

# КРОССИНГ-РЕЗОНАНС СТОХАСТИЧЕСКИ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

*В. А. Игнатченко\*, Д. С. Полухин*

*Институт физики им. Л. В. Киренского Сибирского отделения Российской академии наук  
660036, Красноярск, Россия*

*Сибирский федеральный университет  
660041, Красноярск, Россия*

Поступила в редакцию 2 августа 2012 г.

Исследованы динамические восприимчивости (функции Грина) системы двух взаимодействующих волновых полей различной физической природы со стохастически неоднородным параметром связи между ними, среднее значение которого равно нулю. Хорошо известное самосогласованное приближение, учитывающее все диаграммы с непересекающимися линиями корреляций/взаимодействий, обобщено на случай стохастически взаимодействующих волновых полей. Исследование проведено на примере спиновых и упругих волн. Учет процессов многократного рассеяния волн на неоднородностях привел к результатам, существенно отличным от тех, которые были получены для такой ситуации ранее в приближении Бурре [8]. Вместо снятия вырождения частот в спектре волн и раздвоения резонансных пиков динамических восприимчивостей в точке пересечения невозмущенных дисперсионных кривых должен наблюдаться широкий одномодовый резонансный пик. Тонкая структура возникает на вершинах этих широких пиков в форме узкого резонанса на функции Грина одного поля и узкого антирезонанса на вершине функции Грина другого поля.

DOI: 10.7868/S0044451013020041

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что взаимодействие между двумя волновыми полями различной физической природы в твердом теле приводит к существованию связанных колебаний этих полей (магнитоупругие волны, поляритоны и т. д.). В точке пересечения дисперсионных кривых (если она существует) это взаимодействие приводит к явлению кроссинг-резонанса, в котором особенности связанных колебаний проявляются наиболее ярко. Для определенности мы рассматриваем в данной работе кроссинг-резонанс между спиновыми и упругими волнами, который для этой ситуации обычно называется магнитоупругим резонансом. Явление магнитоупругого резонанса было предсказано в 1956 г. в докладе А. И. Ахизера на Международном совещании по физике магнитных явлений [1]. Феноменологическая теория этого явления была разработана в

работах [2–4]. Этими основополагающими работами были стимулированы интенсивные теоретические и экспериментальные исследования эффектов взаимодействия спиновых и упругих волн в ферро-, ферри- и антиферромагнетиках, которые отражены во многих оригинальных публикациях, а также в обзорах и книгах [5–7]. Как и любой кроссинг-резонанс в однородной среде, магнитоупругий резонанс проявляется в снятии вырождения частот взаимодействующих волновых полей в точке пересечения их невозмущенных дисперсионных соотношений и появлении двух резонансных пиков в частотных зависимостях мнимых частей функций Грина как спиновых,  $G''_m(\omega)$ , так и упругих,  $G''_u(\omega)$ , волн. При этом и величина раздвижки между энергетическими уровнями в спектре, и расстояние между максимумами каждой функции Грина определяются величиной параметра связи  $\epsilon$  между волновыми полями.

Исследование кроссинг-резонанса в неоднородной среде в рамках приближения Бурре [8, 9] (однократное рассеивание волн на неоднородностях) было проведено в работе [10]. Исследование проводилось для предельно неоднородной модели взаи-

\*E-mail: vignat ch@iph.krasn.ru

модействия двух волновых полей, когда параметр связи между полями представляет собой случайную функцию координат с нулевым средним значением. В этом случае взаимодействие между полями происходит только благодаря пространственным флуктуациям этого параметра. Интерес к исследованию кроссинг-резонанса в такой модели обусловлен двумя причинами. Во-первых, подобные материалы в настоящее время создаются искусственно, так как нулевое среднее значение параметра связи приводит к улучшению ряда физических свойств (например, к увеличению начальной восприимчивости в сплавах с нулевой магнитострикцией [11]). Во-вторых, теория спектра волн в предельно неоднородной среде должна быть развита для последующего перехода к более сложному случаю произвольного соотношения между средними и среднеквадратичными значениями параметра связи.

Рассмотрение в работе [10] проводилось для скалярной модели акустических и оптических фононов. Было предсказано явление индуцированного беспорядком кроссинг-резонанса: снятие вырождения и образование щели в спектре в точке пересечения дисперсионных кривых волновых полей. В отличие от кроссинг-резонанса в однородной среде, щель в этом случае определялась среднеквадратичной флуктуацией параметра связи  $\Delta\varepsilon$ . Были найдены и другие существенные отличия от однородного случая, которые мы рассмотрим ниже (см. разд. 4). В дальнейшем явление индуцированного беспорядком кроссинг-резонанса было исследовано также для связанных магнитоупругих волн [12] и поляритонов [13] (см. также работу [14] и ссылки в ней).

В кратких сообщениях [15, 16] мы рассмотрели эту же модель с приближенным учетом процессов многократного рассеивания волн на неоднородностях и получили предварительные результаты, кардинально отличающиеся от полученных в работах [10, 12–14]. Основной результат этих работ остается справедливым: кроссинг-резонанс, обусловленный только пространственными флуктуациями параметра связи при равном нулю среднем значении этого параметра, имеет место. Однако физические явления, которые должны наблюдаться при таком резонансе, существенно отличаются от тех, которые были предсказаны в приближении Бурре.

Для учета влияния многократного рассеяния волн на неоднородностях на спектральные свойства волн используются несколько типов самосогласованных приближений (ССП) (self-consistent approximation, SCA). В этой работе нас будет интересовать тот вариант СПП, который был предложен

Мигдалом [17] для учета электрон-фононного взаимодействия в однородной среде и Крейчнаном [18] для исследования спектральных свойств волн в неоднородных средах. Более детальное обсуждение этого варианта СПП, его исследования и развития, отражено в разд. 3 данной работы. Там же кратко обсуждается соотношение между этим вариантом СПП и другим вариантом — приближением когерентного потенциала, предложенным в работах Совена [19] и Тейлора [20].

Целью настоящей работы является обобщение этого варианта СПП на случай двух стохастически взаимодействующих волновых полей различной физической природы и развитие на основе этого обобщения теории кроссинг-резонанса в среде с неоднородными параметром связи, среднее значение которого равно нулю.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 выводится связанная система уравнений для функций Грина спиновых и упругих волн. В разд. 3 обсуждается СПП для случая одного волнового поля и выводится СПП для двух стохастически связанных волновых полей. В разд. 4 развивается теория кроссинг-резонанса в среде с неоднородным параметром связи, среднее значение которого равно нулю. В разд. 5 суммируются и обсуждаются результаты работы.

## 2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА

Рассмотрим модель ферромагнетика, в котором неоднородным является только параметр магнитострикции  $\varepsilon(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ . Для этой среды уравнения движения — это уравнение Ландау–Лифшица для вектора намагниченности  $\mathbf{M}$  и уравнение движения теории упругости для вектора упругих смещений  $\mathbf{u}$ :

$$\dot{\mathbf{M}} = -g[\mathbf{M} \times \mathbf{H}^e], \quad (1)$$

$$p\ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad (2)$$

где  $g$  — гиромагнитное отношение,  $p$  — плотность среды,  $\sigma_{ij}$  — тензор напряжений,  $i, j = x, y, z$ . Эффективное магнитное поле  $\mathbf{H}^e$  и тензор напряжений  $\sigma_{ij}$  имеют вид

$$\mathbf{H}^e = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{M}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial \mathbf{M} / \partial \mathbf{x})}, \quad (3)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_{ij}}, \quad (4)$$

где  $u_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2$  — тензор упругих деформаций. Мы выбираем плотность энергии  $\mathcal{H}$  в виде

$$\mathcal{H} = \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 - \mathbf{M}\mathbf{H} + \frac{\lambda u_{ii}^2}{2} + \mu u_{ij}^2 + \varepsilon(\mathbf{x}) M_i M_j u_{ij}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{H}$  — внешнее постоянное магнитное поле,  $\alpha$  — параметр обмена,  $\lambda$  и  $\mu$  — силовые упругие константы. Представим магнитоупругий параметр  $\varepsilon(\mathbf{x})$  в виде

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon + \Delta\varepsilon \rho(\mathbf{x}), \quad (6)$$

где  $\varepsilon$  — среднее значение этого параметра,  $\Delta\varepsilon$  — его среднеквадратичная флуктуация, а  $\rho(\mathbf{x})$  — центрированная ( $\langle \rho(\mathbf{x}) \rangle = 0$ ) и нормированная ( $\langle \rho^2(\mathbf{x}) \rangle = 1$ ) случайная функция координат. Угловые скобки означают среднее по ансамблю реализаций соответствующей случайной функции.

Мы предполагаем, что среднее значение магнитоупругого параметра  $\varepsilon = 0$ . Стохастические свойства  $\rho(\mathbf{x})$  характеризуются зависящей от разности координат  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$  корреляционной функцией

$$K(\mathbf{r}) = \langle \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \quad (7)$$

или связанной с ней преобразованием Фурье спектральной плотностью

$$S(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int K(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (8)$$

где  $d$  — размерность пространства.

Подставив плотность энергии (5) в уравнения движения (1) и (2), получим связанную систему уравнений для векторов намагниченности  $\mathbf{M}$  и смещения  $\mathbf{u}$ :

$$-\frac{\dot{\mathbf{M}}}{g} = \left[ \mathbf{M} \times \left\{ \alpha \Delta \mathbf{M} + \mathbf{H} - \varepsilon(\mathbf{x}) M_j \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \mathbf{x}} \right) \right\} \right], \quad (9)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = v_t^2 \Delta \mathbf{u} + (v_l^2 - v_t^2) \text{grad div } \mathbf{u} + \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial x_j} (\varepsilon(\mathbf{x}) M_j \mathbf{M}), \quad (10)$$

где  $v_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/p}$  и  $v_t = \sqrt{\mu/p}$  — соответственно продольная и поперечная скорости упругих волн.

Уравнение Ландау–Лифшица (9) линеаризуем обычным образом ( $M_z \approx M$ ;  $M_x, M_y \ll M$ ), а для упругих волн ограничимся здесь модельной задачей: помимо условия  $v_l = v_t = v_u$  ( $v_u$  — скорость упругой волны) наложим условие  $u_z = 0$ . Полагая  $M_x, M_y \propto e^{i\omega t}$  и вводя циркулярные проекции

$$\begin{aligned} m^\pm &= M_x \pm iM_y, \\ u^\pm &= u_x \pm iu_y, \end{aligned} \quad (11)$$

получаем для резонансных проекций  $m^+$  и  $u^+$  (здесь и в дальнейшем индекс «+» опускаем) связанную систему двух скалярных уравнений:

$$\nabla^2 m + \nu_m m - \frac{\Delta\varepsilon}{\alpha} M \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (12)$$

$$\nabla^2 u + \nu_u u + \frac{\Delta\varepsilon}{\mu} M \frac{\partial}{\partial z} (\rho(\mathbf{x}) m) = 0, \quad (13)$$

где введены обозначения

$$\nu_m = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha g M}, \quad \nu_u = \frac{\omega^2}{v_u^2}, \quad (14)$$

где  $\omega_0$  — частота однородного ферромагнитного резонанса, которая зависит от магнитного поля и размагничивающих факторов образца,  $v_u = \sqrt{\mu/p}$ .

Система уравнений для функций Грина для спиновых  $G_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  и упругих  $G_u(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  волн, соответствующая системе уравнений (12), (13), имеет вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 G_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \nu_m G_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) - \\ - \frac{\Delta\varepsilon}{\alpha} M \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial G_u(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial z} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 G_u(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \nu_u G_u(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \\ + \frac{\Delta\varepsilon}{\mu} M \frac{\partial}{\partial z} (\rho(\mathbf{x}) G_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \end{aligned} \quad (16)$$

Представим функции Грина  $G_m$  и  $G_u$  в виде

$$G_{m,u} = G_{m,u}^0 + G'_{m,u}, \quad (17)$$

где  $G_m^0$  и  $G_u^0$  — исходные функции Грина соответственно не взаимодействующих спиновых и упругих волн,  $G'_m$  и  $G'_u$  — поправки, обусловленные неоднородным параметром взаимодействия.

Подставляя выражения (17) в (15) и (16), получаем систему двух независимых уравнений для  $G_m^0$  и  $G_u^0$ :

$$\nabla^2 G_m^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \nu_m G_m^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (18)$$

$$\nabla^2 G_u^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \nu_u G_u^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (19)$$

и систему двух связанных уравнений для  $G'_m$  и  $G'_u$ :

$$\nabla^2 G'_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \nu_m G'_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \Phi_u(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0), \quad (20)$$

$$\nabla^2 G'_u(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \nu_u G'_u(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \Phi_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0), \quad (21)$$

где

$$\Phi_u(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{\Delta\varepsilon}{\alpha} M \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial G_u(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial z}, \quad (22)$$

$$\Phi_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -\frac{\Delta\varepsilon}{\mu} M \frac{\partial}{\partial z} (\rho(\mathbf{x}) G_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)). \quad (23)$$

Согласно общим правилам, формальные решения уравнений (20) и (21) можно представить в виде интегралов от произведений невозмущенных функций Грина и правых частей этих уравнений. Отсюда следует, что генерирующие интегральные уравнения для рядов функций Грина  $G_m$  и  $G_u$  имеют вид

$$G_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = G_m^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \int G_m^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Phi_u(\mathbf{x}', \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}', \quad (24)$$

$$G_u(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = G_u^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \int G_u^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Phi_m(\mathbf{x}', \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}'. \quad (25)$$

Уравнение (25) содержит производные случайной функции  $\rho(\mathbf{x})$ , что неудобно для последующего использования. Поэтому мы преобразуем это уравнение методом интегрирования по частям, как это было сделано ранее для аналогичного случая в работе [21]:

$$\begin{aligned} & \int_V G_u^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial P(\mathbf{x}', \mathbf{x}_0)}{\partial z'} d\mathbf{x}' = \\ & = \int_S G_u^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') P(\mathbf{x}', \mathbf{x}_0) dx dy \Big|_{z=-L}^{z=L} - \\ & - \int_V \frac{\partial G_u^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial z'} P(\mathbf{x}', \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}, \quad (26) \end{aligned}$$

где  $P(\mathbf{x}', \mathbf{x}_0) = \rho(\mathbf{x}') G_m(\mathbf{x}', \mathbf{x}_0)$ . Удаляя поверхность  $S$  на бесконечность, где функции Грина обращаются в нуль, получаем окончательный вид для системы двух связанных генерирующих интегральных уравнений для функций Грина  $G_m$  и  $G_u$ :

$$G_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = G_m^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \frac{\Delta\varepsilon}{\alpha} M \int G_m^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') \times \frac{\partial G_u(\mathbf{x}', \mathbf{x}_0)}{\partial z'} d\mathbf{x}', \quad (27)$$

$$G_u(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = G_u^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \frac{\Delta\varepsilon}{\mu} M \int \frac{\partial G_u^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial z'} \times \rho(\mathbf{x}') G_m(\mathbf{x}', \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}'. \quad (28)$$

Подставляя уравнение (27) в правую часть уравнения (28) и уравнение (28) в правую часть уравнения (27), получаем два независимых интегродифференциальных уравнения для функций Грина  $G_m$  и  $G_u$ :

$$\begin{aligned} G_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) &= G_m^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \\ &+ \frac{\Delta\varepsilon}{\alpha} M \int G_m^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') \frac{\partial G_u^0(\mathbf{x}', \mathbf{x}_0)}{\partial z'} d\mathbf{x}' + \\ &+ \frac{(\Delta\varepsilon)^2}{\alpha\mu} M^2 \iint G_m^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') \frac{\partial^2 G_u^0(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')}{\partial z' \partial z''} \times \\ &\times \rho(\mathbf{x}'') G_m(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}'' d\mathbf{x}', \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_u(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) &= G_u^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \\ &+ \frac{\Delta\varepsilon}{\mu} M \int \frac{\partial G_u^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial z'} \rho(\mathbf{x}') G_m^0(\mathbf{x}', \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}' + \\ &+ \frac{(\Delta\varepsilon)^2}{\alpha\mu} M^2 \iint \frac{\partial G_u^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial z'} \rho(\mathbf{x}') G_m^0(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \times \\ &\times \rho(\mathbf{x}'') \frac{\partial G_u(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_0)}{\partial z''} d\mathbf{x}' d\mathbf{x}''. \quad (30) \end{aligned}$$

Используя обычную процедуру последовательных итераций каждого из этих уравнений, получаем бесконечные ряды функции Грина для  $G_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  и  $G_u(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ . Усредняя эти ряды по ансамблю случайных функций  $\rho(\mathbf{x})$  и расщепляя корреляторы по формуле Гаусса, получаем ряды по возмущениям для усредненных функций Грина:

$$\begin{aligned} \overline{G}_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) &= G_m^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \gamma^2 \iint G_m^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) \times \\ &\times \frac{\partial^2 G_u^0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\partial z_1 \partial z_2} G_m^0(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_0) K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 + \\ &+ \gamma^4 \iiint G_m^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) \frac{\partial^2 G_u^0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\partial z_1 \partial z_2} G_m^0(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \times \\ &\times \frac{\partial^2 G_u^0(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)}{\partial z_3 \partial z_4} G_m^0(\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_0) \times \\ &\times [K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) K(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) + K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) K(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4) + \\ &+ K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4) K(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)] d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_3 d\mathbf{x}_4 + \dots, \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{G}_u(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) &= G_u^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \gamma^2 \iint \frac{\partial G_u^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1)}{\partial z_1} \times \\ &\times G_m^0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \frac{\partial G_u^0(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_0)}{\partial z_2} K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 + \\ &+ \gamma^4 \iiint \frac{\partial G_u^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1)}{\partial z_1} G_m^0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \times \\ &\times \frac{\partial^2 G_u^0(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)}{\partial z_2 \partial z_3} G_m^0(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \frac{\partial G_u^0(\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_0)}{\partial z_4} \times \\ &\times [K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) K(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) + K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) K(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4) + \\ &+ K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4) K(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)] d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_3 d\mathbf{x}_4 + \dots, \quad (32) \end{aligned}$$

где  $K(\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_n) \equiv K(\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_n)$  — корреляционные функции, определяемые формулой (7),

$$\gamma^2 = \frac{(\Delta\varepsilon)^2}{\alpha\mu} M^2. \quad (33)$$

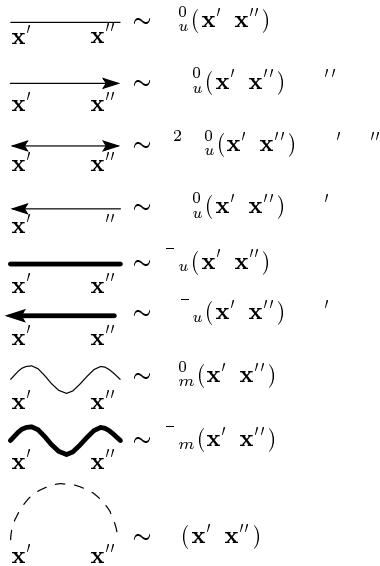


Рис. 1. Диаграммные обозначения. Стрелками указаны точки, в которых берутся производные

Хорошо известно, что ряды для усредненных функций Грина  $\bar{G}$  при неоднородностях локальных членов гамильтониана содержат произведения исходных функций Грина  $G^0$ . В работе [21] было показано, что ряды для  $\bar{G}$  при неоднородностях нелокальных членов содержат произведения как первых, так и вторых производных исходных функций Грина  $G^0$  и не содержат самих этих функций. В отличие от этого, полученные здесь ряды гриновских функций (31) и (32), соответствующие неоднородностям магнитоупругого параметра связи, содержат произведения как производных исходных упругих функций Грина  $G_u^0$ , так и исходные спиновые функции Грина  $G_m^0$ . При этом в каждом члене рядов (31) и (32) функции  $G_m^0$  и производные функций  $G_u^0$  чередуются друг с другом.

Введем следующие обозначения диаграмм, используя для упругих функций Грина и их производных обозначения, введенные в работе [21], дополнив их волнистыми линиями, соответствующими спиновым функциям Грина (рис. 1).

В диаграммном представлении выражения (31) и (32) имеют вид, показанный на рис. 2. Система уравнений Дайсона выводится из уравнений (31) и (32) обычным образом и имеет вид

$$\bar{G}_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = G_m^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \iint G_m^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') Q_u(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \bar{G}_m(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'', \quad (34)$$

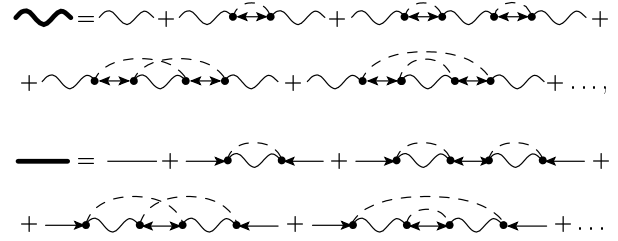


Рис. 2. Диаграммное представление уравнений (31) и (32)

$$\bar{G}_u(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = G_u^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \iint \frac{\partial G_u^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial z'} \times Q_m(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \frac{\partial \bar{G}_u(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_0)}{\partial z''} d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'', \quad (35)$$

где массовые операторы (собственные энергии)  $Q_m$  и  $Q_u$  определяются следующими рядами:

$$Q_m(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') = \gamma^2 G_m^0(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') K(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') + \gamma^4 \iint G_m^0(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1) \frac{\partial^2 G_u^0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\partial z_1 \partial z_2} G_m^0(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}'') \times [K(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2) K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'') + K(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] \times d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 + \dots, \quad (36)$$

$$Q_u(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') = \gamma^2 \frac{\partial^2 G_u^0(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')}{\partial z' \partial z''} K(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') + \gamma^4 \iint \frac{\partial^2 G_u^0(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1)}{\partial z' \partial z_1} G_m^0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \times \frac{\partial^2 G_u^0(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}'')}{\partial z_2 \partial z''} [K(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2) K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'') + K(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 + \dots \quad (37)$$

В диаграммной форме система уравнений Дайсона (34) и (35) и массовые операторы (36) и (37) показаны на рис. 3. Главной особенностью системы уравнений Дайсона является то, что упругий массовый оператор  $Q_u$  входит в уравнение для спиновой функции Грина  $\bar{G}_m$ , а спиновый массовый оператор  $Q_m$  — в уравнение для упругой функции Грина  $\bar{G}_u$ .

В случайно-однородной среде все величины зависят только от разности координат  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ . Проводя преобразование Фурье

$$\begin{aligned} \bar{G}_{m,u}(\mathbf{r}) &= \int \bar{G}_{m,u}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \\ G_{m,u}^0(\mathbf{r}) &= \int G_{m,u}^0(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \\ Q_{m,u}(\mathbf{r}) &= \int Q_{m,u}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \end{aligned} \quad (38)$$

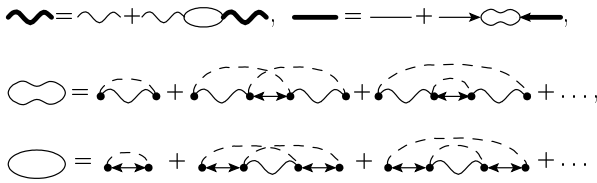


Рис. 3. Диаграммное представление уравнений (34)–(37)

мы получаем из уравнений (35) и (36) систему уравнений Дайсона для трансформант Фурье функций Грина и выражаем из нее  $\bar{G}_m(\mathbf{k})$  и  $\bar{G}_u(\mathbf{k})$  в виде

$$\bar{G}_m(\mathbf{k}) = \frac{1}{[G_m^0(\mathbf{k})]^{-1} - (2\pi)^{2d} Q_u(\mathbf{k})}, \quad (39)$$

$$\bar{G}_u(\mathbf{k}) = \frac{1}{[G_u^0(\mathbf{k})]^{-1} - (2\pi)^{2d} k_z^2 Q_m(\mathbf{k})}. \quad (40)$$

Из уравнений (18) и (19) следуют выражения для трансформант Фурье  $G_{m,u}^0(\mathbf{k})$  исходных функций Грина:

$$G_m^0(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{\nu_m - k^2}, \quad (41)$$

$$G_u^0(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{\nu_u - k^2}. \quad (42)$$

Подставляя выражения (41) и (42) в (39) и (40), получаем окончательный вид системы уравнений Дайсона в  $\mathbf{k}$ -пространстве:

$$\bar{G}_m(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{\nu_m - k^2 - (2\pi)^d Q_u(\mathbf{k})}, \quad (43)$$

$$\bar{G}_u(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{\nu_u - k^2 - (2\pi)^d k_z^2 Q_m(\mathbf{k})}. \quad (44)$$

Теперь все точные уравнения для функций Грина  $\bar{G}_m$  и  $\bar{G}_u$  записаны как в  $\mathbf{r}$ -, так и в  $\mathbf{k}$ -пространстве.

### 3. САМОСОГЛАСОВАННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

#### 3.1. Одно волновое поле

Прежде чем переходить к выводу ССП для двух стохастически взаимодействующих полей, напомним кратко основные этапы вывода аналогичного приближения для одного волнового поля. Такой вводный раздел необходим потому, что приведенные в нем положения и формулы используются как в дальнейшем, так и для некоторых терминологических уточнений. В конце 50-х — начале 60-х годов

этот вариант ССП был использован для проблемы, не имеющей отношения к неоднородным средам. Он был предложен Мигдалом при исследовании электрон-фононного взаимодействия в однородной среде [17], а затем детально проанализирован в работах Пайнса [22, 23], Паффа и Уайтфилда [24], а также в книге Абрикосова, Горькова и Дзялошинского [25].

Воспроизведем кратко ключевые положения этих работ. Система уравнений для электронов и фононов приближенно приводится к одному уравнению для функции Грина электронов  $G(x_i, x_j)$ , в котором точки  $x_i$  и  $x_j$  связаны оператором электрон-фононного взаимодействия  $D(x_i, x_j)$ . В результате уравнение Дайсона для электронной функции Грина принимает стандартный вид

$$\bar{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = G^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \iint G^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') Q(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \bar{G}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'', \quad (45)$$

в котором, однако, и исходная функция Грина  $G^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ , и массовый оператор  $Q(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$  зависят от параметров электрон-фононного взаимодействия. Самосогласованное приближение Мигдала базируется на представлении массового оператора  $Q(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$  в виде

$$Q(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \approx \bar{G}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') D(\mathbf{x}', \mathbf{x}''). \quad (46)$$

После преобразования Фурье уравнений (45) и (46) функция Грина  $\bar{G}(\mathbf{k})$  выражается из первого уравнения обычным образом через массовый оператор  $Q(\mathbf{k})$ :

$$\bar{G}(\mathbf{k}) = \frac{1}{[G^0(\mathbf{k})]^{-1} - (2\pi)^{2d} Q(\mathbf{k})}, \quad (47)$$

а второе уравнение принимает вид

$$Q(\mathbf{k}) \approx \int \bar{G}(\mathbf{k}_1) D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1. \quad (48)$$

Исходная функция Грина для этой задачи в  $\mathbf{k}$ -пространстве имеет вид [22]

$$G^0(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{\nu - \nu_0 - k^2}, \quad (49)$$

где  $\nu$  и  $\nu_0$  — нормированные частоты соответственно электронов и фононов. Подставляя (49) в (47), заменяя  $\mathbf{k}$  на  $\mathbf{k}_1$  в уравнении (47) и подставляя получившееся уравнение в (48), получаем окончательные уравнения этого варианта ССП:

$$\bar{G}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{\nu - \nu_0 - k^2 - M_{\mathbf{k}}}, \quad (50)$$

$$M_{\mathbf{k}} \approx \int \frac{D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1}{\nu - \nu_0 - k_1^2 - M_{\mathbf{k}_1}}, \quad (51)$$

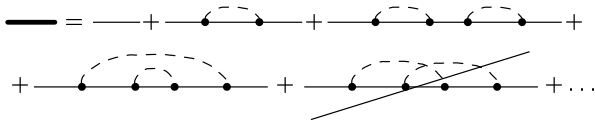


Рис. 4. Ряд для приближенной функции Грина одного волнового поля

где  $M_{\mathbf{k}} = (2\pi)^d Q(\mathbf{k})$  — перенормированный массовый оператор.

Для исследования свойств введенного приближения уравнение (46) в работах [22–24] подставлялось в (45) и проводилась последовательная итерация полученного замкнутого нелинейного уравнения для функции Грина в  $\mathbf{x}$ -пространстве. В результате был получен ряд для приближенной функции Грина  $\bar{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ , который в диаграммном представлении показан на рис. 4. На этом рисунке, в отличие от всех остальных изображений диаграмм в данной работе, сплошные линии соответствуют исходным электронным функциям Грина, а штриховые — фононному взаимодействию. Этот ряд содержит все диаграммы, входящие в точные выражения для  $\bar{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ , за исключением диаграмм с перекрещивающимися линиями фононного взаимодействия (на рис. 4 первая из таких диаграмм зачеркнута). В работе [24] было показано, что полученное ССП соответствует пределу  $T \rightarrow 0$  К приближения Хартри–Фока. Вариант ССП в форме уравнений (50) и (51) в дальнейшем широко использовался в расчетах различных эффектов электрон-фононного взаимодействия (см., например, [26, 27]).

В те же годы аналогичный вариант ССП был независимо предложен Крейчнаном [18] при исследовании влияния неоднородностей на динамическую восприимчивость неупорядоченных систем. Вывод этого ССП из разложения вершиной части функции Грина приведен в книге Кляцкина [28]. Уравнение Дайсона имеет тот же вид (45), а массовый оператор приближенно представляется в форме

$$Q(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \approx \gamma^2 \bar{G}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') K(\mathbf{x}', \mathbf{x}''), \quad (52)$$

где  $\gamma$  — среднеквадратичная флуктуация неоднородностей и  $K(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$  — нормированная корреляционная функция этих неоднородностей ( $K(\mathbf{x}', \mathbf{x}') = 1$ ). В работе [18] это приближенное равенство было подставлено в уравнение Дайсона (45) и получено нелинейное по  $\bar{G}$  замкнутое интегральное уравнение

$$\bar{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \approx G^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \gamma^2 \iint G^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') K(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \times \bar{G}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \bar{G}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}' d\mathbf{x}''. \quad (53)$$

Последовательная итерация уравнения (53) приводит к ряду для функций Грина, диаграммное представление которого формально совпадает с показанным на рис. 4, однако штриховые линии теперь обозначают не взаимодействие, а стохастическую корреляцию между точками. Преобразование Фурье уравнения (53) приводит к более простой форме уравнения Крейчнана в  $\mathbf{k}$ -пространстве:

$$\bar{G}(\mathbf{k}) \approx G^0(\mathbf{k}) + \gamma^2 (2\pi)^{2d} G^0(\mathbf{k}) \bar{G}(\mathbf{k}) \times \int S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \bar{G}(\mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1, \quad (54)$$

где  $S(\mathbf{k})$  — трансформанта Фурье корреляционной функции. В такой форме приближение Крейчнана анализировалось впоследствии во многих работах (см., например, [29–31]), а его приближенные решения использовались при обсуждении различных проблем стохастической гидродинамики и стохастической радиофизики. Приближению Крейчнана можно придать и другую форму. Тем же методом, который был использован выше для вывода приближения Мигдала, получаем

$$\bar{G}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{\nu - k^2 - M_{\mathbf{k}}}, \quad (55)$$

$$M_{\mathbf{k}} \approx \gamma^2 \int \frac{S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1}{\nu - k_1^2 - M_{\mathbf{k}_1}}. \quad (56)$$

В этой форме приближение Крейчнана использовалось, например, в работе [32] для расчета влияния неоднородностей магнитной анизотропии на ширину и форму магнитных резонансов в ферромагнетике<sup>1)</sup>.

Из сравнения уравнений (55) и (56) с уравнениями (50) и (51) видно, что несмотря на то что приближение Мигдала [17] и приближение Крейчнана [18] предложены для совершенно разных задач, математически они идентичны и имеют одно и то же ограничение: в разложении найденной с их помощью функции Грина присутствуют все диаграммы за исключением тех, которые имеют пересекающиеся линии взаимодействия/корреляции между различными точками. Поэтому будем в дальнейшем для целей данной работы называть этот вариант приближением непересекающихся корреляций (ПНК) (noncrossing correlation approximation, NCA), понимая корреляции в широком смысле слова — и как стохастические корреляции, и как усредненные

<sup>1)</sup> Обращаем внимание, что формула (21) работы [32] содержит лишний член с произведением  $K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3)K(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4)$ . Это не влияет на результаты работы, так как формула (21) в дальнейшем не используется.

физические взаимодействия. Аналогичное ПНК под названием самосогласованное борновское приближение [25, 33, 34] используется в теории рассеяния электронов на примесях. Благодаря своеобразной форме непересекающихся линий взаимодействия электронов с примесью, соответствующие им диаграммы в этом случае иногда называют вигвам-диаграммами. Заметим, что разобщенность различных областей физики привела к тому, что в работах, в которых развивается и применяется ПНК в теории конденсированных сред, как правило, не цитируются и не используются математические результаты, достигнутые при исследовании и использовании ПНК Крейчнана в стохастической гидродинамике или радиофизике. То же самое можно сказать о работах, в которых развивается и используется ПНК Крейчнана.

Приближенная оценка условия применимости ПНК была проведена для задачи рассеяния электронов на примесях [25, 33, 34]. Показано, что отношения вкладов двух диаграмм, показанных на рис. 4 в последней строчке, зачеркнутой и включенной в ПНК, будет малым, если

$$(k_F l)^{-1} \ll 1, \quad (57)$$

где  $k_F$  — импульс Ферми,  $l$  — длина свободного пробега электронов. Для задачи рассеяния волн на неоднородностях сплошной среды в случае, когда основную роль играют волны в окрестности какого-либо резонансного волнового числа  $k_r$ , условие (57) может быть преобразовано к виду

$$k_c/k_r \ll 1, \quad (58)$$

где  $k_c$  — корреляционное волновое число ( $k_c^{-1} = r_c$  — радиус корреляций неоднородностей).

Условия (57) и (58) выводятся из сравнения двух диаграмм второго порядка в разложении функции Грина. Но отношение числа отброшенных диаграмм к числу остающихся в ПНК быстро возрастает с ростом номера порядка диаграмм. Мы дополним здесь оценку применимости ПНК, рассмотрев предельный случай  $k_c = 0$ , когда ряд для функции Грина может быть суммирован точно. В этом случае случайные функции  $\rho(\mathbf{x})$  превращаются в случайные величины, стохастические свойства которых описываются некоторой функцией распределения  $f(\rho)$  (подобная модель независимых зерен в поликристалле была введена для расчета формы линии ферромагнитного резонанса в работе [35]). Усредненная функция Грина определяется выражением

$$\bar{G}(\nu, \mathbf{k}) = \int G(\nu, \mathbf{k}; \rho) f(\rho) d\rho, \quad (59)$$

где  $G(\nu, \mathbf{k}; \rho)$  — одна из реализаций случайного ансамбля функций Грина, которая является решением дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Например, для спиновых волн в ферромагнетике со случайной величиной одноосной магнитной анизотропии (и неизменной ориентацией оси этой анизотропии) функция Грина имеет вид [32]

$$G(\nu, \mathbf{k}; \rho) = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{\nu - k^2 - \sigma\rho}, \quad (60)$$

где  $\sigma = \Delta\beta/\alpha$ ,  $\Delta\beta$  — среднеквадратичная флуктуация величины анизотропии,  $\rho$  — центрированная ( $\langle \rho \rangle = 0$ ) и нормированная ( $\langle \rho^2 \rangle = 1$ ) случайные величины, различные в каждом зерне поликристалла. Для точной усредненной функции Грина функция распределения  $f(\rho)$  в уравнении (59) является функцией Гаусса [34],

$$f(\rho) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2}\right). \quad (61)$$

Поскольку мнимая часть функции (60) является  $\delta$ -функцией Дирака, умноженной на  $\pi/\sigma$ , мнимая часть интеграла (59) легко вычисляется:

$$G''(\nu, \mathbf{k}) = \frac{\pi}{(2\pi)^{7/2}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad (62)$$

где  $x = \nu - k^2$ .

С другой стороны, интегральное уравнение самосогласования ПНК при  $k_c \rightarrow 0$  также решается точно и приводит к следующему выражению для усредненной функции Грина [32]:

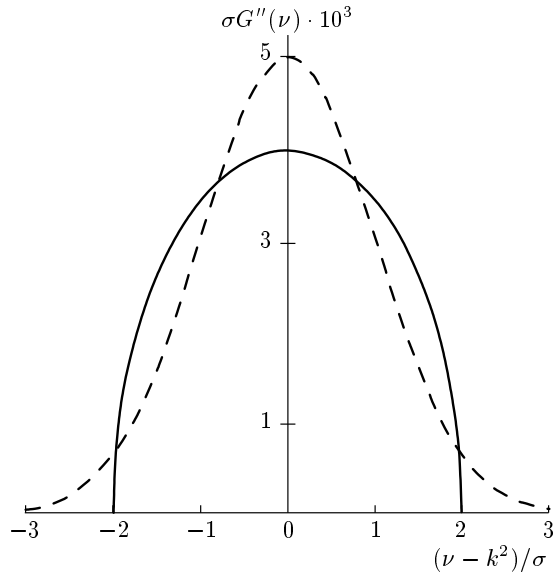
$$G''_{NCA}(\nu, \mathbf{k}) = \begin{cases} \frac{\sqrt{(2\sigma)^2 - x^2}}{(2\pi)^3 \cdot 2\sigma^2}, & |x| \leq 2\sigma, \\ 0 & |x| > 2\sigma. \end{cases} \quad (63)$$

Подставляя выражения (60) и (63) в уравнение (59), легко определить, что усреднению функции Грина в методе ПНК соответствует функция распределения вида

$$f(\rho) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4 - \rho^2}}{2\pi}, & |\rho| \leq 2, \\ 0 & |\rho| > 2. \end{cases} \quad (64)$$

Функции Грина (62) и (63) приведены на рис. 5. Формы функций отличаются друг от друга, повторяя формы соответствующих функций распределения (61) и (64). Знаменатели обеих функций Грина не имеют полюсов, и характеристики спектра определяются из равенства нулю знаменателя усредненной функции Грина (60). Ансамбль случайных





**Рис. 5.** Мнимая часть функции Грина для случая  $k_c = 0$ , рассчитанная в рамках ПНК (сплошная линия) и точным суммированием всех диаграмм (штриховая кривая)

частот в независимых зернах определяется выражением

$$\nu = k^2 - \sigma\rho, \quad (65)$$

а усредненные характеристики определяются усреднением этого ансамбля с соответствующей функцией распределения. Для средней частоты и ее среднеквадратичного отклонения, характеризующего полуширину резонансной линии, обе функции распределения, точная (61) и приближенная (64), приводят к одинаковым результатам:

$$\langle \nu \rangle = k^2, \quad \sqrt{\langle (\nu - \langle \nu \rangle)^2 \rangle} = \sigma, \quad (66)$$

мнимые части частот при  $k_c = 0$  отсутствуют. При  $k_c \neq 0$  на приближенной функции Грина возникают хвосты, обусловленные затуханием [32], и форма функции  $\overline{G}_{NSA}(\nu)$  становится более похожей на форму точной функции (если  $\langle \nu \rangle \gg \sigma$ ; в противоположном случае затухание приводит к сильной асимметрии резонансной линии [32]). Следует отметить, что в форме уравнений (52)–(56) ПНК может быть использовано для учета влияния неоднородностей параметров только локальных членов гамильтониана модели сплошной среды (или, соответственно, диагональных членов решеточного гамильтониана), таких как магнитная анизотропия для спиновых волн, плотность вещества для упругих волн и диэлектрическая константа для электромагнитных

волн. Недиagonalным членам решеточного гамильтониана, описывающим взаимодействия с атомами окружающей среды (обмен в ферро- и ферримагнетиках, упругие взаимодействия атомов и т. д.), в гамильтониане сплошной среды соответствуют нелокальные члены, содержащие производные обобщенных координат системы. На случай неоднородностей параметров нелокальных членов гамильтониана ПНК было обобщено в работе [21]. Интегральный член уравнения Дайсона в этом случае содержит не функции Грина, а их пространственные производные

$$\overline{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \iint \frac{\partial G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial x'_i} Q_{i'j''}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \times \frac{\partial \overline{G}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_0)}{\partial x''_j} d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'', \quad (67)$$

где массовый оператор является матрицей, компоненты которого содержат вторые производные исходных функций Грина и для точной задачи имеют вид

$$Q_{i'j''}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') = \gamma^2 \frac{\partial^2 G_0(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')}{\partial x'_i \partial x''_j} K(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') + \gamma^4 \iint \frac{\partial^2 G_0(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1)}{\partial x'_i \partial x_1^k} \frac{\partial^2 G_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\partial x_1^k \partial x_2^l} \frac{\partial^2 G_0(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}'')}{\partial x_2^l \partial x''_j} \times [K(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2)K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'') + K(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] \times d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 + \dots \quad (68)$$

Для введения ПНК каждая компонента этой матрицы представлялась в виде

$$Q_{i'j''}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \approx \gamma^2 \frac{\partial^2 \overline{G}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')}{\partial x'_i \partial x''_j} K(\mathbf{x}', \mathbf{x}''). \quad (69)$$

Это представление массового оператора для нелокальных членов гамильтониана эквивалентно представлению (52) для локальных членов. Подробности дальнейшего вывода см. в работе [21], где были получены простые результирующие выражения ПНК для неоднородностей нелокальных членов гамильтониана:

$$\overline{G}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{\nu - k^2 - T_{\mathbf{k}}}, \quad (70)$$

$$T_{\mathbf{k}} = \frac{\gamma^2}{(2\pi)^d} \int \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1)^2 S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1}{\nu - k_1^2 - T_{\mathbf{k}_1}}. \quad (71)$$

Здесь скалярный потенциал взаимодействий  $T_{\mathbf{k}}$  есть сумма всех компонент матрицы произведений  $k^i k^j Q_{i'j''}(\mathbf{k})$ ,

$$T_{\mathbf{k}} = (2\pi)^d k^i k^j Q_{i'j''}(\mathbf{k}). \quad (72)$$

Кроме рассматриваемого в данной работе ПНК, упомянем кратко еще один вариант ССП — приближение когерентного потенциала (ПКП) (coherent potential approximation, CPA), которое широко применяется для решеточных моделей твердого тела. Классическая форма ПКП была выведена Совеном [19] и Тейлором [20] в 1967 г. на основе требования о равенстве нулю среднего значения матрицы рассеивания, которое в простейшем случае приводит к интегральному уравнению для массового оператора вида

$$M_k \approx (\sigma^2 - M_k^2) \int \frac{dk_1}{\nu - \nu_0 - k_1^2 - M_{k_1}}, \quad (73)$$

где  $\nu_0$  — средняя частота колебаний ионов.

Многочисленные достоинства ПКП проявились при расчетах плотности состояния неупорядоченных сплавов. Однако его классическая форма имела два существенных ограничения: стохастическую независимость неоднородностей и применимость только к неоднородностям диагональных членов гамильтониана. Дальнейшему развитию метода ПКП были посвящены многочисленные работы, в которых были предложены различные кластерные схемы обобщения ПКП, приближенный учет коррелированности неоднородностей и т.д. (см., например, [36–42]). Эти улучшения метода ПКП позволили получить ряд важных физических результатов. Популярность ПКП и некоторое сходство интегральных уравнений (73) и (56) привели к терминологической путанице: в некоторых работах (см., например, [21] и [32]) уравнения ПНК рассматривались как один из вариантов ПКП. В действительности, в работе [32] не ПКП, а ПНК было использовано для расчета влияния неоднородностей магнитной анизотропии на форму и ширину линии магнитных резонансов, а в работе [21] не схема ПКП, а схема ПНК была обобщена на неоднородности нелокальных параметров гамильтониана.

### 3.2. Два волновых поля

Теперь переходим к выводу приближенных самосогласованных уравнений для массовых операторов  $Q_m(\mathbf{k})$  и  $Q_u(\mathbf{k})$ , входящих в уравнения (43) и (44). Для этого приближенно выразим массовые операторы  $Q_{m,u}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$  через искомые функции Грина  $\overline{G}_{m,u}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$ :

$$Q_m(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \approx \gamma^2 \overline{G}_m(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') K(\mathbf{x}', \mathbf{x}''), \quad (74)$$

$$Q_u(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \approx \gamma^2 \frac{\partial^2 \overline{G}_u(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')}{\partial z' \partial z''} K(\mathbf{x}', \mathbf{x}''). \quad (75)$$

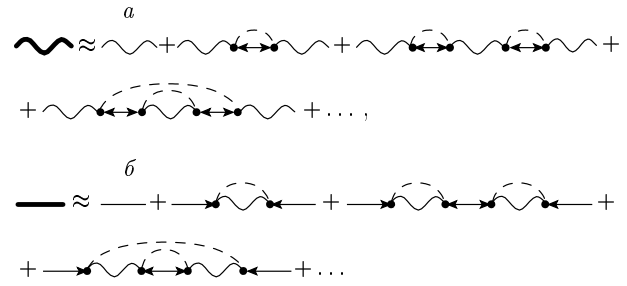


Рис. 6. Диаграммные представления приближенных функций  $\overline{G}_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  (а) и  $\overline{G}_u(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  (б)

Здесь представление спинового оператора (74) формально соответствует ПНК для локальных членов гамильтониана (52), а представление упругого оператора (75) соответствует ПНК для нелокальных членов (69). Подставив уравнения (74) и (75) соответственно в уравнения Дайсона (34) и (35), получаем замкнутую систему нелинейных интегродифференциальных уравнений ПНК для функций  $\overline{G}_m$  и  $\overline{G}_u$ :

$$\overline{G}_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \approx G_m^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \gamma^2 \iint G_m^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') K(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \times \frac{\partial^2 \overline{G}_u(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')}{\partial z' \partial z''} \overline{G}_m(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'', \quad (76)$$

$$\overline{G}_u(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \approx G_u^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \gamma^2 \iint \frac{\partial G_u^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial z'} K(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \overline{G}_m(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \times \frac{\partial \overline{G}_u(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_0)}{\partial z''} d\mathbf{x}' d\mathbf{x}''. \quad (77)$$

Последовательными итерациями этих уравнений получаем ряды функций  $\overline{G}_m$  и  $\overline{G}_u$ , которые в диаграммном представлении показаны на рис. 6. Сравнение этих диаграмм с диаграммами для точных функций Грина (см. рис. 2) показывает, что в уравнениях (76) и (77) отсутствуют все члены с перекрещивающимися линиями корреляций. Таким образом, представление массовых операторов в форме (74) и (75) и следующая из этого представления система замкнутых интегродифференциальных уравнений (76) и (77) действительно соответствуют схеме ПНК для двух стохастически взаимодействующих волновых полей — спинового и упругого.

Система уравнений (76) и (77) в  $\mathbf{k}$ -пространстве имеет вид

$$\overline{G}_m(\mathbf{k}) \approx G_m^0(\mathbf{k}) + \gamma^2 (2\pi)^{2d} G_m^0(\mathbf{k}) \overline{G}_m(\mathbf{k}) \times \int k_{1z}^2 S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \overline{G}_u(\mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1, \quad (78)$$

$$\overline{G}_u(\mathbf{k}) \approx G_u^0(\mathbf{k}) + \gamma^2 k_z^2 (2\pi)^{2d} G_u^0(\mathbf{k}) \overline{G}_u(\mathbf{k}) \times \int S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \overline{G}_m(\mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1. \quad (79)$$

Видно, что полученная система замкнутых уравнений ПНК слишком сложна для анализа как в  $\mathbf{r}$ -пространстве, (76) и (77), так и в  $\mathbf{k}$ -пространстве, (78) и (79). Поэтому мы переходим к другому представлению этой системы, соответствующему уравнениям (55), (56), (70) и (71) для случаев одного волнового поля. Для этого проводим преобразование Фурье уравнений (74) и (75):

$$Q_m(\mathbf{k}) = \gamma^2 \int \overline{G}_m(\mathbf{k}_1) S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1, \quad (80)$$

$$Q_u(\mathbf{k}) = \gamma^2 \int k_{1z}^2 \overline{G}_u(\mathbf{k}_1) S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1. \quad (81)$$

Подставляя в уравнения (80) и (81) точные выражения для функций Грина  $\overline{G}_m(\mathbf{k})$  и  $\overline{G}_u(\mathbf{k})$ , определяемые уравнениями (43) и (44), получаем систему связанных приближенных интегральных уравнений для массовых операторов в  $\mathbf{k}$ -пространстве:

$$Q_m(\mathbf{k}) = \frac{\gamma^2}{(2\pi)^d} \int \frac{S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1}{\nu_m - k_1^2 - (2\pi)^d Q_u(\mathbf{k}_1)}, \quad (82)$$

$$Q_u(\mathbf{k}) = \frac{\gamma^2}{(2\pi)^d} \int \frac{k_{1z}^2 S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1}{\nu_u - k_1^2 - (2\pi)^d k_{1z}^2 Q_m(\mathbf{k}_1)}. \quad (83)$$

Вводя обозначения

$$M_{\mathbf{k}} = (2\pi)^d k_z^2 Q_m(\mathbf{k}), \quad U_{\mathbf{k}} = (2\pi)^d Q_u(\mathbf{k}), \quad (84)$$

можно придать выражениям для функций Грина (43) и (44), а также уравнениям самосогласования (82) и (83) окончательный более компактный и простой вид:

$$\overline{G}_m(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{\nu_m - k^2 - U_{\mathbf{k}}}, \quad (85)$$

$$\overline{G}_u(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{\nu_u - k^2 - M_{\mathbf{k}}}, \quad (86)$$

$$M_{\mathbf{k}} = \gamma^2 k_z^2 \int \frac{S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1}{\nu_m - k_1^2 - U_{\mathbf{k}_1}}, \quad (87)$$

$$U_{\mathbf{k}} = \gamma^2 \int \frac{k_{1z}^2 S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1}{\nu_u - k_1^2 - M_{\mathbf{k}_1}}. \quad (88)$$

Система уравнений (85)–(88) является обобщением ПНК для случая двух волновых полей различной физической природы, связанных неоднородным параметром взаимодействия с нулевым средним значением. В дальнейшем будем использовать уравнения ПНК именно в форме (85)–(88), называя для простоты  $M_{\mathbf{k}}$  и  $U_{\mathbf{k}}$  соответственно спиновым и упругим массовыми операторами. Это не приведет к недоразумениям, так как в самосогласованной схеме уравнений (85)–(88) истинные массовые операторы  $Q_m(\mathbf{k})$  и  $Q_u(\mathbf{k})$  не используются.

#### 4. ИНДУЦИРОВАННЫЙ БЕСПОРЯДКОМ КРОССИНГ-РЕЗОНАНС

В этом разделе мы применяем ПНК, обобщенное в разд. 3, для исследования явлений, возникающих в точке пересечения дисперсионных кривых двух волновых полей, связанных неоднородным параметром с нулевым средним значением.

Рассмотрим одномерную модель. Тогда в системе уравнений (85)–(88)  $d = 1$  и вектор  $\mathbf{k}$  имеет одну компоненту  $k_z = k$ . Для анализа уравнений самосогласования (87) и (88) представим их в нескольких формах. Подставляя первое уравнение в правую часть второго и наоборот, получаем два независимых нелинейных интегральных уравнения для массовых операторов  $M_k$  и  $U_k$ :

$$M_k = \gamma^2 k^2 \int \frac{S(k - k_1) dk_1}{\nu_m - k_1^2 - \gamma^2 \int \frac{k_2^2 S(k_1 - k_2) dk_2}{\nu_u - k_2^2 - M_{k_2}}}, \quad (89)$$

$$U_k = \gamma^2 \int \frac{k_1^2 S(k - k_1) dk_1}{\nu_u - k_1^2 - \gamma^2 k_1^2 \int \frac{S(k_1 - k_2) dk_2}{\nu_m - k_2^2 - U_{k_2}}}. \quad (90)$$

Последовательной итерацией каждого из этих уравнений получаем представление  $M_k$  и  $U_k$  в виде бесконечных цепных дробей:

$$M_k = \gamma^2 k^2 \int \frac{S(k - k_1) dk_1}{\nu_m - k_1^2 - \gamma^2 \int \frac{k_2^2 S(k_1 - k_2) dk_2}{\nu_u - k_2^2 - \gamma^2 k_2^2 \int \frac{S(k_2 - k_3) dk_3}{\nu_m - k_3^2 - \gamma^2 \int \dots}}}, \quad (91)$$

$$U_k = \gamma^2 \int \frac{k_1^2 S(k - k_1) dk_1}{\nu_u - k_1^2 - \gamma^2 k_1^2 \int \frac{S(k_1 - k_2) dk_2}{\nu_m - k_2^2 - \gamma^2 \int \frac{k_3^2 S(k_2 - k_3) dk_3}{\nu_u - k_3^2 - \gamma^2 k^2 \int \dots}}. \quad (92)$$

Для численного анализа удобно записать уравнения (87) и (88) в виде рекуррентных формул

$$M_k^{(n)} = \gamma^2 k^2 \int \frac{S(k - k_1) dk_1}{\nu_m - k_1^2 - U_{k_1}^{(n-1)}}, \quad (93)$$

$$U_k^{(n)} = \gamma^2 \int \frac{k_1^2 S(k - k_1) dk_1}{\nu_u - k_1^2 - M_{k_1}^{(n-1)}}, \quad (94)$$

где индекс « $n$ » соответствует числу учтенных звеньев цепных дробей (91) и (92).

Моделируя корреляционные свойства случайной функции  $\rho(x)$  экспоненциальной корреляционной функцией, получаем в одномерном случае для  $K(r)$  и  $S(k)$  выражения

$$K(r) = \exp(-k_c r), \quad S(k) = \frac{1}{\pi} \frac{k_c}{k_c^2 + k^2}, \quad (95)$$

где  $r = |x - x'|$ ,  $k_c$  — корреляционное волновое число неоднородностей ( $r_c = k_c^{-1}$  — корреляционный радиус). Для начала ограничимся первым звеном цепной дроби, положив  $n = 1$  в уравнениях (93) и (94). Тогда эти уравнения примут вид, соответствующий приближению Бурре [8]:

$$M_k^{(1)} = \gamma^2 k^2 \int \frac{S(k - k_1) dk_1}{\nu_m - k_1^2}, \quad (96)$$

$$U_k^{(1)} = \gamma^2 \int \frac{k_1^2 S(k - k_1) dk_1}{\nu_u - k_1^2}. \quad (97)$$

Подставляя  $S(k)$  в форме (95) и выполняя интегрирование с помощью теории вычетов, получим  $M_k$  и  $U_k$  в первом приближении:

$$M_k^{(1)} = \gamma^2 k^2 \frac{1}{(\sqrt{\nu_m} - ik_c)^2 - k^2} \left( 1 - \frac{ik_c}{\sqrt{\nu_m}} \right), \quad (98)$$

$$U_k^{(1)} = \gamma^2 \frac{k^2 + ik_c \sqrt{\nu_u} + k_c^2}{(\sqrt{\nu_u} - ik_c)^2 - k^2}. \quad (99)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (85) и (86), получаем функции Грина  $G_m^{(1)}$  и  $G_u^{(1)}$  в первом приближении. На рис. 7 показаны зависимости мнимых частей этих функций Грина в точке кроссинг-резонанса  $k = k_r$  от частоты  $\omega$  и корреляционного волнового числа  $k_c$  (на графиках приведены безразмерные величины  $\eta G_m$  и  $\eta G_u$ , где  $\eta = \gamma k_r$ ).

Из равенства нулю знаменателей функций  $G_m^{(1)}$  и  $G_u^{(1)}$  получаем уравнения первого приближения для частот собственных колебаний  $\nu_m$  и  $\nu_u$ :

$$(\nu_u - k^2) [(\sqrt{\nu_m} - ik_c)^2 - k^2] - \gamma^2 k^2 (1 - ik_c/\sqrt{\nu_m}) = 0, \quad (100)$$

$$(\nu_m - k^2) [(\sqrt{\nu_u} - ik_c)^2 - k^2] - \gamma^2 (k^2 + ik_c \sqrt{\nu_u} + k_c^2) = 0. \quad (101)$$

Именно такие (и подобные им) уравнения исследовались в работах [10, 12–14]. При  $k_c = 0$  уравнения (100) и (101) совпадают друг с другом и приводят к снятию вырождения и появлению щели в спектре в точке пересечения исходных дисперсионных кривых. Ширина этой щели определяется выражением

$$\Lambda = \zeta \sqrt{2\omega_M \omega_r}, \quad (102)$$

где  $\zeta = (\Delta\varepsilon)M/\sqrt{\mu}$ ,  $\omega_M = gM$ ,  $\omega_r$  — частота, соответствующая пересечению дисперсионных кривых невозмущенных спиновых и упругих волн. При  $k_c \neq 0$  появляется затухание, различное для спиновых и упругих волн,

$$\omega_m'' = 2\sqrt{(\omega_r - \omega_0)\omega_M \alpha k_c^2}, \quad (103)$$

$$\omega_u'' = \nu_u k_c, \quad (104)$$

и ширины щелей в спектре спиновых и упругих волн начинают различаться:

$$\Delta_m = \sqrt{\Lambda^2 - \omega_m''^2}, \quad \Delta_u = \sqrt{\Lambda^2 - \omega_u''^2}. \quad (105)$$

При малых  $k_c$  затухания  $\omega_m''$ ,  $\omega_u'' < \Lambda$  (открытая щель) и картина напоминает магнитоупругий резонанс, который возникает под действием неслучайного параметра связи в однородной среде. Различие заключается в том, что ширина щели в нашем случае определяется не величиной этого параметра связи (которая в среднем равна нулю), а его среднеквадратичной флуктуацией. С ростом  $k_c$  частоты затухания  $\omega_m''$  и  $\omega_u''$  возрастают, а ширины щелей  $\Delta_m$  и  $\Delta_u$  убывают. Наличие разных дисперсионных уравнений (100) и (101) для спиновых и упругих волн и различия в зависимостях  $\Delta_m$  и  $\Delta_u$  от  $k_c$  объяснялись в работах [10, 12–14] тем, что уравнение (100) описывает взаимодействие когерентных спиновых волн с флуктуационными упругими волнами, а уравнение (101) — взаимодействие когерентных упругих волн с флуктуационными спиновыми.

Покажем теперь, что все эти эффекты не имеют отношения к действительности и являются следствием использованного в работах [10, 12–14] приближения Бурре [8]. Рассмотрим последовательно вид мнимых частей функций Грина  $G_m''(\omega)$  и  $G_u''(\omega)$  в первом, втором и третьем приближениях для малого значения  $k_c$ , соответствующего  $u_c \equiv k_c/\sqrt{\eta} = 5 \cdot 10^{-2}$ . При численном расчете каждого следующего приближения  $n$  в подынтегральное выражение рекуррентной формулы (93) для спинового массового оператора  $M_k^{(n)}$  подставляется предыдущее приближение для упругого массового оператора  $U_k^{(n-1)}$ , а в подынтегральное выражение (94) для  $U_k^{(n)}$  — предыдущее выражение для  $M_k^{(n-1)}$ . Первые приближения (приближения Бурре) приводят к выражениям для  $G_m^{(1)}(\omega)$  и  $G_u^{(1)}(\omega)$ , показанным на рис. 8 штриховыми кривыми, которые имеют вид двух пиков, расположенных в точках

$$\omega \approx \omega_r \pm \Lambda/2. \quad (106)$$

Однако уже следующее ( $n = 2$ ) приближение разрушает эту картину. Соответствующие ему функции  $G_m^{(2)}(\omega)$  и  $G_u^{(2)}(\omega)$  показаны на рис. 8 пунктирными кривыми. Эти функции имеют по три пика и уже ничем не напоминают кроссинг-резонанс в однородной среде. При учете следующего звена в цепных дробях функции  $G_m^{(3)}(\omega)$  и  $G_u^{(3)}(\omega)$  имеют по четыре максимума (штрихпунктирные кривые на рис. 8).

Прервем временно процесс получения последовательных приближений и рассмотрим предел  $k_c \rightarrow 0$ , соответствующий модели независимых зерен в поликристалле со случайными значениями параметра магнитострикции в каждом зерне. В этом случае

$$S(k_i - k_j) \rightarrow \delta(k_i - k_j), \quad (107)$$

где  $\delta(k)$  — функция Дирака, и все интегралы в уравнениях (89)–(94) вычисляются точно. Система уравнений (89) и (90) или (93) и (94) сводится к квадратичным по  $M_k$  или  $U_k$  уравнениям. Подставляя решения этих уравнений в (85) и (86), получаем точные выражения для функций Грина в случае  $k_c = 0$  в виде

$$G_m(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{x - i\sqrt{4\gamma^2 k^2 \frac{x}{y} - x^2}}, \quad (108)$$

$$G_u(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{y - i\sqrt{4\gamma^2 k^2 \frac{y}{x} - y^2}}, \quad (109)$$

где  $x = \nu_m - k^2$ ,  $y = \nu_u - k^2$ . Из равенства нулю знаменателей этих функций получаем дисперсионные законы для действительных частот спиновых и

упругих волн, которые совпадают с исходными дисперсионными законами:

$$\nu_m = k^2, \quad \nu_u = k^2. \quad (110)$$

Мнимые части частот отсутствуют, так как затухание, обусловленное неоднородностями, возникает только при  $k_c \neq 0$ . Однако динамические восприимчивости (108) и (109) имеют и действительные, и мнимые части. Домножая числители и знаменатели выражений (108) и (109) на комплексно-сопряженные величины, получаем

$$G_m(\omega) = \frac{1}{4\pi\gamma^2 k^2} \frac{y}{x} \left( x + i\sqrt{4\gamma^2 k^2 \frac{x}{y} - x^2} \right), \quad (111)$$

$$G_u(\omega) = \frac{1}{4\pi\gamma^2 k^2} \frac{x}{y} \left( y + i\sqrt{4\gamma^2 k^2 \frac{y}{x} - y^2} \right). \quad (112)$$

Перейдем в этих выражениях от нормированных частот к  $\omega$ :

$$x = \frac{\omega - \omega_m(k)}{\alpha g M}, \quad y = \frac{\omega^2 - \omega_u^2(k)}{v_u^2}, \quad (113)$$

где  $\omega_m(k) = \omega_0 + \alpha g M k^2$ ,  $\omega_u(k) = v_u k$ . Рассмотрим выражения (111) и (112) при  $k = k_r$ . Тогда  $\omega_m(k_r) = \omega_u(k_r) = \omega_r$  и выражения (111) и (112) после соответствующих алгебраических преобразований принимают вид

$$G_m(\omega) = \alpha \frac{\omega + \omega_r}{4\pi\zeta^2 \omega_r^2} \times \left[ \omega - \omega_r + i\sqrt{4\zeta^2 \frac{\omega_M \omega_r^2}{\omega + \omega_r} - (\omega - \omega_r)^2} \right], \quad (114)$$

$$G_u(\omega) = \frac{1}{4\pi\zeta^2 \omega_M k_r^2} \times \left[ \omega - \omega_r + i\sqrt{4\zeta^2 \frac{\omega_M \omega_r^2}{\omega + \omega_r} - (\omega - \omega_r)^2} \right]. \quad (115)$$

Соответствующие этим выражениям действительные и мнимые части функций Грина показаны на рис. 8 тонкими сплошными кривыми. Видно, что  $G_m''(\omega)$  и  $G_u''(\omega)$  для  $k_c = 0$  имеют вид широких одномодовых пиков, ширина которых примерно равна  $\Lambda$ . Поскольку затухание в системе отсутствует, ширина пика полностью определяется стохастическим распределением частот  $\delta$ -образных пиков, формирующих этот широкий пик.

Из выражений (114) и (115) следует, что отношение амплитуд этих широких пиков при  $\omega = \omega_r$  определяется выражением

$$G_m''(\omega_r)/G_u''(\omega_r) = v_m/v_u, \quad (116)$$

где  $v_m = 2\alpha g M k_r$  — скорость спиновых волн при  $k = k_r$ . В точке первого пересечения дисперсионных

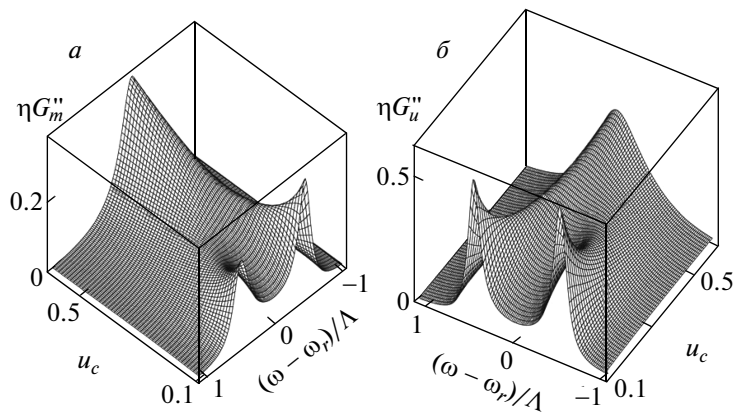


Рис. 7. Зависимости мнимых частей функций Грина первого приближения  $G_m^{(1)}(\omega)$  и  $G_u^{(1)}(\omega)$  при  $k = k_r$  от нормированного корреляционного волнового числа неоднородностей  $u_c = k_c/\sqrt{\eta}$

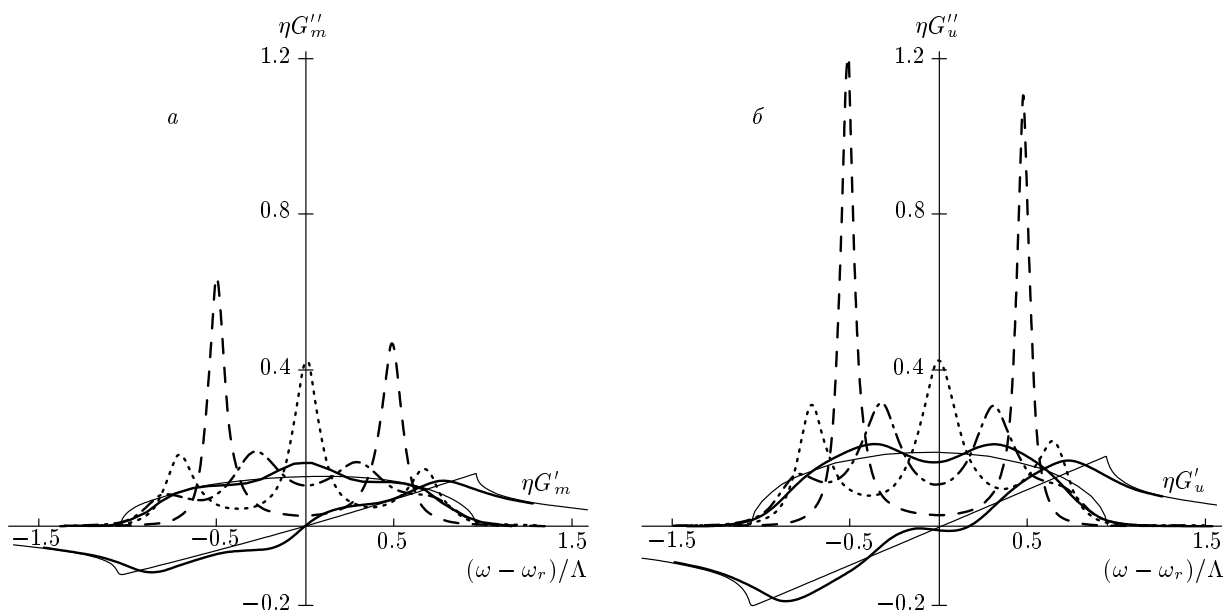
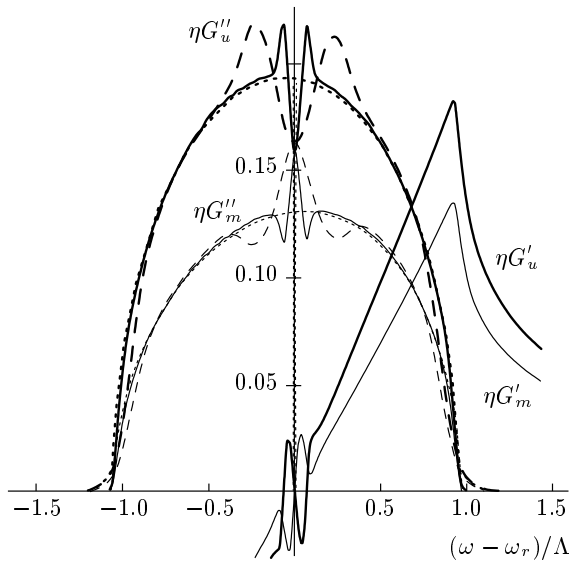


Рис. 8. Мнимые части функций Грина спиновых  $G_m''(\omega)$  (а) и упругих  $G_u''(\omega)$  (б) волн при  $k = k_r$  для  $u_c = 5 \cdot 10^{-2}$ , вычисленные в различных приближениях:  $n = 1$ , приближение Бурре (штриховые кривые),  $n = 2$  (пунктирные),  $n = 3$  (штрихпунктирные),  $n \rightarrow \infty$  (толстые сплошные кривые), а также точные решения (114) и (115) для  $u_c = 0$  (тонкие сплошные кривые). Для  $n \rightarrow \infty$  точных решений приведены также действительные части функций Грина  $G_m'(\omega)$  и  $G_u'(\omega)$

кривых спиновых и упругих волн всегда выполняется неравенство  $v_m < v_u$ , а в точке второго пересечения —  $v_m > v_u$ .

Вернемся теперь к прерванному процессу получения последовательных приближений для функций Грина  $G_m''(\omega)$  и  $G_u''(\omega)$  при  $k_c \neq 0$ . С ростом  $n$  число пиков на графиках функций  $G_m''(\omega)$  и  $G_u''(\omega)$  возрастает как  $n + 1$ , а амплитуда пиков уменьшается. Площадь под каждой кривой  $G_m''(\omega)$  и  $G_u''(\omega)$  при этом сохраняется, и эти кривые приближаются

к своим предельным значениям, соответствующим точным решениям интегральных уравнений (89) и (90) (рис. 8, сплошные толстые кривые). Как видно из этого рисунка, кривые, соответствующие малому значению  $k_c$  ( $u_c = 5 \cdot 10^{-2}$ ), мало отличаются от кривых для  $k_c = 0$  (тонкие сплошные линии на том же рисунке) и не имеют ничего общего с вычисленными в приближении Бурре для того же значения  $u_c$  (штриховые кривые). Вместо снятия вырождения и появления двух пиков на расстоянии  $\Lambda$  на каждой из



**Рис. 9.** Функции Грина спиновых  $G_m''(\omega)$  и  $G_u''(\omega)$  (тонкие кривые) и упругих  $G_u''(\omega)$  и  $G_m''(\omega)$  (толстые кривые) волн при  $u_c = 1.6 \cdot 10^{-2}$  (штриховые кривые), при  $u_c = 1.6 \cdot 10^{-3}$  (сплошные кривые) и точные решения (108) и (109) при  $u_c = 0$  (пунктирные кривые)

функций  $G_m''(\omega)$  и  $G_u''(\omega)$  наблюдается широкий одномодовый пик шириной  $\Lambda$ . Однако вершины этих пиков не являются гладкими: своеобразная тонкая структура возникает на вершине каждого из них. Для  $G_m''(\omega)$  эта структура имеет вид узкого (по сравнению с  $\Lambda$ ) резонанса, а для  $G_u''(\omega)$  структура имеет вид узкого антирезонанса. Соответствующая этим образованиям тонкая структура проявляется и на кривых  $G_m'(\omega)$  и  $G_u'(\omega)$ , которые также приведены на рис. 8.

Ниже мы изучаем свойства функций  $G_m''(\omega)$  и  $G_u''(\omega)$  более детально. На всех последующих рисунках этой работы приводится вид функций Грина, соответствующий значению  $n$ , обеспечивающему сходимость процесса последовательных приближений. Это значение  $n$  зависит от выбранных параметров системы, главным образом от значения  $k_c$ . Для больших  $k_c$  может быть достаточно нескольких значений  $n$ , для малых  $k_c$  требуется выполнить десятки и даже сотни последовательных численных интегрирований рекуррентных соотношений (93) и (94).

На рис. 9 обе функции,  $G_m(\omega)$  (тонкие кривые) и  $G_u(\omega)$  (толстые кривые) показаны в одном масштабе для трех значений  $u_c$ . Видно, что эти характеристики тонкой структуры более чувствительны к изменению корреляционного волнового числа неоднород-

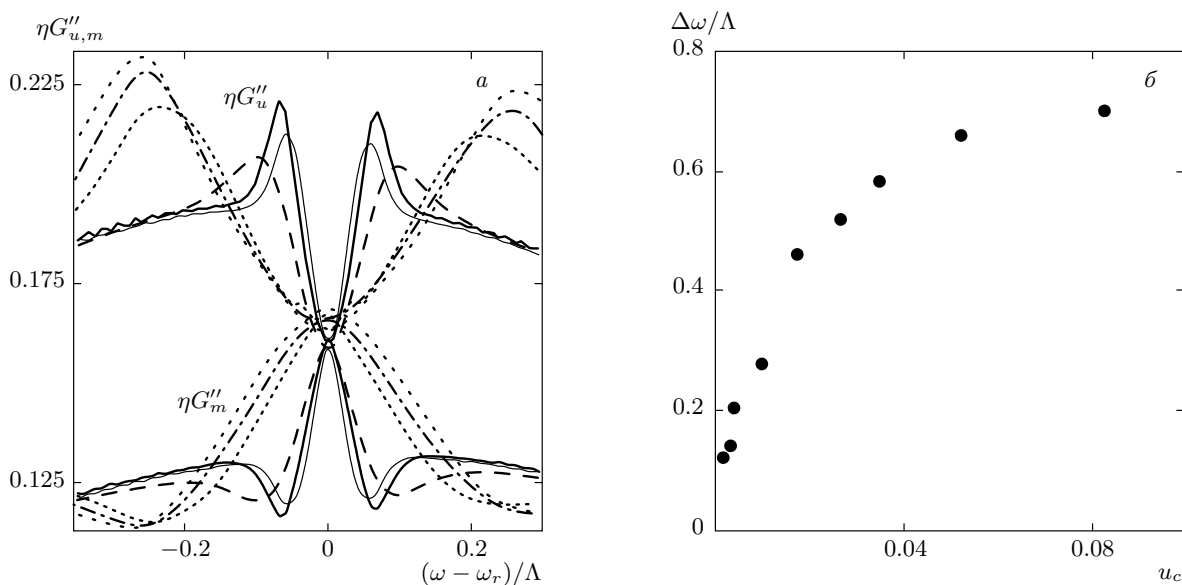
ностей  $k_c$ , чем характеристики широких пиков. При малых  $k_c$  увеличение  $k_c$  на порядок практически не изменяет ширины широкого пика. В то же время ширина узкого резонанса на кривой  $G_m''(\omega)$ , как и антирезонанса на кривой  $G_u''(\omega)$  возрастает в несколько раз.

Зависимость этой тонкой структуры от корреляционного волнового числа исследована более детально на рис. 10. Как видно из рис. 10а, резонансный и антирезонансный пики для малых  $k_c$  ( $u_c \sim 10^{-3} - 10^{-2}$ ) имеют приближенную зеркальную симметрию (амплитуда резонанса несколько меньше амплитуды антирезонанса). Ширины резонанса и антирезонанса примерно равны друг другу и возрастают с ростом  $k_c$  (рис. 10б). Дальнейший рост  $k_c$  (рис. 11) приводит к существенному изменению формы и сужению ширины основного широкого пика. Это обусловлено эффектом обменного сужения линий магнитного резонанса, который в рамках ПНК был исследован для ферромагнитного и спин-волнового резонансов в работах [21, 32]. Как видно из рис. 11, увеличение  $k_c$  приводит к противоположным эффектам для широких пиков и для пиков тонкой структуры. Первые сужаются, а последние уширяются и затем исчезают. Сначала тонкая структура исчезает на вершине функции  $G_m''(\omega)$ , затем на вершине функции  $G_u''(\omega)$ .

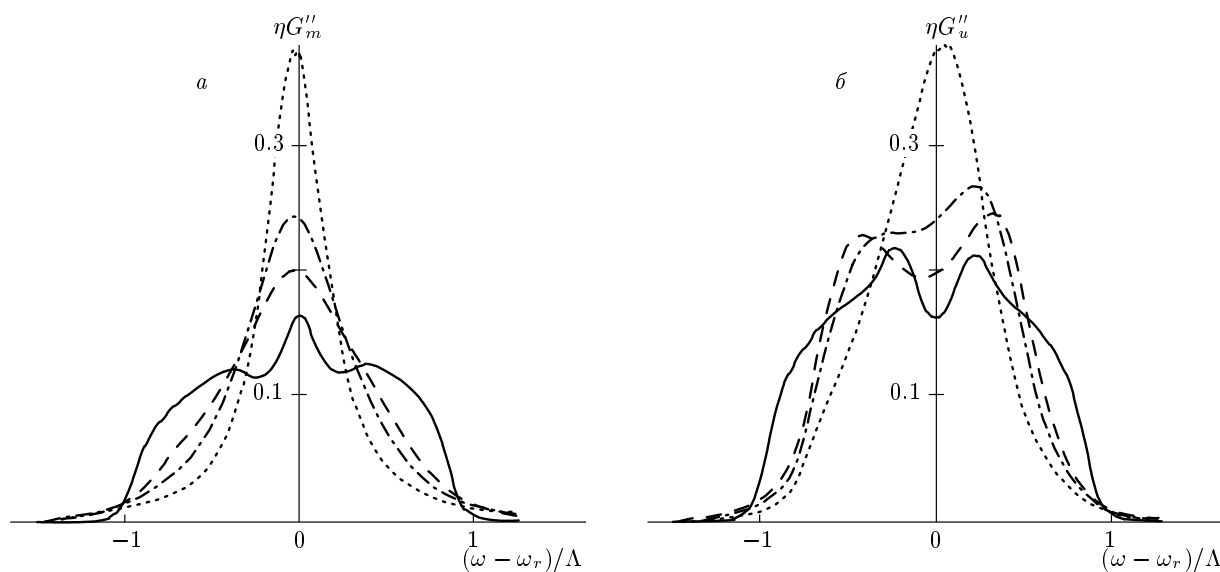
До сих пор мы рассматривали эффекты, которые возникают в точке первого пересечения дисперсионных кривых спиновых и упругих волн,  $k = k_r$ . В этой точке  $v_m < v_u$  и, согласно формуле (116),  $G_m''(\omega_r) < G_u''(\omega_r)$  при  $k_c = 0$ . В окрестности второй точки пересечения дисперсионных кривых,  $k = k_{r'}$ , выполняется противоположное неравенство  $v_m > v_u$  и, соответственно, при  $k_c = 0$  имеем  $G_m''(\omega_{r'}) > G_u''(\omega_{r'})$ . В этом случае вид тонкой структуры на вершинах широких пиков функций  $G_m''(\omega)$  и  $G_u''(\omega)$  изменяется на противоположный: узкий резонанс теперь возникает на функции  $G_u''(\omega)$ , а узкий антирезонанс — на функции  $G_m''(\omega)$ . Аналогичным образом изменяется все рис. 8–11. Неизменной для обоих неравенств,  $v_m < v_u$  и  $v_m > v_u$ , является общая закономерность: при  $k_c \neq 0$  и  $\omega = \omega_r$  точки максимума резонанса тонкой структуры одной функции Грина и минимума антирезонанса другой функции Грина совпадают между собой и выполняется равенство

$$G_m''(\omega_r) = G_u''(\omega_r). \quad (117)$$

Как видно из рис. 11, это требование выполняется даже в том случае, когда тонкая структура исчезает. Естественным является предположение, что эта закономерность есть следствие общего закона о



**Рис. 10.** а) Резонансный и антирезонансный пики тонкой структуры на вершинах широких пиков функций соответственно  $G''_m(\omega)$  и  $G''_u(\omega)$  для различных величин корреляционного волнового числа  $u_c = 0.8 \cdot 10^{-3}$  (тонкие сплошные кривые),  $1.6 \cdot 10^{-3}$  (толстые сплошные кривые),  $2.5 \cdot 10^{-3}$  (штриховые кривые),  $1.6 \cdot 10^{-2}$  (пунктирные кривые),  $2.5 \cdot 10^{-2}$  (штрихпунктирные кривые),  $3.3 \cdot 10^{-2}$  (редкий пунктир). б) Зависимость ширины  $\Delta\omega/\Lambda$  пиков тонкой структуры от величины  $u_c$



**Рис. 11.** Мнимые части функции Грина спиновых  $G''_m(\omega)$  (а) и упругих  $G''_u(\omega)$  (б) волн при  $u_c = 1.6 \cdot 10^{-2}$  (сплошные кривые),  $1.6 \cdot 10^{-1}$  (штриховые),  $2.5 \cdot 10^{-1}$  (штрихпунктирные),  $5 \cdot 10^{-1}$  (пунктирные)

равномерном распределении энергии колебаний по степеням свободы, в данном случае между спиновыми и упругими колебаниями, в точке пересечения дисперсионных кривых  $k = k_r, \omega = \omega_r$ . В случае  $k_c = 0$ , соответствующем модели независимых

зерен в поликристалле со случайным (и по величине, и по знаку) значением параметра связи в каждом зерне, тонкая структура отсутствует, и функции  $G''_m(\omega)$  и  $G''_u(\omega)$  при  $k = k_r$  представляют собой одномодовые пики шириной  $\Lambda$ . Для всех час-



тот в области существования этих пиков выполняется неравенство  $G_m''(\omega) < G_u''(\omega)$ . При появлении сколь угодно малого  $k_c \neq 0$  возникает взаимодействие между зернами и в точке пересечения дисперсионных кривых должен выполняться закон равновероятного распределения энергии, из которого следует равенство  $G_m''(\omega_r) = G_u''(\omega_r)$ . Как преобразуются функции Грина для подчинения этому закону? Функция  $G_m''(\omega)$  выпускает тонкое «щупальце» (резонанс тонкой структуры) в точке  $\omega = \omega_r$  вверх, функция  $G_u''(\omega)$  опускает такое же щупальце (антирезонанс тонкой структуры) в этой же точке вниз. Эти щупальца соприкасаются приблизительно на середине расстояния между максимумами широких пиков обеих функций, и требуемое равенство выполняется в точке  $\omega = \omega_r$ . При этом для всех других значений частоты, кроме  $\omega = \omega_r$ , по-прежнему остается справедливым неравенство  $G_m''(\omega) < G_u''(\omega)$ .

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы динамические восприимчивости (функции Грина) системы двух взаимодействующих волновых полей различной физической природы со стохастически неоднородным параметром связи, среднее значение которого равно нулю. Исследование проведено на примере спиновых и упругих волн в ферромагнетике с неоднородным параметром магнитострикции. Рассмотрена модельная задача, в которой учитываются только поперечные упругие колебания.

Получена система уравнений Дайсона и ряды для усредненных функций Грина спиновых,  $\overline{G}_m$ , и упругих,  $\overline{G}_u$ , волн. Главной особенностью системы уравнений Дайсона является то, что упругий массовый оператор  $Q_u$  входит в уравнение для спиновой функции Грина  $\overline{G}_m$ , а спиновый массовый оператор  $Q_m$  — в уравнение для упругой функции Грина  $\overline{G}_u$ . Главной особенностью рядов для функций Грина  $\overline{G}_m$  и  $\overline{G}_u$  является то, что в каждом члене ряда происходит чередование исходных функций Грина  $G_m^0$  и производных исходных функций Грина  $G_u^0$ . Ряд для  $\overline{G}_m$  содержит произведения чередующихся исходных спиновых функций Грина и вторых производных исходных упругих функций Грина. Ряд для  $\overline{G}_u$  содержит произведения чередующихся первых производных исходных упругих функций Грина и исходных спиновых функций Грина.

Самосогласованное приближение, учитывающее все диаграммы с непересекающимися линиями корреляций/взаимодействий в разложении функции

Грина (ПНК в терминологии данной работы), которое известно как приближение Мигдала (или самосогласованное борновское приближение в теории конденсированных сред и приближение Крейчнана в стохастической гидродинамике и радиофизике), обобщено на случай двух взаимодействующих волновых полей разной физической природы со стохастически неоднородным параметром связи между этими полями, среднее значение которого равно нулю.

В рамках развитого метода исследован обусловленный беспорядком кроссинг-резонанс, возникающий на пересечении дисперсионных кривых спиновых и упругих волн. Система интегральных уравнений для спинового и упругого массовых операторов решена численно для случая одномерных неоднородностей параметра связи. Учет процессов многократного рассеяния волн на неоднородностях привел к результатам, существенно отличным от тех, которые были получены для такой ситуации ранее [10, 12–14] в приближении Бурре. Вместо снятия вырождения частот в спектре волн и раздвоения резонансных пиков динамических восприимчивостей, в точке пересечения невозмущенных дисперсионных законов на каждой из функций  $G_m''$  и  $G_u''$  должен наблюдаться широкий одномодовый пик, на вершине которого возникает тонкая структура в виде узких пиков резонанса и антирезонанса соответственно на функциях Грина  $G_m''$  и  $G_u''$ . Показано, что при малых значениях корреляционного волнового числа  $k_c$  неоднородностей ширина широких пиков определяется величиной среднеквадратичной флуктуации  $\Delta\epsilon$  параметра связи, а ширина узких пиков резонанса и антирезонанса — величиной  $k_c$ . Это позволит измерять независимо обе эти главные характеристики неоднородностей. С ростом  $k_c$  происходят резкое обменное сужение широкого пика и рост ширин резонансного и антирезонансного узких пиков, что приводит к их постепенному исчезновению.

Свойства пиков тонкой структуры можно объяснить исходя из предположения, что она является следствием закона равномерного распределения энергии между спиновыми и упругими колебаниями в точке пересечения дисперсионных кривых  $k = k_r$ ,  $\omega = \omega_r$ .

Исследование в данной работе проводилось для обусловленного беспорядком кроссинг-резонанса спиновых и упругих волн. Для кроссинг-резонанса волн или квазичастиц другой природы (например, оптических и акустических фононов) конкретные соотношения будут иметь другую форму. Однако общий вид динамических восприимчивостей должен остаться неизменным: тонкая резонансная

структура на фоне широкого пика восприимчивости одного волнового поля и тонкая антирезонансная структура на фоне широкого пика восприимчивости другого волнового поля; резкая зависимость пиков тонкой структуры от  $k_c$  для малых значений  $k_c$ ; равенство мнимых частей восприимчивостей обоих волновых полей в точке пересечения дисперсионных кривых  $k = k_r$ ,  $\omega = \omega_r$ .

Экспериментальное обнаружение предсказанных эффектов представляло бы наибольший интерес для сред с малыми значениями  $k_c$  и достаточным превышением скорости волн одного поля над скоростью волн другого поля при  $k = k_r$ . Первое приводит к малым ширинам линий, а второе — к большим амплитудам пиков резонанса и антирезонанса тонкой структуры.

Работа выполнена при поддержке Программы № 24.29 Президиума РАН, гранта для молодых ученых фонда «Династия», Государственного контракта № 14.В37.21.0730 по Федеральной целевой программе и гранта СФУ темы Ф-10 по заданию Министерства образования и науки РФ. Авторы благодарны В. В. Валькову и А. Ф. Садрееву за полезные дискуссии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Ахиезер, *Тезисы докладов и выступлений на совещании по физике магнитных явлений*, Москва (Май, 23–31, 1956), Металлургиздат, Свердловск (1956).
2. Е. А. Туров, Ю. П. Ирхин, *ФММ* **3**, 15 (1956).
3. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, *ЖЭТФ* **35**, 228 (1958) (основной результат этой работы опубликован в [1]).
4. С. Kittel, *Phys. Rev.* **110**, 835 (1958).
5. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, М. И. Каганов, *УФН* **71**, 533 (1960).
6. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, *Спиновые волны*, Наука, Москва (1967).
7. В. В. Леманов, в сб.: *Физика магнитных диэлектриков*, под ред. Г. А. Смоленского, Наука, Ленинград (1975), с. 85.
8. R. C. Bourret, *Nuovo Cim.* **26**, 1 (1962).
9. С. М. Рытов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, *Введение в статистическую радиофизику (часть II: Случайные поля)*, Наука, Москва (1978).
10. V. A. Ignatchenko and L. I. Deich, *Phys. Rev. B* **50**, 16364 (1994).
11. G. Herzer, in *Handbook of Magnetic Materials*, ed. by K. H. J. Buschow (Elsevier Science B. V., 1997), Vol. 10.
12. Л. И. Дейч, В. А. Игнатченко, *ЖЭТФ* **107**, 842 (1995).
13. L. I. Deich and A. A. Lisyansky, *Phys. Lett. A* **220**, 125 (1996).
14. V. A. Ignatchenko, M. V. Erementchouk, A. A. Maradudin, and L. I. Deych, *Phys. Rev. B* **59**, 9185 (1999).
15. V. A. Ignatchenko and D. S. Polukhin, *Sol. St. Phenom.* **168–169**, 101 (2011).
16. V. A. Ignatchenko and D. S. Polukhin, *Sol. St. Phenom.* **190**, 51 (2012).
17. А. Б. Мигдал, *ЖЭТФ* **34**, 1438 (1958).
18. R. H. Kraichnan, *J. Math. Phys.* **2**, 124 (1961).
19. P. Soven, *Phys. Rev. B* **156**, 809 (1967).
20. D. W. Taylor, *Phys. Rev. B* **156**, 1017 (1967).
21. V. A. Ignatchenko and V. A. Felk, *Phys. Rev. B* **74**, 174415 (2006).
22. D. Pines, *The Many-Body Problem*, W. A. Benjamin, Inc., New York (1961).
23. D. Pines, in *Polarons and Excitons*, ed. by C. G. Kuper and G. D. Whitfield, Plenum Press, New York (1963), p. 155.
24. R. Puff and G. Whitfield, in *Polarons and Excitons*, ed. by C. G. Kuper and G. D. Whitfield, Plenum Press, New York (1963), p. 171.
25. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматгиз, Москва (1962).
26. Ю. А. Фирсов, *Поляртоны*, Наука, Москва (1975).
27. Н. В. Ткач, Р. Б. Фартушинский, *ЖЭТФ* **45**, 1284 (2003).
28. В. И. Кляцкин, *Стохастические уравнения*, т. 1, Физматлит, Москва (2008).
29. Н. А. Армад, В. Н. Секистов, *Изв. вузов, радиофизика* **23**, 555 (1980).
30. Н. Н. Зернов, *Изв. вузов, радиофизика* **25**, 520 (1982).
31. В. Н. Секистов, *Радиотехн. и электрон. вып.* **7**, 1262 (1983).

32. V. A. Ignatchenko and V. A. Felk, Phys. Rev. B **71**, 094417 (2005).
33. Н. Bruus and К. Flensberg, *Introduction to Many-Body Quantum Theory in Condensed Matter Physics*, Ørsted Laboratory, Niels Bohr Institute, Copenhagen (2002).
34. М. В. Садовский, *Диаграмматика. Лекции по избранным задачам теории конденсированного состояния*, Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург (2005).
35. E. Schlomann, J. Phys. Chem. Sol. **6**, 257 (1958).
36. B. Velický, S. Kirkpatrick, and H. Ehrenreich, Phys. Rev. **175**, 747 (1968).
37. F. Yonezawa and K. Morigaki, Suppl. Progr. Theor. Phys. **53**, 1017 (1973).
38. R. J. Elliott, J. A. Krumhansl, and P. L. Leath, Rev. Mod. Phys. **46**, 465 (1974).
39. G. Brown, V. Celli, M. Haller, A. Maradudin, and A. Marvin, Phys. Rev. B **31**, 4993 (1985).
40. И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур, *Введение в теорию неупорядоченных систем*, Наука, Москва (1982).
41. Дж. Займан, *Модели беспорядка*, Мир, Москва (1982).
42. E. N. Economou, *Green's Functions in Quantum Physics*, Springer-Verlag, Berlin (2006).