

05  
**Микромагнитный расчет магнитостатических мод колебаний  
ортогонально намагниченного диска железо-иттриевого граната**

© Б.А. Беляев<sup>1-3</sup>, А.В. Изотов<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Институт физики им. Л.В. Киренского СО РАН,  
Красноярск, Россия

<sup>2</sup> Сибирский государственный аэрокосмический университет им. акад. М.Ф. Решетнева,  
Красноярск, Россия

<sup>3</sup> Сибирский федеральный университет,  
Красноярск, Россия

E-mail: belyaev@iph.krasn.ru

(Поступила в Редакцию 14 мая 2013 г.)

С помощью численного анализа разработанной для ферромагнитных объектов микромагнитной модели исследован спектр поглощения нормально намагниченного диска железо-иттриевого граната, связанный с резонансами магнитостатических мод колебаний, возбуждаемых однородным высокочастотным магнитным полем. Для первых четырех мод получено распределение амплитуд колебаний намагниченности по площади диска. Хорошее согласие результатов микромагнитного моделирования с данными аналитических расчетов для частных случаев доказывает надежность и эффективность предложенного подхода при проведении численных экспериментов по исследованию динамики намагниченности в объектах различной геометрии и формы, включая многослойные пленочные магнитные структуры.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (государственный контракт № 14.513.11.0010), Федеральной целевой программы „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России (2009–2013 гг.)“ и интеграционного проекта СО РАН № 109.

## 1. Введение

Как известно, характеристики сверхвысокочастотных устройств, использующих магнитные материалы в качестве активных сред, сильно зависят от спектра собственных колебаний намагниченности, который в свою очередь определяется многими факторами, в том числе формой образцов и граничными условиями на поверхности. Однако изучение динамики намагниченности при воздействии высокочастотных и постоянных магнитных полей очень важно также для выяснения природы и условий возникновения различных мод колебаний в сложных магнитных структурах [1,2]. При решении таких задач используются как аналитические, так и численные методы. Аналитические методы основаны либо на решении классического уравнения Уокера [3,4], описывающего динамические вариации магнитостатического потенциала в однородно намагниченном образце, либо на использовании тензорных функций Грина [5,6]. При этом, как правило, аналитическое решение можно получить лишь в случае однородного внутреннего магнитного поля в исследуемых объектах, поэтому образцы должны иметь сферическую или эллипсоидальную форму. С учетом этого в ряде работ были получены точные аналитические решения для некоторых объектов, в частности для сфероида, бесконечной пластины, бесконечного цилиндра [7].

Однако важнейшей задачей при создании устройств магнитоэлектроники является определение собственных частот и собственных мод колебаний в реально используемых ферромагнитных объектах самых различных

форм, например дисков, цилиндров, параллелепипедов или колец [2], у которых внутреннее магнитное поле, как правило, сильно неоднородно даже при однородном намагничивании образцов. Неоднородности внутреннего поля в этом случае в таких сложных объектах обусловлены неоднородностями размагничивающих полей, которые генерируются поверхностными магнитными зарядами. Поэтому при изучении динамики намагниченности в образцах с неоднородными внутренними полями, которые особенно ярко проявляются в объектах, имеющих размеры одного порядка по всем трем координатам, требуется знать пространственное распределение внутреннего поля. Это существенно усложняет задачу, однако в случае ее решения позволяет обнаруживать новые эффекты, связанные, например, с локализацией мод колебаний в определенных областях исследуемого объекта [8,9].

Получить решение с требуемой точностью для магнитных образцов „сложной“ формы позволяют численные методы анализа их моделей на основе теории микромагнетизма [10], которые активно развиваются в последние годы. В работах [11,12] для определения собственных частот и собственных мод колебаний намагниченности было предложено использовать стандартные программы, изначально разработанные для определения основного состояния намагниченности в образце. При решении был использован Фурье-анализ отклика магнитной системы на импульс приложенного внешнего поля, связанный с динамикой выбранных компонентов намагниченности. Основная трудность такого подхода — сложность формирования подходящего импульса поля,

так как в силу нелинейности среды при больших амплитудах колебаний нормальные моды становятся связанными, а это не позволяет их разрешить (отделить их друг от друга).

В последние годы для решения этой задачи разработаны численные методы [13–15], уже получившие широкое распространение. Они основаны на линеаризации уравнения Ландау–Лифшица для случая малых колебаний намагниченности относительно основного состояния, его решение сводится к стандартной задаче на собственные векторы и собственные значения. Эта идея реализована в [16], где описан подход к вычислению нормальных мод колебаний намагниченности и спектра спин-волнового поглощения с использованием разработанной ранее дискретной модели изучаемого объекта [17,18].

В настоящей работе объектом исследования выбраны тонкие ортогонально намагниченные диски железиттриевого граната (ЖИГ), которые используются как в качестве активных элементов в конструкциях микрополосковых устройств с управляемыми характеристиками для систем связи и радиолокации, так и в качестве высокоскоростных исполнительных элементов современных систем магнитной записи и передачи данных [2,19]. Важно также, что для однородно намагниченных дисков существуют аналитические методы расчета, что дает возможность не только провести сравнение, но и оценить точность и эффективность предложенного в работе численного метода расчета.

## 2. Математическое описание дискретной модели ферромагнетика

Разобьем исследуемый ферромагнитный объект на  $N$  одинаковых дискретных элементов в форме параллелепипеда объемом  $V_0$  с компонентами намагниченности  $\mathbf{M}^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), заданными в каждом элементе. В этом случае выражение для свободной энергии, включающее энергию Зеемана, энергию обменного и магнитостатического взаимодействия, а также энергию одноосной магнитной анизотропии, может быть записано в виде [17]

$$F(\mathbf{M}^{(1)}, \mathbf{M}^{(2)}, \dots, \mathbf{M}^{(N)}) = -V_0 \sum_{i=1}^N \left[ \mathbf{H} \mathbf{M}^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \mathbf{M}^{(i)} \overleftrightarrow{A}^{(ij)} \mathbf{M}^{(j)} \right], \quad (1)$$

где  $\mathbf{H}$  — внешнее магнитное поле,  $\overleftrightarrow{A}^{(ij)}$  — тензор, описывающий взаимодействия между дискретными элементами  $i$  и  $j$ , который определяется внутренними свойствами исследуемой магнитной системы,

$$\overleftrightarrow{A}^{(ij)} = \begin{cases} \overleftrightarrow{A}^{a(ii)} + \overleftrightarrow{A}^{\text{dem}(ii)}, & i = j, \\ \overleftrightarrow{A}^{\text{ex}(ij)} + \overleftrightarrow{A}^{\text{dem}(ij)}, & i \neq j. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $\overleftrightarrow{A}^{\text{ex}(ij)}$  и  $\overleftrightarrow{A}^{a(ii)}$  — тензоры, описывающие соответственно обменное взаимодействие (с константой обмена  $J$ ) и магнитную анизотропию (с константой одноосной анизотропии  $K_i$  и направлением оси легкого намагничивания, заданным единичным вектором  $\mathbf{n}^{(i)}$ ),

$$\overleftrightarrow{A}^{\text{ex}(ij)} = \frac{2J}{M_s^2} \overleftrightarrow{E}, \quad \overleftrightarrow{A}^{a(ii)} = \frac{2K_i}{M_s^2} \begin{pmatrix} n_x^{(i)} \\ n_y^{(i)} \\ n_z^{(i)} \end{pmatrix} (n_x^{(i)} n_y^{(i)} n_z^{(i)}), \quad (3)$$

где  $M_s$  — намагниченность насыщения образца, а  $\overleftrightarrow{E}$  — единичная матрица  $3 \times 3$ . Магнитостатическая энергия, обусловленная диполь-дипольным взаимодействием между дискретными элементами, описывается тензором  $\overleftrightarrow{A}^{\text{dem}(ij)}$ . Для вычисления его компонент, как правило, используют либо точные аналитические выражения для дискретных элементов в форме параллелепипеда, полученные в работе [20], либо приближение, основанное на учете взаимодействия пары точечных диполей [17], которое хорошо описывает взаимодействие наночастиц сферической формы.

В случае пространственной дискретизации исследуемого объекта эффективное локальное магнитное поле, действующее на намагниченность  $k$ -й ячейки, будет иметь вид

$$\mathbf{H}^{\text{eff}(k)}(\mathbf{M}^{(1)}, \mathbf{M}^{(2)}, \dots, \mathbf{M}^{(N)}) = -\frac{1}{V_0} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{M}^{(k)}} = \mathbf{H} + \sum_{j=1}^N \overleftrightarrow{A}^{(kj)} \mathbf{M}^{(j)}, \quad (4)$$

а уравнение движения намагниченности  $k$ -й ячейки ( $k = 1, \dots, N$ ) будет описываться уравнением Ландау–Лифшица

$$\frac{\partial \mathbf{M}^{(k)}}{\partial t} = -\gamma [\mathbf{M}^{(k)} \times \mathbf{H}^{\text{eff}(k)}] - \gamma \frac{\alpha}{M_s} \mathbf{M}^{(k)} \times [\mathbf{M}^{(k)} \times \mathbf{H}^{\text{eff}(k)}]. \quad (5)$$

Здесь первый член описывает прецессию намагниченности вокруг локального эффективного магнитного поля  $\mathbf{H}^{\text{eff}(k)}$ , второй описывает затухание в системе,  $\gamma$  — гиромагнитное отношение,  $\alpha$  — параметр затухания.

Используя метод последовательных приближений [7], решение с учетом неравенств  $|\mathbf{m}^{(k)}| \ll |\mathbf{M}_0^{(k)}|$  и  $|\mathbf{h}^{\text{eff}(k)}| \ll |\mathbf{H}_0^{\text{eff}(k)}|$  будем искать в виде

$$\mathbf{M}^{(k)} = \mathbf{M}_0^{(k)} + \mathbf{m}^{(k)}(t), \quad \mathbf{H}^{\text{eff}(k)} = \mathbf{H}_0^{\text{eff}(k)} + \mathbf{h}^{\text{eff}(k)}(t), \quad (6)$$

где  $\mathbf{M}_0^{(k)}$  — равновесная намагниченность  $k$ -й ячейки, которая, как показано в [17], определяется с помощью системы линейных неоднородных уравнений с неопределенными множителями Лагранжа  $\nu_k$

$$\mathbf{H}_0^{\text{eff}(k)}(\mathbf{M}_0^{(1)}, \mathbf{M}_0^{(2)}, \dots, \mathbf{M}_0^{(N)}) - \nu_k \mathbf{M}_0^{(k)} = 0. \quad (7)$$

В работе [17] предложен алгоритм решения такой системы уравнений. Проверка на устойчивость этого решения системы определяется из требования положительной определенности матрицы  $A' = (\vec{A}^{(ij)} - \nu_i \delta_{ij} \vec{E})$ , где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. При этом в (6)  $\mathbf{m}^{(k)}(t)$  — динамическая часть намагниченности, а статическая и динамическая части эффективного поля определяются в соответствии с (4) и (7) как

$$\mathbf{H}_0^{\text{eff}(k)} = \sum_{i=1}^N \vec{A}^{(ki)} \mathbf{M}_0^{(i)} + \mathbf{H}_0 = \nu_k \mathbf{M}_0^{(k)},$$

$$\mathbf{h}^{\text{eff}(k)}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{A}^{(ki)} \mathbf{m}^{(i)}(t) + \mathbf{h}^{\text{rf}(k)} = \mathbf{j}^{(k)} + \mathbf{h}^{\text{rf}(k)}. \quad (8)$$

При рассмотрении только линейных членов уравнения с учетом того, что  $[M_0^{(k)} \times \mathbf{H}^{\text{eff}(k)}] = 0$ , уравнение движения (5) будет иметь вид

$$\frac{\partial \mathbf{m}^{(k)}}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \vec{B}^{(ki)} \mathbf{m}^{(i)} + \vec{N}_0^{(k)} \mathbf{h}^{\text{rf}(k)}. \quad (9)$$

При этом использовались следующие обозначения:

$$\vec{M}_0^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & -M_{0z}^{(k)} & M_{0y}^{(k)} \\ M_{0z}^{(k)} & 0 & -M_{0x}^{(k)} \\ -M_{0y}^{(k)} & M_{0x}^{(k)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{N}_0^{(k)} = -\gamma \left( \vec{M}_0^{(k)} - \frac{\alpha}{M_s} (\vec{M}_0^{(k)})^2 \right), \quad (10)$$

$$\vec{B}^{(ki)} = \vec{N}_0^{(k)} (\vec{A}^{(ki)} - \nu_k \delta_{ki} \vec{E}),$$

где  $M_{0x}^{(k)}, M_{0y}^{(k)}, M_{0z}^{(k)}$  — компоненты вектора  $\mathbf{M}_0^{(k)}$ .

Для определения нормальных магнитных мод колебаний намагниченности прежде всего рассмотрим случай свободных колебаний. В отсутствие внешнего переменного поля ( $\mathbf{h}^{\text{rf}(k)} = 0$ ) выражение (9) будет иметь простой вид

$$\frac{\partial \mathbf{m}^{(k)}}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \vec{B}^{(ki)} \mathbf{m}^{(i)} \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (11)$$

Решение системы линейных дифференциальных уравнений (11) будем искать в виде  $\mathbf{m}^{(i)}(t) = \mathbf{V}^{(i)} e^{\lambda t}$ . Здесь  $\lambda = -i\omega$ ;  $\omega$  — частота прецессии намагниченности. В результате подстановки в (11) получим

$$\sum_{i=1}^N \vec{B}^{(ki)} \mathbf{V}^{(i)} = \lambda \mathbf{V}^{(k)} \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (12)$$

Решая уравнение (12) на собственные векторы и собственные значения, общее решение однородной системы (11) можно записать в виде разложения по собственным векторам нормальных магнитных мод колебаний

$$\mathbf{m}^{(i)}(t) = \sum_{m=1}^M C_m \mathbf{V}_m^{(i)} e^{\lambda_m t} \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (13)$$

где  $M$  — число учитываемых в расчете мод колебаний ( $M \leq 2N$ ),  $\lambda_m$  — собственное число (собственная резонансная частота моды), соответствующее собственному вектору (столбцу)  $\mathbf{V}_m = [\mathbf{V}_m^{(1)}; \mathbf{V}_m^{(2)}; \dots; \mathbf{V}_m^{(N)}]$ , а  $\mathbf{V}_m^{(1)}, \mathbf{V}_m^{(2)}, \dots, \mathbf{V}_m^{(N)}$  — амплитуды колебаний намагниченности в каждой ячейке на частоте  $m$ -й моды.

В случае вынужденных колебаний нам необходимо решить неоднородную систему уравнений (9). Для этого воспользуемся методом вариации произвольных постоянных, т.е. решение будем искать в виде

$$\mathbf{m}^{(i)}(t) = \sum_{m=1}^M C_m(t) \mathbf{V}_m^{(i)} e^{\lambda_m t} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (14)$$

Подставляя данное выражение в систему уравнений (9), получим

$$\sum_{m=1}^M \mathbf{V}_m^{(k)} e^{\lambda_m t} \frac{\partial C_m(t)}{\partial t} = \vec{N}_0^{(k)} \mathbf{h}^{\text{rf}(k)} \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (15)$$

Для решения данной системы уравнений введем следующие обозначения:

$$V = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^{(1)} & \mathbf{V}_2^{(1)} & \dots & \mathbf{V}_M^{(1)} \\ \mathbf{V}_1^{(2)} & \mathbf{V}_2^{(2)} & \dots & \mathbf{V}_M^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{V}_1^{(N)} & \mathbf{V}_2^{(N)} & \dots & \mathbf{V}_M^{(N)} \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^{(1)} & \mathbf{U}_1^{(2)} & \dots & \mathbf{U}_1^{(N)} \\ \mathbf{U}_2^{(1)} & \mathbf{U}_2^{(2)} & \dots & \mathbf{U}_2^{(N)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{U}_M^{(1)} & \mathbf{U}_M^{(2)} & \dots & \mathbf{U}_M^{(N)} \end{bmatrix}, \quad UV = E, \quad (16)$$

где  $E$  — единичная матрица, а  $U = (V^T \cdot V)^{-1} V^T$  (здесь  $T$  означает транспонирование, а  $-1$  — обратную матрицу). Следует особо отметить, что решение уравнения (12) приводит к комплексно-сопряженным парам собственных значений  $\lambda_m$  и  $\lambda_m^*$  и соответствующим им парам собственных векторов  $\mathbf{V}_m$  и  $\mathbf{V}_m^*$ , которые в свою очередь не являются линейно независимыми (линейно независимыми являются их действительные и мнимые части). Поэтому произведение  $V^T \cdot V$  не является единичной матрицей, а  $U \neq V^T$ .

С учетом введенных обозначений систему (15) приводим к следующему виду:

$$\frac{\partial C_m(t)}{\partial t} = e^{-\lambda_m t} \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_m^{(j)} \vec{N}_0^{(j)} \mathbf{h}^{\text{rf}(j)} \quad (m = 1, 2, \dots, M). \quad (17)$$

Интегрируя дифференциальные уравнения, находим

$$C_m(t) = C_m^{\text{free}} + \int e^{-\lambda_m t} \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_m^{(j)} \vec{N}_0^{(j)} \mathbf{h}^{\text{rf}(j)} dt. \quad (18)$$

Это выражение определяет амплитуду колебаний  $m$ -й моды при возбуждении системы высокочастотным полем любой формы, однако с практической точки зрения важно рассмотреть случай возбуждения системы синусоидальным высокочастотным полем  $\mathbf{h}^{\text{rf}(j)}(t) = \mathbf{h}_0^{\text{rf}(j)} e^{-i\omega t}$  с частотой  $\omega$ . Тогда выражение, определяющее амплитуды мод, примет вид

$$C_m(t) = C_m^{\text{free}} + \frac{e^{-(\lambda_m + i\omega)t}}{-(\lambda_m + i\omega)} \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_m^{(j)} \overleftrightarrow{N}_0^{(j)} \mathbf{h}_0^{\text{rf}(j)}. \quad (19)$$

Подставляя последнее выражение в (14), получим общее решение уравнения, описывающее движение намагниченности  $i$ -й ячейки,

$$\mathbf{m}^{(i)}(t) = \sum_{m=1}^M C_m^{\text{free}} \mathbf{V}_m^{(i)} e^{\lambda_m t} + \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{\mathbf{U}_m^{(j)} \overleftrightarrow{N}_0^{(j)} \mathbf{h}_0^{\text{rf}(j)}}{-(\lambda_m + i\omega)} \cdot \mathbf{V}_m^{(i)} e^{-i\omega t}. \quad (20)$$

Следует обратить внимание на то, что первый член данного выражения описывает свободные колебания магнитной системы. В этом легко убедиться, если положить  $\mathbf{h}_0^{\text{rf}(j)}$  равным нулю. В случае наличия затухания в системе поведение  $\mathbf{m}^{(i)}(t)$  в установившемся режиме описывается выражением

$$\mathbf{m}^{(i)}(t) = \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{\mathbf{U}_m^{(j)} \overleftrightarrow{N}_0^{(j)} \mathbf{h}_0^{\text{rf}(j)}}{-(\lambda_m + i\omega)} \cdot \mathbf{V}_m^{(i)} e^{-i\omega t}. \quad (21)$$

При этом несложно рассчитать энергию поглощения высокочастотного поля [21]

$$E = \omega V_0 \sum_{i=1}^N \text{Im}[\mathbf{m}^{(i)} \mathbf{h}^{\text{rf}(i)*}]. \quad (22)$$

Полученные выражения позволяют проводить исследование динамики магнитной системы в ферромагнитных образцах любой заданной формы, в том числе и в многослойных пленочных структурах. Изучать можно не только закономерности поведения спектров собственных мод колебаний намагниченности при варьировании параметров исследуемого объекта, но и локализацию и пространственное распределение амплитуд колебаний намагниченности для различных мод, а также частотные и полевые зависимости магнитной проницаемости.

### 3. Результаты численного моделирования

В настоящей работе выполнен расчет магнитоэлектронных мод колебания намагниченности и спектра высокочастотного поглощения тонкого диска, намагниченного до насыщения ортогонально плоскости

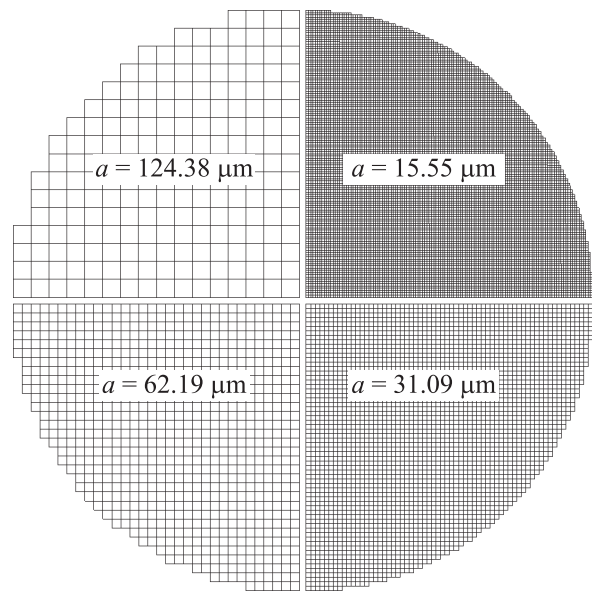
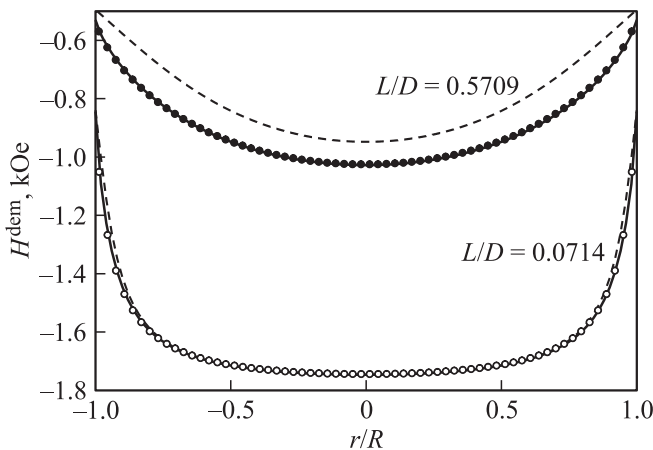


Рис. 1. Фрагменты моделей исследуемого диска после дискретизации в плоскости квадратными сетками с различным шагом.

внешним постоянным полем  $H_0$ . Для сравнения результатов с другими работами диаметр диска выбран  $D = 2R = 3.98 \text{ mm}$ , а его толщина  $L = 0.284 \text{ mm}$ , т.е. отношение  $L/D = 0.0714$ . Магнитные параметры диска соответствуют железо-иттриевому ферриту со структурой граната  $\text{Y}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$ , намагниченность насыщения которого  $M_s = 149.6 \text{ G}$ , константа обмена  $A = Jd^2 = 0.425 \cdot 10^{-6} \text{ erg/cm}$  ( $d$  — расстояние между соседними дискретными элементами), а коэффициент затухания прецессии намагниченности  $\alpha = 0.0005$ . Отметим, что в рассматриваемой задаче для облегчения анализа результатов не учитывалась кристаллографическая магнитная анизотропия образца.

Дискретизация исследуемого диска проводилась только в плоскости, причем четырьмя различными квадратными сетками с кратным уменьшением размера ячеек, значения которого с точностью до сотых были следующими:  $a = 124.38, 62.19, 31.09$  и  $15.55 \mu\text{m}$  (рис. 1). Это было необходимо для оценки влияния степени дискретизации на качество численного расчета. В результате образец разбивался на одинаковые параллелепипеды размером  $a \times a \times L$ . В силу большого влияния анизотропии формы для выбранной геометрии „элементарной ячейки“ нами в расчете тензора магнитоэлектронного взаимодействия использовалось точное аналитическое выражение, представленное в [20]. Внешнее постоянное магнитное поле  $H_0 = 4.9 \text{ kOe}$ , в расчете приложенное ортогонально плоскости пленки, очевидно, обеспечивало надежное однородное „намагничивание“ образца.

Прежде всего остановимся на результатах численного моделирования размагничивающего поля, которое оказывает существенное влияние на высокочастотные свойства магнитных дисков. В рамках рассматриваемой



**Рис. 2.** Зависимости полей размагничивания  $H^{\text{dem}}(r)$  вдоль диаметра ортогонально намагниченного диска ЖИГ для двух значений отношения  $L/D$ . Светлые и темные кружки — результаты численного расчета дискретной модели при  $a = 62.19 \mu\text{m}$ , сплошные и штриховые линии — аналитические расчеты по формулам из работ [24] и [23] соответственно.

дискретной модели размагничивающее поле определялось следующим выражением:

$$\mathbf{H}^{\text{dem}(i)} = - \sum_{j=1}^N \vec{A}^{\text{dem}(ij)} \mathbf{M}_0^{(j)}, \quad (23)$$

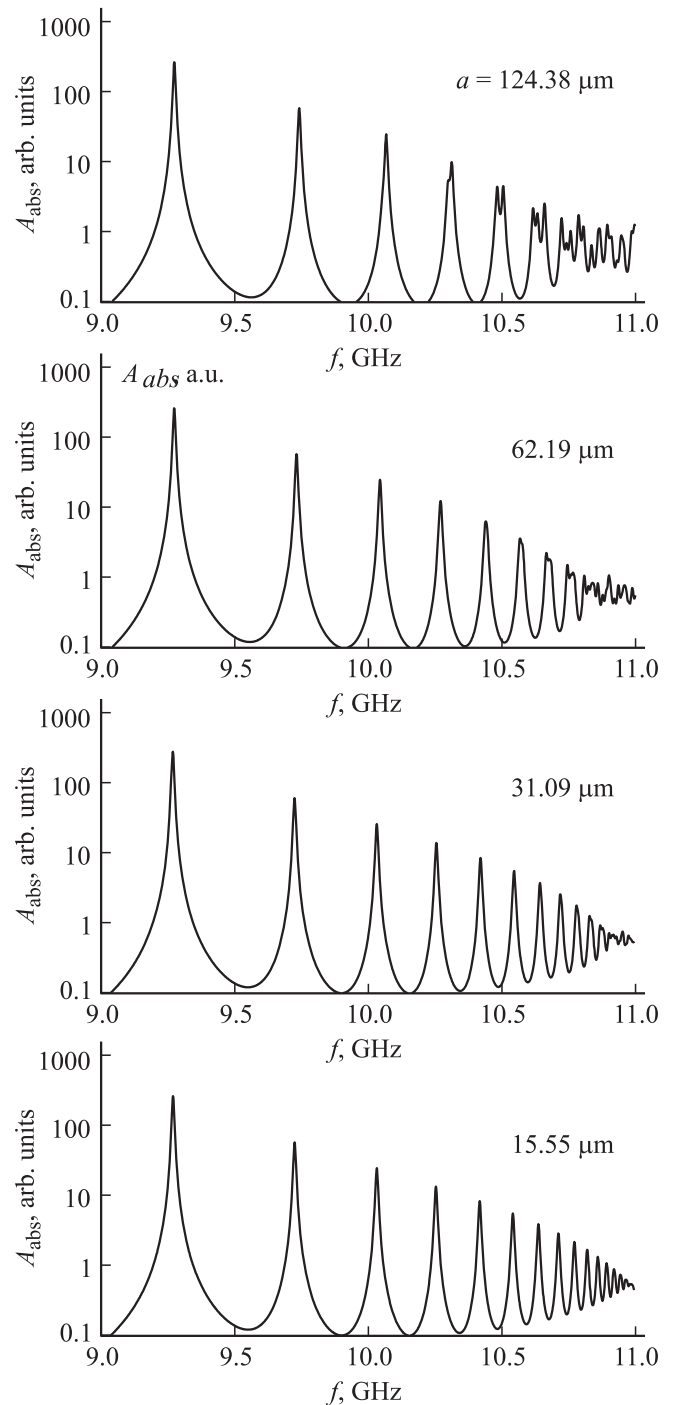
где  $\mathbf{M}_0^{(j)}$  — равновесная намагниченность  $j$ -й ячейки. Следует отметить, что в алгоритме расчета полей размагничивания применялся метод быстрого преобразования Фурье [22], который позволил уменьшить требуемый объем памяти для хранения элементов  $\vec{A}^{\text{dem}(ij)}$  и существенно ускорить вычислительные процедуры.

Результаты численного расчета зависимости размагничивающего поля  $H^{\text{dem}}$  от координаты  $r$  вдоль диаметра исследуемого диска при размерах ячейки дискретизации  $a = 62.19 \mu\text{m}$  представлены на рис. 2 светлыми кружками. Для сравнения темными кружками на рисунке показана аналогичная зависимость, построенная для диска с отношением  $L/D = 0.5709$ . Штриховыми линиями показаны результаты расчета по формуле  $H^{\text{dem}}(r) = -4\pi M_s I(r)$ , для которой зависимость размагничивающего фактора  $I(r)$  получена аналитически в приближении  $L/D \ll 1$  [23].

Видно, что для исследуемого диска ( $L/D = 0.0714$ ) расхождение результатов микромагнитного моделирования и аналитического расчета заметно лишь на краях образца, однако для диска с  $L/D = 0.5709$  это расхождение значительно при любом  $r$ . Сплошными линиями на рисунке показаны зависимости, построенные с использованием более точного аналитического выражения для размагничивающего фактора  $I(r) = N_{zz}(r, z)$  [24], в котором учитывается также его зависимость по толщине образца. Эти результаты очень хорошо согласуются с

результатами численного моделирования как для случая  $L/D = 0.0714$ , так и для случая  $L/D = 0.5709$ .

Важно отметить, что благодаря неоднородному внутреннему магнитному полю в однородно намагниченных образцах неэллипсоидальной формы могут возбуждаться магнитостатические типы колебаний под воздействием однородного высокочастотного магнитного поля, что



**Рис. 3.** Спектры резонансного поглощения нормально намагниченного диска ЖИГ при накачке однородным внешним высокочастотным полем в плоскости, построенные для различных размеров элементов в дискретной модели.

впервые наблюдал Диллон [25]. Этот факт хорошо иллюстрирует численный расчет спектра поглощения исследуемого диска ЖИГ в СВЧ-диапазоне, проведенный на основе дискретной модели и полученного для нее выражения (22).

На рис. 3 представлены четыре спектра СВЧ-поглощения, рассчитанные при различной дискретизации образца. Видно, что участок спектра в области низших мод колебаний остается практически неизменным при уменьшении размера ячейки  $a$  от 124.38 до 15.55  $\mu\text{m}$ . Однако, как и следовало ожидать, разбиение диска на „крупные“ дискретные элементы приводит к неоднозначному определению высших мод колебаний, спектр которых в этом случае имеет ряд дополнительных резонансов. Видно, что с увеличением числа элементов в дискретной модели спектр в области высших типов неоднородных колебаний намагниченности постепенно „очищается“ от дополнительных резонансов, но при этом соответственно возрастает требуемое для расчета машинное время [22]. Поэтому для каждого исследуемого методом микромагнитного моделирования объекта важно определить оптимальную дискретизацию модели. Наши оценки показывают, что для удовлетворительного описания спектра в исследуемой области частот требуется, чтобы на длину волны наивысшей моды колебаний в спектре приходилось не менее десяти дискретных ячеек.

Для оценки точности расчета полученных спектров СВЧ-поглощения сравним результаты проведенного нами моделирования с результатами расчета простой, но достаточно хорошо согласующейся с экспериментом модели, предложенной Юкава и Эйбэ [23]. В ней дисперсионное соотношение для магнитостатических волн в нормально намагниченной пластине или диске получено при стандартных электродинамических граничных условиях на верхней и нижней поверхностях образца [7]

$$\sqrt{-\mu} \tan(\sqrt{-\mu} kL/2) = 1. \quad (24)$$

Здесь  $k$  — волновое число магнитостатической волны, распространяющейся в плоскости диска, а  $\mu$  — диагональная компонента тензора магнитной проницаемости

$$\vec{\mu} = \begin{bmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

где

$$\mu = \frac{H_i B_i - (\omega/\gamma)^2}{H_i^2 - (\omega/\gamma)^2}, \quad \mu_a = \frac{4\pi M_s (\omega/\gamma)}{H_i^2 - (\omega/\gamma)^2},$$

$H_i(r) = H_0 - 4\pi M_s I(r)$  — внутреннее магнитное поле диска, а  $B_i(r) = H_i(r) + 4\pi M_s$ .

Важным условием существования объемных магнитостатических волн, вытекающим из соотношения (24), является требование  $\mu < 0$ , исходя из которого определяются граничные частоты магнитостатических волн  $H_i(r) \leq \omega/\gamma \leq \sqrt{H_i(r)B_i(r)}$ . Магнитостатическая волна, распространяющаяся в неоднородном внутреннем

поле  $H_i(r)$  радиально от центра диска, претерпевает отражение на некотором расстоянии  $r_1$ , где волновое число  $k$  обращается в нуль. При  $r > r_1$  волновое число в общем случае становится комплексным, что соответствует колебаниям с экспоненциально убывающей амплитудой. Расстояние  $r_1$ , на котором наблюдается отражение магнитостатической волны, определяется исходя из условия  $\omega/\gamma = H_i(r_1)$ .

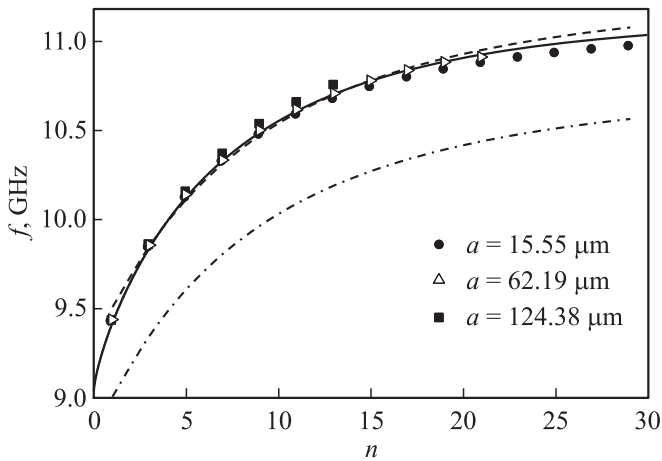
Условие стоячей волны, когда на расстоянии  $-r_1 < r < r_1$  укладывается целое число полуволн, приводит к выражению для вычисления номера  $n$  моды магнитостатических колебаний. С учетом обозначений  $\rho = r/R$  и  $\rho_1 = r_1/R$  условие имеет вид [23]

$$n = \frac{2}{\pi} \frac{D}{L} \int_0^{\rho_1} \frac{1}{\sqrt{-\mu}} \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{-\mu}} d\rho. \quad (26)$$

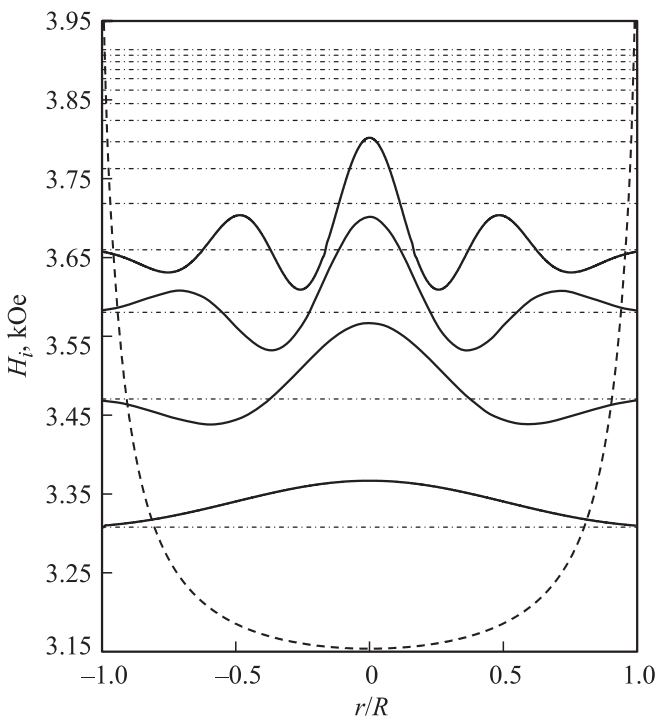
Каждый раз, когда  $n$  становится целым, будет наблюдаться резонансное поглощение энергии высокочастотного поля накачки. Следует напомнить, что при помещении образца в однородное высокочастотное магнитное поле возбуждение магнитостатических колебаний происходит только при нечетных значениях номера моды  $n$ . Как показали Юкава и Эйбэ, теоретические результаты, полученные при помощи выражения (26), довольно хорошо согласуются с экспериментальными измерениями [23].

На рис. 4 сплошной линией показана зависимость собственных частот магнитостатических колебаний ортогонально намагниченного диска от номера моды, полученная по формуле (26). При этом внутреннее поле  $H_i(r)$ , входящее в выражение для магнитной проницаемости  $\mu$ , определялось с использованием уточненного аналитического расчета размагничивающего фактора [24]. Точками на рисунке представлены результаты численного микромагнитного расчета, проведенного при трех различных размерах ячейки в дискретной модели. Видно, что резонансные частоты нижайших мод колебаний, полученные с помощью численного расчета, хорошо согласуются с результатами аналитического расчета для любой степени дискретизации модели. Однако в области высших мод наблюдается некоторое различие. В численном расчете для модели с  $a = 124.38 \mu\text{m}$  недостаточная степень дискретизации диска является причиной завышения частоты высших мод по сравнению с аналитическим расчетом. Однако при достаточно высокой дискретизации диска ( $a = 15.55 \mu\text{m}$ ) численный расчет, напротив, дает небольшое понижение резонансных частот высших мод колебаний. Выяснить причину расхождения аналитического расчета с численным расчетом дискретной модели помогает рис. 5.

На рис. 5 штриховой линией показано распределение внутреннего магнитного поля  $H_i(\rho)$  вдоль диаметра диска, а штрихпунктирными горизонтальными линиями — значения резонансных полей  $\omega_{\text{res}}/\gamma$  наблюдаемых мод колебаний намагниченности. Кроме того, для четырех



**Рис. 4.** Зависимости собственных частот магнитостатических колебаний ортогонально намагниченного диска от номера моды. Точки — результаты численного моделирования, сплошная линия — расчет модели Юкава и Эйбэ, штриховая и штрихпунктирная линии — расчеты [26] с усреднением и без усреднения размагничивающего фактора соответственно.



**Рис. 5.** Распределение внутреннего магнитного поля  $H_i(\rho)$  по диаметру диска (штриховая линия) и значения резонансных полей  $\omega_{res}/\gamma$  (штрихпунктирные горизонтальные линии). Сплошные линии — распределения амплитуд высокочастотной намагниченности четырех нижайших мод, построенные на этом рисунке для наглядности в произвольных единицах.

нижайших резонансных мод показаны рассчитанные распределения амплитуд колебаний высокочастотной намагниченности. Видно, что принятые в теоретической модели Юкава и Эйбэ границы существования магни-

тостатической моды  $-r_1 < r < r_1$  не локализуют ее полностью (на границах высокочастотная намагниченность отлична от нуля). Экспоненциально убывающая к краям диска амплитуда колебаний намагниченности расширяет эту область, что приводит к увеличению эффективного радиуса для формирования стоячих волн и, как следствие, к понижению частоты. А поскольку расширение области особенно сильно влияет на „короткие“ волны с большим значением  $k$ , наблюдаемое различие в резонансных частотах мод увеличивается для пиков с высоким  $n$ .

Рассмотренная аналитическая модель Юкава и Эйбэ, несмотря на свою простоту и хорошее согласие с экспериментом, не может в полной мере удовлетворять всем потребностям при анализе таких систем. Во-первых, эта модель ограничена рассмотрением только радиальных мод, возбуждаемых планарным полем. За рамками этой модели остаются моды, в общем случае зависящие от азимутальной и нормальной координаты. Во-вторых, эта модель не дает точных представлений о распределении возбуждаемых мод высокочастотной намагниченности в образце. Кроме положения пиков поглощения и их номера, никакой дополнительной информации в рамках этой модели почерпнуть нельзя.

Задача о возбуждении магнитостатических колебаний в нормально намагниченном диске имеет точное аналитическое решение при условии, что внутреннее поле диска остается однородным [4,7]. В этом случае считают  $I(r) = \text{const}$ , а учет стандартных электродинамических граничных условий на боковых поверхностях диска для магнитостатического потенциала

$$\psi(r, \theta, z) = C_m J_m \left( \frac{kr}{\sqrt{-\mu}} \right) \left( \cos kz + \frac{1}{\sqrt{-\mu}} \sin kz \right) e^{-im\theta} \quad (27)$$

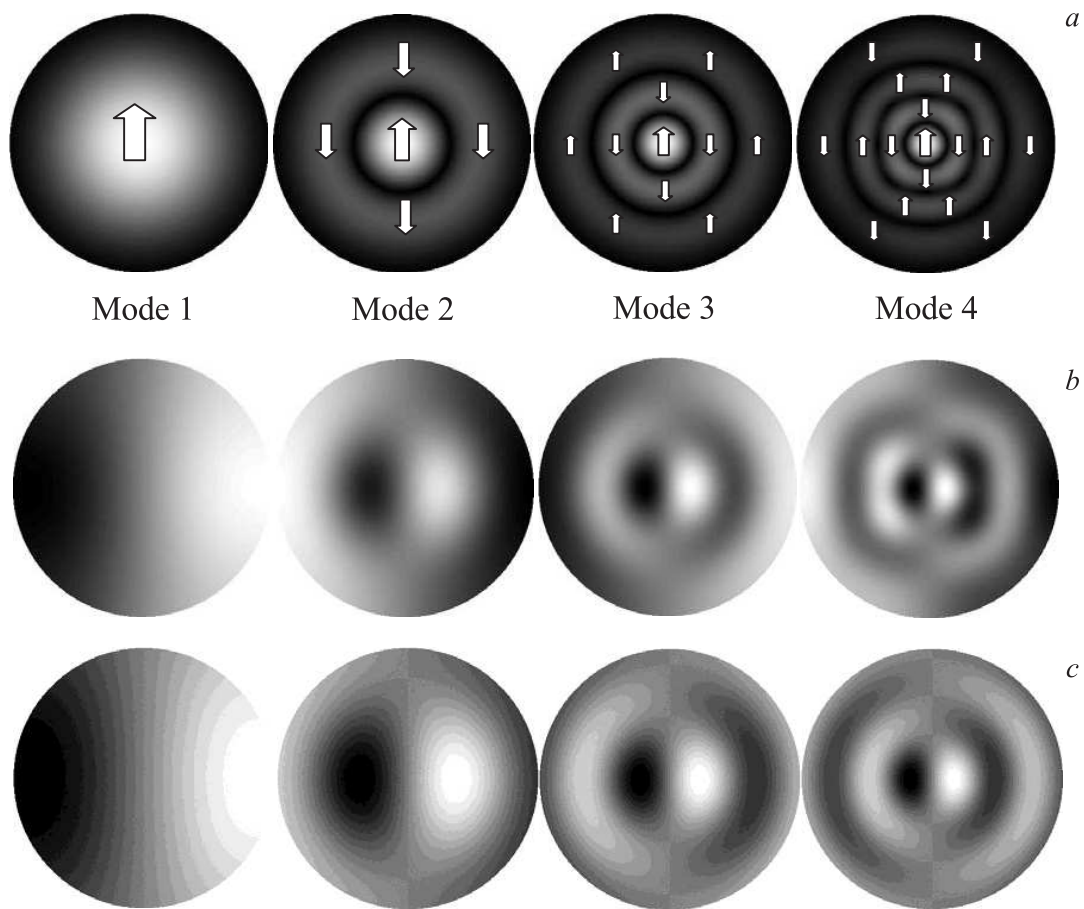
приводит к дополнительному уравнению

$$\sqrt{-\mu} \frac{J'_m(kR/\sqrt{-\mu})}{J_m(kR/\sqrt{-\mu})} + \frac{K'_m(kR)}{K_m(kR)} - \frac{\mu a m}{kR} = 0, \quad (28)$$

которое совместно с дисперсионным уравнением (24) определяет полный спектр магнитостатических колебаний ортогонально намагниченного диска. Здесь  $J_m$  — функция Бесселя,  $K_m$  — функция Бесселя мнимого аргумента, а множитель  $C_m$  в (27) является нормировочным коэффициентом, который в наших расчетах мы положили равным единице.

Основываясь на совместном решении уравнений (24) и (28) для  $I(r) = 1$ , на рис. 4 мы построили зависимость резонансной частоты от номера моды колебаний  $n$  (штрихпунктирная линия). Видно, что пренебрежение неоднородностью внутреннего поля приводит к серьезной ошибке. Чтобы устранить это несоответствие, авторы [26] предложили использовать метод усреднения размагничивающего фактора  $I(r)$  вдоль диаметра диска, получив значение  $I_{av} \approx 0.895$ . Используя это значение, мы провели аналогичный предыдущему расчет, результаты которого представлены на рис. 4 штриховой линией. Видно, что полученные результаты для низших





**Рис. 6.** Распределение амплитуды колебаний намагниченности для четырех нижайших мод (стрелками указаны направления движения намагниченности для фиксированного момента времени) (*a*) и распределение магнитоэлектрического потенциала для первых четырех мод: *b* — результаты численного моделирования, *c* — результаты расчета по формуле (27).

мод хорошо согласуются с результатами численного моделирования и результатами модели, предложенной Юкава и Эйбэ. Однако в упомянутой работе [26], вероятно, присутствует некоторая неточность. Приведенное в ней среднее значение размагничивающего фактора  $I_{av} \approx 0.895$ , полученное для параметров модели, аналогичной исследуемой нами, несколько завышено. Действительно, в соответствии с работой [23] это среднее значение  $I_{av} = 0.8714$ , а в соответствии с [24]  $I_{av} = 0.8763$ . Возможно, авторы [26] провели усреднение не по всей ширине диска, а только по ее части.

Для анализа структуры магнитоэлектрических мод колебаний на рис. 6, *a* представлены распределения амплитуды колебаний высокочастотной намагниченности для четырех нижайших возбуждаемых мод, полученные на основе численного микромагнитного моделирования. Кроме того, на данном рисунке стрелками схематично показаны направления движения намагниченности для некоторого фиксированного момента времени. Видно, что моды имеют строго радиальное распределение амплитуд высокочастотной намагниченности.

Используя результаты численного моделирования, мы также получили распределения магнитоэлектрического по-

тenciала для этих мод (рис. 6, *b*), которые сравнивались с результатами аналитических вычислений по формуле (27) (рис. 6, *c*). Видно, что полученные результаты очень хорошо согласуются. Небольшое различие заключается лишь в том, что для результатов численного моделирования характерна определенная локализация мод ближе к центру, что, очевидно, обусловлено учетом неоднородности внутреннего поля, тогда как в соответствии с формулой (27) моды распределены более равномерно. Кроме того, результаты численного моделирования показывают, что магнитоэлектрический потенциал для моды 4 начинает проявлять симметрию, характерную не для дисков, а для квадратных образцов. Это, очевидно, связано с ошибкой аппроксимации цилиндрической поверхности диска параллелепипедами недостаточно малых размеров.

#### 4. Заключение

Таким образом, на основе разработанной микромагнитной модели ферромагнетика численно исследован спектр поглощения нормально намагниченного диска железо-иттриевого граната. Показано, что из-за гради-



ентного распределения внутреннего магнитного поля в намагниченном диске, находящемся под воздействием однородного высокочастотного магнитного поля, возбуждаются неоднородные магнитостатические колебания, ответственные за наблюдаемые в спектре поглощения резонансные пики. Сравнение результатов микромагнитного моделирования с аналитическими расчетами для частных случаев доказывает как правомерность, так и высокую достоверность разработанного подхода численного микромагнитного моделирования ферромагнитных объектов произвольной формы и размеров.

Важно отметить, что представленный расчет позволяет не только определить спектр нормальных мод колебаний намагниченности для композитных образцов из магнитных и немагнитных материалов любой формы, но и рассчитать спектр поглощения электромагнитной энергии как при развертке магнитного поля, так и при развертке частоты накачки. В частности, разработанный метод дает возможность исследовать частотные или полевые зависимости компонент тензора магнитной проницаемости сложных мультислойных структур, которые в настоящее время считаются наиболее перспективными для создания новых элементов микроэлектроники.

## Список литературы

- [1] J.W. Lau, J.M. Shaw. *J. Phys. D* **44**, 303 001 (2011).
- [2] R.D. McMichael, M.D. Stiles. *J. Appl. Phys.* **97**, 10J901 (2005).
- [3] L.R. Walker. *Phys. Rev.* **105**, 2, 390 (1957).
- [4] E.O. Kamenetskii. *Phys. Rev. E* **63**, 066 612 (2001).
- [5] B.A. Kalinikos, A.N. Slavin. *J. Phys. C* **19**, 7013 (1986).
- [6] K.Y. Guslienko, A.N. Slavin. *J. Appl. Phys.* **87**, 6337 (2000).
- [7] А.Г. Гуревич, Г.А. Мелков. *Магнитные колебания и волны*. Физматлит, М. (1994). 464 с.
- [8] K.Y. Guslienko, R.W. Chantrell, A.N. Slavin. *Phys. Rev. B* **68**, 024 422 (2003).
- [9] I. Lee, Y. Obukhov, G. Xiang, A. Hauser, F. Yang, P. Banerjee, D.V. Pelekhov, P.C. Hammel. *Nature* **466**, 845 (2010).
- [10] УФ. Браун. *Микромагнетизм*. Наука, М. (1979). 160 с.
- [11] J.C. Toussaint, A. Marty, N. Vukadinovic, J.B. Youssef, M. Labrune. *Comput. Mater. Sci.* **24**, 175 (2002).
- [12] M. Grimsditch, G.K. Leaf, H.G. Kaper, D.A. Karpeev, R.E. Camley. *Phys. Rev. B* **69**, 174 428 (2004).
- [13] K. Rivkin, J.B. Ketterson. *J. Magn. Magn. Mater.* **306**, 204 (2006).
- [14] M. Grimsditch, L. Giovannini, F. Monotcello, F. Nizzoli, G.K. Leaf, H.G. Kaper. *Phys. Rev. B* **70**, 054 409 (2004).
- [15] M. Aquino, C. Serpico, G. Miano, G. Bertotti, I.D. Mayergoyz. *Physica B* **403**, 242 (2008).
- [16] А.В. Изотов, Б.А. Беляев. *Изв. вузов. Физика* **53**, 9, 21 (2011).
- [17] Б.А. Беляев, А.В. Изотов, А.А. Лексиков. *ФТТ* **52**, 1549 (2010).
- [18] A.V. Izotov, B.A. Belyaev, A.A. Leksikov. *Журн. СФУ. Сер. матем. и физ.* **3**, 1, 64 (2010).
- [19] B. Pigeau, G. De Loubens, O. Klein, A. Riegler, F. Lochner, G. Schmidt, L.W. Molenkamp, V.S. Tiberkevich, A.N. Slavin. *Appl. Phys. Lett.* **96**, 132 506 (2010).
- [20] A.J. Newell, W. Williams, D.J. Dunlop. *J. Geophys. Res.* **98**, B6, 9551 (1993).
- [21] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Электродинамика сплошных сред*. 2-е изд. Наука, М. (1982). 661 с.
- [22] А.В. Изотов, Б.А. Беляев, М.М. Валиханов, С.В. Поленга, А.В. Стефанюк. *Вычислит. методы и программирование* **13**, 1, 551 (2012); <http://num-meth.srcc.msu.ru/>
- [23] T. Yukawa, K. Abe. *J. Appl. Phys.* **45**, 3146 (1974).
- [24] R.I. Joseph, E. Schlömann. *J. Appl. Phys.* **36**, 1579 (1965).
- [25] J.F. Dillon. *J. Appl. Phys.* **31**, 1605 (1960).
- [26] E.O. Kamenetskii, R. Shavit, M. Sigalov. *J. Appl. Phys.* **95**, 6986 (2004).