

КРОССИНГ-РЕЗОНАНС ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В СРЕДЕ С НЕОДНОРОДНЫМ ПАРАМЕТРОМ СВЯЗИ

*В. А. Игнатченко**, *Д. С. Полухин***

*Институт физики им. Л. В. Киренского Сибирского отделения Российской академии наук
660036, Красноярск, Россия*

*Сибирский федеральный университет
660041, Красноярск, Россия*

Поступила в редакцию 4 июня 2013 г.

Исследованы динамические восприимчивости (функции Грина) системы двух связанных волновых полей различной физической природы в среде с произвольным соотношением между средним значением ε и среднеквадратичной флуктуацией $\Delta\varepsilon$ параметра связи. Самосогласованное приближение, учитывающее все диаграммы с непересекающимися линиями корреляций, развито для случая, когда исходная функция Грина однородной среды описывает систему связанных волновых полей. Исследование проведено на примере спиновых и упругих волн. Получены выражения для диагональных элементов G_{mm} и G_{uu} матричной функции Грина, описывающих спиновые и упругие волны при магнитном и упругом возбуждении, и недиагональных элементов G_{mu} и G_{um} , описывающих эти волны при перекрестном возбуждении. Численно исследовано изменение формы этих элементов для случая одномерных неоднородностей с ростом $\Delta\varepsilon$ и уменьшением ε при условии сохранения суммы квадратов этих величин: уширение и последующее слияние двух пиков на частотных зависимостях мнимых частей G_{mm} и G_{uu} в один широкий пик; возникновение и формирование тонкой структуры в форме узкого резонанса на вершине функции Грина одного волнового поля и узкого антирезонанса на вершине функции Грина другого поля; рост ширины пиков тонкой структуры и последующее исчезновение их с ростом корреляционного волнового числа неоднородностей параметра связи; уменьшение амплитуд недиагональных элементов до нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$.

DOI: 10.7868/S0044451013110096

1. ВВЕДЕНИЕ

Явление кроссинг-резонанса возникает в точке пересечения дисперсионных кривых двух взаимодействующих волновых полей различной физической природы. Кроссинг-резонанс в однородной среде проявляется в снятии в этой точке вырождения частот взаимодействующих волновых полей, в появлении двух резонансных пиков на частотных зависимостях мнимых частей функций Грина каждого из волновых полей и в резонансном усилении возбуждения волн одной физической природы связанными с ними волнами другой физической природы. При этом как величина раздвижки между энергетическими уровнями в спектре, так и расстояние меж-

ду максимумами каждой функции Грина определяются параметром ε связи между волновыми полями.

Исследование кроссинг-резонанса в неоднородной среде в рамках приближения Бурре [1, 2] (однократное рассеивание волн на неоднородностях) было проведено в работах [3–5] для предельно неоднородной модели взаимодействия двух волновых полей, когда параметр связи между полями представляет собой случайную функцию координат с нулевым средним значением. В этом случае взаимодействие между полями происходит только благодаря пространственным флуктуациям этого параметра. Было предсказано явление индуцированного беспорядком кроссинг-резонанса: снятие вырождения и образование щели в спектре в точке пересечения кривых дисперсии волновых полей. В отличие от кроссинг-резонанса в однородной среде, щель в этом случае определялась среднеквадратичной флуктуацией параметра связи $\Delta\varepsilon$.

В работах [6–8] мы рассмотрели эту же модель с

*E-mail: vignatch@iph.krasn.ru

**E-mail: polukhin@iph.krasn.ru

учетом процессов многократного рассеивания волн на неоднородностях параметра связи, среднее значение которого равно нулю. Хорошо известное самосогласованное приближение (ССП), учитывающее все диаграммы функций Грина с непересекающимися линиями корреляций, было обобщено на случай стохастически взаимодействующих волновых полей. Учет процессов многократного рассеяния волн на неоднородностях привел к качественно новым результатам. Вместо снятия вырождения частот в спектре волн и раздвоения резонансных пиков динамических восприимчивостей в точке пересечения невозмущенных дисперсионных кривых на каждой из функций Грина должен наблюдаться широкий одномодовый резонансный пик. Тонкая структура возникает на вершинах этих широких пиков в форме узкого резонанса на функции Грина одного поля и узкого антирезонанса на вершине функции Грина другого поля.

В свете полученных в работах [6–8] результатов можно ожидать, что учет процессов многократного рассеивания волн приведет к столь же значительным качественным изменениям результатов, полученных в приближении Бурре для общей ситуации, когда отличны от нуля как среднеквадратичная флуктуация $\Delta\varepsilon$, так и среднее значение ε параметра связи между двумя волновыми полями [9].

Задачей настоящей работы является обобщение ССП на случай произвольного соотношения между средним и среднеквадратичным значениями параметра связи между двумя волновыми полями различной физической природы и исследование изменений компонент матрицы функции Грина при изменении этого соотношения от ситуации, соответствующей однородному случаю ($\varepsilon \neq 0$, $\Delta\varepsilon = 0$), до ситуации, соответствующей предельно стохастизированному взаимодействию ($\varepsilon = 0$, $\Delta\varepsilon \neq 0$).

Как и в работах [6–8], исследование проводится на примере модельной задачи, соответствующей взаимодействию спиновых и скалярных упругих волн.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 выводится связанная система уравнений для функций Грина спиновых и упругих волн. В разд. 3 обсуждается ССП для случая одного волнового поля и выводится ССП для двух взаимодействующих волновых полей в среде с неоднородным параметром связи между полями. В разд. 4 проводится численный анализ зависимости компонент матричной функции Грина магнитоупругих волн от соотношения между средним значением и среднеквадратичной флуктуацией параметра связи. В разд. 5 суммируются и обсуждаются результаты работы.

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА

Рассмотрим модель ферромагнетика, в котором неоднородным является только безразмерный параметр магнитоупругой связи $\varepsilon(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$. Для этой среды уравнения движения — это уравнение Ландау–Лифшица для вектора намагниченности \mathbf{M} и уравнение движения теории упругости для вектора упругих смещений \mathbf{u} :

$$\dot{\mathbf{M}} = -g[\mathbf{M} \times \mathbf{H}^e], \quad (1)$$

$$p\ddot{u}_i = \partial\sigma_{ij}/\partial x_j + f_i, \quad (2)$$

где g — гиромагнитное отношение, p — плотность среды, σ_{ij} — тензор напряжений, $i, j = x, y, z$, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ — внешняя объемная сила. Эффективное магнитное поле \mathbf{H}^e и тензор напряжений σ_{ij} имеют вид

$$\mathbf{H}^e = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{M}} + \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\partial\mathbf{M}/\partial\mathbf{x})}, \quad (3)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_{ij}}, \quad (4)$$

где $u_{ij} = (\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)/2$ — тензор упругих деформаций. Плотность энергии \mathcal{H} запишем в виде

$$\mathcal{H} = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial\mathbf{x}} \right)^2 - \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} + \frac{\lambda u_{ii}^2}{2} + \mu u_{ij}^2 + \varepsilon(\mathbf{x}) M_i M_j u_{ij}, \quad (5)$$

где α — параметр обмена, λ и μ — силовые упругие константы, $\mathbf{H} = H_0 \mathbf{e}_z + \mathbf{h}$, H_0 — внешнее постоянное магнитное поле вдоль оси z , \mathbf{h} — внешнее переменное магнитное поле, перпендикулярное оси z . Представим магнитоупругий параметр $\varepsilon(\mathbf{x})$ в виде

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon + \Delta\varepsilon\rho(\mathbf{x}), \quad (6)$$

где ε — среднее значение этого параметра, $\Delta\varepsilon$ — его среднеквадратичная флуктуация, а $\rho(\mathbf{x})$ — центрированная ($\langle\rho(\mathbf{x})\rangle = 0$) и нормированная ($\langle\rho^2(\mathbf{x})\rangle = 1$) случайная функция координат. Угловые скобки означают среднее по ансамблю реализаций этой случайной функции.

Стохастические свойства $\rho(\mathbf{x})$ характеризуются корреляционной функцией, зависящей от разности координат $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$,

$$K(\mathbf{r}) = \langle\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x} + \mathbf{r})\rangle \quad (7)$$

или связанной с ней преобразованием Фурье спектральной плотностью

$$S(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int K(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (8)$$

где d — размерность пространства.

Подставив плотность энергии (5) в уравнения движения (1) и (2), получим связанную систему уравнений для векторов намагниченности \mathbf{M} и смещения \mathbf{u} :

$$-\frac{\dot{\mathbf{M}}}{g} = \left[\mathbf{M} \times \left\{ \alpha \Delta \mathbf{M} + \mathbf{H} - \varepsilon(\mathbf{x}) M_j \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \mathbf{x}} \right) \right\} \right], \quad (9)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = v_t^2 \Delta \mathbf{u} + (v_l^2 - v_t^2) \text{grad div } \mathbf{u} + \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial x_j} (\varepsilon(\mathbf{x}) M_j \mathbf{M}) + \frac{\mathbf{f}}{p}, \quad (10)$$

где $v_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ и $v_t = \sqrt{\mu/\rho}$ — соответственно продольные и поперечные скорости упругих волн.

Уравнение Ландау–Лифшица (9) линеаризуем обычным образом ($M_z \approx M$; $M_x, M_y \ll M$), а для упругих волн ограничимся здесь модельной задачей: помимо условия $v_l = v_t = v_u$ наложим условие $u_z = 0$. Полагая $M_x, M_y \propto \exp(i\omega t)$ и вводя циркулярные проекции

$$m^\pm = M_x \pm iM_y, \quad h^\pm = h_x \pm ih_y, \quad (11)$$

$$u^\pm = u_x \pm iu_y, \quad f^\pm = f_x \pm if_y,$$

получаем для резонансных проекций m^+ и u^+ (здесь и в дальнейшем индекс «+» опускаем) связанную систему двух скалярных уравнений

$$\alpha(\nabla^2 + \nu_m)m - \varepsilon M \frac{\partial u}{\partial z} - (\Delta\varepsilon)M\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial z} = -h, \quad (12)$$

$$\mu(\nabla^2 + \nu_u)u + \varepsilon M \frac{\partial m}{\partial z} + (\Delta\varepsilon)M \frac{\partial}{\partial z} (\rho(\mathbf{x})m) = -f. \quad (13)$$

Здесь введены обозначения

$$\nu_m = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha g M}, \quad \nu_u = \frac{\omega^2}{v_u^2}, \quad (14)$$

где ω_0 — частота однородного ферромагнитного резонанса, которая зависит от магнитного поля и размагничивающих факторов образца, $v_u = v_t = \sqrt{\mu/\rho}$ — скорость упругой волны.

Запишем систему уравнений (12) и (13) в матричном виде:

$$\left[\hat{L}(\mathbf{x}) - \hat{R}(\mathbf{x}) \right] \hat{X}(\mathbf{x}) = \hat{F}(\mathbf{x}), \quad (15)$$

где

$$\hat{L}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \nabla^2 + \nu_m & -\frac{\varepsilon M}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\varepsilon M}{\alpha} \frac{\partial}{\partial z} & \nabla^2 + \nu_u \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\hat{R}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\Delta\varepsilon}{\mu} M \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\Delta\varepsilon}{\alpha} M \left(\frac{\partial}{\partial z} \rho(\mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$\hat{X}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \alpha m \\ \mu u \end{bmatrix}, \quad \hat{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -h \\ -f \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Из этой формы записи видно, что нормированными переменными для связанной системы уравнений являются величины αm и μu . Эту нормировку мы используем и при введении матричной функции Грина системы, записав для нее уравнение в виде

$$\left[\hat{L}(\mathbf{x}) - \hat{R}(\mathbf{x}) \right] \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \hat{E}. \quad (19)$$

Здесь

$$\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} G_{mm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) & G_{mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \\ G_{um}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) & G_{uu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \end{bmatrix}, \quad (20)$$

где G_{mm} и G_{mu} (G_{uu} и G_{um}) — спиновые (упругие) функции Грина соответственно при магнитном и упругом точечных возбуждениях,

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

— единичная матрица.

Представим функцию Грина \hat{G} в виде

$$\hat{G} = \hat{G}_0 + \hat{G}', \quad (22)$$

где \hat{G}_0 — исходная функция Грина, \hat{G}' — поправка, обусловленная неоднородной частью параметра взаимодействия.

Подставляя выражение (22) в (19), получим уравнения для \hat{G}_0 и \hat{G}' :

$$\hat{L}(\mathbf{x}) \hat{G}_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \hat{E}, \quad (23)$$

$$\hat{L}(\mathbf{x}) \hat{G}'(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \hat{R}(\mathbf{x}) \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0). \quad (24)$$

Решение уравнения (23) для исходной функции Грина может быть найдено точно. К его анализу мы вернемся ниже. Здесь же только отметим, что из вида оператора \hat{L} следует, что исходная функция Грина $\hat{G}_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ описывает связанные магнитоупругие волны в однородной среде. Таким образом, в отличие от однополевых ситуаций, а также от случая стохастического взаимодействия между волновыми полями ($\varepsilon = 0$, $\Delta\varepsilon \neq 0$), рассмотренного в работах [6–8], в данном случае формализм функций Грина развивается на фоне исходной системы связанных волновых полей.

Перейдем к исследованию уравнения (24) для поправки $\hat{G}'(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$. Согласно общим правилам, формальное решение уравнения (24) можно представить в виде интеграла от произведения невозмущенной функции Грина и правой части этого уравнения. Подставляя это решение в выражение (22), получаем генерирующее интегральное уравнение для матричной функции Грина \hat{G} :

$$\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \hat{G}_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \int \hat{G}_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \hat{R}(\mathbf{x}') \hat{G}(\mathbf{x}', \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}'. \quad (25)$$

Элементы матрицы \hat{R} содержат производные случайной функции $\rho(\mathbf{x})$, что неудобно для последующего использования. Поэтому мы преобразуем интеграл в уравнении (25) методом интегрирования по частям каждого элемента, как это было сделано ранее в работах [8, 10], и получим окончательно генерирующее интегральное уравнение для матричной функции Грина \hat{G} в виде

$$\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \hat{G}_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \gamma \int \hat{Y}_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \hat{P}(\mathbf{x}') \hat{G}(\mathbf{x}', \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}'. \quad (26)$$

Здесь

$$\hat{Y}_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \begin{bmatrix} G_{mm}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') & \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} \frac{\partial G_{mu}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial z'} \\ G_{um}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') & \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} \frac{\partial G_{uu}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial z'} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$\hat{X}_0(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} \frac{\partial G_{um}^0(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')}{\partial z'} & \frac{\partial^2 G_{uu}^0(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')}{\partial z' \partial z''} \\ \hat{G}_{mm}^0(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') & \sqrt{\frac{\alpha}{\mu}} \frac{\partial G_{mu}^0(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')}{\partial z''} \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$\hat{Y}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \bar{G}_{mm}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_0) & \bar{G}_{mu}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_0) \\ \sqrt{\frac{\alpha}{\mu}} \frac{\partial \bar{G}_{um}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_0)}{\partial z''} & \sqrt{\frac{\alpha}{\mu}} \frac{\partial \bar{G}_{uu}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_0)}{\partial z''} \end{bmatrix}, \quad (33)$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (34)$$

$K(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \equiv K(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')$ — корреляционная функция неоднородностей, определяемая формулой (7).

Введем следующие обозначения диаграмм мат-

$$\hat{P}(\mathbf{x}') = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\alpha}{\mu}} \rho(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial z'} \\ \rho(\mathbf{x}') & 0 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\gamma = \frac{\Delta \varepsilon}{\sqrt{\alpha \mu}} M. \quad (29)$$

Используя обычную процедуру последовательных итераций уравнения (26), получаем бесконечный ряд для матричной функции Грина $\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$. Усредняя этот ряд по ансамблю реализаций случайных функций $\rho(\mathbf{x})$ и расщепляя корреляторы по формуле Гаусса, получаем ряды по возмущениям для усредненных функций Грина. Матричное уравнение Дайсона получаем из этих рядов в виде

$$\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \hat{G}_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \iint \hat{Y}_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \hat{Q}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \hat{Y}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'', \quad (30)$$

где массовый оператор (собственная энергия) имеет вид

$$\hat{Q}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') = \gamma^2 \hat{X}_0(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') J \cdot K(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') + \gamma^4 \iint \hat{X}_0(\mathbf{x}', \mathbf{x}_1) \hat{X}_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \hat{X}_0(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}'') J \times \\ \times [K(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2) K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'') + K(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] \times \\ \times d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 + \dots \quad (31)$$

Здесь элементами матриц \hat{X}_0 являются исходные функции Грина и их пространственные производные, а элементами матрицы \hat{Y} — искомые усредненные функции Грина и их пространственные производные:

ричных элементов функций Грина и массовых операторов (рис. 1). В диаграммном представлении матричные элементы уравнения Дайсона (30) показаны на рис. 2. Видно, что каждый из четырех элементов функций Грина выражается через все четыре элемента матричного массового оператора.

Запишем полученные выше соотношения в \mathbf{k} -пространстве. В случайно-однородной среде все величины зависят только от разности координат $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$. Поэтому преобразование Фурье всех величин имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{G}(\mathbf{r}) &= \int \hat{G}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \\ \hat{G}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int \hat{G}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad \text{и т. д.} \end{aligned} \quad (35)$$

Решение уравнения (23) для исходной функции Грина в \mathbf{k} -пространстве имеет вид

$$\hat{G}_0(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} G_{mm}^0(\mathbf{k}) & iG_{mu}^0(\mathbf{k}) \\ -iG_{um}^0(\mathbf{k}) & G_{uu}^0(\mathbf{k}) \end{bmatrix}, \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} G_{mm}^0(\mathbf{k}) &= \frac{\nu_u - k^2}{(2\pi)^d D^0}, & G_{mu}^0(\mathbf{k}) &= \frac{(\varepsilon/\mu)Mk_z}{(2\pi)^d D^0}, \\ G_{um}^0(\mathbf{k}) &= \frac{(\varepsilon/\alpha)Mk_z}{(2\pi)^d D^0}, & G_{uu}^0(\mathbf{k}) &= \frac{\nu_m - k^2}{(2\pi)^d D^0}, \end{aligned} \quad (37)$$

D^0 — детерминант системы уравнений (12) и (13), связывающий спиновые и упругие волны в единую систему магнитоупругих волн

$$D^0 = (\nu_m - k^2)(\nu_u - k^2) - \gamma_0^2 k_z^2, \quad (38)$$

$$\gamma_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\alpha\mu}} M. \quad (39)$$

Для одномерного случая ($k_z = k$, $d = 1$) элементы исходной функции Грина в \mathbf{r} -пространстве могут быть найдены в явном виде из выражений (37). Для этого представим D^0 в виде

$$D^0 = (k^2 - h_1^2)(k^2 - h_2^2), \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} h_1 &= \pm \sqrt{0.5 \left[\nu_u + \nu_m + \gamma_0^2 + \sqrt{(\nu_u + \nu_m + \gamma_0^2)^2 - 4\nu_u\nu_m} \right]}, \\ h_2 &= \pm \sqrt{0.5 \left[\nu_u + \nu_m + \gamma_0^2 - \sqrt{(\nu_u + \nu_m + \gamma_0^2)^2 - 4\nu_u\nu_m} \right]}. \end{aligned} \quad (41)$$

В этом случае каждый элемент матрицы (36) можно записать в виде суммы двух дробей:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} G_{mm}^0(k) \\ G_{uu}^0(k) \end{bmatrix} &= \frac{1}{2\pi(h_2^2 - h_1^2)} \left\{ \begin{bmatrix} h_1^2 - \nu_u \\ h_1^2 - \nu_m \end{bmatrix} \times \right. \\ &\times \left. \frac{1}{k^2 - h_1^2} + \begin{bmatrix} \nu_u - h_2^2 \\ \nu_m - h_2^2 \end{bmatrix} \frac{1}{k^2 - h_2^2} \right\}, \\ \begin{bmatrix} G_{mu}^0(k) \\ G_{um}^0(k) \end{bmatrix} &= \frac{\varepsilon M k}{2\pi(h_2^2 - h_1^2)} \times \\ &\times \left(-\frac{1}{k^2 - h_1^2} + \frac{1}{k^2 - h_2^2} \right) \begin{bmatrix} 1/\mu \\ 1/\alpha \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (42)$$

Проводя обратное преобразование Фурье уравнений (42), получим матричные элементы функции Грина в однородной среде в виде

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} G_{mm}^0(r) \\ G_{uu}^0(r) \end{bmatrix} &= \frac{ie^{ih_1 r}}{2h_1(h_2^2 - h_1^2)} \begin{bmatrix} h_1^2 - \nu_u \\ h_1^2 - \nu_m \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{ie^{ih_2 r}}{2h_2(h_2^2 - h_1^2)} \begin{bmatrix} \nu_u - h_2^2 \\ \nu_m - h_2^2 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} G_{mu}^0(r) \\ G_{um}^0(r) \end{bmatrix} &= \frac{\varepsilon M i (e^{ih_2 r} - e^{ih_1 r})}{2(h_2^2 - h_1^2)} \begin{bmatrix} 1/\mu \\ 1/\alpha \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (43)$$

где $r = |x' - x''|$.

Спектр частот магнитоупругих волн в однородной среде был исследован в работах [11–17]. Основная особенность этого спектра — снятие вырождения частот спиновых и упругих волн в точке пересечения их невозмущенных кривых дисперсии ($k = k_r$, $\omega = \omega_r$) и возникновение щели в спектре связанных волн, ширина Λ которой пропорциональна параметру связи ε ,

$$\Lambda = \omega^+ - \omega^- = \frac{\varepsilon M}{\sqrt{\mu}} \sqrt{2\omega_M \omega_r}, \quad (44)$$

где $\omega_M = gM$.

Выражение (36) описывает форму матричных элементов исходной функции Грина. Введение сколь угодно малого затухания приводит к появлению мнимых компонент у этих элементов. При этом мнимые части диагональных элементов матричной функции Грина, $G_{mm}^0(\omega)$ и $G_{uu}^0(\omega)$, при $k = k_r$ имеют каждая по два пика в точках ω^\pm на расстоянии Λ друг от друга.

Амплитуды спиновых m и упругих u волн в однородном случае ($\varepsilon \neq 0$, $\Delta\varepsilon = 0$) выражаются через исходную матричную функцию Грина следующим образом:

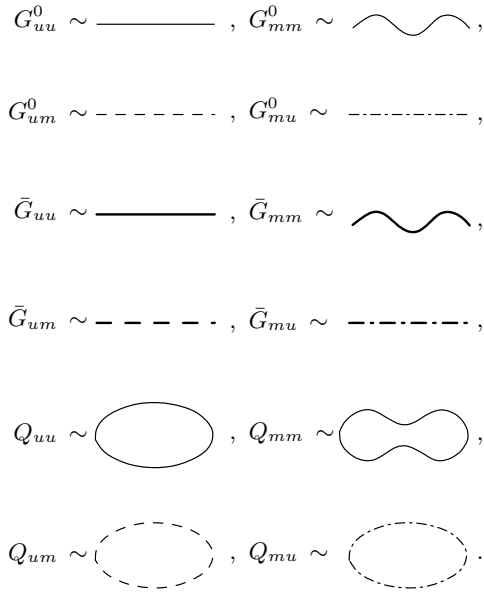


Рис. 1. Диаграммные обозначения элементов матричных функций Грина \hat{G}_0 , \bar{G} и массового оператора \hat{Q}

$$\hat{X}(\mathbf{x}) = \int \hat{G}_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \hat{F}(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0 \quad (45)$$

в \mathbf{r} -пространстве,

$$\hat{X}(\mathbf{k}) = (2\pi)^d \hat{G}_0(\mathbf{k}) \hat{F}(\mathbf{k}) \quad (46)$$

в \mathbf{k} -пространстве, где

$$\hat{X}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \alpha m(\mathbf{x}) \\ \mu u(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \hat{F}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} -h(\mathbf{x}_0) \\ -f(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}, \quad (47)$$

$$\hat{X}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \alpha m(\mathbf{k}) \\ \mu u(\mathbf{k}) \end{bmatrix}, \quad \hat{F}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} -h(\mathbf{k}) \\ -f(\mathbf{k}) \end{bmatrix}. \quad (48)$$

Запишем также амплитуды $m(\mathbf{k})$ и $u(\mathbf{k})$ в явном виде:

$$\begin{aligned} m(\mathbf{k}) &= -\frac{(2\pi)^d}{\alpha} [G_{mm}^0(\mathbf{k})h(\mathbf{k}) + iG_{mu}^0(\mathbf{k})f(\mathbf{k})], \\ u(\mathbf{k}) &= -\frac{(2\pi)^d}{\mu} [G_{uu}^0(\mathbf{k})f(\mathbf{k}) - iG_{um}^0(\mathbf{k})h(\mathbf{k})]. \end{aligned} \quad (49)$$

Из выражений (47) и (48) видно, что нормировка функций Грина в настоящей работе отличается от нормировки формул работы [8]. Для приведения нормировок к согласию в формулах (15), (16), (22), (23), (27), (28), (29) и (30) работы [8] нужно явно входящие в эти формулы величины α и μ поменять местами: $\alpha \rightarrow \mu$, $\mu \rightarrow \alpha$. Это не касается других формул работы [8] и ее результатов, которые справедливы и в новой нормировке.

Матричное уравнение Дайсона для полной функции Грина (30) в \mathbf{k} -пространстве после соответствующих алгебраических преобразований принимает вид

$$\hat{\bar{G}}(\mathbf{k}) = \frac{\hat{E}}{\hat{G}_0^{-1}(\mathbf{k}) - (2\pi)^{2d} \hat{E}_1(\mathbf{k}) \hat{Q}(\mathbf{k}) \hat{E}_2(\mathbf{k})}, \quad (50)$$

где

$$\hat{\bar{G}}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \bar{G}_{mm}(\mathbf{k}) & i\bar{G}_{mu}(\mathbf{k}) \\ -i\bar{G}_{um}(\mathbf{k}) & \bar{G}_{uu}(\mathbf{k}) \end{bmatrix}, \quad (51)$$

$$\hat{Q}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} Q_{uu}(\mathbf{k}) & Q_{um}(\mathbf{k}) \\ Q_{mu}(\mathbf{k}) & Q_{mm}(\mathbf{k}) \end{bmatrix}, \quad (52)$$

$$\hat{E}_1(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\mu/\alpha} ik_z \end{bmatrix}, \quad (53)$$

$$\hat{E}_2(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha/\mu} ik_z \end{bmatrix}.$$

Обращаем внимание, что фурье-образы недиагональных элементов матрицы (51) записаны в виде произведения мнимой единицы на $\bar{G}_{mu}(\mathbf{k})$ и $\bar{G}_{um}(\mathbf{k})$, а матрица $\hat{Q}(\mathbf{k})$ имеет вид, в котором расположение элементов $Q_{ij}(\mathbf{k})$ отличается от расположения элементов в матрице $\hat{\bar{G}}(\mathbf{k})$. Амплитуды m и u выражаются через матричные функции Грина $\bar{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ и $\hat{\bar{G}}(\mathbf{k})$ аналогично выражениям (45)–(49).

Как и в работе [8], будем искать выражение для массового оператора $\hat{Q}(\mathbf{k})$ в самосогласованном приближении. Для этого приближение непересекающихся корреляций (см. ниже) должно быть обобщено на случай, когда исходная функция Грина $\hat{G}_0(\mathbf{k})$ уже в однородном пространстве описывает связанные между собой два волновых поля различной физической природы.

3. САМОСОГЛАСОВАННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

Прежде, чем переходить к выводу ССП для двух взаимодействующих полей, напомним кратко основные этапы вывода аналогичного приближения для одного волнового поля (более детально эти вопросы рассмотрены в работе [8]). В конце 50-х и в начале 60-х гг. этот вариант ССП был использован для проблемы, не имеющей отношения к неоднородным средам. Он был предложен Мигдалом при исследовании электрон-фононного взаимодействия в однородной среде [18], а затем детально проанализирован в

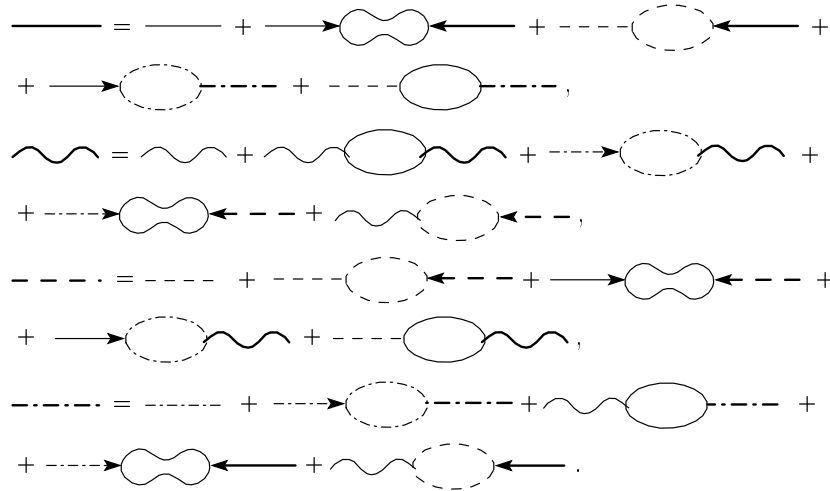


Рис. 2. Диаграммные представления для матричных элементов уравнения Дайсона (30). Стрелками указаны точки, в которых берутся производные

работах Пайнса [19, 20], Паффа и Уайтфилда [21], а также в книге Абрикосова, Горькова и Дзялошинского [22].

Воспроизведем кратко ключевые положения этих работ. Система уравнений для электронов и фононов приближенно приводится к одному уравнению для функции Грина электрона $G(x_i, x_j)$, в котором точки x_i и x_j связаны оператором электрон-фононного взаимодействия $D(x_i, x_j)$. В результате уравнение Дайсона для электронной функции Грина принимает стандартный вид

$$\bar{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = G^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \iint G^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') Q(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \bar{G}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'' \quad (54)$$

Самосогласованное приближение Мигдала базируется на представлении массового оператора $Q(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$ в виде

$$Q(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \approx \bar{G}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') D(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \quad (55)$$

В те же годы аналогичный вариант ССП был независимо предложен Крейчнаном [23] при исследовании влияния неоднородностей на динамическую восприимчивость неупорядоченных систем. Вывод этого ССП из разложения вершинной части функции Грина приведен в книге Кляцкина [24]. Уравнение Дайсона имеет тот же вид (54), а массовый оператор приближенно представляется в форме

$$Q(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \approx \gamma^2 \bar{G}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') K(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \quad (56)$$

где γ — среднеквадратичная флуктуация неоднородностей и $K(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$ — нормированная корреляционная функция этих неоднородностей ($K(\mathbf{x}', \mathbf{x}') = 1$).

Аналогичное ССП под названием самосогласованное борновское приближение используется в теории рассеяния электронов на примесях [22, 25, 26].

Несмотря на то что приближение Мигдала, приближение Крейчнана и самосогласованное борновское приближение предложены для совершенно различных задач, математически они идентичны и имеют одно и то же ограничение: в разложении найденной с их помощью функции Грина присутствуют все диаграммы, входящие в точные выражения для $\bar{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$, за исключением тех, которые имеют пересекающиеся линии взаимодействия/корреляции между различными точками. Поэтому будем в дальнейшем называть этот вариант, как и в работе [8], приближением непересекающихся корреляций (ПНК, noncrossing correlation approximation, NCA), понимая корреляции в широком смысле слова — и как стохастические корреляции, и как усредненные физические взаимодействия.

После перехода к \mathbf{k} -пространству, ПНК применяется в двух различных формах. В первой форме используется точное представление $\bar{G}(\mathbf{k})$ через нормированный массовый оператор $M_{\mathbf{k}} = (2\pi)^d Q(\mathbf{k})$,

$$\bar{G}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{\nu - k^2 - M_{\mathbf{k}}}, \quad (57)$$

для которого из (55) или (56) выводится приближенное уравнение самосогласования

$$M_{\mathbf{k}} \approx \gamma^2 \int \frac{S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1}{\nu - k_1^2 - M_{\mathbf{k}_1}}, \quad (58)$$

где $S(\mathbf{k})$ — трансформанта Фурье корреляционной функции $K(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$, ν — нормированная частота.

Во-второй форме формула (55) или (56) подставляется в (54), что приводит к приближенному нелинейному интегральному уравнению самосогласования для самой функции Грина $\overline{G}(\mathbf{k})$:

$$\overline{G}(\mathbf{k}) \approx G^0(\mathbf{k}) + \gamma^2 (2\pi)^{2d} G^0(\mathbf{k}) \overline{G}(\mathbf{k}) \times \int S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \overline{G}(\mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1. \quad (59)$$

Метод ПНК широко использовался как в расчетах эффектов электрон-фононного взаимодействия (см., например, [27, 28]), так и при обсуждении различных проблем гидродинамики и стохастической радиофизики (см., например, [29–32]). Упомянем также обобщение ПНК на случай неоднородности нелокальных (недиагональных) членов феноменологического гамильтониана: обменных констант в ферромагнетиках и силовых констант в упругих средах. В этом случае интегральный член уравнения Дайсона содержит не функции Грина, а их пространственные производные, а массовый оператор является матрицей, компоненты которой содержат вторые производные исходных функций Грина [10]. Заметим, что в работах [10, 32] допущена терминологическая неточность: уравнения ПНК рассматривались там, как один из вариантов другого популярного самосогласованного приближения — приближения когерентного потенциала, введенного Совеном [33] и Тейлором [34] и получившего дальнейшее развитие в многочисленных последующих работах (см., например, [35–41]).

Приближенная оценка условия применимости ПНК была проведена для задачи рассеяния электронов на примесях [22, 25, 26]:

$$(k_F l)^{-1} \ll 1, \quad (60)$$

где k_F — импульс Ферми, l — длина свободного пробега электрона. Для задачи рассеяния волн на неоднородностях сплошной среды в случае, когда основную роль играют волны в окрестности какого-либо резонансного волнового числа k_r , условие (60) может быть преобразовано к виду

$$k_c/k_r \ll 1, \quad (61)$$

где k_c — корреляционное волновое число ($k_c^{-1} = r_c$ — радиус корреляций неоднородностей). В работе [8] мы дополнили оценку применимости ПНК, рассмотрев предельный случай $k_c = 0$, когда ряд для функции Грина может быть суммирован точно. В этом случае случайные функции $\rho(\mathbf{x})$ превращаются в случайные величины, стохастические свойства кото-

рых описываются некоторой функцией распределения $f(\rho)$ (подобная модель независимых зерен в поликристалле была введена в работе [42] для расчета формы линии ферромагнитного резонанса). Для точной усредненной функции Грина функция распределения $f(\rho)$ является функцией Гаусса (модель Келдыша, см. книгу [26]) и мнимая часть функции Грина имеет вид

$$G''(\nu, \mathbf{k}) = \frac{\pi}{(2\pi)^{7/2} \sigma} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right), \quad (62)$$

где $\xi = \nu - k^2$, σ — среднеквадратичная флуктуация частоты.

С другой стороны, интегральное уравнение самосогласования ПНК при $k_c \rightarrow 0$ также решается точно и приводит к следующему выражению для усредненной мнимой части функции Грина [32]:

$$G''_{NCA}(\nu, \mathbf{k}) = \begin{cases} \frac{\sqrt{(2\sigma)^2 - \xi^2}}{(2\pi)^3 2\sigma^2}, & |\xi| \leq 2\sigma, \\ 0, & |\xi| > 2\sigma. \end{cases} \quad (63)$$

Формы функций (62) и (63) отличаются друг от друга (см. рис. 5 работы [8]). Однако для средней частоты и ее среднеквадратичного отклонения, характеризующего полуширину резонансной линии, обе функции Грина, точная (62) и приближенная (63), приводят к одинаковым результатам:

$$\langle \nu \rangle = k^2, \quad \sqrt{\langle (\nu - \langle \nu \rangle)^2 \rangle} = \sigma. \quad (64)$$

Формулы (62) и (63) будут использованы ниже при обсуждении результатов данной работы.

В работе [8] мы исследовали стохастическое взаимодействие ($\varepsilon = 0$, $\Delta\varepsilon \neq 0$) двух волновых полей. Связанная система уравнений Дайсона для усредненной спиновой \overline{G}_m и упругих \overline{G}_u функций Грина имела вид

$$\overline{G}_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = G_m^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \iint G_m^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') Q_u(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \overline{G}_m(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'', \quad (65)$$

$$\overline{G}_u(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = G_u^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \iint \frac{\partial G_u^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial z'} Q_m(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \times \frac{\partial \overline{G}_u(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_0)}{\partial z''} d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'', \quad (66)$$

где упругий массовый оператор Q_u входит в уравнение для спиновой функции Грина \overline{G}_m , а спиновый массовый оператор Q_m — в уравнение для упругой функции Грина \overline{G}_u . Для введения обобщенного

ПНК эти массовые операторы выражались через искомые функции Грина следующим образом:

$$Q_m(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \approx \gamma^2 \overline{G}_m(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') K(\mathbf{x}', \mathbf{x}''), \quad (67)$$

$$Q_u(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \approx \gamma^2 \frac{\partial^2 \overline{G}_u(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')}{\partial z' \partial z''} K(\mathbf{x}', \mathbf{x}''). \quad (68)$$

Было показано, что подстановка этих выражений в уравнения (65) и (66) и последующая итерация этих уравнений действительно приводит к схеме ПНК, в которой в разложениях функций Грина присутствуют все диаграммы, за исключением диаграмм с пересекающимися линиями корреляций.

Перейдем теперь к выводу приближенных самосогласованных уравнений для массового оператора $\hat{Q}(\mathbf{k})$. В соответствии с идеями работ [18, 23] и их развитием в работах [8, 32] мы приближенно выражаем элементы матрицы массового оператора $\hat{Q}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$ через элементы искомой функции Грина $\hat{G}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$:

$$\begin{aligned} Q_{mm}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') &\approx \gamma^2 \overline{G}_{mm}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') K(\mathbf{x}', \mathbf{x}''), \\ Q_{uu}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') &\approx \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial z' \partial z''} \overline{G}_{uu}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') K(\mathbf{x}', \mathbf{x}''), \\ Q_{um}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') &\approx \gamma^2 \sqrt{\frac{\alpha}{\mu}} \frac{\partial}{\partial z'} \times \\ &\quad \times \overline{G}_{um}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') K(\mathbf{x}', \mathbf{x}''), \\ Q_{mu}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') &\approx \gamma^2 \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} \frac{\partial}{\partial z''} \times \\ &\quad \times \overline{G}_{mu}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') K(\mathbf{x}', \mathbf{x}''). \end{aligned} \quad (69)$$

Проводя преобразование Фурье, получаем выражения для компонент тензора массового оператора в \mathbf{k} -пространстве:

$$\begin{aligned} Q_{mm}(\mathbf{k}) &\approx \gamma^2 \int \overline{G}_{mm}(\mathbf{k}_1) S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1, \\ Q_{uu}(\mathbf{k}) &\approx \gamma^2 \int k_{1z}^2 \overline{G}_{uu}(\mathbf{k}_1) S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1, \\ Q_{um}(\mathbf{k}) &\approx \gamma^2 \sqrt{\frac{\alpha}{\mu}} \int k_{1z} \overline{G}_{um}(\mathbf{k}_1) S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1, \\ Q_{mu}(\mathbf{k}) &\approx \gamma^2 \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} \int k_{1z} \overline{G}_{mu}(\mathbf{k}_1) S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1. \end{aligned} \quad (70)$$

Систему интегральных уравнений удается упростить, введя вместо Q_{um} и Q_{mu} один нормированный массовый оператор. Для этого перепишем уравнение (50) в виде

$$\hat{G}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^d \det \left| \hat{G}^{-1}(\mathbf{k}) \right|} \begin{bmatrix} A_{mm} & A_{mu} \\ A_{um} & A_{uu} \end{bmatrix}, \quad (71)$$

где

$$\begin{aligned} A_{mm} &= \nu_u - k^2 - (2\pi)^d k_z^2 Q_{mm}(\mathbf{k}), \\ A_{uu} &= \nu_m - k^2 - (2\pi)^d Q_{uu}(\mathbf{k}), \\ A_{mu} &= i \frac{\varepsilon}{\mu} M k_z + (2\pi)^d \sqrt{\frac{\alpha}{\mu}} i k_z Q_{um}(\mathbf{k}), \\ A_{um} &= -i \frac{\varepsilon}{\alpha} M k_z - (2\pi)^d \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} i k_z Q_{mu}(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (72)$$

$$\hat{G}^{-1}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} A_{uu} & -A_{mu} \\ -A_{um} & A_{mm} \end{bmatrix}. \quad (73)$$

Представим недиагональные элементы $\overline{G}_{mu}(\mathbf{k})$ и $\overline{G}_{um}(\mathbf{k})$ матрицы (71) в виде

$$\overline{G}_{mu}(\mathbf{k}) = \frac{(\varepsilon/\mu) M k_z (1 + T_{\mathbf{k}})}{(2\pi)^d \det \left| \hat{G}^{-1}(\mathbf{k}) \right|}, \quad (74)$$

$$\overline{G}_{um}(\mathbf{k}) = \frac{(\varepsilon/\alpha) M k_z (1 + T_{\mathbf{k}})}{(2\pi)^d \det \left| \hat{G}^{-1}(\mathbf{k}) \right|}, \quad (75)$$

где

$$T_{\mathbf{k}} = (2\pi)^d \frac{\sqrt{\alpha\mu}}{\varepsilon M} Q_{mu}(\mathbf{k}) = (2\pi)^d \frac{\sqrt{\alpha\mu}}{\varepsilon M} Q_{um}(\mathbf{k}). \quad (76)$$

Убедимся, что полученное равенство (76) правильно. Заменяя в формулах (74) и (75) \mathbf{k} на \mathbf{k}_1 , подставляя эти выражения в подынтегральные части уравнений (70) и домножая полученные формулы для $Q_{mu}(\mathbf{k})$ и $Q_{um}(\mathbf{k})$ на $(2\pi)^d \sqrt{\alpha\mu}/\varepsilon M$, убеждаемся, что уравнения идентичны. Вводя нормированные диагональные массовые операторы

$$M_{\mathbf{k}} = (2\pi)^d k_z^2 Q_{mm}(\mathbf{k}), \quad U_{\mathbf{k}} = (2\pi)^d Q_{uu}(\mathbf{k}), \quad (77)$$

получаем окончательный вид системы уравнений Дайсона:

$$\begin{aligned} \overline{G}_{mm}(\mathbf{k}) &= \frac{\nu_u - k^2 - M_{\mathbf{k}}}{(2\pi)^d D_{\mathbf{k}}}, \\ \overline{G}_{mu}(\mathbf{k}) &= \frac{(\varepsilon/\mu) M k_z (1 + T_{\mathbf{k}})}{(2\pi)^d D_{\mathbf{k}}}, \\ \overline{G}_{um}(\mathbf{k}) &= \frac{(\varepsilon/\alpha) M k_z (1 + T_{\mathbf{k}})}{(2\pi)^d D_{\mathbf{k}}}, \\ \overline{G}_{uu}(\mathbf{k}) &= \frac{\nu_m - k^2 - U_{\mathbf{k}}}{(2\pi)^d D_{\mathbf{k}}}, \end{aligned} \quad (78)$$

и уравнений самосогласования для массовых операторов $M_{\mathbf{k}}$, $U_{\mathbf{k}}$ и $T_{\mathbf{k}}$:

$$M_{\mathbf{k}} = \gamma^2 k_z^2 \int D_{\mathbf{k}_1}^{-1} (\nu_u - k_1^2 - M_{\mathbf{k}_1}) S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1,$$

$$U_{\mathbf{k}} = \gamma^2 \int k_{1z}^2 D_{\mathbf{k}_1}^{-1} (\nu_m - k_1^2 - U_{\mathbf{k}_1}) S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1, \quad (79)$$

$$T_{\mathbf{k}} = \gamma^2 \int k_{1z}^2 D_{\mathbf{k}_1}^{-1} (1 + T_{\mathbf{k}_1}) S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1,$$

где

$$D_{\mathbf{k}_1} = (\nu_u - k_1^2 - M_{\mathbf{k}_1})(\nu_m - k_1^2 - U_{\mathbf{k}_1}) - \gamma_0^2 k_{1z}^2 (1 + T_{\mathbf{k}_1})^2.$$

Поскольку все искомые переменные $M_{\mathbf{k}}$, $U_{\mathbf{k}}$ и $T_{\mathbf{k}}$ входят и в знаменатели каждого подынтегрального выражения, уравнения (79) представляют собой систему сложных связанных интегральных уравнений относительно этих переменных. Эта система может быть представлена системой бесконечных ветвящихся цепных дробей.

Для численного анализа удобно записать уравнения (79) в виде рекуррентных формул:

$$M_{\mathbf{k}}^{(n)} = \gamma^2 k_z^2 \int \frac{1}{D_{\mathbf{k}_1}^{(n-1)}} (\nu_u - k_1^2 - M_{\mathbf{k}_1}^{(n-1)}) \times$$

$$\times S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1,$$

$$U_{\mathbf{k}}^{(n)} = \gamma^2 \int k_{1z}^2 \frac{1}{D_{\mathbf{k}_1}^{(n-1)}} (\nu_m - k_1^2 - U_{\mathbf{k}_1}^{(n-1)}) \times$$

$$\times S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1, \quad (80)$$

$$T_{\mathbf{k}}^{(n)} = \gamma^2 \int k_{1z}^2 \frac{1}{D_{\mathbf{k}_1}^{(n-1)}} (1 + T_{\mathbf{k}_1}^{(n-1)}) \times$$

$$\times S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1,$$

где

$$D_{\mathbf{k}_1}^{(n-1)} = (\nu_u - k_1^2 - M_{\mathbf{k}_1}^{(n-1)}) (\nu_m - k_1^2 - U_{\mathbf{k}_1}^{(n-1)}) -$$

$$- \gamma_0^2 k_{1z}^2 (1 + T_{\mathbf{k}_1}^{(n-1)})^2, \quad (81)$$

индекс n соответствует числу учтенных звеньев цепных дробей.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЧНОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА

В дальнейшем в этой работе ограничимся анализом системы (80) для одномерных неоднородностей параметра связи $\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon(z)$. Тогда в уравнениях (78) и (79) $d = 1$ и вектор \mathbf{k} имеет одну компоненту $k_z = k$.

Моделируя корреляционные свойства случайной функции $\rho(x)$ экспоненциальной корреляционной функцией, получаем в одномерном случае для $K(r)$ и $S(k)$ выражения

$$K(r) = e^{-k_c r}, \quad S(k) = \frac{1}{\pi} \frac{k_c}{k_c^2 + k^2}, \quad (82)$$

где $r = |x - x'|$, k_c — корреляционное волновое число неоднородностей ($r_c = k_c^{-1}$ — корреляционный радиус). Для начала ограничимся первым звеном цепной дроби, положив $n = 1$ в уравнениях (80). Тогда эти уравнения примут вид, соответствующий приближению Бурре [1]:

$$M_k^{(1)} = \gamma^2 k^2 \int \frac{1}{D_{k_1}^0} (\nu_u - k_1^2) S(k - k_1) dk_1,$$

$$U_k^{(1)} = \gamma^2 \int k_1^2 \frac{1}{D_{k_1}^0} (\nu_m - k_1^2) S(k - k_1) dk_1, \quad (83)$$

$$T_k^{(1)} = \gamma^2 \int k_1^2 \frac{1}{D_{k_1}^0} S(k - k_1) dk_1.$$

Заменяя k на k_1 в формуле (40), представим $D_{k_1}^0$ в виде

$$D_{k_1}^0 = (k_1^2 - h_1^2)(k_1^2 - h_2^2), \quad (84)$$

где h_1 и h_2 определяются формулами (41). Подставляя $S(k)$ в уравнения (83) и выполняя интегрирование с помощью теории вычетов, получаем M_k , U_k и T_k в первом приближении:

$$M_k^{(1)} = \gamma^2 k^2 \frac{(h_1 + h_2)(h_1 h_2 A_u - 2\nu_u k_c^2) - ik_c \{h_1 h_2 A_u - \nu_u [B - (h_1 + h_2)^2 + h_1^2 h_2^2]\}}{(h_1 + h_2) h_1 h_2 [(h_1 - ik_c)^2 - k^2] [(h_2 - ik_c)^2 - k^2]},$$

$$U_k^{(1)} = \gamma^2 \frac{(h_1 + h_2)(A_m B - 2h_1 h_2 k_c^2) + ik_c \{h_1 h_2 A_m - B [\nu_m + (h_1 + h_2)^2] + h_1^2 h_2^2\}}{(h_1 + h_2) [(h_1 - ik_c)^2 - k^2] [(h_2 - ik_c)^2 - k^2]}, \quad (85)$$

$$T_k^{(1)} = \gamma^2 \frac{(h_1 + h_2) B - ik_c (B - h_1 h_2)}{(h_1 + h_2) [(h_1 - ik_c)^2 - k^2] [(h_2 - ik_c)^2 - k^2]},$$

где $A_{m,u} = \nu_{u,m} - k^2 - k_c^2$, $B = k^2 + k_c^2$. Возможность получения первого приближения M_k , U_k и T_k в аналитическом виде имеет то преимущество, что аналитический вид уже в первом приближении содержит в знаменателях члены затухания, пропорциональные ik_c . Поэтому отпадает необходимость вводить искусственный член затухания в уравнения (83) для устранения расходимости при выполнении дальнейших численных расчетов.

Подставляя выражения (85) в уравнения (78), получаем элементы матричной функции Грина $\hat{G}^{(1)}$ в первом приближении. Используя далее формулы (80) и делая последовательные подстановки, получаем бесконечные ветвящиеся цепные дроби. При численном расчете каждого следующего приближения n количество пиков на мнимых частях элементов функции Грина (78) увеличивается: при $n = 1$ в первом приближении (приближение Бурре) получаем четыре пика на каждом диагональном элементе $G_{mm}(\omega)$ и $G_{uu}(\omega)$, при $n = 2$ — шесть пиков, при $n = 3$ — восемь пиков и т.д. Площадь под каждой кривой в процессе увеличения числа последовательных подстановок сохраняется, и каждая кривая стремится к своему предельному значению. На всех представленных ниже рисунках приводится вид элементов матричной функции Грина, соответствующий значению n , обеспечивающему сходимость процесса последовательных приближений. Это значение n зависит от выбранных параметров системы, главным образом от значения k_c . Для больших k_c может быть достаточно значения n , равного нескольким единицам; для малых k_c требуется выполнить десятки и даже сотни последовательных численных интегрирований рекуррентных соотношений (80).

С ростом неоднородностей величина ε уменьшается от своего начального значения ε_0 до нуля, а $\Delta\varepsilon$ увеличивается от нуля до некоторого максимального значения ε'_0 , близкого к ε_0 . Для простоты положим $\varepsilon'_0 = \varepsilon_0$ и исследуем вид диагональных и недиагональных элементов функций Грина в точке кроссинг-резонанса $k = k_r$ с ростом $\Delta\varepsilon$ и уменьшением ε при сохранении суммы квадратов этих величин,

$$\varepsilon^2 + (\Delta\varepsilon)^2 = \varepsilon_0^2. \quad (86)$$

Разумеется, образцы, в которых изменением состава или способа обработки будут экспериментально реализованы промежуточные состояния между двумя предельными — однородным ($\varepsilon = \varepsilon_0$, $\Delta\varepsilon = 0$) и полностью стохастизованным ($\varepsilon = 0$, $\Delta\varepsilon \neq 0$) — не обязаны подчиняться закономерности (86). Эта закономерность введена лишь для того, чтобы упоря-

дочно рассмотреть все промежуточные состояния с любым соотношением $(\varepsilon/\varepsilon_0)^2$ и $(\Delta\varepsilon/\varepsilon_0)^2$.

На рис. 3 показаны несколько характерных кадров изменения формы мнимых частей функций Грина $G''_{mm}(\omega)$ (штриховые кривые) и $G''_{uu}(\omega)$ (сплошные кривые) с ростом $\Delta\varepsilon$ для малого значения k_c , соответствующего $\kappa_c \equiv k_c/k_r = 0.8 \cdot 10^{-2}$. Рисунок 3а соответствует параметру связи, близкому к однородному. Он описывает стандартное расщепление каждой функции Грина на два резонансных пика, соответствующее снятию вырождения частот в спектре спиновых и упругих волн в точке кроссинг-резонанса. Пики находятся на расстоянии Λ , пропорциональном параметру связи ε . Ширина пиков обусловлена как затуханием, пропорциональным величине корреляционного радиуса k_c , так и стохастическим распределением частот, пропорциональным $\Delta\varepsilon$, причем вклад последнего при данном соотношении между $\Delta\varepsilon$ и κ_c уже преобладает. С ростом $\Delta\varepsilon$ (рис. 3б, в) ширина пиков, обусловленная стохастическим распределением частот, возрастает, и пики постепенно сближаются друг с другом, пока не сливаются в один широкий пик (рис. 3г). На вершине этого широкого пика начинает формироваться тонкая структура, которая имеет различную форму для функций $G''_{mm}(\omega)$ и $G''_{uu}(\omega)$: на вершине широкого пика функции $G''_{mm}(\omega)$ формируется узкий резонанс, а на вершине $G''_{uu}(\omega)$ — узкий антирезонанс. С дальнейшим ростом $\Delta\varepsilon$ (рис. 3д) продолжается формирование тонкой структуры, а при полной стохастизации системы (рис. 3е, $\Delta\varepsilon = \varepsilon_0$, $\varepsilon = 0$) возникает картина, подробно исследованная в работе [8]. В работе [8] было показано, что в состоянии полной стохастизации параметра порядка резонанс и антирезонанс тонкой структуры обладают примерно зеркальной симметрией. Ширины линий и того, и другого пропорциональны k_c и при малых k_c могут быть очень узкими по сравнению с теми, которые показаны на рис. 3е-г. С ростом k_c ширины пиков резонанса и антирезонанса тонкой структуры возрастают, а ширина широкого пика уменьшается благодаря эффекту обменного сужения. В результате тонкая структура исчезает сначала на функции $G''_{mm}(\omega)$, а затем на функции $G''_{uu}(\omega)$. Именно эта величина k_c , при которой для $\Delta\varepsilon = \varepsilon_0$ и $\varepsilon = 0$ тонкая структура должна исчезать только на функции $G''_{mm}(\omega)$, выбрана для серии кадров, приведенных на рис. 4. Здесь пики кроссинг-резонанса на рис. 4а, б и в значительно более узкие и высокие по сравнению с приведенными на рис. 3а, б и в (обращаем внимание на разницу масштабов вертикальных осей этих рисунков). Это обусловлено эффектом обменного су-

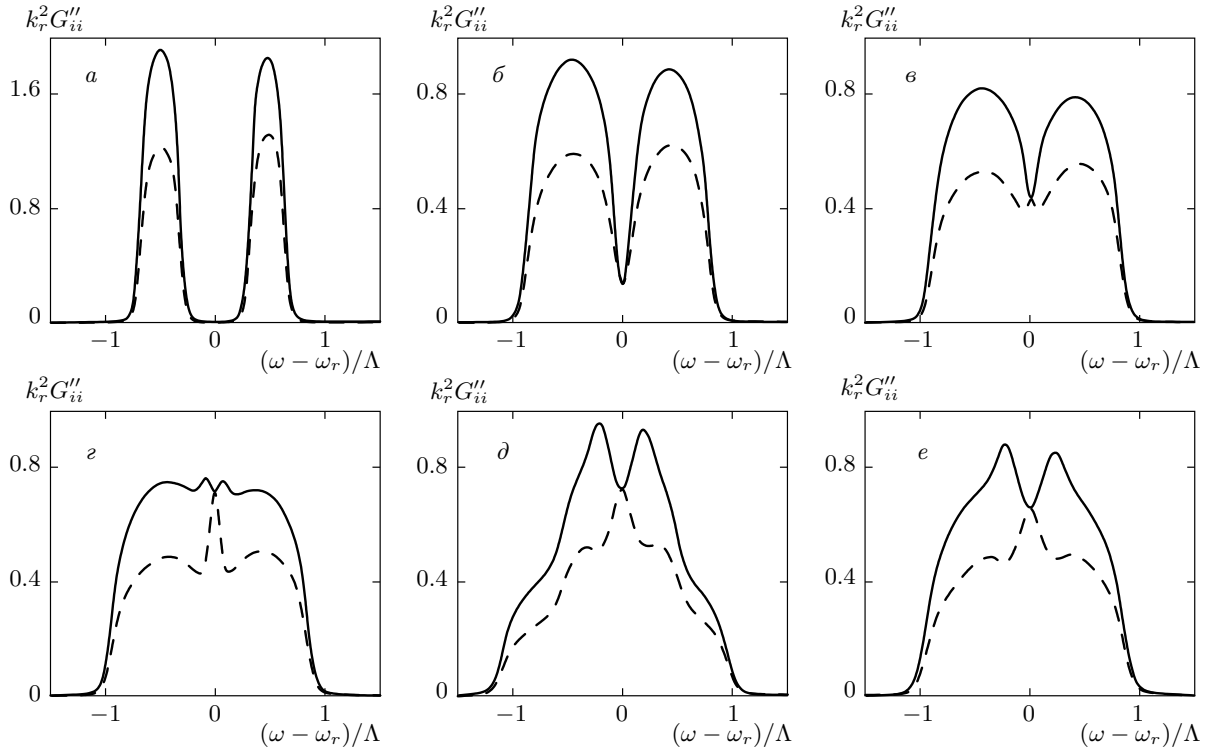


Рис. 3. Мнимые части диагональных элементов матричной функции Грина спиновых $G''_{mm}(\omega)$ (штриховые кривые) и упругих $G''_{uu}(\omega)$ (сплошные кривые) волн при $\kappa_c = k_c/k_r = 0.8 \cdot 10^{-2}$ и различных соотношениях между $(\epsilon/\epsilon_0)^2$ и $(\Delta\epsilon/\epsilon_0)^2$: *a* — 0.95/0.05; *б* — 0.8/0.2; *в* — 0.75/0.25; *г* — 0.7/0.3; *д* — 0.25/0.75; *е* — 0/1. Масштаб вертикальной оси рис. 3*a* вдвое больше, чем соответствующих осей рис. 3*б–е*

жения, который, благодаря большей величине k_c , на рис. 4 проявляется сильнее, чем на рис. 3. С ростом $\Delta\epsilon$ происходит сближение и уширение этих пиков, формируется тонкая структура (рис. 4*г*) с более широкими линиями резонанса и антирезонанса, чем на рис. 3. На рис. 4*д* начинается «расформирование» этой тонкой структуры, и на рис. 4*е*, соответствующем результатам работы [8], тонкая структура на функции $G''_{mm}(\omega)$ уже отсутствует.

Для обсуждения полученных результатов рассмотрим сначала предельный случай, соответствующий бесконечному радиусу корреляций ($k_c = 0$). Тогда в интегральных уравнениях согласования для массовых операторов (79), $S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \rightarrow \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)$ интегралы берутся точно и уравнения (79) принимают вид алгебраической системы:

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{k}} &= \gamma^2 k_z^2 D_{\mathbf{k}}^{-1} (\nu_u - k^2 - M_{\mathbf{k}}), \\ U_{\mathbf{k}} &= \gamma^2 k_z^2 D_{\mathbf{k}}^{-1} (\nu_m - k^2 - U_{\mathbf{k}}), \\ T_{\mathbf{k}} &= \gamma^2 k_z^2 D_{\mathbf{k}}^{-1} (1 + T_{\mathbf{k}}). \end{aligned} \quad (87)$$

Из первых двух уравнений в (87) следует, что

$$M_{\mathbf{k}}(\nu_m - k^2 - U_{\mathbf{k}}) = U_{\mathbf{k}}(\nu_u - k^2 - M_{\mathbf{k}}). \quad (88)$$

Поскольку произведение $M_{\mathbf{k}}U_{\mathbf{k}}$ сокращается, из (88) следует, что

$$\frac{M_{\mathbf{k}}}{U_{\mathbf{k}}} = \frac{\nu_m - k^2}{\nu_u - k^2}. \quad (89)$$

Переходя в правой части уравнения (89) от нормированных частот к ω и используя выражения (78), получаем, что в окрестности частоты кроссинг-резонанса $\omega = \omega_r$ отношение диагональных элементов \bar{G}_{mm} и \bar{G}_{uu} при $k_c = 0$ определяется выражением

$$\frac{\bar{G}_{mm}(\omega, k_r)}{\bar{G}_{uu}(\omega, k_r)} = \frac{M_{k_r}}{U_{k_r}} = \frac{\nu_m}{\nu_u}, \quad (90)$$

где $\nu_m = 2\alpha g M k_r$ — скорость спиновых волн в области кроссинг-резонанса. В окрестности точки первого пересечения дисперсионных кривых спиновых и упругих волн выполняется неравенство $\nu_m < \nu_u$. Поэтому при $k_c = 0$ из (90) следует, что в этой окрестности должно выполняться неравенство

$$\bar{G}_{mm}(\omega) < \bar{G}_{uu}(\omega). \quad (91)$$

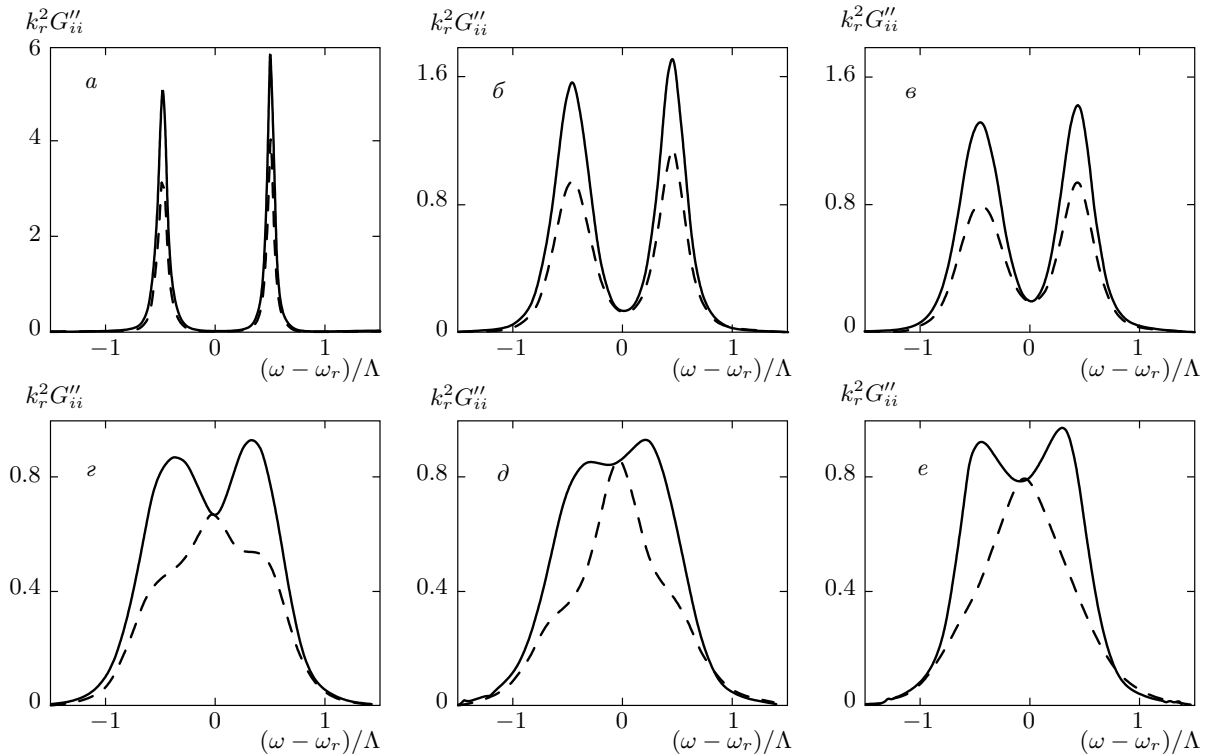


Рис. 4. Мнимые части диагональных элементов матричной функции Грина спиновых $G''_{mm}(\omega)$ (штриховые кривые) и упругих $G''_{uu}(\omega)$ (сплошные кривые) волн при $k_c = 0.8 \cdot 10^{-1}$ и различных соотношениях между $(\varepsilon/\varepsilon_0)^2$ и $(\Delta\varepsilon/\varepsilon_0)^2$: $a - 0.95/0.05$; $b - 0.8/0.2$; $в - 0.75/0.25$; $г - 0.5/0.5$; $д - 0.25/0.75$; $e - 0/1$. Масштабы вертикальных осей рис. 4а-в отличаются от масштаба осей рис. 4г-е

Таким образом, закономерности (90) и (91), полученные в работе [8] для случая $\varepsilon = 0$, остаются справедливыми при всех соотношениях между ε и $\Delta\varepsilon$.

С другой стороны, из рис. 3 и 4 видно, что при $k_c \neq 0$ в одной точке $\omega = \omega_r$ выполняется другая закономерность:

$$\overline{G}_{mm}(\omega_r) = \overline{G}_{uu}(\omega_r), \tag{92}$$

в то время как при всех других значениях частоты по-прежнему справедливо неравенство (91). Таким образом, закономерность (92), полученная в работе [8] для случая $\varepsilon = 0$ и любых значений $k_c \neq 0$, остается справедливой при всех соотношениях между ε и $\Delta\varepsilon$. Такая универсальность этой закономерности подкрепляет предположение, сделанное в работе [8], что она является следствием общего закона равномерного распределения энергии между флуктуационными колебаниями обоих физических полей в точке кроссинг-резонанса.

В свете результатов данной работы физическая картина выглядит следующим образом. Значение $k_c = 0$ соответствует модели независимых зерен в

поликристалле, которая для двух взаимодействующих полей представляет собой ансамбль однородных образцов, различающихся только значением параметра связи в каждом n -м образце. Спектр связанных магнитоупругих полей в каждом образце имеет щель $\Lambda_n \propto |\varepsilon_n|$ в точке кроссинг-резонанса $k = k_r$. Поля в различных образцах независимы друг от друга. Вся система характеризуется усредненной матричной функцией Грина $\overline{G}(\omega, \mathbf{k})$, которая зависит от усредненных параметров системы: среднего значения $\varepsilon = \langle \varepsilon_n \rangle$ и среднеквадратичного отклонения $\Delta\varepsilon = \langle \Delta\varepsilon_n \rangle$ параметра связи. Пики диагональных элементов $\overline{G}_{mm}(\omega, \mathbf{k})$ и $\overline{G}_{uu}(\omega, \mathbf{k})$ функции Грина в области кроссинг-резонанса раздвинуты на расстояние $\Lambda \propto \varepsilon$ и имеют ширину $\Delta\omega \propto \Delta\varepsilon$. Затухание в системе отсутствует. Для всех частот, лежащих внутри этих пиков, выполняется неравенство (91).

При появлении сколь угодно малого $k_c \neq 0$ возникают флуктуационные составляющие у спинового и упругого полей и взаимодействие как между этими составляющими, так и между каждой из них и когерентными (усредненными) составляющими этих

полей. В точке кроссинг-резонанса $k = k_r$, $\omega = \omega_r$ должен выполняться закон равномерного распределения энергии между флуктуационными составляющими обоих полей, из которого, видимо, и следует равенство (92), полученное при численных расчетах. Как преобразуются функции Грина для подчинения этому закону? Это показано на рис. 5, который соответствует тем же значениям параметров ε и $\Delta\varepsilon$, что и рис. 3d и 4d, но на порядок меньшему, чем на рис. 3d, значению $\kappa_c = 0.8 \cdot 10^{-3}$. Функция $\overline{G}_{mm}''(\omega)$ выпускает тонкое «щупальце» (резонанс тонкой структуры) в точке $\omega = \omega_r$ вверх, функция $\overline{G}_{uu}''(\omega)$ опускает такое же щупальце (антирезонанс тонкой структуры) в этой же точке вниз. Эти щупальца соприкасаются между максимумами широких пиков обеих функций, и требуемое равенство выполняется в точке $\omega = \omega_r$. При этом для всех других значений частоты, кроме $\omega = \omega_r$, по-прежнему остается справедливым неравенство $\overline{G}_{mm}''(\omega) < \overline{G}_{uu}''(\omega)$ и форма функций практически не изменяется по сравнению со случаем $k_c = 0$. В свете такой ин-

терпретации естественным является раннее формирование тонкой структуры при увеличении $\Delta\varepsilon$: она должна возникнуть, как только станет заметной разница между функциями $\overline{G}_{mm}''(\omega)$ и $\overline{G}_{uu}''(\omega)$ в окрестности $\omega = \omega_r$. На рис. 3e она возникает уже при $(\Delta\varepsilon/\varepsilon_0)^2 = 0.3$, на рис. 4e имеет хорошо развитый вид при $(\Delta\varepsilon/\varepsilon_0)^2 = 0.5$.

Неожиданным эффектом явилось появление изгибов на склонах уже сформировавшегося широкого пика (рис. 3d, 4d и 5). Так как физических причин для возникновения такого изгиба склонов пика не видно, было предположено, что это проявление дефекта метода ПНК. С целью проверки этого предположения была рассмотрена простая модель суммирования двух невзаимодействующих пиков, $G_{\pm}''(\nu)$, максимумы которых находятся на расстоянии, меньшем величины ширин этих пиков. При $k_c = 0$ такая система двух пиков в методе ПНК для одномерных неоднородностей описывается, согласно (63), выражениями

$$\overline{G}_{\pm}''(\nu, k) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\sigma^2} \sqrt{(2\sigma)^2 - \left(\xi \pm \frac{\xi_0}{2}\right)^2}, & \left|\xi \pm \frac{\xi_0}{2}\right| \leq 2\sigma, \\ 0, & \left|\xi \pm \frac{\xi_0}{2}\right| > 2\sigma, \end{cases} \quad (93)$$

где ξ_0 — расстояние между пиками. Точные функции Грина при $k_c = 0$ в этом случае для одномерных неоднородностей, согласно (64), определяются формулами

$$\overline{G}_{\pm}''(\nu, k) = \frac{\pi}{(2\pi)^{5/2}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\xi \pm \frac{\xi_0}{2}\right)^2\right]. \quad (94)$$

Вид этих функций (штриховые кривые) и огибающих их сумм (сплошные кривые) приведен на рис. 6 при $\xi_0 = \sigma/2$. Видно, что сумма точных (гауссовых) пиков приводит к плавным склонам результирующего пика (рис. 6b), а сумма пиков, соответствующих ПНК, приводит к появлению изломов на склонах результирующего пика (рис. 6a). Конечно, эта модель не передает всех особенностей реально взаимодействующих (и вызванных этим взаимодействием) пиков, приведенных на рис. 3–5. Однако она однозначно показывает, что изгибы на склонах широкого пика на рис. 3e, 4e и 5 действительно являются проявлением дефекта метода ПНК. На других кадрах рис. 3 и 4 этот дефект не проявляется: либо

расстояние между пиками еще велико (a, b, c и d), либо оно равно нулю (f). Из сравнения рис. 3d, 4d и 5 видно, что дефект метода ПНК наиболее сильно проявляется для малых k_c (рис. 5, $\kappa_c = 0.8 \cdot 10^{-3}$) и постепенно сглаживается с ростом этого параметра, т. е. с ростом затухания волн (рис. 3d, $\kappa_c = 0.8 \cdot 10^{-2}$; рис. 4d, $\kappa_c = 0.8 \cdot 10^{-1}$).

Из формул (78) следует, что недиагональные элементы функции Грина имеют одинаковую частотную зависимость. Поэтому при исследовании недиагональных элементов рассчитывалась лишь одна величина $G_{ij}(\omega)$, связанная с G_{mu} и G_{um} соотношениями

$$G_{ij}(\omega) = \sqrt{\frac{\mu}{\alpha}} G_{mu}(\omega) = \sqrt{\frac{\alpha}{\mu}} G_{um}(\omega). \quad (95)$$

Действительная и мнимая части перенормированного недиагонального элемента $G_{ij}(\omega)$ при различных соотношениях между средним значением ε и среднеквадратичной флуктуацией $\Delta\varepsilon$ параметра связи показаны на рис. 7. Поскольку $G_{ij}(\omega) \sim \varepsilon$, с рос-

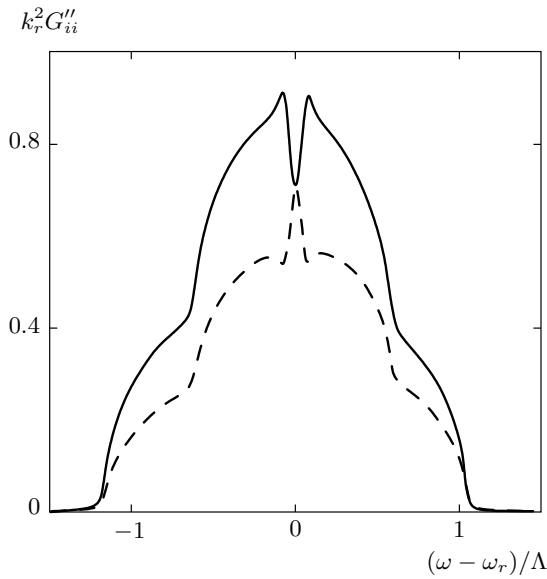


Рис. 5. Мнимые части диагональных элементов матричной функции Грина спиновых $G''_{mm}(\omega)$ (штриховая кривая) и упругих $G''_{uu}(\omega)$ (сплошная кривая) волн при $k_c = 0.8 \cdot 10^{-3}$ и том же соотношении между ε и $\Delta\varepsilon$, что и на рис. 3д и 4д

том $\Delta\varepsilon$ и уменьшением ε амплитуды как $G'_{ij}(\omega)$, так и $G''_{ij}(\omega)$ уменьшаются и обращаются в нуль при $\varepsilon \rightarrow 0$. Из рис. 7б видно, что пики мнимой части недиагональных элементов с ростом $\Delta\varepsilon$ сначала сближаются и уширяются (тонкая сплошная, штриховая и штрихпунктирная кривые), как и пики диагональных элементов на рис. 3 и 4. Однако при дальнейшем росте $\Delta\varepsilon$ наблюдается эффект «расталкивания» пиков (штриховая и толстая сплошная кривые). Эффект расталкивания кажущийся. При суммировании наползающих друг на друга уширяющихся пиков разных знаков происходит взаимная компенсация их внутренних частей, а внешние части пиков остаются нескомпенсированными, что и приводит к увеличению расстояния между их нескомпенсированными частями. Проявление этого эффекта усугубляется и рассмотренным выше дефектом метода ПНК, искажающим форму сближающихся пиков.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе развито самосогласованное приближение (приближение непересекающихся корреляций) для случая произвольного соотношения между средним ε и среднеквадратичным $\Delta\varepsilon$ значениями параметра связи между двумя волновыми полями раз-

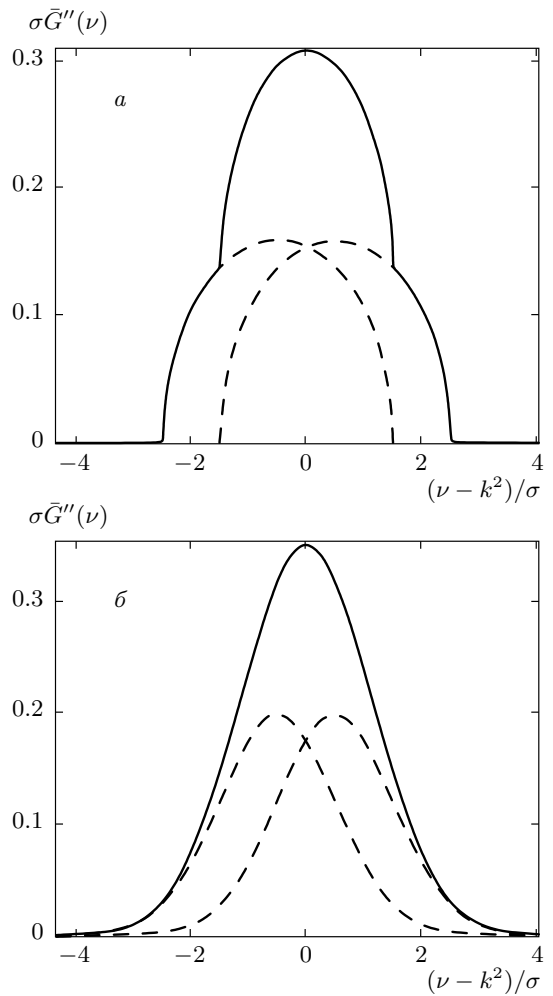


Рис. 6. Огибающая (сплошная кривая) двух невзаимодействующих резонансных пиков (штриховые кривые), соответствующих при $k_c = 0$ модели ПНК (а) и точному суммированию ряда функций Грина (б)

личной физической природы. Для определенности исследование проводилось на примере модельной задачи, соответствующей взаимодействию спиновых и упругих волн.

Из-за отличия от нуля среднего значения параметра взаимодействия ε исходная функция Грина $\hat{G}_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ является матричной функцией и описывает связанные магнитоупругие волны в однородной среде. Таким образом, в отличие от однополевых ситуаций, а также от случая чисто стохастического взаимодействия между волновыми полями ($\varepsilon = 0, \Delta\varepsilon \neq 0$), рассмотренного в работах [6–8], в данной работе формализм функций Грина развивается на фоне исходной системы связанных волновых

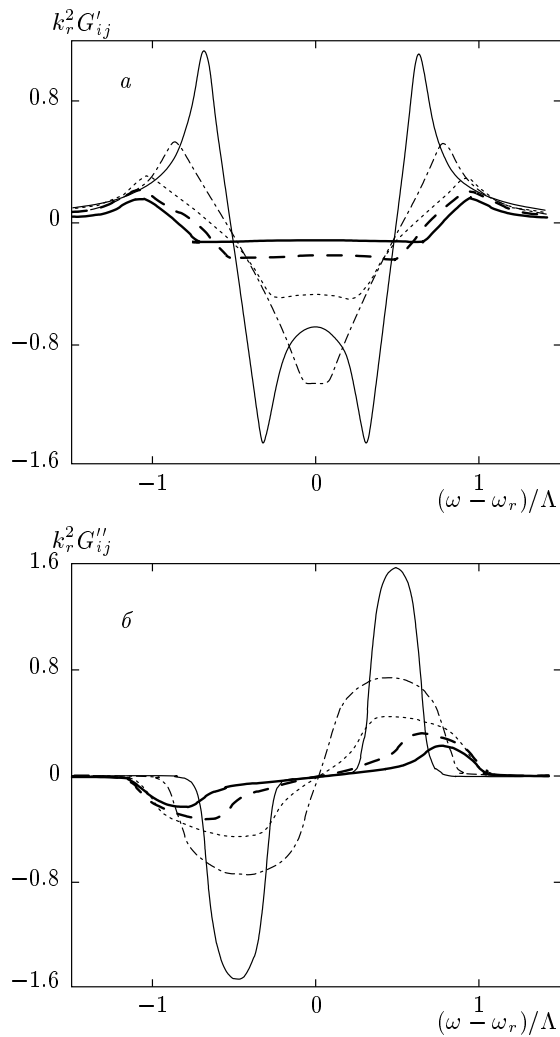


Рис. 7. Действительная (а) и мнимая (б) части недиагонального элемента матричной функции Грина при $\kappa_c = 0.8 \cdot 10^{-2}$ и различных соотношениях между $(\epsilon/\epsilon_0)^2$ и $(\Delta\epsilon/\epsilon_0)^2$: 0.95/0.05 — тонкие сплошные кривые; 0.8/0.2 — штрихпунктирные кривые; 0.5/0.5 — пунктирные кривые; 0.25/0.75 — штриховые кривые и 0.1/0.9 — толстые сплошные кривые

полей. Это приводит к тому, что в обобщенном матричном уравнении Дайсона каждый элемент усредненной матричной функции Грина $\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ выражается через все четыре элемента матричного оператора $\hat{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$. Обобщение ПНК на эту ситуацию приводит к системе четырех связанных интегральных уравнений для элементов массового оператора в \mathbf{k} -пространстве, которую удается свести к системе трех связанных интегральных уравнений для нормированных спинового $M_{\mathbf{k}}$, упругого $U_{\mathbf{k}}$ и недиагонального $T_{\mathbf{k}}$ массовых операторов.

Развитое ПНК используется для исследования диагональных $\overline{G}_{mm}(\omega, k)$ и $\overline{G}_{uu}(\omega, k)$ и недиагональных $\overline{G}_{mu}(\omega, k)$ и $\overline{G}_{um}(\omega, k)$ элементов усредненной тензорной функции Грина $\overline{G}(\omega, k)$ связанных магнитоупругих волн в точке магнитоупругого резонанса $k = k_r$, соответствующей точке пересечения невозмущенных дисперсионных кривых спиновых и упругих волн. Исследовано изменение формы этих функций с изменением соотношения между средним значением ϵ и среднеквадратичной флуктуацией $\Delta\epsilon$ параметра связи во всем диапазоне изменений при условии сохранения суммы их квадратов $(\epsilon^2 + (\Delta\epsilon)^2 = \epsilon_0^2)$. Таким образом, исследовано влияние всех промежуточных степеней беспорядка параметра взаимодействия, начиная с полностью упорядоченного случая ($\epsilon = \epsilon_0, \Delta\epsilon = 0$) и кончая случаем полной стохастизации этого параметра ($\epsilon = 0, \Delta\epsilon = \epsilon_0$). С ростом $\Delta\epsilon$ возрастает ширина обоих резонансных пиков на мнимых частях каждой из диагональных функций $\overline{G}_{mm}''(\omega)$ и $\overline{G}_{uu}''(\omega)$, пики сближаются и сливаются в один широкий пик. На вершинах широких пиков уже при $(\Delta\epsilon/\epsilon_0)^2 > 0.25-0.40$ начинает формироваться тонкая структура: узкий резонанс на зависимости $\overline{G}_{mm}''(\omega)$ и узкий антирезонанс на $\overline{G}_{uu}''(\omega)$. В зависимости от величины k_c эта тонкая структура может как сохраниться до случая полной стохастизации, так и исчезнуть при $\epsilon = 0$ на одной или на обеих функциях Грина. Амплитуды пиков на действительных и мнимых частях недиагональных функций Грина $\overline{G}_{mu}''(\omega)$ и $\overline{G}_{um}''(\omega)$ уменьшаются с ростом $\Delta\epsilon$ и обращаются в нуль при $\Delta\epsilon = \epsilon_0$: перекрестное возбуждение спиновых и упругих элементов магнитоупругих колебаний в полностью стохастизованной системе отсутствует.

Показано, что установленная в работе [8] для случая $\epsilon = 0$ закономерность: равенство величин функций спиновых и упругих составляющих магнитоупругих волн в точке кроссинг-резонанса, $\overline{G}_{mm}''(\omega_r) = \overline{G}_{uu}''(\omega_r)$, выполняется при любых соотношениях между ϵ и $\Delta\epsilon$. Для выполнения этого соотношения и возникает тонкая структура: узкий максимум на меньшей (при $\omega \neq \omega_r$) из функций совпадает с узким минимумом на большей (при $\omega \neq \omega_r$) функции. Другая закономерность, установленная в работе [8], — соотношение между $\overline{G}_{mm}''(\omega_r)$ и $\overline{G}_{uu}''(\omega_r)$ при $k_c = 0$ пропорционально отношению скоростей соответствующих волн, — также выполняется при любых соотношениях между ϵ и $\Delta\epsilon$.

В настоящей работе рассматривается случай первого пересечения дисперсионных кривых, которому соответствует неравенство $G_{mm}''(\omega) < G_{uu}''(\omega)$

при $\omega \neq \omega_r$. В точке второго пересечения имеем $G''_{mm}(\omega) > G''_{uu}(\omega)$, и вся картина тонкой структуры изменяется на противоположную: узкий резонанс возникает на зависимости $G''_{uu}(\omega)$, а узкий антирезонанс — на кривой $G''_{mm}(\omega)$. Исследование в данной работе проводилось для кроссинг-резонанса спиновых и упругих волн. Для кроссинг-резонанса волн или квазичастиц другой природы конкретные соотношения будут иметь другую форму. Однако общий характер изменения динамических восприимчивостей с ростом $\Delta\varepsilon$ и уменьшением ε должен остаться неизменным: возрастание ширины пиков на мнимых частях диагональных элементов функций Грина связанных волновых полей; уменьшение промежутка между этими пиками и слияние их в один широкий пик, ширина которого пропорциональна $\Delta\varepsilon$; формирование тонкой структуры в виде узкого резонанса на вершине меньшего из диагональных элементов функций Грина и узкого антирезонанса на вершине большего элемента; рост ширины пиков тонкой структуры с ростом k_c и исчезновение этих пиков при больших k_c ; равенство мнимых частей диагональных элементов функции Грина волновых полей в точке пересечения дисперсионных кривых $k = k_r$, $\omega = \omega_r$; уменьшение амплитуд недиагональных элементов функции Грина до нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В работе исследованы также недостатки метода ПНК, проявляющиеся при применении его к системам связанных волновых полей. В таких системах функций Грина обоих полей в области кроссинг-резонанса расщепляются на два резонансных пика, сближающихся и сливающихся в один с уменьшением ε и ростом $\Delta\varepsilon$. В отличие от точных функций Грина, пики функций Грина в ПНК описываются не гауссовой функцией, а функцией (63). Это приводит к тому, что при сближении пиков на расстоянии, меньшем ширины пиков, на склонах пиков функций Грина, рассчитанных методом ПНК, возникает ложный эффект: появление дополнительных изгибов, искажающих форму этих пиков. Эти искажения уменьшаются и исчезают с ростом k_c .

Экспериментальное обнаружение предсказанных в работе эффектов представляло бы наибольший интерес для сред с малым k_c и достаточным превышением скорости волн одного поля над скоростью волн другого поля при $k = k_r$. Первое приводит к малым ширинам линий, а второе — к большим амплитудам пиков резонанса и антирезонанса тонкой структуры.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы № 24.29 Президиума РАН, гранта для

молодых ученых фонда «Династия», Государственного контракта № 14.В37.21.0730 по Федеральной целевой программе и гранта СФУ по заданию Министерства образования и науки РФ.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. C. Bourret, *Nuovo Cim.* **26**, 1 (1962).
2. С. М. Рытов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, *Введение в статистическую радиофизику (часть II: Случайные поля)*, Наука, Москва (1978).
3. V. A. Ignatchenko and L. I. Deich, *Phys. Rev. B* **50**, 16364 (1994).
4. Л. И. Дейч, В. А. Игнатченко, *ЖЭТФ* **107**, 842 (1995).
5. L. I. Deich and A. A. Lisyansky, *Phys. Lett. A* **220**, 125 (1996).
6. V. A. Ignatchenko and D. S. Polukhin, *Sol. St. Phen.* **168–169**, 101 (2011).
7. V. A. Ignatchenko and D. S. Polukhin, *Sol. St. Phen.* **190**, 51 (2012).
8. В. А. Игнатченко, Д. С. Полухин, *ЖЭТФ* **143**, 238 (2013).
9. V. A. Ignatchenko, M. V. Erementchouk, A. A. Maradudin, and L. I. Deych, *Phys. Rev. B* **59**, 9185 (1999).
10. V. A. Ignatchenko and V. A. Felk, *Phys. Rev. B* **74**, 174415 (2006).
11. А. И. Ахиезер, в сб. *Тезисы докладов и выступлений на совещании по физике магнитных явлений*, Москва, (23–31 Май, 1956), Металлургиздат, Свердловск (1956).
12. Е. А. Туров, Ю. П. Ирхин, *ФММ* **3**, 15 (1956).
13. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, *ЖЭТФ* **35**, 228 (1958).
14. С. Kittel, *Phys. Rev.* **110**, 835 (1958).
15. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, М. И. Каганов, *УФН* **71**, 533 (1960).
16. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, *Спиновые волны*, Наука, Москва (1967).
17. В. В. Леманов, в сб. *Физика магнитных диэлектриков*, под ред. Г. А. Смоленского, Наука, Ленинград (1975), с. 85.
18. А. Б. Мигдал, *ЖЭТФ* **34**, 1438 (1958).

19. D. Pines, *The Many-Body Problem*, W. A. Benjamin, Inc., New York (1961).
20. D. Pines, in *Polarons and Excitons*, ed. by C. G. Kuper and G. D. Whitfield, Plenum Press, New York (1963), p. 155.
21. R. Puff and G. Whitfield, in *Polarons and Excitons*, ed. by C. G. Kuper and G. D. Whitfield, Plenum Press, New York (1963), p. 171.
22. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматгиз, Москва (1962).
23. R. H. Kraichnan, *J. Math. Phys.* **2**, 124 (1961).
24. В. И. Кляцкин, *Стохастические уравнения*, т. 1, Физматлит, Москва (2008).
25. H. Bruus and K. Flensberg, *Introduction to Many-Body Quantum Theory in Condensed Matter Physics*, Ørsted Laboratory, Niels Bohr Institute, University of Copenhagen, Mikroelektronik Center, Technical University of Denmark, Copenhagen (2002).
26. М. В. Садовский, *Диagramматика. Лекции по избранным задачам теории конденсированного состояния*, Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург (2005) [M. V. Sadovskii, *Diagrammatics: Lectures on Selected Problems in Condensed Matter Theory*, World Scientific Publ., Singapore (2006)].
27. Ю. А. Фирсов, *Полярны*, Наука, Москва (1975).
28. Н. В. Ткач, Р. Б. Фартушинский, *ЖЭТФ* **45**, 1284 (2003).
29. Н. А. Арманд, В. Н. Секистов, *Изв. вузов, радиофизика* **23**, 555 (1980).
30. Н. Н. Зернов, *Изв. вузов, радиофизика* **25**, 520 (1982).
31. В. Н. Секистов, *Радиотехн. и электрон. вып.* **7**, 1262 (1983).
32. V. A. Ignatchenko and V. A. Felk, *Phys. Rev. B* **71**, 094417 (2005).
33. P. Soven, *Phys. Rev. B* **156**, 809 (1967).
34. D. W. Taylor, *Phys. Rev. B* **156**, 1017 (1967).
35. B. Velický, S. Kirkpatrick, and H. Ehrenreich, *Phys. Rev.* **175**, 747 (1968).
36. F. Yonezawa and K. Morigaki, *Suppl. Progr. Theor. Phys.* **53**, 1017 (1973).
37. R. J. Elliott, J. A. Krumhansl, and P. L. Leath, *Rev. Mod. Phys.* **46**, 465 (1974).
38. G. Brown, V. Celli, M. Haller, A. Maradudin, and A. Marvin, *Phys. Rev. B* **31**, 4993 (1985).
39. И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур, *Введение в теорию неупорядоченных систем*, Наука, Москва (1982).
40. Дж. Займан, *Модели беспорядка*, Мир, Москва (1982).
41. E. N. Economou, *Green's Functions in Quantum Physics*, Springer-Verlag, Berlin (2006).
42. E. Schlomann, *J. Phys. Chem. Sol.* **6**, 257 (1958).