

# АНОМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА И СОСУЩЕСТВОВАНИЕ АНТИФЕРРОМАГНЕТИЗМА СО СВЕРХПРОВОДИМОСТЬЮ ВБЛИЗИ КВАНТОВОЙ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ В РЕДКОЗЕМЕЛЬНЫХ ИНТЕРМЕТАЛЛИДАХ

*В. В. Вальков<sup>a,b\*</sup>, А. О. Злотников<sup>a</sup>*

<sup>a</sup> *Институт физики им. Л. В. Киренского Сибирского отделения Российской академии наук  
660036, Красноярск, Россия*

<sup>b</sup> *Сибирский государственный аэрокосмический университет им. М. Ф. Решетнёва  
660014, Красноярск, Россия*

Статья написана по материалам доклада  
на 36-м Совещании по физике низких температур  
(Санкт-Петербург, 2–6 июля 2012 г.)

Изучены механизмы возникновения аномальных свойств, экспериментально наблюдаемых при переходе через квантовую критическую точку в редкоземельных интерметаллидах. Квантовые фазовые переходы в этих материалах индуцируются внешним давлением и проявляются как разрушение дальнего антиферромагнитного порядка при нулевой температуре. Подавление дальнего упорядочения сопровождается увеличением площади поверхности Ферми, а в окрестности квантовой критической точки происходит сильная ренормировка эффективной массы электронов. Показано, что такая ренормировка обусловлена перестройкой квазичастичной зоны, ответственной за формирование тяжелых фермионов. Установлено, что эти особенности сохраняются и в том случае, когда вблизи квантовой критической точки реализуется фаза сосуществования антиферромагнетизма и сверхпроводимости.

DOI: 10.7868/S0044451013050170

1. Разрушение дальнего порядка при квантовом фазовом переходе связано с возрастанием в системе квантовых флуктуаций, интенсивность которых управляется контрольным параметром (например, давлением) [1, 2]. В цериевых интерметаллидах приложение гидростатического давления при температурах ниже температуры Нееля подавляет дальний антиферромагнитный порядок, приводя к его резкому разрушению при квантовом фазовом переходе. При этом в окрестности квантовой критической точки наблюдается переход в сверхпроводящее состояние.

В последнее время особый интерес вызывает соединение  $\text{CeRhIn}_5$ , поскольку в нем реализуется однородная на микроскопических масштабах фаза сосуществования сверхпроводимости и антиферромагнетизма [3]. В формировании электронной

структуры этого соединения существенную роль играют ионы церия и коллективизированные  $f$ -состояния атомов индия [4]. Было показано, что между  $f$ -состояниями Ce и  $d$ -состояниями In реализуется гибридационное смешивание [5]. Эти факторы лежат в основе предположения о том, что для качественного описания особенностей низкоэнергетического спектра фермиевских возбуждений  $\text{CeRhIn}_5$  может быть выбрана периодическая модель Андерсона. При этом считается, что подсистема  $d$ -электронов является ответственной за формирование как антиферромагнитного упорядочения, так и куперовской неустойчивости.

Первый подход к проблеме квантовых критических точек связан с обобщением флуктуационной теории фазовых переходов для случая нулевых температур [6]. Было показано [7], что квантовые флуктуации могут вносить существенные поправки в термодинамические свойства коллективизированной электронной системы. Позднее для определения роли локализованных электронов в критической области

\*E-mail: vvv@iph.krasn.ru

было предложено представление о локальной квантовой критической точке [8]. При переходе из парамагнитной области через такую критическую точку наряду с появлением дальнего антиферромагнитного порядка происходит нарушение кондо-режима, индуцируемого за счет  $s$ - $d$ -связи между коллективизированными и локализованными электронами.

Переход через квантовую критическую точку в части тяжелофермионных систем сопровождается появлением аномальных свойств. Это относится, прежде всего, к эффективной массе электронов, зависимость которой от контрольного параметра демонстрирует расхожимость в области квантового фазового перехода. Кроме того, происходит увеличение поверхности Ферми [9]. Эти эффекты были обнаружены при исследовании зависимости частот осцилляций де Гааза–ван Альфена в  $\text{CeRhIn}_5$  от давления [10]. Дополнительная особенность связана с реализацией нефермижидкостного режима [11]. В частности, в соединении  $\text{CeRhIn}_5$  температурная зависимость электросопротивления в области, прилегающей к квантовой критической точке, становится почти линейной [12]. Такая зависимость реализуется, например, в рамках двухзонной модели [13].

Отклонения от фермижидкостного поведения не всегда связываются с близостью к квантовой критической точке. Так, например, в рамках феноменологической двухжидкостной модели [14] предполагается, что ниже температуры когерентности термодинамические характеристики определяются двумя вкладами. Первый вклад связан с возникновением тяжелофермионного когерентного состояния, обусловленного гибридизацией между локализованными электронами и электронами проводимости. Второй вклад характеризуется оставшимися в системе изолированными кондо-примесями, на которых происходит спин-флуктуационное рассеяние.

К настоящему времени обсуждаются несколько сценариев аномального поведения эффективной массы и сечения поверхности Ферми. Один из них связан с нарушением кондо-режима в локальной квантовой критической точке [9]. В соответствии с этим сценарием при нарушении кондо-режима поверхность Ферми образуется только коллективизированными электронами. Поэтому площадь поверхности Ферми уменьшается. Другой механизм связан с наличием сильных валентных флуктуаций [15].

В настоящей работе в рамках расширенной периодической модели Андерсона проанализирована возможность реализации фазы сосуществования антиферромагнетизма и сверхпроводимости в тяжелофермионных интерметаллидах и показано, что

в окрестности квантовой критической точки имеет место аномальное увеличение эффективной массы электронов. При этом квантовый фазовый переход сопровождается резким изменением поверхности Ферми.

**2.** Для описания аномального поведения квазичастичных характеристик, наблюдаемого вблизи границы реализации антиферромагнитного состояния в тяжелофермионных соединениях, рассмотрим модель Андерсона в атомном представлении [16, 17]. В гамильтониане такой системы выделим эффективное взаимодействие, ответственное за формирование дальнего антиферромагнитного порядка:

$$\hat{H}_{eff} = \hat{H}_{PAM} + \hat{H}_{exch} \quad (1)$$

Оператор  $\hat{H}_{PAM}$  представляет собой привычную запись гамильтониана периодической модели Андерсона в режиме сильных электронных корреляций:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{PAM} = & \sum_{m\sigma} (\epsilon_{m\sigma} - \mu) \hat{c}_{m\sigma}^\dagger \hat{c}_{m\sigma} + \sum_{ml\sigma} t_{ml} \hat{c}_{m\sigma}^\dagger \hat{c}_{l\sigma} + \\ & + \sum_{m\sigma} (\epsilon_{m\sigma} - \mu) \frac{\sigma}{m} \hat{c}_{m\sigma}^\dagger \hat{c}_{m\sigma} + \\ & + \sum_{ml\sigma} [ t_{ml} \hat{c}_{m\sigma}^\dagger \hat{c}_{l\sigma}^{0\sigma} + t_{ml}^* \hat{c}_{l\sigma}^{0\sigma} \hat{c}_{m\sigma} ] \quad (2) \end{aligned}$$

Здесь  $\hat{c}_{m\sigma}$  — фермиевские операторы, записанные в представлении Ванье,  $\epsilon_{m\sigma}$  — одноузловая энергия электронных состояний,  $t_{ml}$  — интеграл перескока. Затравочная энергия локализованных состояний обозначена посредством  $\epsilon_{m\sigma}$ ,  $\mu$  — химический потенциал системы,  $\hat{c}_{l\sigma}^{0\sigma}$  — квазифермиевские операторы Хаббарда. Интенсивность гибридизации волновых функций коллективизированных и локализованных электронов определяется матричными элементами  $t_{ml}$ .

Оператор  $\hat{H}_{exch}$  описывает взаимодействие между локализованными электронами:

$$\hat{H}_{exch} = \frac{1}{4} \sum_{ml\sigma} t_{ml} (\hat{c}_{m\sigma}^\dagger \hat{c}_{l\sigma}^\dagger - \hat{c}_{m\sigma} \hat{c}_{l\sigma}) \quad (3)$$

В периодической модели Андерсона такое взаимодействие возникает после учета высокоэнергетических гибридизационных процессов [18].

**3.** Для получения уравнений самосогласования воспользуемся методом неприводимых двухвременных температурных функций Грина [19] и техникой проецирования Цванцига–Мори. При описании антиферромагнитной фазы достаточно ограничиться двухподрешеточным набором базисных опе-

раторов (узлы принадлежат F-подрешетке, — G-подрешетке):

$$\begin{pmatrix} 0\sigma & 0\sigma \\ f & g & f\sigma & g\sigma \end{pmatrix} \quad (4)$$

Составляя уравнения движения для функций Грина по отмеченной методике и решая получающуюся систему уравнений, находим явные выражения для искоемых функций Грина:

$$\begin{aligned} \langle\langle p\sigma | \dagger_{p\sigma} \rangle\rangle_\omega &= \frac{\sigma p\sigma(\ )}{4(\ )} \\ \langle\langle p\sigma | \dagger_{p\sigma} \rangle\rangle_\omega &= \frac{p\sigma(\ )}{4(\ )} \end{aligned} \quad (5)$$

Первое выражение соответствует функции Грина для электронов в локализованной подсистеме. Второе — функции Грина для коллективизированных электронов. При этом использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} p\sigma(\ ) &= (\ - \bar{\sigma}) \left[ (\ - p)^2 - \Gamma_p^2 \right] - \\ &\quad - \bar{\sigma} (\ - p) \left( \frac{2}{p} + \frac{2}{p} \right) - 2 \bar{\sigma} \Gamma_p p p \\ p\sigma(\ ) &= (\ - \sigma) (\ - \bar{\sigma}) (\ - p) - \\ &\quad - \bar{\sigma} (\ - \sigma) \frac{2}{p} - \sigma (\ - \bar{\sigma}) \frac{2}{p} \end{aligned} \quad (6)$$

Дисперсионное уравнение, определяющее энергетический спектр системы, получается приравнением к нулю знаменателя найденных функций Грина:

$$\begin{aligned} 4(\ ) &= (\ - \sigma) (\ - \bar{\sigma}) \left[ (\ - p)^2 - \Gamma_p^2 \right] + \\ &+ \sigma \bar{\sigma} \left( \frac{2}{p} - \frac{2}{p} \right)^2 - \left[ \sigma (\ - \bar{\sigma}) + \bar{\sigma} (\ - \sigma) \right] \times \\ &\times \left[ (\ - p) \left( \frac{2}{p} + \frac{2}{p} \right) + 2\Gamma_p p p \right] = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Физический смысл введенных обозначений следующий. Ренормированное выражение для энергии локализованного уровня  $\sigma = 0 - (\ L + 2\sigma )$  включает поправку, связанную со среднеполевым влиянием обменного взаимодействия (вклад порядка  $-L$ ), и вклад порядка  $-2\sigma$  ( $\sigma = \pm 1, \uparrow, \downarrow$ ), приводящий к снятию вырождения этого уровня по проекции спинового момента. Величина  $p = 0 + p -$  соответствует отсчитанной от химического потенциала такой части кинетической энергии коллективизированных электронов, которая связана с внутривузловыми перескоками. Функции  $p, \Gamma_p, p$  и  $p$  определяются соответственно через фурье-преобразования  $ff', fg, ff', fg$ .

Среднее число локализованных электронов  $L = \sum_\sigma \langle \frac{\sigma\sigma}{f} \rangle$  и намагниченность антиферромагнитной подрешетки  $= \sum_\sigma \sigma \langle \frac{\sigma\sigma}{f} 2 \rangle$  являются неиз-

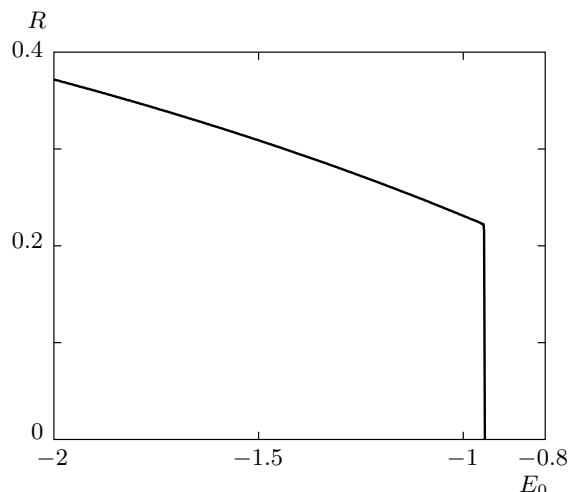


Рис. 1. Зависимость намагниченности антиферромагнитной подрешетки  $R$  от энергии локализованных состояний  $E_0$  при концентрации электронов  $n_e = 1.1$ . Выбраны следующие значения параметров модели:  $V_0 = 0.6, J = 0.2$

вестными величинами и характеризуют основное состояние системы. Через эти параметры определяется величина хаббардовской ренормировки для антиферромагнитной фазы  $\sigma = +\sigma$  ( $= 1 - L$  — стандартная ренормировка в парамагнитной фазе). Для расчета  $L$  и воспользуемся процедурой самосогласования в уравнении, полученном по спектральной теореме:

$$\langle \frac{\sigma\sigma}{f} \rangle = \frac{1}{\sum_{kj}} \sigma \frac{k\sigma(\ jk) (\ jk)}{\prod_{i \neq j} ( jk - ik)} \quad (8)$$

где  $(\ ) = 1 / (x + 1)$  — функция Ферми-Дирака, значения индексов  $j, k$  изменяются от 1 до 4, что соответствует вкладу от четырех ветвей энергетического спектра  $jk$  в антиферромагнитной фазе.

На рис. 1 представлена зависимость намагниченности от затравочной энергии локализованного уровня при нулевой температуре. Энергетические величины измеряются в единицах параметра перескока коллективизированных электронов между ближайшими соседями  $|1|$ . Видно, что по мере увеличения энергии  $0$  величина намагниченности уменьшается. Когда величина  $0$  достигает критического значения (квантовая критическая точка), намагниченность системы становится равной нулю (дальний антиферромагнитный порядок разрушается). Отметим, что подавление антиферромагнитного упорядочения в данном случае определяется изменением контрольного параметра  $0$ . Изменение этого параметра, как обычно, связывается с действием внешнего давления.

4. Определение формы поверхности Ферми и значения эффективной массы проводятся на основе решения дисперсионного уравнения (7). Для упрощения выкладок ограничимся областью энергий, в пределах которой находится узкая гибридная зона,

$$p = \sqrt{(\Gamma_p^2 - \frac{2}{J})^2 + (2 - |J| - \frac{p}{\Gamma_p^2 - \frac{2}{J}})^2} \quad (9)$$

Считается, что смещенный локализованный уровень  $\epsilon_0 - L$  пересекает нижнюю антиферромагнитную подзону коллективизированных электронов ( $\epsilon_0 - J < 0$ ). При выводе использовалось приближение ближайших соседей для электронных перескоков, а также учитывались только одноузельные и внутри-подрешеточные гибридизационные процессы.

На рис. 2 приведены дисперсионные зависимости тяжелофермионной зоны вдоль главного направления магнитной зоны Бриллюэна при различных значениях энергии  $\epsilon_0$ . Нижние два графика определяют спектр тяжелых фермионов в антиферромагнитном состоянии, а верхний — в парамагнитном состоянии. Штриховые линии соответствуют зависимостям, полученным по приближенной формуле (9), сплошные линии — зависимостям, рассчитанным из уравнения (7). Видно, что увеличение энергии  $\epsilon_0$ , приводящее согласно рис. 1 к понижению намагниченности, сопровождается сужением зоны тяжелых фермионов, а при переходе в парамагнитную фазу происходит качественное изменение структуры такой зоны.

Уменьшение ширины зоны тяжелых фермионов приводит к увеличению их эффективной массы. Величина эффективной массы электронов, нормированная на затравочную массу коллективизированных электронов  $m_0 = \hbar^2 |v_1|$  ( $v_1$  — параметр решетки), оценивается из выражения

$$\frac{m^*}{m_0} = \frac{(\Gamma_0^2 - \frac{2}{J})^2}{|\Gamma_0|^2} \left\{ 2 - |J| - \left[ (\Gamma_0^2 - \frac{2}{J})^2 + (\Gamma_0^2 + \frac{2}{J})^2 \right]^{1/2} \right\}^{-1}$$

Характер увеличения эффективной массы электронов при росте энергии  $\epsilon_0$  продемонстрирован на рис. 3. Видно, что в окрестности квантовой критической точки ( $\epsilon_0 \approx -0.95$ ) проявляется аномальная зависимость массы от контрольного параметра. В правой окрестности перехода антиферромагнетик-парамагнетик эффективная масса становится отрицательной. Это означает, что при переходе че-

на, связываемая с зоной тяжелых фермионов. Для этой энергетической полосы можно получить приближенное аналитическое выражение [20], определяющее квазиимпульсную зависимость зоны тяжелых фермионов в антиферромагнитной фазе:

рез квантовую критическую точку происходит смена типа носителей тока.

Условие, определяющее сильную ренормировку массы, имеет вид

$$\epsilon_0 = -\frac{2}{4} + L \quad (10)$$

При анализе этого выражения учтено, что концентрация локализованных электронов и намагниченность зависят от энергии  $\epsilon_0$ .

Согласно условию (10) при самосогласованном подходе расходимость массы тяжелых фермионов происходит вблизи квантовой критической точки. При этом расходимость массы коррелирует с модификацией зоны тяжелых фермионов при квантовом фазовом переходе (рис. 2). В качестве параметра, описывающего представленную модификацию, выберем ширину зоны тяжелых фермионов для главного направления:

$$W_{HF} = -\frac{2\Gamma_0^2}{(\Gamma_0^2 - \frac{2}{J})|J|} + \frac{1}{|J|} (2 - |J| + \epsilon_0) + \frac{\epsilon_0}{\Gamma_0^2 - \frac{2}{J}} \quad (11)$$

Нетрудно убедиться, что при уменьшении намагниченности и увеличении энергии  $\epsilon_0$  ширина зоны уменьшается. В парамагнитной области происходит инверсия квазиимпульсной зависимости энергетического спектра по сравнению с зависимостью спектра в антиферромагнитной фазе. Отсюда следует, что по мере уменьшения ширины зоны в антиферромагнитной фазе может реализоваться ситуация, когда возникнет предельно узкая зона с большой эффективной массой. Можно показать, что одним из решений уравнения  $W_{HF} = 0$  является выражение (10), при котором ранее была показана расходимость эффективной электронной массы. Таким образом, расходимость массы электронов связана с сильным редуцированием зоны тяжелых фермионов. Образование слабодисперсной узкой зоны, в свою очередь, свидетельствует о близости квантового фазового перехода.

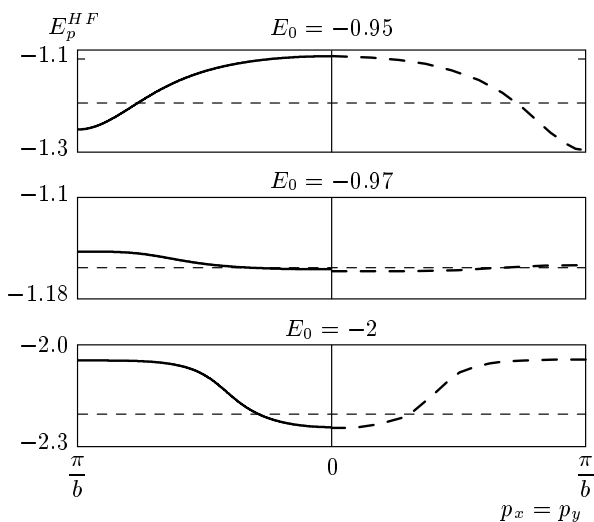


Рис. 2. Модификация квазичастичной зоны, соответствующей тяжелым фермионам, при увеличении энергии  $E_0$  и переходе из антиферромагнитной фазы (два нижних графика) в парамагнитную фазу (верхний график). Тонкая штриховая линия определяет положение химического потенциала. Расчетные параметры такие же, что и на рис. 1

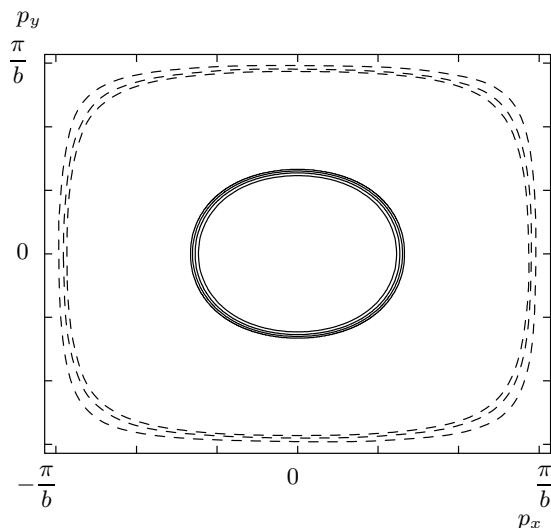


Рис. 4. Поверхности Ферми в антиферромагнитной фазе (сплошные линии), построенные при значениях энергии  $E_0 = -2, -1.5, -1.2, -0.97$ , и в парамагнитной фазе (штриховые линии) при  $E_0 = -0.95, -0.8, -0.5$ . Наименьшей энергии соответствует наименьший размер поверхности Ферми

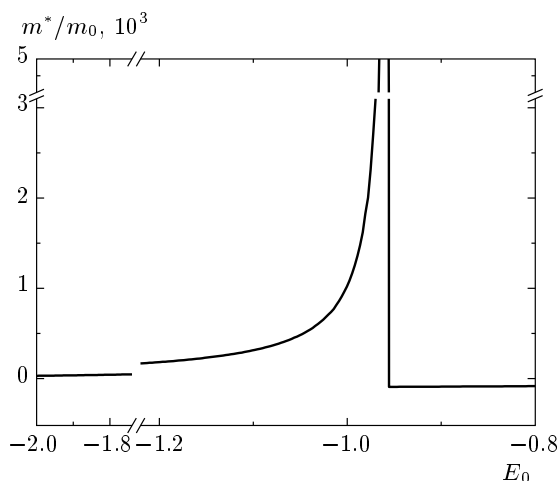


Рис. 3. Аномальное увеличение эффективной электронной массы при квантовом фазовом переходе из антиферромагнитной фазы в парамагнитную

Расширение поверхности Ферми при переходе через квантовую критическую точку продемонстрировано на рис. 4. Поверхности, обозначенные сплошными линиями, рассчитаны при различных значениях  $E_0$  в антиферромагнитной фазе, а поверхности Ферми в парамагнитной фазе отмечены штриховыми линиями. Видно, что в антиферромагнитной фазе раз-

мер поверхности Ферми практически не зависит от энергии  $E_0$  и несколько кривых сливаются в одну. Однако при переходе через границу антиферромагнетик-парамагнетик реализуется существенное расширение поверхности Ферми. Дальнейшее увеличение энергии  $E_0$  в парамагнитной фазе не приводит к столь большому увеличению импульса Ферми. Описанное поведение связывается со сменой типа носителей заряда в точке квантового фазового перехода. Таким образом в квантовой критической точке реализуется переход от эффективно электронных поверхностей Ферми к дырочным поверхностям Ферми. Из этого анализа можно сделать вывод о том, что при квантовом фазовом переходе будут наблюдаться существенные аномалии в эффекте Холла.

5. В предложенной модели взаимодействие (3) может индуцировать куперовскую неустойчивость. Экспериментальные данные по  $\text{CeRhIn}_5$  указывают на то, что при давлениях, больших критического сверхпроводящая фаза имеет симметрию  $d$ -типа. В фазе сосуществования сверхпроводимости и антиферромагнетизма симметрия параметра порядка до конца не определена, однако высказываются предположения также о симметрии  $d$ -типа, но с дополнительными нодальными точками на поверхности Ферми [21]. Существенно, что рассмотрение сверхпроводящих спариваний  $d$ -типа на фоне антифер-

ромагнитного упорядочения приводит к качественному согласию результатов с фазовой диаграммой  $\text{CeRhIn}_5$ .

Для исследования фазы сосуществования сверхпроводимости и антиферромагнетизма необходимо использовать базисный набор операторов, позволяющий учитывать как аномальные средние, так и аномальные функции Грина. Поэтому вместо используемого ранее базиса (4) введем расширенный базис:

$$\begin{pmatrix} 0\sigma & 0\sigma & f\sigma & g\sigma & \bar{\sigma}0 & \bar{\sigma}0 & \dagger & \dagger \\ f & g & f\sigma & g\sigma & f & g & f\bar{\sigma} & g\bar{\sigma} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Составляя уравнения движения для нормальных и аномальных функций Грина и проводя проецирование на набор неприводимых функций Грина, соответствующих базису (12), получаем замкнутую систему уравнений. При решении этой системы принимались во внимание экспериментальные сведения о предпочтительности  $d$ -типа симметрии сверхпроводящего параметра порядка. В нашем случае он описывается выражением

$$\Delta_p^d = 2\Delta_0^d \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{y}{2}\right) \quad (13)$$

Ввиду малости амплитуды  $\Delta_0^d$  в фазе сосуществования сверхпроводимости и антиферромагнетизма энергетический спектр тяжелых фермионов незначительно модифицируется по сравнению со спектром, определяемым выражением (9). Поэтому квазичастичные характеристики фермионов в этой фазе будут хорошо описываться приведенными в предыдущем параграфе выражениями.

Уравнения самосогласования для сверхпроводящей фазы допускают решения, при которых симметрия параметра порядка может отличаться от симметрии  $d$ -типа. Проведенный анализ показал, что без антиферромагнитного порядка сверхпроводящая фаза с симметрией  $d$ -типа имеет более высокие значения критической температуры, а значит и большую энергию конденсации. Это соответствует экспериментальной ситуации. Появление антиферромагнитного упорядочения, как показывают расчеты, может приводить к изменению результата конкуренции между сверхпроводящими фазами с симметрией параметра порядка  $d$ - и  $d'$ -типов. Однако при малых значениях антиферромагнитного параметра порядка его влияние будет мало и  $d$ -фаза будет предпочтительней. Полный анализ этого вопроса выходит за рамки данной статьи и будет выполнен в ходе дальнейших исследований.

**6.** В заключение отметим, что включение обменного взаимодействия в подсистеме локализованных

электронов приводит к возможности реализации антиферромагнитной фазы, сверхпроводящей фазы, а также микроскопически однородной фазы сосуществования сверхпроводимости и антиферромагнетизма. Обнаружен режим, при котором происходят аномально резкое увеличение эффективной массы электронов и расширение поверхности Ферми аналогично тому, как это имеет место в ряде редкоземельных интерметаллических систем при увеличении давления. Показано, что расходимость массы тяжелых фермионов реализуется внутри антиферромагнитной фазы, но в близкой окрестности к точке квантового фазового перехода в парамагнитную фазу. Расходимость массы сопровождается формированием слабодисперсной зоны тяжелых фермионов. Такое поведение  $d$ -электронов реализуется только вблизи квантовой критической точки. В области антиферромагнитной фазы, удаленной от квантового фазового перехода, увеличение намагниченности антиферромагнитной подрешетки приводит к уменьшению эффективной электронной массы.

Авторы благодарны К. Кикоину и Д. Дзедзисавили за полезные замечания.

Работа выполнена в рамках Программы Президиума РАН «Квантовые мезоскопические и неупорядоченные структуры», а также при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-02-00251), регионального РФФИ (грант «Сибирь» № 11-02-98007), РФФИ для молодых ученых (грант № 12-02-31130) и в рамках Соглашения 14.132.21.1410 Министерства образования и науки РФ, а также гранта Президента РФ (МК-526.2013.2).

## ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Стишов, УФН **174**, 853 (2004).
2. В. Ф. Гантмахер, В. Т. Долгополов УФН **178**, 3 (2008).
3. T. Mito, S. Kawasaki, Y. Kawasaki et al., Phys. Rev. Lett. **90**, 077004 (2003).
4. S. Elgazzar, I. Opahle, R. Hayn, and P. M. Oppeneer, Phys. Rev. B **69**, 214510 (2004).
5. K. Haule, C.-H. Yee, K. Kim, Phys. Rev. B **81**, 195107 (2010).
6. J. A. Hertz, Phys. Rev. B **14**, 1165 (1976).
7. A. J. Millis, Phys. Rev. B **48**, 7183 (1993).

8. Q. Si, S. Rabello, K. Ingersent, and J. L. Smith, *Nature* **413**, 804 (2001).
9. P. Gegenwart, Q. Si, and F. Steglich, *Nature Phys.* **4**, 186 (2008).
10. H. Shishido, R. Settai, H. Harima, and Y. Ōnuki, *J. Phys. Soc. Jpn.* **74**, 1103 (2005).
11. Л. Б. Иоффе, А. Дж. Миллис, *УФН* **168**, 672 (1998).
12. T. Park, V. A. Sidorov, F. Ronning et al., *Nature* **456**, 366 (2008).
13. M. Yu. Kagan and V. V. Val'kov, *ЖЭТФ* **140**, 179 (2011).
14. S. Nakatsuji, D. Pines, and Z. Fisk, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 016401 (2004).
15. S. Watanabe and K. Miyake, *J. Phys. Soc. Jpn.* **79**, 033707 (2010).
16. А. Ф. Барабанов, К. А. Кикоин, Л. А. Максимов, *ТМФ* **20**, 364 (1974).
17. В. А. Москаленко, *ТМФ* **110**, 308 (1997).
18. В. В. Вальков, Д. М. Дзедзисашвили, *ТМФ* **157**, 235 (2008).
19. Н. М. Плакида, *ТМФ* **5**, 147 (1970).
20. В. В. Вальков, Д. М. Дзедзисашвили, *ЖЭТФ* **137**, 341 (2010).
21. Y. Bang, M. J. Graf, A. V. Balatsky, and J. D. Thompson, *Phys. Rev. B* **69**, 014505 (2004).