \nu)$ этих двух механизмов. Оценить вклад каждого из них дает возможность полученное здесь затухание усредненной плазменной волны, которое следует из выражения (19). Сравнивая $\Delta\nu$ с $2\nu''$ (рис. 2), можно заключить, что при малых k_c ширина $\Delta\nu$ пика функции $\overline{G}''(k, \nu)$ в области $k \ll \sqrt{\eta}$ в основном определяется неоднородным уширением, а при $k \gg \sqrt{\eta}$ главным становится вклад затухания плазменной волны.

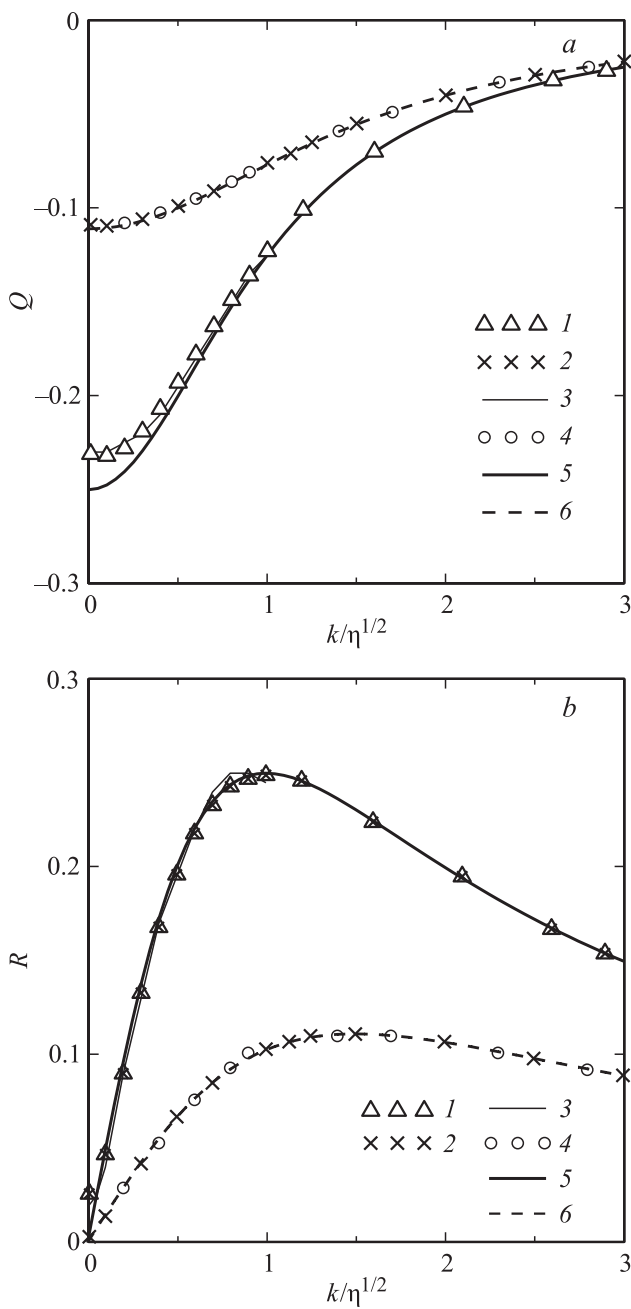


Рис. 4. *a*) Спектр ν' плазменных волн и положение ν_m пика функции $\bar{G}''(k, \nu)$: $Q = (\nu_m - k^2)/\eta$ (1-4), $Q = (\nu' - k^2)/\eta$ (5, 6). *b*) Затухание ν'' плазменной волны и ширина $\Delta\nu$ пика функции $\bar{G}''(k, \nu)$: $R = \Delta\nu/\eta$ (1-4), $R = 2\nu''/\eta$ (5, 6). 1, 2 — ν_m и $\Delta\nu$ найдены по формулам (6), (7); 3, 4 — ν_m и $\Delta\nu$ определяются формулами (6), (26); 5, 6 — ν' и ν'' рассчитаны по формуле (10). Кривые 1, 3, 5 построены при $k_c/\sqrt{\eta} = 2$, кривые 2, 4, 6 — при $k_c/\sqrt{\eta} = 3$.

С увеличением k_c спектральная плотность в уравнении (7) становится все более плавной функцией k_1 , в результате чего возникает необходимость использования в этом уравнении трех членов разложения (11). Однако при $k_c \gg \sqrt{\eta}$ справедливы неравенства $|d \sum(k, \nu)/dk \ll 2k|$ и $|d^2 \sum(k, \nu)/dk^2 \ll 2|$ (рис. 3, *a*

и *b*), что дает возможность пренебречь в (11) производными от $\sum(k, \nu)$, после чего это разложение принимает вид

$$\nu - k_1^2 - \sum(k_1, \nu) \approx \nu - k_1^2 - \sum(k, \nu). \quad (25)$$

Использование такой формулы в знаменателе подынтегрального выражения в уравнении (7) приводит к приближению, предложенному в работе [20]. Если с учетом (25) в правой части выражения (7) выполнить интегрирование, то получим уравнение

$$\sum(k, \nu) = -\eta^2 \frac{k_c^2 - g + 2ik_c \sqrt{g + k^2}}{(g + k^2)^2 + 4k^2 k_c^2}, \quad (26)$$

из которого следует алгебраическое уравнение четвертой степени, исследованное в работе [20]. Подставляя значение массового оператора $\sum(k, \nu)$, полученное в результате численного решения уравнения (26), в выражение (6), определяем положение ν_m и ширину $\Delta\nu$ пика функции $\bar{G}''(k, \nu)$, показанные соответственно на рис. 4*a* и *b* (кривые 3 и последовательности точек 4). Видно практически полное их совпадение с последовательностями точек 1 и 2, полученными при использовании в выражении (6) численного решения уравнения (7).

Для определения закона дисперсии плазменных волн воспользуемся равенством (8), в соответствии с которым $g = 0$. Тогда из выражения (26) для спектра и затухания возбуждений следует формула (10). Это означает, что при $k_c \geq 2\sqrt{\eta}$ основным становится двукратное рассеяние волн на неоднородностях, а правая часть выражения (10) хорошо аппроксимирует модификацию закона дисперсии плазменных волн, вычисленную в самосогласованном приближении. Спектр и затухание волн, которые следуют из выражения (10), показаны соответственно на рис. 4, *a* и *b* (кривые 5 и 6), т.е. $\nu' \approx \nu_m$ и $2\nu'' \approx \Delta\nu$. В этом случае массовый оператор слабо зависит от ν , а для спектра и затухания волн в соответствии с уравнением (8) имеем $\nu' - k^2 \approx \sum'(k)$, $\nu'' \approx -\sum''(k)$. В частности, правая часть выражения (10) помимо модификации спектра и затухания волны описывает массовый оператор.

Отметим, что производными от $\sum(\nu, k)$ во втором и третьем членах разложения (11) можно пренебречь при любых k_c , если $k \gg \sqrt{\eta}$ (см., например, рис. 3, *a* и *b*). Следовательно, в этом пределе для $\sum(\nu, k)$ справедливо уравнение (26), а спектр плазменных волн определяется выражением (10). В связи с этим понятно совпадение при $k \gg \sqrt{\eta}$ характеристик плазменных волн, вычисленных в самосогласованном приближении и по теории возмущений.

4. Заключение

В простой модели вырожденного случайно-неоднородного газа электронов проводимости в гидродинамическом приближении методом усредненных функций Грина исследован закон дисперсии объемных плазменных

волн. Для анализа уравнения (3), описывающего такие волны в случайно-неоднородной среде, использовано самосогласованное приближение, учитывающее многократное рассеяние волн на неоднородностях, согласно которому образ Фурье (6) усредненной функции Грина выражается через массовый оператор, подчиняющийся интегральному уравнению (7). Решение этого уравнения описывает вклад в функцию Грина как плазменных волн, так и стохастического разброса случайно-неоднородного параметра $n_0(\mathbf{r})$. Такой разброс приводит к увеличению ширины $\Delta\nu$ пика функции $\overline{G}''(k, \nu)$, что известно как неоднородное (флуктуационное, недиссипативное) уширение. Для поиска закона дисперсии усредненных волн использовано упрощение уравнения (7), обеспечивающее малое нарушение его самосогласованности. Критерием допустимости такого нарушения стало соответствие положения ν_m пика функции $\overline{G}''(k, \nu)$ и его ширины $\Delta\nu$, полученных численно из выражений (6), (7) и определенных с использованием упрощающих допущений в уравнении (7). Использование двух первых членов разложения знаменателя подынтегрального выражения этого уравнения в степенной ряд (11) в окрестности точки $k_1 = k$ дало возможность получить при $k_c \leq \sqrt{\eta}/2$ и $k > k_c$ качественное согласие зависимостей $\nu_m(k)$ и $\Delta\nu(k)$, определенных в работе [20] и полученных на основе выражений (6), (13), (17). Указанные соответствия позволили, используя (13) и (17), найти спектр ν' и затухание ν'' усредненной волны (см. (19)). Можно отметить качественное согласие зависимостей $\nu'(k)$ и $\nu_m(k)$, полученных на основе выражения (19) и формул (6), (13), (17) соответственно (кривые 9 и 6 на рис. 1), и их совпадение при $k \gg \sqrt{\eta}$. В то же время законы $\nu''(k)$ и $\Delta\nu(k)$, найденные исходя из выражения (19) и формул (6), (13), (17) соответственно, а также в работе [20], существенно различаются при $k < \eta/k_c$. В этой области значений k величина $\Delta\nu$ остается конечной (кривые 4–6 на рис. 2), а затухание волны ν'' равно нулю при $k = k_\omega$ и линейно возрастает с увеличением k , проходя через максимум при $k \approx \eta/k_c$ (кривые 8, 9 на рис. 2). Такое же выражение для положения максимума затухания было получено в работе [23].

Формула (19) дает возможность оценить вклад в $\Delta\nu$ затухания усредненной волны. Из сравнения $\Delta\nu$ (последовательности точек 1–3 на рис. 2) и $2\nu''$ (кривые 7–9 на рис. 2) следует вывод, что $\Delta\nu$ при $k_c \leq \sqrt{\eta}/2$ в области $k_\omega < k \ll \eta/k_c$ определяется неоднородным уширением, а при $k \gtrsim \eta/k_c$ вклад затухания волны в $\Delta\nu$ становится основным.

С увеличением k_c спектральная плотность (9) сглаживается, и возникает необходимость использования в уравнении (7) трех членов разложения (11). Вместе с тем при $k_c \gg \sqrt{\eta}$ производные в (11) оказываются пренебрежимо малыми (см. рис. 3, а и б), в результате чего для массового оператора следует приближенное уравнение, предложенное в работе [20].

Следует отметить, что результаты работы в большей степени применимы к „плохим“ проводникам (вырожденные полупроводники, аморфные металлы и т.д.),

однако они дают, по-видимому, качественно правильную картину для спектра и затухания объемных плазменных волн в таких случайно-неоднородных материалах, как, например, микрокристаллические металлы и аморфные полупроводники.

Уравнение (3) изоморфно уравнениям, описывающим спиновые волны в ферромагнетике со случайным параметром анизотропии, упругие и электромагнитные волны в скалярном приближении при флуктуациях плотности среды и ее диэлектрической проницаемости соответственно, а также электромагнитные волны в случайно-неоднородных джозефсоновских переходах и т.д. Поэтому полученные результаты могут быть использованы для исследования иных возбуждений в ряде материалов со случайными трехмерными неоднородностями.

Автор признателен В.А. Игнатченко за обсуждение результатов настоящей работы.

Список литературы

- [1] W.L. Barnes, A. Dereux, T.W. Ebbesen. *Nature* **424**, 824 (2003).
- [2] С.А. Майер. Плазмоника. Теория и приложения. R&C Dynamics, М.–Ижевск (2011). 277 с.
- [3] A. Agrawal, Z.V. Vardeny, A. Nahata. *Opt. Express* **16**, 9601 (2008).
- [4] А.М. Бродский, М.И. Урбах. *УФН* **138**, 413 (1982).
- [5] H. Raether. *Surface plasmons on smooth and rough surfaces and on gratings*. Springer, Berlin–Heidelberg. (1988). 133 p.
- [6] C. von Festenberg. *Phys. Lett.* **23**, 293 (1966); *Z. Phys.* **207**, 47 (1967).
- [7] K.J. Krane. *J. Phys. F*: **8**, 2133 (1978).
- [8] H. Bross. *Phys. Lett. A* **64**, 418 (1978).
- [9] R. Manzke. *J. Phys. C* **13**, 911 (1980).
- [10] С.Н. Chen, D.C. Joy, H.S. Chen, J.J. Hauser. *Phys. Rev. Lett.* **57**, 743 (1986).
- [11] V. Krishan, R.H. Ritchie. *Phys. Rev. Lett.* **24**, 1117 (1970).
- [12] В.А. Игнатченко, Ю.И. Маньков, Ф.В. Рахманов. *ЖЭТФ* **81**, 1771 (1981).
- [13] В.А. Игнатченко, Ю.И. Маньков, Ф.В. Рахманов. *ФТТ* **24**, 2292 (1982); *ЖЭТФ* **87**, 228 (1984).
- [14] V.A. Ignatchenko, Yu.I. Mankov. *J. Phys.: Cond. Matter* **3**, 5837 (1991).
- [15] M. Haase, M. Taut. *Solid State Commun.* **68**, 781 (1988).
- [16] F. Bloch. *Z. Phys.* **81**, 363 (1933).
- [17] С. Лундквист. В сб.: *Теория неоднородного электронного газа / Под ред. С. Лундквиста, Н. Марча*. Мир, М. (1987). С. 151.
- [18] R.H. Kraichnan. *J. Math. Phys.* **2**, 124 (1961).
- [19] G. Brown, V. Celli, M. Haller, A.A. Maradudin, A. Marvin. *Phys. Rev. B* **31**, 4993 (1985).
- [20] В.А. Игнатченко, В.А. Фелк. *Phys. Rev. B* **71**, 094417 (2005).
- [21] R.C. Bourret. *Nuovo Cimento* **26**, 1 (1962); *Canad. J. Phys.* **40**, 782 (1962).
- [22] В.А. Игнатченко, Р.С. Исхаков. *ЖЭТФ* **72**, 1005 (1977).
- [23] Ю.И. Маньков. *ЖТФ* **81**, 8, 88 (2011).