

ЭФФЕКТ КОНА – ЛАТТИНЖЕРА И АНОМАЛЬНОЕ СПАРИВАНИЕ В НОВЫХ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ СИСТЕМАХ И ГРАФЕНЕ

М. Ю. Каган^{a,b,}, В. В. Вальков^{c,**}, В. А. Мицкан^{c,d}, М. М. Коровушкин^c*

^a *Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
119334, Москва, Россия*

^b *Московский институт электроники и математики
Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»
109028, Москва, Россия*

^c *Институт физики им. Л. В. Киренского Сибирского отделения Российской академии наук
660036, Красноярск, Россия*

^d *Сибирский государственный аэрокосмический университет им. М. Ф. Решетнёва
660014, Красноярск, Россия*

Поступила в редакцию 8 января 2014 г.

Представлен обзор теоретических исследований нефононного механизма сверхпроводимости Кона – Латтинжера в различных трехмерных и двумерных электронных системах с отталкиванием, описываемых моделями ферми-газа, Хаббарда и Шубина – Вонсовского. Обсуждаются фазовые диаграммы сверхпроводящего состояния, включающие области аномального s -, p -, d -спаривания, и демонстрируется возможность резкого повышения критической температуры T_c уже при малой электронной плотности при рассмотрении спин-поляризованного случая или двухзонной ситуации. Теория Кона – Латтинжера объясняет или предсказывает сверхпроводимость в различных материалах, таких как гетероструктуры и полуметаллы, сверхрешетки и дихалькогениды, высокотемпературные сверхпроводники и тяжелофермионные системы, слоистые, органические сверхпроводники и ультрахолодные ферми-газы в магнитных ловушках. Она также хорошо описывает аномальный электронный транспорт и необычные поляронные эффекты в нормальном состоянии этих систем. Теория может быть полезна для объяснения природы сверхпроводимости и орбитальных токов (киральная аномалия) в системах с дираковским спектром электронов, включая сверхтекучий $^3\text{He-A}$, легированный графен и топологические сверхпроводники.

DOI: 10.7868/S0044451014060184

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	1128	5. t - J -модель	1140
2. Модель электронного газа	1129	6. Идеализированный монослой легированного графена	1141
3. Модель Хаббарда	1132	7. Заключение	1143
4. Модель Шубина – Вонсовского	1135	Литература	1144

*E-mail: kagan@kapitza.ras.ru

**E-mail: vvv@iph.krasn.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Электроны проводимости в металлах в совокупности с положительно заряженными ионами образуют твердотельную плазму, определяющую комплекс их электрических, гальваномангнитных, кинетических и сверхпроводящих свойств. Связь между подсистемой массивных положительных ионов и подсистемой легких фермионов приводит к формированию электрон-фононного взаимодействия, влияющего на свойства электронной подсистемы. В частности, эффективное взаимодействие между электронами в твердотельной плазме может существенно отличаться от кулоновского взаимодействия электронов в вакууме и даже изменить знак. Этот важнейший эффект лежит в основе электрон-фононного механизма куперовской неустойчивости в обычных сверхпроводниках [1].

Очевидно, что в роли посредника, взаимодействии с которым инициирует ренормировку кулоновского взаимодействия, может выступать любая другая подсистема. Существенно лишь, чтобы взаимодействие электронного газа с такой подсистемой приводило к поляризационным эффектам, обуславливающим рождение электронов и дырок в окрестности поверхности Ферми. В частности, во многих теоретических работах по высокотемпературным сверхпроводникам в качестве такого посредника выступают коллективные возбуждения подсистемы локализованных спинов ионов меди. С этим связан спин-флуктуационный механизм куперовской неустойчивости, приводящий к сверхпроводящей фазе с d -типом симметрии параметра порядка.

В представлении вторичного квантования для фермионов оператор кулоновского взаимодействия электронов содержит недиагональные слагаемые, инициирующие в высших порядках теории возмущений поляризационные вклады в энергию основного состояния. Эти вклады также будут приводить к ренормировке кулоновского взаимодействия между электронами. Поэтому эффективное взаимодействие электронов в таком веществе может существенно отличаться от электрон-электронного взаимодействия в вакууме. Это делает актуальной постановку проблемы, впервые высказанной Андерсоном [2] и связанной с возможностью такой ренормировки кулоновского взаимодействия электронов, чтобы эффективное электрон-электронное взаимодействие даже в пренебрежении фононами имело характер притяжения, а не отталкивания. Другими словами, проблема заключается в поиске усло-

вий, при которых отмеченные выше поляризационные эффекты в электронной плазме твердого тела в металлах приведут к перевороту знака результирующего взаимодействия между электронами. В математическом отношении обсуждаемая проблема сводится к решению задачи о вычислении эффективного парного взаимодействия электронов при учете многочастичных эффектов в электронном ансамбле. Не менее важной проблемой по мысли Андерсона является проблема объяснения необычных свойств нормального состояния многих сильнокоррелированных электронных систем выше критической температуры, особенно в псевдощелевом состоянии.

За последние десятилетия был достигнут значительный прогресс в экспериментальном и теоретическом исследовании сверхпроводящих систем с нефононной природой куперовского спаривания. Первыми экспериментально открытыми системами с нетрадиционным триплетным p -спариванием (величина полного спина куперовской пары $S_{tot} = 1$ и орбитального момента $l = 1$) были сверхтекучие A - и B -фазы ${}^3\text{He}$ с низкими критическими температурами $T_c \sim 1$ мК [3–5]. Другим примером систем, в которых реализуется p -спаривание, являются молекулы ${}^6\text{Li}_2$ и ${}^{40}\text{K}_2$ в магнитных ловушках в режиме резонанса Фешбаха с сверхнизкими критическими температурами $T_c \sim 10^{-7}$ – 10^{-6} К [6, 7]. Предполагается, что нетрадиционное p -спаривание с критическими температурами $T_c \sim 0.5$ – 1 К реализуется в некоторых тяжелофермионных интерметаллидах, таких как $\text{U}_{1-x}\text{Th}_x\text{Be}_{13}$ и UNl_2Al_3 с высокими эффективными массами $m^* \sim 100$ – $200m_e$ [8, 9]. Часто о p -спаривании упоминают в связи с органическими сверхпроводниками, такими как α -(BEDT-TTF) $_2\text{I}_3$ с $T_c \sim 5$ К [10]. Наконец, p -спаривание с $T_c \sim 1$ К, по-видимому, реализуется в рутенатах Sr_2RuO_4 [11], и не исключено, что также в слоистых дихалькогенидах CuS_2 – CuSe_2 , полуметаллах и полуметаллических сверхрешетках InAs – GaSb , PbTe – SnTe . К нетрадиционным сверхпроводникам с синглетным d -спариванием ($S_{tot} = 0$, $l = 2$) относятся тяжелофермионный интерметаллид UPt_3 с $m^* \sim 200m_e$ и $T_c \sim 0.5$ К, а также обширный класс высокотемпературных купратных сверхпроводников с критическими температурами от $T_c \sim 36$ К для соединений на основе лантана до $T_c \sim 160$ К, полученных под давлением в сверхпроводниках на основе ртути (абсолютный рекорд, установленный для T_c в купратах на сегодняшний день). Наконец, в связи с проблемой нефононной сверхпроводимости необходимо также упомянуть новые многозонные сверхпроводники с

более традиционным s -типом спаривания, такие как MgB_2 [12], а также недавно открытые сверхпроводники на основе арсенида железа [13].

Наряду с проблемами куперовского спаривания в отмеченных системах, значительный интерес представляют также до сих пор не разрешенные проблемы поиска сверхтекучести в трехмерных и в особенности в двумерных (тонкие пленки, субмонослои) растворах ^3He в ^4He [3–5] и сверхпроводимости в легированном графене [14]. Данные системы представляются одними из наиболее перспективных в отношении экспериментального и теоретического описания широкого круга физических явлений, включая нетрадиционную сверхпроводимость.

В частности, субмонослои ^3He , адсорбированные на различных подложках, таких как твердый субстрат (графоил) или свободная поверхность сверхтекучего ^4He , при изменении плотности частиц в широких интервалах допускают реализацию различных корреляционных режимов в системе — от ультраразряженного ферми-газа до сильнокоррелированной фермионной системы [15]. Это делает растворы идеальным объектом для развития и апробации различных многочастичных методов теории конденсированного состояния.

Графен представляет значительный интерес как с фундаментальной, так и с прикладной точки зрения, вследствие своих уникальных электронных свойств [16, 17]. Вблизи уровня Ферми электроны в графене обладают линейной дисперсией, а энергетическая щель между валентной зоной и зоной проводимости отсутствует, поэтому электроны могут описываться двумерным уравнением Дирака для безмассовых заряженных квазичастиц [18]. Такие свойства этих квазичастиц, как двумерность, спинорная природа спектра, нулевая масса и отсутствие щели в спектре, приводят к ряду нетривиальных электронных явлений, не имеющих аналогов в других физических системах [19].

Отмеченные системы стимулировали интенсивный поиск альтернативных механизмов сверхпроводящего спаривания, основанных на корреляциях в ферми-жидкости. Наиболее перспективным в этом отношении представляется механизм Кона – Латтинжера [20], предложенный в 1965 году. Данный механизм предполагает превращение затравочного отталкивательного взаимодействия двух частиц в вакууме при наличии ферми-фона в эффективное притяжение. Данный обзор посвящен изложению основных результатов по сверхпроводимости Кона – Латтинжера в ферми-системах с отталкиванием, полученных за последние полвека.

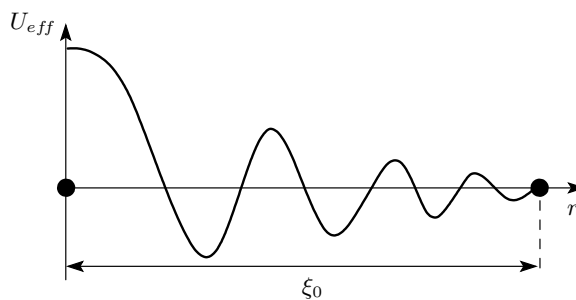


Рис. 1. Фриделевские осцилляции в эффективном взаимодействии двух частиц за счет поляризации фермиевского фона: ξ_0 — длина когерентности куперовской пары, $\xi_0 \gg 1/p_F$

2. МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА

Основной моделью для изучения нефононных механизмов сверхпроводимости в электронных системах с малой плотностью является модель ферми-газа. В случае ферми-газа с притяжением длина рассеяния $a < 0$, и в результате возникает традиционное s -спаривание (суммарный спин $S = 0$, величина орбитального момента $l = 0$) с критической температурой

$$T_c^s \approx 0.28 \varepsilon_F \exp\left(-\frac{\pi}{2|a|p_F}\right). \quad (1)$$

Данный результат был получен в работе [21] вскоре после появления теории БКШ [1]. Результат (1) отличается от классической формулы БКШ величиной $0.28 \varepsilon_F$ в предэкспоненциальном множителе, стоящей вместо дебаевской частоты ω_D , типичной для моделей традиционных сверхпроводников.

В модели ферми-газа с отталкиванием длина рассеяния $a > 0$, и в низкотемпературной области реализуется сверхпроводимость по механизму Кона – Латтинжера. Физическая причина этого механизма спаривания связана с эффективным взаимодействием квазичастиц, возникающим в результате поляризации фермиевского фона. Фактически, из-за наличия в импульсном пространстве резкой границы равной диаметру сферы Ферми $2p_F$, отделяющей область заполненных состояний от пустых состояний, эффективное взаимодействие квазичастиц, находящихся на уровне Ферми, не убывает экспоненциально, а имеет знакопеременный вид (осцилляции Фриделя [22])

$$U_{eff}(r) \sim \frac{\cos(2p_F r)}{(2p_F r)^3}. \quad (2)$$

Если расстояние между двумя электронами в куперовской паре велико по сравнению с межатомным

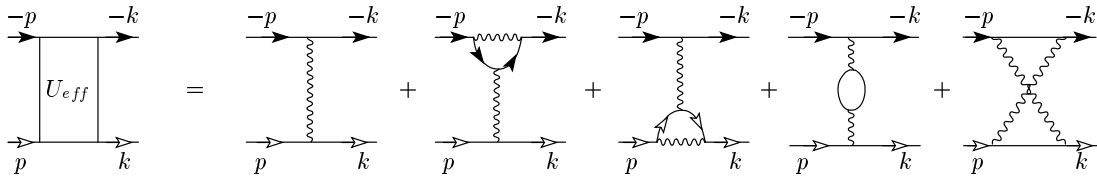


Рис. 2. Диаграммы первого и второго порядков для эффективного взаимодействия U_{eff} . Сплошной линией со светлой (темной) стрелкой соответствуют функции Грина электронов с проекцией спина $+\frac{1}{2}$ ($-\frac{1}{2}$). Волнистые линии отражают затравочное взаимодействие

расстоянием, то эффективное взаимодействие (2) в координатном пространстве имеет большое число максимумов и минимумов (рис. 1). Тогда интегральный эффект, определяемый усреднением фриделевских осцилляций по такому потенциальному рельефу, в принципе, может привести к эффективному притяжению и возникновению сверхпроводимости в системе.

Впервые на такой механизм сверхпроводимости обратили внимание Кон и Латтинжер [20], рассмотревшие случай трехмерного электронного газа. Авторы показали, что эффективное взаимодействие в первых двух порядках теории возмущений описывается суммой пяти диаграмм, изображенных на рис. 2. Первый график соответствует затравочному взаимодействию двух электронов в куперовском канале. Следующие четыре диаграммы (диаграммы Кона–Латтинжера) происходят от процессов второго порядка и учитывают поляризационные эффекты заполненной ферми-сферы. В случае ферми-газа малой плотности и короткодействующего потенциала вклад в эффективное взаимодействие определяется лишь четвертой обменной диаграммой и в первых двух порядках теории возмущений по газовому параметру ap_F выражение для U_{eff} может быть записано в виде

$$U_{eff}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = ap_F + (ap_F)^2 \Pi(\mathbf{p}, \mathbf{k}), \quad (3)$$

где $\Pi(\mathbf{p}, \mathbf{k})$ — статический поляризационный оператор, описывающийся стандартной линдхардовской функцией [23, 24]

$$\Pi(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{p}_1} \frac{n_F(\varepsilon_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p} - \mathbf{k}}) - n_F(\varepsilon_{\mathbf{p}_1})}{\varepsilon_{\mathbf{p}_1} - \varepsilon_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p} - \mathbf{k}}}, \quad (4)$$

который ответствен в случае электронного газа в металле за экранировку заряда. Здесь $\varepsilon_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2/2m$ — энергетический спектр,

$$n_F(x) = \left(\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{T}\right) + 1 \right)^{-1}$$

— функция Ферми–Дирака, μ — химический потенциал.

В ранних работах Мигдала [25] и Кона [26], а также в работе [20] отмечалось, что при низких температурах, $T \ll \varepsilon_F$, поляризационный оператор, наряду с регулярной частью, содержит также сингулярную часть, так называемую коновскую особенность, имеющую в трехмерном пространстве вид

$$\Pi_{sing}(\tilde{q}) \sim (\tilde{q} - 2p_F) \ln |\tilde{q} - 2p_F|, \quad (5)$$

где для четвертой обменной диаграммы на рис. 2 $\tilde{q} = |\mathbf{p} + \mathbf{k}|$. При переходе в координатное пространство сингулярная часть Π_{sing} приводит к фриделевским осцилляциям (2) в эффективном взаимодействии (рис. 1). Таким образом, чисто отталкивательный короткодействующий потенциал между двумя частицами в вакууме индуцирует в электронном газе эффективное взаимодействие с конкуренцией между отталкиванием и притяжением. Оказывается, что сингулярная часть в U_{eff} работает в пользу притяжения, обеспечивая вклад, всегда превышающий для орбитальных моментов пары $l \neq 0$ отталкивательный вклад, обусловленный регулярной частью U_{eff} . Это обстоятельство приводит при больших орбитальных моментах $l \gg 1$ к сверхпроводящей неустойчивости с критической температурой $T_{cl} \sim \exp(-l^4)$. При этом обычное спаривание в s -канале ($l = 0$) подавляется чистым кулоновским отталкиванием, обусловленным главным максимумом в U_{eff} (рис. 1), и сверхпроводимость реализуется для больших значений орбитального момента $l \gg 1$. Отметим, что при $l \neq 0$ роль главного максимума ослабляется центробежным потенциалом, что улучшает условия для возникновения сверхпроводимости.

Таким образом, из работы [20] следовал нетривиальный вывод о том, что при нулевой температуре не существует ферми-систем в нормальном состоянии — любая трехмерная электронная система с затравочным отталкивательным взаимодействием

между частицами при очень низких температурах является неустойчивой по отношению к переходу в сверхпроводящее состояние с большим орбитальным моментом относительного движения куперовской пары ($l \gg 1$). Однако проведенные в работе [20] оценки величины критической температуры для реалистичных параметров электронных систем в металле и для сверхтекучего ^3He дали очень низкие значения критической температуры ($T_{cd} \sim 10^{-16}$ К для ^3He и $T_{cd} \sim 10^{-11}$ К для металлической плазмы при рассматриваемом в работе [20] значении $l = 2$). Такая низкая величина T_c явилась одной из причин, по которой механизм Кона–Латтинжера не вызывал интереса у исследователей в течение достаточно долгого времени.

Позднее в работах [27, 28] было показано, что температура сверхпроводящего перехода в работе [20] была недооценена из-за использования асимптотического выражения для больших орбитальных моментов $l \gg 1$. В действительности, при $l = 1$ точное аналитическое вычисление показывает, что вклады в U_{eff} , соответствующие притяжению квазичастиц, вновь преобладают над отталкивательными вкладами. В результате трехмерный ферми-газ с отталкиванием оказывается неустойчивым относительно сверхпроводящего перехода с триплетным p -спариванием при критической температуре [27–30], определяемой главной экспонентой:

$$T_{cp} \approx \varepsilon_F \exp\left(-\frac{5\pi^2}{4(2\ln 2 - 1)(ap_F)^2}\right) = \varepsilon_F \exp\left(-\frac{13}{\lambda^2}\right), \quad (6)$$

где $\lambda = 2ap_F/\pi$ — эффективный трехмерный газовый параметр Галицкого [31]. Отметим, что для $l = 1$ вклад коновской особенности лишь увеличивает T_{cp} , но не имеет решающего значения для возникновения сверхпроводимости.

В работе [32] было продемонстрировано, что можно существенно повысить критическую температуру даже при малых электронных плотностях, помещая систему нейтральных частиц в магнитное поле. Это происходит в силу того, что в отличие от s -спаривания, в p -канале отсутствует парамагнитное подавление сверхпроводимости и повышение T_{cp} возможно за счет увеличения эффективного взаимодействия и характера коновской особенности. В этом случае наибольшие T_{cp} отвечают так называемой A_1 -фазе, когда куперовская пара образуется двумя спинами «вверх», а эффективное взаимодействие для них готовят два спина «вниз».

В случае двумерного ферми-газа малой плотности с отталкиванием в первых двух порядках теории возмущений по газовому параметру эффективное взаимодействие имеет вид [33, 34]

$$U_{eff}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = f_0 + f_0^2 \Pi(\mathbf{p}, \mathbf{k}), \quad (7)$$

где $f_0 = 1/2 \ln(p_F r_0)$ — двумерный газовый параметр Блума [35], $\Pi(\mathbf{p}, \mathbf{k})$ — двумерный поляризационный оператор, r_0 — радиус действия потенциала.

В двумерной ситуации эффективное взаимодействие в координатном пространстве также содержит фриделевские осцилляции

$$U_{eff}(r) \sim f_0^2 \frac{\cos(2p_F r)}{(2p_F r)^2}, \quad (8)$$

причем гораздо более сильные, чем осцилляции (2) в трехмерном случае. Однако в импульсном пространстве двумерная коновская особенность носит одно-сторонний характер [36]:

$$\Pi_{sing}(\tilde{q}) \sim f_0^2 \text{Re} \sqrt{\tilde{q} - 2p_F} = 0 \quad (9)$$

для $\tilde{q} \leq 2p_F$ и поэтому оказывается неэффективной для задачи о сверхпроводимости. Таким образом, двумерный ферми-газ с отталкиванием остается в нормальном состоянии по крайней мере в первых двух порядках теории возмущений по газовому параметру f_0 . Тем не менее в работе [33] было показано, что сверхпроводящее p -спаривание возникает в следующем, третьем, порядке теории возмущений по f_0 , в котором для сингулярного вклада в эффективное взаимодействие возникает выражение

$$\Pi_{sing}(\tilde{q}) \sim f_0^3 \text{Re} \sqrt{2p_F - \tilde{q}}. \quad (10)$$

При этом точное вычисление [37] критической температуры перехода в сверхпроводящую фазу при учете всех неприводимых диаграмм третьего порядка приводит к выражению

$$T_{cp} \sim \varepsilon_F \left(-\frac{1}{6.1 f_0^3}\right). \quad (11)$$

Оценка для температуры сверхпроводящего перехода дает в этом случае 10^{-4} К [33, 37] для предельных плотностей, при которых все еще применимо ферми-газовое описание. Эта оценка уже соответствует реалистичным значениям, предсказанным для монослоев гелия ^3He на поверхности ^4He [38].

Другая возможность резко повысить T_c уже в малой плотности связана с анализом двузонной ситуации или многослойной системы. В этом случае роль спинов «вверх» играют электроны первой зоны (слоя), а роль спинов «вниз» играют электроны

второй зоны (слоя). Связь между электронами двух зон осуществляется посредством межзонного кулоновского взаимодействия. В результате становится возможным следующий механизм сверхпроводящего спаривания: электроны одного сорта образуют куперовскую пару через поляризацию электронов другого сорта [39, 40]. Данный механизм взаимодействия также эффективен в квазидвумерных системах.

Необходимо отметить, что в ряде работ [41, 42] изучалось также влияние отщепленных энергетических полос на свойства нормального состояния в базовых моделях для ферми-систем с отталкиванием. Были обнаружены нетривиальные поправки к ферми-газовому разложению Галицкого–Блума, возникающие за счет антисвязанных состояний [41] в двумерной модели Хаббарда или особенности в квазичастичной f -функции Ландау в двумерном ферми-газе с отталкиванием при малой электронной плотности [42]. В работах [41, 42] было показано, однако, что эти поправки не разрушают ферми-жидкостную картину Ландау ни в трехмерном, ни и в двумерном случаях.

3. МОДЕЛЬ ХАББАРДА

В связи с открытием высокотемпературной сверхпроводимости [43] значительную популярность приобрела модель Хаббарда [44], ставшая одной из фундаментальных моделей для описания необычных свойств купратов. Модель Хаббарда является частным случаем более общей модели взаимодействующих электронов, зонная структура которых описывается в методе сильной связи, и фактическая модель Хаббарда представляет собой минимальную модель, учитывающую зонное движение электронов в твердом теле, наряду с сильным межэлектронным взаимодействием [45–49]. Данная модель имеет особую значимость при описании узкозонных металлов [37]. В представлении вторичного квантования гамильтониан такой модели записывается в виде

$$\hat{H} = \sum_{f\sigma} (\varepsilon - \mu) n_{f\sigma} + \sum_{f m \sigma} t_{fm} c_{f\sigma}^\dagger c_{m\sigma} + U \sum_f n_{f\uparrow} n_{f\downarrow}, \quad (12)$$

где $c_{f\sigma}^\dagger$ ($c_{f\sigma}$) — оператор рождения (уничтожения) электрона с проекцией спина $\sigma = \pm 1/2$ на узле f , ε — одноузельная энергия электрона, μ — химический потенциал системы. В (12)

$$n_f = \sum_{\sigma} n_{f\sigma} = \sum_{\sigma} c_{f\sigma}^\dagger c_{f\sigma}$$

— оператор числа частиц на узле f , матричный элемент t_{fm} определяет интенсивность процесса перескока электрона с узла f на узел m , U — параметр кулоновского взаимодействия двух электронов, находящихся на одном узле и обладающих противоположными проекциями спинового момента (хаббардовское отталкивание).

Поскольку большой набор экспериментальных данных указывал на то, что основная динамика фермиевских возбуждений в купратах развивается в CuO_2 -плоскостях, для описания нефононных механизмов высокотемпературной сверхпроводимости использовалась, главным образом, двумерная модель Хаббарда на простой квадратной решетке. В импульсном пространстве гамильтониан модели Хаббарда имеет вид

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}\sigma} (\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu) c_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{p}\sigma} + U \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}} c_{\mathbf{p}\uparrow}^\dagger c_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}\downarrow}^\dagger c_{\mathbf{p}+\mathbf{q}\downarrow} c_{\mathbf{p}'\uparrow}, \quad (13)$$

где энергия электрона при учете дальних перескоков, интенсивность которых определяется параметрами t_2 и t_3 , описывается выражением

$$\varepsilon_{\mathbf{p}} = 2t_1(\cos p_x d + \cos p_y d) + 4t_2 \cos p_x d \cos p_y d + 2t_3(\cos 2p_x d + \cos 2p_y d), \quad (14)$$

где d — расстояние между узлами. Необходимо отметить, что при моделировании электронного спектра (14) и построении фазовой диаграммы сверхпроводящего состояния в модели Хаббарда становится существенным выход за рамки приближения ближайших соседей ($t_2 \neq 0$, $t_3 \neq 0$). Это связано с тем, что главный вклад в эффективную константу связи осуществляется за счет взаимодействия электронов, находящихся на поверхности Ферми, геометрия которой зависит от структуры энергетического спектра. Важную роль также играет тот факт, что включение дальних перескоков смещает особенность ван Хова в плотности электронных состояний от половинного заполнения ($n = 1$) в область меньших или больших электронных плотностей (рис. 3). Необходимо отметить, что включение перескоков в третью координатную сферу квадратной решетки $t_3 \neq 0$ может приводить к качественному изменению геометрии поверхности Ферми, которое заключается, в частности, в формировании многолистного ферми-контура (см. вставку на рис. 3).

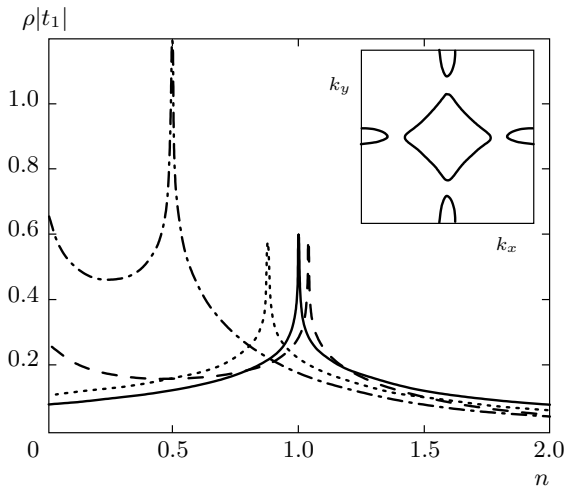


Рис. 3. Модификация плотности электронных состояний и смещение особенности ван Хофа в модели Хаббарда на квадратной решетке при изменении интегралов перескока: $t_2 = t_3 = 0$ (сплошная кривая), $t_2 = 0.15, t_3 = 0$ (пунктирная кривая), $t_2 = 0.15, t_3 = 0.1$ (штриховая кривая), $t_2 = 0.44, t_3 = 0$ (штрихпунктирная кривая). На вставке показано формирование многолистного ферми-контура для набора параметров $t_2 = 0.44, t_3 = -0.1, \mu = 2$ (все параметры в ед. $|t_1|$)

Таким образом, включение дальних перескоков может приводить к модификации фазовой диаграммы, определяющей области реализации сверхпроводящих состояний с различными типами симметрии параметра порядка.

В модели Хаббарда имеется возможность построения теории возмущений в двух предельных случаях, а именно, в случае борновского приближения слабой связи: $U \ll W$ ($W = 2zt$ — ширина зоны, z — число ближайших соседей) и произвольной плотности электронов, и в случае сильной связи, $U \gg W$, и малой электронной плотности. Использование приближения слабой связи ($U \ll W$) при анализе возможности сверхпроводящего спаривания Кона–Латтинжера позволяет при вычислении U_{eff} для куперовского канала в области электронных плотностей $n \sim 1$ (вблизи половинного заполнения) ограничиться диаграммами не выше второго порядка по взаимодействию (рис. 2). В противоположном предельном случае сильной связи, $U \gg W$, учет диаграмм только первого и второго порядков является оправданным лишь в области малой электронной плотности $n \ll 1$, когда справедливо ферми-газовое разложение Галицкого–Блума [31, 35].

В работе [50] были проанализированы условия ре-

ализации сверхпроводимости Кона–Латтинжера в двумерной модели Хаббарда с гамильтонианом (13) в предельном случае слабой связи, $U \ll W$, в приближении ближайших соседей ($t_2 = t_3 = 0$) и при малых электронных плотностях ($p_F d \ll 1$):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu &= 2t_1(\cos p_x d + \cos p_y d) - \mu \approx \\ &\approx \frac{p^2 - p_F^2}{2m} - \frac{(p_x^4 + p_y^4)d^2}{24m} + \frac{(p_x^6 + p_y^6)d^4}{720m}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $m = 1/(2t_1 d^2)$ — зонная масса электрона. Видно, что в выбранном приближении затравочный спектр электронов при $p_F d \ll 1$ почти совпадает со спектром невзаимодействующего ферми-газа, а сам гамильтониан Хаббарда оказывается тождественно эквивалентным гамильтониану слабонеидеального ферми-газа с короткодействующим отталкиванием между частицами. Для выяснения возможности сверхпроводящего перехода в рассматриваемом приближении была вычислена эффективная затравочная вершина для куперовского канала до второго порядка теории возмущений включительно:

$$U_{eff}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = U + U^2 \Pi(\mathbf{p}, \mathbf{k}), \quad (16)$$

где $\Pi(\mathbf{p}, \mathbf{k})$ — поляризационный оператор (4).

Для решения интегрального уравнения Бете–Салпетера в работе [50] были использованы собственные функции неприводимых представлений группы симметрии C_{4v} квадратной решетки. Как известно, эта группа имеет пять неприводимых представлений [51], для каждого из которых интегральное уравнение имеет свое решение. Среди этих представлений имеется четыре одномерных, A_1, A_2, B_1, B_2 , соответствующих синглетному спариванию, и одно двумерное, E , отвечающее триплетному спариванию. Явный вид ортонормированных функций $g_m^{(\alpha)}(\phi)$ (индекс « α » обозначает неприводимое представление, m — номер базисной функции представления α , а ϕ — угол, характеризующий направление импульса $\hat{\mathbf{p}}$, лежащего на контуре Ферми, по отношению к оси p_x), а также симметричная классификация сверхпроводящего параметра порядка $\Delta^{(\alpha)}(\phi)$ определяются выражениями

$$\begin{aligned}
 A_1 &\rightarrow g_m^{(s)}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{(1 + \delta_{m0})\pi}} \cos 4m\phi, \\
 &\quad m \in [0, \infty), \\
 A_2 &\rightarrow g_m^{(s_{exi})}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 4(m + 1)\phi, \\
 B_1 &\rightarrow g_m^{(d_{xy})}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(4m + 2)\phi, \\
 B_2 &\rightarrow g_m^{(d_{x^2-y^2})}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(4m + 2)\phi, \\
 E &\rightarrow g_m^{(p)}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (A \sin(2m + 1)\phi + \\
 &\quad + B \cos(2m + 1)\phi).
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Для решения проблемы сверхпроводящего спаривания функция $U_{eff}(\mathbf{p}, \mathbf{k})$ была разложена в ряд с функциями (17), а затем был проанализирован знак выражений для U_{eff}^α . В результате было показано, что двумерная электронная система, описываемая моделью Хаббарда, при малом заполнении и $U \ll W$ оказывается неустойчивой по отношению к сверхпроводящему спариванию с d_{xy} -типом симметрии параметра порядка $\Delta(\phi)$.

Предел слабой связи, $U < W$, в трехмерной и двумерной моделях Хаббарда вблизи половинного заполнения был проанализирован в работах [52, 53]. В двумерном случае [53] при $n \approx 1$ в приближении ближайших соседей электронный спектр становится квазигиперболическим [56]:

$$\varepsilon_{\mathbf{p}} \approx \pm \frac{p_x^2 - p_y^2}{2m}, \tag{18}$$

для малых значений $p_x d < 1$ и $p_y d < 1$ вблизи угловых точек $(0, \pm\pi)$ и $(\pm\pi, 0)$, в которых ферми-поверхность почти касается зоны Бриллюэна (рис. 4). В (18) зонная масса вновь $m = 1/(2t_1 d^2)$. Хорошо известно, что в этих областях вблизи особенности ван Хова плотность электронных состояний логарифмически велика $g(E) \sim \ln(t/|\mu|)$, где $\mu \ll t$ — химический потенциал вблизи половинного заполнения. На рис. 4 видно, что имеются почти плоские области поверхности Ферми, удовлетворяющие идеальному условию нестинга для точно полузаполненного случая ($n = 1$):

$$\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{Q}} = -\varepsilon_{\mathbf{p}}, \tag{19}$$

где $\mathbf{Q} = (\pi/d, \pi/d)$ — вектор нестинга для двумерной квадратной решетки. В этих областях поляризационный оператор усилен как коновской, так и ван хововской особенностью и имеет вид [53, 56] $\Pi(\mathbf{Q}) \sim \ln^2(t/|\mu|)$. Параметром теории возмущений в данном случае служит величина

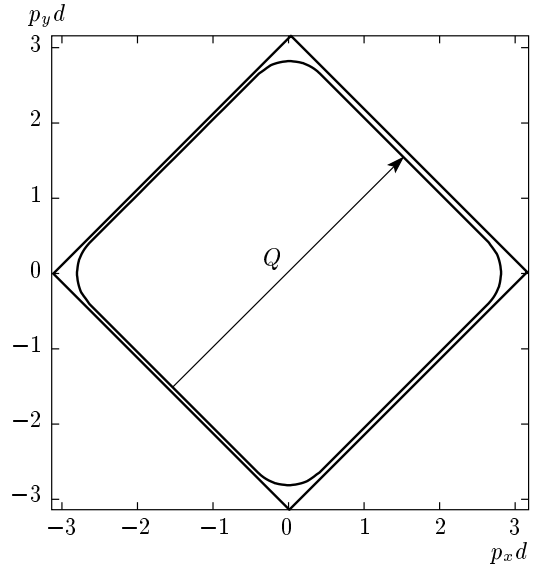


Рис. 4. Поверхность Ферми в случае почти полузаполненной зоны ($n \approx 1$) в двумерной модели Хаббарда на квадратной решетке, где $\mathbf{Q} = (\pi/d, \pi/d)$ — вектор нестинга

$$f_0 = \frac{U}{8\pi t} \ll 1, \tag{20}$$

и во втором порядке теории возмущений по f_0 выражение для эффективного взаимодействия [53]:

$$U_{eff} \sim f_0 + f_0^2 \ln^2 \frac{t}{|\mu|}. \tag{21}$$

Поскольку выражение для куперовской петли при $n \approx 1$ кроме обычного куперовского логарифма также содержит логарифм от особенности ван Хова, то в результате

$$L(\xi_{\mathbf{p}}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{p}} \frac{\text{th}(\xi_{\mathbf{p}}/2T)}{2\xi_{\mathbf{p}}} \sim \ln \frac{\mu}{T} \ln \frac{t}{|\mu|}, \tag{22}$$

где $\xi_{\mathbf{p}} = \varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu$. Поэтому уравнение для критической температуры перехода в сверхпроводящую фазу с $d_{x^2-y^2}$ -типом симметрии параметра порядка, полученное в работе [53] в главном логарифмическом приближении, имеет вид

$$f_0^2 \ln^3 \frac{t}{|\mu|} \ln \frac{\mu}{T_c} \sim 1. \tag{23}$$

Отсюда критическая температура

$$T_c^{d_{x^2-y^2}} \sim \mu \exp\left(-\frac{1}{f_0^2 \ln^3(t/|\mu|)}\right). \tag{24}$$

Из выражения (24) видно, что малое значение f_0^2 при $f_0 \ll 1$ компенсируется большим значением $\ln^3(t/|\mu|) \gg 1$.

Результаты работы [50] по реализации d_{xy} -спаривания при $n \lesssim 0.6$ и $d_{x^2-y^2}$ -спаривания при $n \sim 1$ [52, 53] в пределе слабой связи были впоследствии подтверждены и другими авторами. В работах [54] была построена фазовая диаграмма сверхпроводящего состояния двумерной модели Хаббарда при малых и промежуточных электронных плотностях, отражающая зависимость конкуренции различных типов симметрии параметра порядка от величины интеграла перескока электронов t_2 на узлы, следующие за ближайшими. Фазовая диаграмма, полученная во втором порядке теории возмущений, показывает, что при $t_2 = 0$ в области малых плотностей электронов, $0 < n < 0.52$, в первых двух порядках теории возмущений реализуется сверхпроводимость с d_{xy} -типом симметрии параметра порядка, в интервале $0.52 < n < 0.58$ основному состоянию соответствует фаза с p -спаривания, а при $n > 0.58$ возникает $d_{x^2-y^2}$ -спаривание. В работе [55] в рамках метода ренормгруппы были получены аналогичные результаты.

В непосредственной близости к половинному заполнению, $0.95 < n < 1$, где имеет место сильная конкуренция между сверхпроводимостью и антиферромагнетизмом, задача о куперовской неустойчивости была рассмотрена в работах [56, 57]. В работах суммировались так называемые паркетные диаграммы и для $\mu \sim T_c$ было получено уравнение

$$f_0^2 \ln^4 \frac{t}{|\mu|} \sim f_0^2 \ln^4 \frac{t}{T_c} \sim 1. \quad (25)$$

Из него следует изящная оценка для максимума критической температуры:

$$T_c^{d_{x^2-y^2}} \sim t \exp\left(-\frac{\text{const}}{\sqrt{f_0}}\right). \quad (26)$$

Отметим, что максимальная критическая температура перехода в сверхпроводящую фазу в двумерной модели Хаббарда была также получена в работе [58] в режиме $U/W \sim 1$ и оптимальных электронных концентраций $n \sim 0.8-0.9$. Согласно оценке [58], критическая температура в максимуме может достигать желаемых значений $T_c^{d_{x^2-y^2}} \approx 100$ К, реалистичных для оптимально легированных купратных сверхпроводников.

4. МОДЕЛЬ ШУБИНА – ВОНСОВСКОГО

В работе [59] обсуждался важный вопрос о роли полного кулоновского взаимодействия в нефоновых механизмах сверхпроводимости, которое в реальности не ограничивается короткодействующим

хаббардовским отталкиванием, а включает также и дальнедействующую часть. Авторы работы [59] рассмотрели трехмерную модель желе при реалистичных значениях электронных плотностей $r_S \leq 20$, где

$$r_S = 1.92/p_F a_B \quad (27)$$

— корреляционный радиус Вигнера–Зейтца и $a_B = \varepsilon_0/m_e^2$ — боровский радиус электрона ($\hbar = 1$). При вычислении эффективного взаимодействия были учтены вклады первого и второго порядков теории возмущений, обусловленные всеми диаграммами, представленными на рис. 2. Авторами работы [59] было отмечено, что предыдущие исследования сверхпроводимости Кона–Латтинжера ограничивались учетом только короткодействующего кулоновского взаимодействия электронов U в силу вычислительных трудностей, связанных с учетом фурье-образа дальнедействующего кулоновского отталкивания $V_{\mathbf{q}}$, зависящего от \mathbf{q} в диаграммах первого и второго порядков. В результате сильное затривочное кулоновское отталкивание в первом порядке теории возмущений (первая диаграмма на рис. 2) игнорировалось и вклад в эффективное взаимодействие электронов в куперовском канале обуславливался только последней обменной диаграммой на рис. 2, он носил характер притяжения и обеспечивал p -спаривание в трехмерном случае [27, 28] и d -спаривание в двумерном случае [29, 58] для модели Хаббарда.

В работе [59] дальнедействующее кулоновское взаимодействие $V_{\mathbf{q}}$ было выбрано в виде фурье-образа от потенциала Юкавы

$$V(r) = \frac{e^2}{r} \exp(-\kappa r),$$

который в трехмерном случае имеет стандартный вид:

$$V_{\mathbf{q}} = \frac{4\pi e^2}{q^2 + \kappa^2}, \quad (28)$$

где κ — обратная длина экранировки. По результатам вычислений авторы [59] заключили, что малые и промежуточные величины хаббардовского отталкивания U в присутствии дальнедействующей части кулоновского взаимодействия (28) не индуцируют развитие куперовской неустойчивости ни в трехмерных, ни в двумерных ферми-системах в p - и d -каналах, независимо от того, насколько мала длина экранировки. Спаривание, возникающее при больших орбитальных моментах ($l \geq 3$), приводит к почти нулевым значениям критической температуры для любых реалистичных значений энергии Ферми. Таким образом, аномальное спаривание,

обусловленное сильным кулоновским отталкиванием, невозможно, по мысли авторов [59], поскольку соответствующая энергия конденсации куперовских пар, если даже она и имеется, в несколько раз ниже энергии конденсации, обусловленной электрон-фононным взаимодействием.

Возрастание интереса к проблеме учета дальних междоузельных кулоновских корреляций при описании фазовой диаграммы высокотемпературных сверхпроводников привело к значительной популярности расширенной модели Хаббарда, включающей взаимодействие электронов, находящихся на разных узлах кристаллической решетки (в отечественной литературе такая модель обычно называется моделью Шубина–Вонсовского [60]).

В историческом аспекте эта модель, сформулированная практически сразу же после создания квантовой механики, является предшественницей некоторых важных моделей теории конденсированного состояния, в частности, таких как $s-d(f)$ -модель и модель Хаббарда. Модель Шубина–Вонсовского активно применялась при исследовании полярных состояний в твердом теле [61], перехода металл–диэлектрик [62], а также при изучении влияния междоузельного кулоновского взаимодействия на сверхпроводящие свойства сильнокоррелированных систем [63–65].

В представлении Ванье гамильтониан модели Шубина–Вонсовского может быть записан в виде

$$\hat{H} = \sum_{f\sigma} (\varepsilon - \mu) c_{f\sigma}^\dagger c_{f\sigma} + \sum_{fm\sigma} t_{fm} c_{f\sigma}^\dagger c_{m\sigma} + U \sum_f \hat{n}_{f\uparrow} \hat{n}_{f\downarrow} + \frac{1}{2} \sum_{fm} V_{fm} \hat{n}_f \hat{n}_m, \quad (29)$$

где последнее слагаемое соответствует учету энергии V_{fm} кулоновского взаимодействия электронов, находящихся на различных узлах кристаллической решетки, \hat{n}_f — оператор полной плотности. В совокупности три последних слагаемых гамильтониана (29) отражают тот факт, что в рассматриваемых системах радиус экранирования может превышать в несколько раз параметр элементарной ячейки [62]. Этим определяется эффективность модели Шубина–Вонсовского, в которой междоузельное кулоновское взаимодействие учитывается в пределах нескольких координационных сфер. В импульсном представлении гамильтониан (29) принимает вид

$$\hat{H} = \sum_{p\sigma} (\varepsilon_p - \mu) c_{p\sigma}^\dagger c_{p\sigma} + U \sum_{pp'q} c_{p\uparrow}^\dagger c_{p'+q\downarrow}^\dagger c_{p+q\downarrow} c_{p'\uparrow} + \frac{1}{2} \sum_{pp'q\sigma\sigma'} V_{p-p'} c_{p\sigma}^\dagger c_{p'+q\sigma'}^\dagger c_{p+q\sigma'} c_{p'\sigma}, \quad (30)$$

где фурье-образ кулоновского взаимодействия электронов, находящихся на ближайших узлах V_1 и узлах, следующих за ближайшими V_2 , в двумерном случае на квадратной решетке:

$$V_q = 2V_1 (\cos q_x d + \cos q_y d) + 4V_2 \cos q_x d \cos q_y d. \quad (31)$$

Авторы работы [66] внесли вклад в дискуссию [58, 59], исследовав условия возникновения сверхпроводящего спаривания Кона–Латтинжера в трехмерных и двумерных моделях Шубина–Вонсовского с кулоновским отталкиванием электронов, находящихся на соседних узлах ($V_1 \neq 0, V_2 = 0$). Вместо использования в качестве фурье-образа междоузельного взаимодействия потенциала Юкавы (28) была рассмотрена ситуация предельно сильного кулоновского отталкивания, $U \gg V_1 \gg W$. В пределе малой электронной плотности, $p_F d \ll 1$, было показано, что даже в этом случае, наиболее неблагоприятном для возникновения эффективного притяжения и сверхпроводимости, вклад от междоузельного кулоновского отталкивания V_1 в эффективное взаимодействие в p -канале пропорционален $(p_F d)^3$ в трехмерном и $(p_F d)^2$ в двумерном случаях, в согласии с общими квантовомеханическими результатами для медленных частиц в вакууме [51]. Однако эти отталкивательные вклады не способны компенсировать вклады, «играющие» в пользу притяжения и пропорциональные $(p_F d)^2$ в трехмерном и $1/\ln^3[1/(p_F d)^2]$ в двумерном случаях. При этом необходимо отметить, что эффективное притяжение возникает только в присутствии заполненного ферми-фона.

Таким образом, предшествующие результаты по реализации сверхпроводящего p -спаривания Кона–Латтинжера как в трехмерной, так и в двумерной моделях Хаббарда с отталкиванием в пределе сильной связи, $U \gg W$, и малой электронной плотности остаются справедливыми даже при включении сильного кулоновского отталкивания электронов на соседних узлах, $V_1 \gg W$, в рамках модели Шубина–Вонсовского. В результате и в трехмерном, и в двумерном случаях получаются те же выражения для критической температуры сверхпроводящего перехода в фазу с p -типом симметрии параметра порядка (6) и (11), что и в отсутствие междоузельного кулоновского отталкивания ($V_1 = 0$). При этом включение V_1

изменяет лишь предэкспоненциальный множитель [37], а значит, сверхпроводящее p -спаривание способно развиваться в ферми-системах с чистым кулоновским отталкиванием [66] в отсутствие электрон-фоонного взаимодействия.

В работе [67] был проведен похожий анализ для расширенной модели Хаббарда в борновском приближении слабой связи, и авторы работы [67] пришли к тем же выводам, что и авторы работы [66]. Более того, в работе [67] было отмечено, что даже в режиме слабой связи, $W > U > V$, в котором могут быть выполнены контролируемые вычисления, эффект дальних кулоновских взаимодействий оказывается подавленным в смысле ухудшения условий развития куперовской неустойчивости. Дело в том, что дальние взаимодействия в решеточных моделях обычно вносят вклад только в некоторые определенные каналы спаривания и не влияют на другие каналы. Вместе с тем, поляризационные вклады, описываемые диаграммами на рис. 2, имеют компоненты во всех каналах, и чаще всего более чем одна из них «играет» в пользу притяжения. В такой ситуации представляется возможным, что дальние взаимодействия либо вообще не влияют на главные компоненты эффективного взаимодействия, приводящие к спариванию, либо подавляют главные компоненты, но не затрагивают второстепенные.

В этой связи в работе [67] на основе расширенной модели Хаббарда в рамках механизма Кона – Латтинжера была построена фазовая диаграмма, наглядно отражающая результат конкуренции сверхпроводящих фаз с различными типами симметрии параметра порядка. При расчетах эффективной константы связи использовалось выражение для ренормированной амплитуды рассеяния в куперовском канале в виде

$$U_{eff}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = U + V_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} + U^2\Pi(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad (32)$$

где $V_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}$ — фурье-образ междуузельного кулоновского отталкивания электронов (31), а $\Pi(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ — линдхардовская функция (4). Таким образом, в [67] междуузельное кулоновское взаимодействие V было учтено только в первом порядке теории возмущений, а поляризационные вклады определялись только членами порядка U^2 . При этом было показано [67], что дальние взаимодействия имеют тенденцию к подавлению аномального спаривания в некоторых каналах, но, несмотря на это, глобально сверхпроводимость Кона – Латтинжера выживает во всей области электронных концентраций $0 < n < 1$ и для всех соотношений между параметрами модели.

В работах [68] было отмечено, что только в области $\mathbf{q}\mathbf{d} \ll 1$ эффективное взаимодействие $U_{eff}(\mathbf{q})$ характеризуется квадратичной зависимостью по квазиимпульсу. За ее пределами становится важным тот факт, что импульсная зависимость $V_{\mathbf{q}}$ определяется периодическими функциями. В результате поведение $U_{eff}(\mathbf{q})$ значительно модифицируется по сравнению с импульсной зависимостью фурье-образа потенциала Юкавы. Эти факторы существенно сказываются на условиях реализации куперовской неустойчивости при больших значениях плотности электронов, когда поверхности Ферми не обладают сферической симметрией. Поэтому следует ожидать, что условия реализации сверхпроводящего спаривания в рамках механизма Кона – Латтинжера будут определяться не только динамическими эффектами, обусловленными кулоновскими взаимодействиями, но и эффектами зоны Бриллюэна.

В работах [68] было учтено влияние кулоновского взаимодействия электронов из первой и второй координационных сфер на развитие куперовской неустойчивости в рамках модели Шубина – Вонсовского в борновском приближении слабой связи, $W > U > V$. Соответственно этому, при нахождении амплитуды рассеяния в куперовском канале в качестве эффективного взаимодействия двух электронов с противоположными значениями импульса и спина использовалось эффективное взаимодействие $U_{eff}(\mathbf{p}, \mathbf{k})$, определяющееся в графической форме суммой пяти диаграмм (рис. 2) и имеющее следующий аналитический вид

$$U_{eff}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = U + V_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} + \delta U(\mathbf{p}, \mathbf{k}), \quad (33)$$

где поправки второго порядка

$$\begin{aligned} \delta U(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = & \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{p}_1} (U + V_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}) \times \\ & \times (2V_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} - V_{\mathbf{p}_1+\mathbf{p}} - V_{\mathbf{p}_1-\mathbf{k}}) \times \\ & \times \frac{n_F(\varepsilon_{\mathbf{p}_1}) - n_F(\varepsilon_{\mathbf{p}_1+\mathbf{p}-\mathbf{k}})}{\varepsilon_{\mathbf{p}_1} - \varepsilon_{\mathbf{p}_1+\mathbf{p}-\mathbf{k}}} + \\ & + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{p}_1} (U + V_{\mathbf{p}_1-\mathbf{p}})(U + V_{\mathbf{p}_1-\mathbf{k}}) \times \\ & \times \frac{n_F(\varepsilon_{\mathbf{p}_1}) - n_F(\varepsilon_{\mathbf{p}_1-\mathbf{p}-\mathbf{k}})}{\varepsilon_{\mathbf{p}_1-\mathbf{p}-\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}_1}}. \quad (34) \end{aligned}$$

Если междуузельное кулоновское взаимодействие учитывается только в первом порядке, и только для электронов, находящихся на ближайших узлах ($V_1 \neq 0$, $V_2 = 0$ в (31)), а спектр

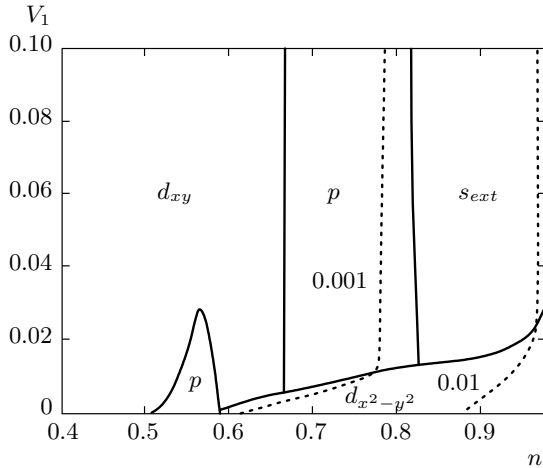


Рис. 5. Фазовая диаграмма модели Шубина–Вонсовского при $t_2 = t_3 = 0, U = |t_1|$ и $V_2/V_1 = 0$. Междоузельное кулоновское взаимодействие учтено только в первом порядке теории возмущений. Для всех точек, принадлежащих одной пунктирной линии, значение λ постоянно и отмечено соответствующим числом

возбуждений описывается одним параметром перескока ($t_1 \neq 0, t_2 = t_3 = 0$), то при $U = |t_1|$ фазовая диаграмма сверхпроводящих состояний содержит пять областей (рис. 5). При ее получении для эффективного взаимодействия электронов в куперовском канале использовалось выражение (32), которое игнорирует вклады, пропорциональные UV и V^2 , фигурирующие в (34). Участки фазовой диаграммы, лежащие на оси абсцисс ($V_1 = 0$), хорошо согласуются с областями на фазовой диаграмме, полученной в работе [54] для модели Хаббарда.

Поскольку первый порядок теории возмущений по междоузельному кулоновскому взаимодействию всегда имеет тенденцию к подавлению сверхпроводящего спаривания, возможность реализации куперовской неустойчивости на основе механизма Кона–Латтинжера связывается с появлением во втором порядке теории возмущений таких вкладов в матрицу эффективного взаимодействия для куперовского канала (34), которые соответствуют притяжению и обладают достаточной интенсивностью. Таким образом, при учете эффектов Кона–Латтинжера по междоузельному кулоновскому взаимодействию необходимо использовать не усеченное выражение (32) для $U_{eff}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, а полное — (33), (34). При таком подходе поляризационные эффекты, пропорциональные UV и V^2 , даже при небольших значениях V_1 существенно изменяют и усложняют струк-

туру фазовой диаграммы (рис. 6a). С увеличением параметра междоузельного кулоновского взаимодействия V_1 происходит возрастание величины $|\lambda|$ для $T_c \sim W \exp(-1/|\lambda|)$, где $W = 8t_1$ — ширина зоны при $t_2 = t_3 = 0$. При этом стабилизируются только три фазы, соответствующие d_{xy} -, p - и s -типам симметрии сверхпроводящего параметра порядка. Отметим, что в области высоких концентраций электронов и при $0.25 < V_1/|t_1| < 0.5$ поляризационные эффекты Кона–Латтинжера приводят к появлению сверхпроводящей s -фазы. Этот качественный эффект наглядно демонстрирует важность учета процессов второго порядка при вычислении эффективного взаимодействия электронов в куперовском канале и при построении фазовой диаграммы на рис. 6. Проведенное количественное сравнение различных парциальных вкладов в полное эффективное взаимодействие показало, что реализация s -спаривания обусловлена поляризационными вкладами, пропорциональными V^2 , при этом основной вклад определяется для квадратной решетки угловой гармоникой

$$g_1^{(s)}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 4\phi.$$

Отмеченный сценарий реализации сверхпроводящего s -спаривания за счет высших угловых гармоник хорошо коррелирует с недавно полученными экспериментальными данными работы [69]. В ней были представлены результаты исследований сверхпроводника на основе арсенида железа KFe_2As_2 , выполненных методом фотоэмиссионной спектроскопии с ультравысоким угловым разрешением. Исследования показали, что данное соединение является нодальным (содержащим нули щели) сверхпроводником с s -типом симметрии параметра порядка, который имеет восемь точек обращения щели в нуль.

На рис. 7a приведена угловая зависимость сверхпроводящего параметра порядка $\Delta^{(s)}(\phi)$

$$\Delta^{(s)}(\phi) = \frac{\Delta_0^{(s)}}{\sqrt{2}} + \Delta_1^{(s)} \cos 4\phi + \Delta_2^{(s)} \cos 8\phi + \Delta_3^{(s)} \cos 12\phi + \Delta_4^{(s)} \cos 16\phi, \quad (35)$$

рассчитанная в работе [68] для области фазовой диаграммы, в которой реализуется s -спаривание при больших электронных плотностях. Данная зависимость демонстрирует наличие восьми нодальных точек, в которых щель обращается в нуль, расположение которых на контуре Ферми (рис. 7б) в расчете [68] качественно согласуется с экспериментальной картиной, представленной в работе [69].

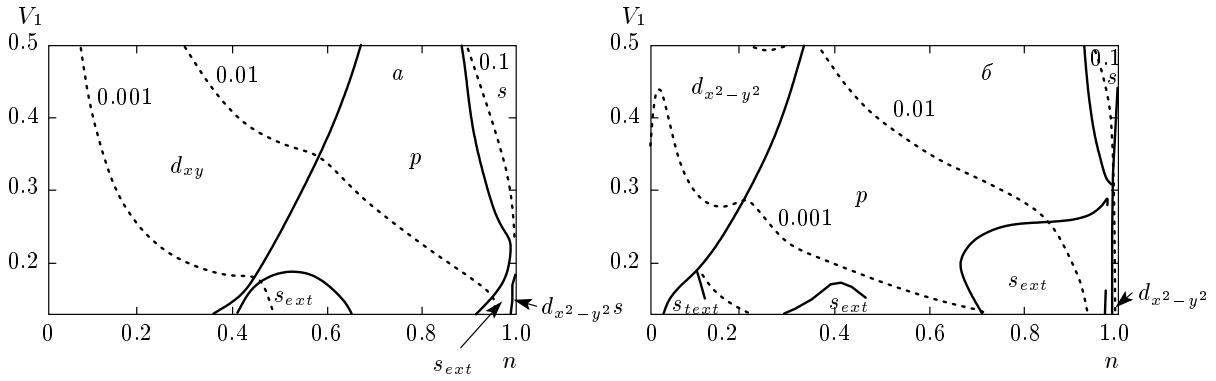


Рис. 6. Фазовая диаграмма модели Шубина–Вонсовского, построенная при учете вкладов второго порядка по V для набора параметров $t_2 = t_3 = 0$, $U = |t_1|$, и соотношения $V_2/V_1 = 0$ (а) и $V_2/V_1 = 0.5$ (б). Пунктиром показаны линии постоянного значения λ

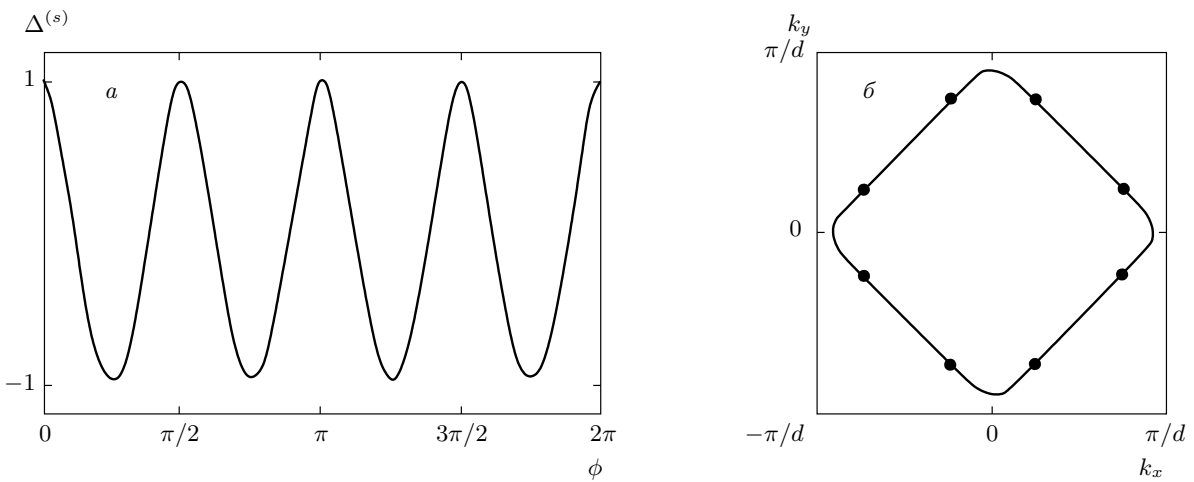


Рис. 7. Угловая зависимость сверхпроводящего параметра порядка $\Delta^{(s)}(\phi)$ (а) и расположение нодальных точек обращения щели $\Delta^{(s)}(\phi)$ в нуль на контуре Ферми (б), рассчитанные для параметров $t_2 = t_3 = 0$, $U = |t_1|$, $V_1 = 0.5|t_1|$, $V_2 = 0$, $n = 0.95$

Похожий сценарий сверхпроводимости наблюдается также и в p -канале: в этом случае сверхпроводимость, полученная при учете второго порядка теории возмущений по кулоновскому взаимодействию, подавляется затравочным отталкиванием только для первой гармоники

$$g_0^{(p)}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(A \sin \phi + B \cos \phi).$$

При этом основной вклад в $\Delta^{(p)}(\hat{\mathbf{p}})$ вносит функция следующей гармоники p -спаривания

$$g_1^{(p)}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(A \sin 3\phi + B \cos 3\phi).$$

В работе [68] было также проанализировано влияние дальнего кулоновского отталкивания ($V_2 \neq 0$)

и дальних электронных перескоков ($t_2 \neq 0$, $t_3 \neq 0$) на фазовую диаграмму сверхпроводящего состояния модели Шубина–Вонсовского. На рис. 8 показана модификация фазовой диаграммы модели Шубина–Вонсовского, имеющая место при увеличении параметра хаббардовского отталкивания U . Видно, что в области малых электронных плотностей, а также в области плотностей, близких к особенности ван Хова, реализуется сверхпроводящая фаза с $d_{x^2-y^2}$ -симметрией параметра порядка с достаточно большими значениями $|\lambda| \sim 0.1-0.2$. Данный результат представляется актуальным при рассмотрении возможности реализации механизма Кона–Латтинжера в высокотемпературных сверхпроводниках. Отметим, что при $|\lambda| \sim 0.2$ критические

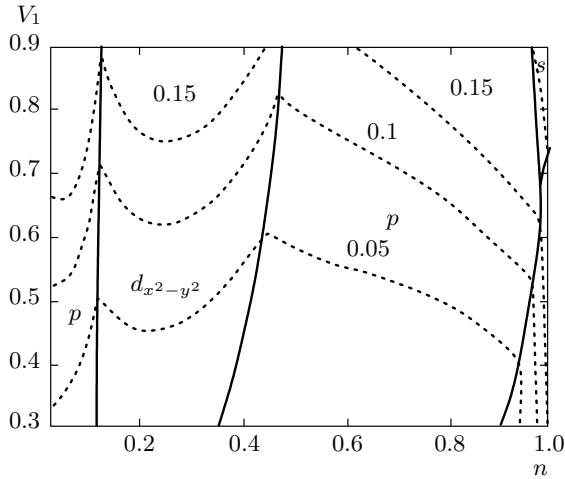


Рис. 8. Фазовая диаграмма модели Шубина–Вонсовского, полученная для параметров $t_2 = 0.15|t_1|$, $t_3 = 0.1|t_1|$, $U = 2|t_1|$, $V_2/V_1 = 0.5$. Пунктиром показаны линии постоянного значения λ

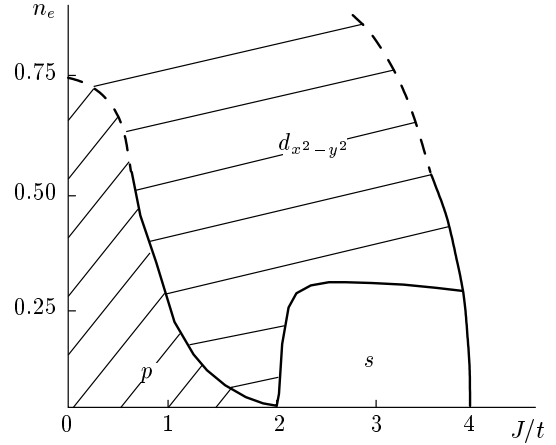


Рис. 9. Фазовая диаграмма сверхпроводящего состояния двумерной t - J -модели при малых и промежуточных электронных плотностях

температуры перехода в сверхпроводящую фазу могут достигать реалистичных для купратов значений $T_c^{d_{x^2-y^2}} \sim 100$ К.

5. t - J -МОДЕЛЬ

После высказанной Андерсоном идеи [2] о том, что электронные свойства купратных сверхпроводников могут описываться моделью Хаббарда в пределе сильной связи, $U \gg W$, исключительную популярность приобрела так называемая t - J -модель. Гамильтониан двумерной t - J -модели с ослабленным констрейнтом имеет вид [70]

$$\hat{H} = \sum_{f\sigma} (\varepsilon - \mu) c_{f\sigma}^\dagger c_{f\sigma} + \sum_{fm\sigma} t_{fm} c_{f\sigma}^\dagger c_{m\sigma} + U \sum_f \hat{n}_{f\uparrow} \hat{n}_{f\downarrow} + \frac{1}{2} \sum_{fm} J_{fm} \left(\mathbf{S}_f \mathbf{S}_m - \frac{\hat{n}_f \hat{n}_m}{4} \right). \quad (36)$$

Фактически, это модель с сильным кулоновским отталкиванием между электронами на одном узле и слабым антиферромагнитным взаимодействием $J > 0$ на разных узлах. Таким образом, иерархия параметров модели имеет вид $U \gg \{J, t\}$. Фазовая диаграмма t - J -модели, построенная в работе [70], изображена на рис. 9.

Для параметров, реалистичных для оптимально легированных купратных сверхпроводников $J/t \sim 0.5$, $n = 2\varepsilon_F/W = 0.85$, получается следующая

оценка для критической температуры перехода в сверхпроводящую фазу:

$$T_c^{d_{x^2-y^2}} \sim \varepsilon_F \exp\left(-\frac{\pi t}{2Jn^2}\right) \sim 10^2 \text{ К}. \quad (37)$$

Необходимо отметить, что аналогичная оценка для критической температуры для $d_{x^2-y^2}$ -спаривания была получена в рамках более строгой теории в работах [71] для оптимально легированных купратов с использованием техники операторов Хаббарда.

Отметим, что на сегодняшний день развитие идеологии Кона–Латтинжера для режима сильной связи при заполнении, близком к половинному, представляет собой одно из актуальнейших направлений теории сверхпроводимости в сильнокоррелированных системах. Однако решение этой задачи сопряжено с необходимостью учета сильных одноузельных корреляций во всех порядках теории возмущений. При этом междоузельные корреляции должны описываться с учетом вкладов второго порядка. Один из сценариев развития теории в этом направлении связан с использованием атомного представления [72] и диаграммной техники для операторов Хаббарда [73]. При этом актуальными моделями, в рамках которых можно включить ренормировки Кона–Латтинжера, являются обобщенная t - J - V -модель [74–76] и t - J^* - V -модель, учитывающая трехцентровые взаимодействия, важная роль которых при описании сверхпроводящего состояния изучалась в работах [77–84]. Данные модели представляют собой эффективные низкоэнергетические варианты модели Шубина–Вонсовского.

6. ИДЕАЛИЗИРОВАННЫЙ МОНОСЛОЙ ЛЕГИРОВАННОГО ГРАФЕНА

В настоящий момент популярность механизма Кона–Латтинжера продолжает нарастать в связи с возможностью его реализации и в других актуальных физических системах. Например, активно обсуждается вопрос об условиях его возникновения в топологических сверхтекучих жидкостях [85], а также в идеализированном монослое легированного графена, в котором пренебрегается влиянием немагнитных примесей и ван-дер-ваальсовским потенциалом подложки.

Одно из наиболее интересных свойств графена связано с тем, что в этом материале имеется возможность управлять положением химического потенциала посредством приложения электрического поля и, таким образом, изменять тип носителей заряда (электроны или дырки). Экспериментально было продемонстрировано [86], что короткие образцы графена могут быть использованы для построения джозефсоновских переходов, если их поместить между сверхпроводящими контактами. Это свидетельствует о том, что куперовские пары способны распространяться в графене когерентно. Отмеченный результат заставляет задуматься о том, возможно ли модифицировать графен структурно или химически так, чтобы он стал магнетиком [87] или даже настоящим сверхпроводником.

С теоретической точки зрения известно, что модель с конечной дисперсией требует минимальной интенсивности спаривательного взаимодействия для развития куперовской неустойчивости [88]. В соответствие с этим уже было предпринято несколько попыток теоретического анализа возможности реализации сверхпроводящего состояния в легированном графене. В работе [89] изучалась роль топологических дефектов в реализации куперовского спаривания в этом материале. В работе [90] в приближении среднего поля была получена фазовая диаграмма для спин-синглетной сверхпроводимости в графене и исследован плазменный механизм сверхпроводимости, приводящий к низким критическим температурам в s -канале для реалистичных значений электронных концентраций. Возможность индуцирования сверхпроводимости в графене посредством электронных корреляций исследовалась в работах [91, 92]. В работе [93] методом функциональной ренормгруппы была исследована конкуренция сверхпроводящей фазы с $d + id$ -типом симметрии параметра порядка и фазы волны спиновой плотности на особенности ван Хова в плотности

электронных состояний графена. Вблизи особенности ван Хова были обнаружены сверхпроводящие фазы с $d + id$ - и f -типами симметрии параметра порядка.

В работе [94] была рассмотрена ситуация, когда уровень Ферми находится вблизи одной из особенностей ван Хова в плотности состояний графена. Известно, что эти особенности имеют свойство усиливать магнитные и сверхпроводящие флуктуации [95]. Согласно сценарию, описанному в работе [94], возникновение куперовской неустойчивости обусловлено сильной анизотропией контура Ферми при ван-хововском заполнении, n_{vH} , что, по сути, восходит к механизму Кона–Латтинжера. Было отмечено [94], что реализация данного механизма представляется возможной в графене, поскольку электрон-электронное рассеяние становится сильно-анизотропным, и поэтому может возникнуть канал с притяжением для некоторых гармоник с нетривиальной угловой зависимостью на поверхности Ферми. Такая куперовская неустойчивость в идеализированном монослое графена может обуславливать критические температуры сверхпроводящего перехода вплоть до величин $T_c \sim 1$ К, в зависимости от способности максимально приблизить уровень химического потенциала к особенности ван Хова. Необходимо отметить, что при вычислениях принималось во внимание только кулоновское отталкивание электронов на одном узле. При этом, как мы говорили, пренебрегалось наличием ван-дер-ваальсовского потенциала подложки и магнитных примесей.

В работе [96] обсуждалась возможность конкуренции и сосуществования неустойчивости Померанчука и сверхпроводящей неустойчивости Кона–Латтинжера в графене. В работах [97–99] в рамках механизма Кона–Латтинжера было показано, что в легированном монослое графена может быть реализована киральная сверхпроводимость типа $d + id$. Фактически, используя метод ренормгруппы, авторы [97–99] показали, что куперовская неустойчивость развивается совместно в двух вырожденных d -каналах.

Работа [100] посвящена исследованию куперовской неустойчивости Кона–Латтинжера в идеализированном монослое легированного графена при учете кулоновского отталкивания электронов, находящихся на одном и на ближайших соседних атомах углерода, в борновском приближении слабой связи. Необходимость учета дальнего кулоновского взаимодействия при расчетах физических характеристик графена продиктована результатами недавней работы [101], в которой при получении эффективной мно-

гочастичной модели графена и графита были вычислены *ab initio* величины частично экранированного зависящего от частоты кулоновского взаимодействия. Было обнаружено, что величина одноатомного отталкивания в графене составляет $U = 9.3$ эВ, в противоречии с интуитивными ожиданиями малой величины U и слабой связи $U < W$. Вычисления продемонстрировали принципиальную важность учета нелокального кулоновского взаимодействия в графене, поскольку величина кулоновского отталкивания электронов, находящихся на соседних узлах, согласно расчетам *ab initio*, составляет $V = 5.5$ эВ [101]. Отметим, что другие исследователи считают значение V гораздо меньшим.

В гексагональной решетке графена на каждую элементарную ячейку приходится по два атома углерода, поэтому всю решетку можно разбить на две подрешетки, A и B . Гамильтониан модели Шубина–Вонсовского для графена, учитывающий перекоки электронов между ближайшими и следующими за ближайшими атомами, а также кулоновское отталкивание электронов, находящихся на одном и на соседних атомах, в представлении Ванье имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}, \quad (38)$$

где в реальном пространстве

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 = & -\mu \sum_f (\hat{n}_f^A + \hat{n}_f^B) - t_1 \sum_{\langle fm \rangle \sigma} (a_{f\sigma}^\dagger b_{m\sigma} + \text{H.c.}) - \\ & - t_2 \sum_{\langle\langle fm \rangle\rangle \sigma} (a_{f\sigma}^\dagger a_{m\sigma} + b_{f,\sigma}^\dagger b_{m,\sigma} + \text{H.c.}), \quad (39) \end{aligned}$$

$$\hat{H}_{int} = U \sum_f (\hat{n}_{f\uparrow}^A \hat{n}_{f\downarrow}^A + \hat{n}_{f\uparrow}^B \hat{n}_{f\downarrow}^B) + V \sum_{\langle fm \rangle} \hat{n}_f^A \hat{n}_m^B. \quad (40)$$

В (39), (40) операторы $a_{f\sigma}^\dagger$ ($a_{f\sigma}$) рождают (уничтожают) электрон с проекцией спина $\sigma = \pm 1/2$ на узле f подрешетки A . В то же время посредством

$$\hat{n}_f^A = \sum_\sigma \hat{n}_{f\sigma}^A = \sum_\sigma a_{f\sigma}^\dagger a_{f\sigma}$$

обозначен оператор плотности фермионов на узле f подрешетки A (аналогичные обозначения используются для подрешетки B). В гамильтониане (38)–(40) $\langle \dots \rangle$ обозначает, что суммирование проводится только по ближайшим соседям, $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ — по следующим за ближайшими соседям.

После перехода в импульсное пространство и выполнения u - v -преобразования Боголюбова,

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}\sigma} &= w_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}\sigma} + z_{\mathbf{k}} \beta_{\mathbf{k}\sigma}, \\ b_{\mathbf{k}\sigma} &= w_{\mathbf{k}}^* \beta_{\mathbf{k}\sigma} - z_{\mathbf{k}}^* \alpha_{\mathbf{k}\sigma}, \quad (41) \end{aligned}$$

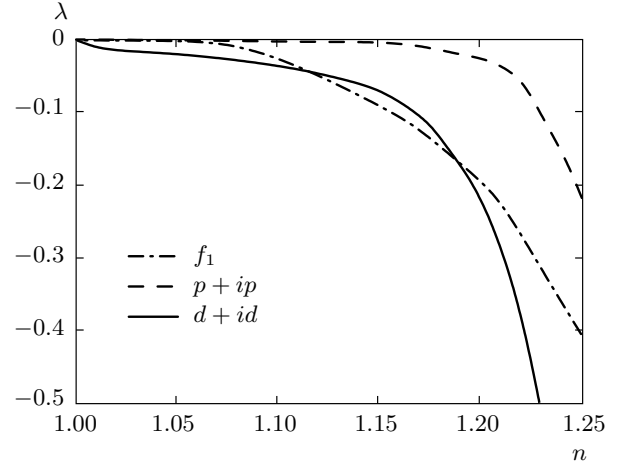


Рис. 10. Зависимости λ от концентрации носителей n при учете эффективного взаимодействия электронов с энергиями, отвечающими обоим ветвям спектра графена, для $t_2 = 0.2|t_1|$, $U = 3|t_1|$, $V = 0.5|t_1|$; $t_1 = 1$, $t_2 = 0.2$, $U = 3$, $V = 0.5$

где $\alpha_{\mathbf{k}\sigma}$ и $\beta_{\mathbf{k}\sigma}$ — операторы, описывающие динамику электронов соответственно в верхней и нижней зоне графена, возможно диагонализировать гамильтониан \hat{H}_0 . В результате в работе [100] уже в представлении боголюбовских операторов (41) была записана взаимодействующая часть гамильтониана \hat{H}_{int} и получено выражение для эффективного взаимодействия электронов при учете поляризационных вкладов, описываемых диаграммами на рис. 2.

Возможность куперовского спаривания определяется характеристиками энергетического спектра в окрестности уровня Ферми и эффективным взаимодействием электронов, находящихся вблизи поверхности Ферми [21]. В работе [100] считается, что при легировании графена химический потенциал попадает в верхнюю зону и в соответствии с этим при анализе условий возникновения аномального спаривания были рассмотрены поляризационные вклады, обусловленные кулоновским взаимодействием электронов с энергиями, соответствующими как только одной, так и обоим ветвям энергетического спектра графена (обоим дираковским конусам).

На рис. 10 представлены зависимости эффективной константы связи от концентрации электронов, полученные при учете эффективного взаимодействия электронов с энергиями, отвечающими обоим ветвям энергетического спектра графена, для набора параметров $t_2 = 0.2|t_1|$, $U = 3|t_1|$ и $V = 0.5|t_1|$. Видно, что при промежуточных электронных плотностях возникает конкуренция между сверхпроводящей фазой с $d + id$ -типом симметрии парамет-

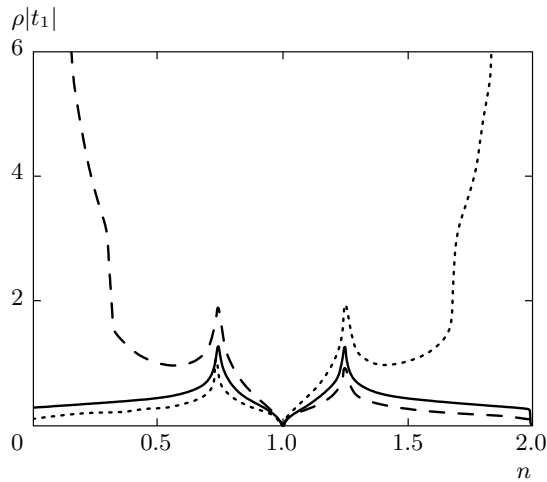


Рис. 11. Модификация плотности электронных состояний графена при включении перескоков на следующие за ближайшими соседями атомы: $t_2 = -0.2|t_1|$ (штриховая кривая), $t_2 = 0$ (сплошная кривая), $t_2 = 0.2|t_1|$ (пунктир)

ра порядка, описываемой двумерным представлением E_2 , и сверхпроводящей фазой с f -типом симметрии. При электронных концентрациях $1.18 < n < 1.25$ основному состоянию системы соответствует сверхпроводящая фаза с $d + id$ -типом симметрии параметра порядка.

Анализ, проведенный в работе [100], показал, что включение перескоков электронов на следующие за ближайшими атомы углерода, t_2 , качественно не влияет на конкуренцию сверхпроводящих фаз. Такое поведение системы объясняется тем, что включение перескоков $t_2 > 0$, либо $t_2 < 0$, приводит только к количественному изменению плотности электронных состояний графена и не изменяет характер ее зависимости от концентрации носителей (рис. 11). Это обстоятельство приводит к тому, что учет перескоков t_2 приводит к увеличению абсолютных величин эффективного взаимодействия, а следовательно, и к реализации более высоких критических температур перехода в сверхпроводящую фазу в легированном графене [100].

В работах [102] возможность куперовского спаривания в графене исследовалась в противоположном пределе сильной связи $U \gg t$ на основе кинематического механизма сверхпроводимости в рамках диаграммной техники для операторов Хаббарда [49, 73]. Как мы уже обсуждали, реалистичность предела сильной связи для графена была анонсирована в работе [10].

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В приведенном обзоре на примерах различных электронных моделей была продемонстрирована неустойчивость нормального состояния электронного газа с отталкиванием и электронных систем на решетке по отношению к переходу в сверхпроводящую фазу по механизму Кона–Латтинжера. Первоначальный вывод о возможности куперовской неустойчивости для модели ферми-газа с отталкиванием и квадратичным законом дисперсии был обобщен для электронов реальных кристаллических твердых тел, рассматриваемых в приближении сильной связи. Отличие закона дисперсии для электронов на решетке от квадратичного приводит к появлению дополнительных особенностей, связанных с эффектами зоны Бриллюэна. Оказалось, например, что характер энергетического спектра электронов, определяемый параметрами перескоков, влияет как на концентрационную зависимость температуры перехода в сверхпроводящее состояние, так и на симметрию параметра порядка. В результате изменяется структура фазовой диаграммы, определяющей области реализации сверхпроводящих фаз с различными типами симметрии параметра порядка. Однако в принципиальном отношении вывод о возможности реализации куперовской неустойчивости по механизму Кона–Латтинжера в электронной плазме в приближении сильной связи остается в силе.

В обзоре проиллюстрировано, что универсальность механизма Кона–Латтинжера сохраняется и при учете конечного радиуса экранирования в ферми-системах с отталкиванием. В то же время, проведенные в рамках модели Шубина–Вонсовского исследования показали, что учет кулоновского отталкивания электронов, находящихся на разных узлах кристаллической решетки, является существенным. При этом происходит изменение фазовой диаграммы сверхпроводящего состояния, а в определенных условиях и увеличение критической температуры.

Также было продемонстрировано, что механизм сверхпроводящего спаривания Кона–Латтинжера может реализовываться в системах с линейным законом дисперсии. Этот факт продемонстрирован на примере идеализированного монослоя графена, который обладает гексагональной решеткой с двумя атомами на ячейку. Показано, что и в такой системе поляризационные эффекты приводят к эффективно притяжению электронов в куперовском канале.

Из сказанного следует вывод об универсальном характере механизма Кона–Латтинжера

для формирования куперовской неустойчивости в ферми-системах с отталкиванием и реализации сверхпроводящего спаривания с ненулевым значением орбитального момента. Следует также отметить, что во многих случаях этот механизм приводит к достаточно высоким температурам сверхпроводящего перехода, особенно, как показано в [40], в двухзонной ситуации с широкой и узкой зонами. Более того, при электронных концентрациях, близких к особенности ван Хофа в плотности электронных состояний, критические температуры еще более возрастают и могут достигать значений порядка 100 К даже в однозонном случае при промежуточных значениях отношения параметра хаббардовского отталкивания к ширине зоны проводимости (U/W).

Авторы выражают благодарность А. С. Александрову, Д. В. Ефремову, В. В. Кабанову, Ю. В. Копаеву, К. И. Кугелю, М. С. Марченко, Н. М. Плакиде, А. В. Чубукову за многочисленные дискуссии и постоянное внимание к работе.

Работа выполнена в рамках Программы Отделения физических наук РАН (проект № П.3.1) и РФФИ (гранты №№ 14-02-00058, 14-02-31237). Работа двоих соавторов (М. М. К. и В. А. М.) выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (МК-526.2013.2) и Фонда «Династия».

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **108**, 1175 (1957).
2. P. W. Anderson, *Science* **235**, 1196 (1987).
3. D. Vollhardt and P. Woelfle, *The Superfluid Phases of Helium 3*, Taylor and Francis, London (1990).
4. G. E. Volovik, *Exotic Properties of Superfluid ^3He* , World Scientific, Singapore (1992).
5. G. E. Volovik, *The Universe in a Helium Droplet*, Clarendon Press, Oxford (2003).
6. C. A. Regal, C. Ticknor, J. L. Bohn, and D. S. Jin, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 053201 (2003).
7. C. H. Schunck, M. W. Zwierlein, C. A. Stan et al., *Phys. Rev. A* **71**, 045601 (2005).
8. H. R. Ott, H. Rudigier, T. M. Rice et al., *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1915 (1984).
9. S. Kromer, R. Helfrich, M. Lang et al., *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4476 (1998).
10. K. Kuroki, *J. Phys. Soc. Jpn.* **75**, 051013 (2006).
11. Y. Maeno, T. M. Rice, and M. Sgrist, *Phys. Today* **54**, 42 (2001); T. M. Rice and M. Sgrist, *J. Phys.: Condens. Matter* **7**, L643 (1995).
12. J. Nagamatsu, N. Nakagawa, T. Muranaka et al., *Nature* **410**, 63 (2001).
13. Y. Kamihara, T. Watanabe, M. Hirano, H. Hosono, *J. Amer. Chem. Soc.* **130**, 3296 (2008).
14. K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov et al., *Science* **306**, 666 (2004).
15. М. Ю. Каган, *УФН* **164**, 77 (1994).
16. Ю. Е. Лозовик, С. П. Меркулова, А. А. Соколик, *УФН* **178**, 757 (2008).
17. V. N. Kotov, B. Uchoa, V. M. Pereira, F. Guinea, and A. H. Castro Neto, *Rev. Mod. Phys.* **84**, 1067 (2012).
18. P. R. Wallace, *Phys. Rev.* **71**, 622 (1947).
19. A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov, and A. K. Geim, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 109 (2009).
20. W. Kohn and J. M. Luttinger, *Phys. Rev. Lett.* **15**, 524 (1965).
21. Л. П. Горьков, Т. К. Мелик-Бархударов, *ЖЭТФ* **40**, 1452 (1961).
22. J. Friedel, *Adv. Phys.* **3**, 446 (1954); *Nuovo Cimento Suppl.* **2**, 287 (1958).
23. J. Lindhard, *Kong Dansk, Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Medd.* **28**, 8 (1954).
24. Н. Ашкрофт, Н. Мермин, *Физика твердого тела*, т. 1, Мир, Москва (1979).
25. А. Б. Мигдал, *ЖЭТФ* **34**, 1438 (1958).
26. W. Kohn, *Phys. Rev. Lett.* **2**, 393 (1959).
27. D. Fay and A. Layzer, *Phys. Rev. Lett.* **20**, 187 (1968).
28. М. Ю. Каган, А. В. Чубуков, *Письма в ЖЭТФ* **47**, 525 (1988).
29. М. А. Баранов, А. В. Чубуков, and М. Ю. Каган, *Int. J. Mod. Phys. B* **6**, 2471 (1992).
30. М. А. Баранов, М. Ю. Каган, Ю. Каган, *Письма в ЖЭТФ* **64**, 273 (1996).
31. В. М. Галицкий, *ЖЭТФ* **34**, 151 (1958).
32. М. Ю. Каган, А. В. Чубуков, *Письма в ЖЭТФ* **50**, 483 (1989).

33. A. V. Chubukov, Phys. Rev. B **48**, 1097 (1993).
34. D. V. Efremov, M. S. Mar'enko, M. A. Baranov, and M. Yu. Kagan, Physica B **284–288**, 216 (2000).
35. P. Bloom, Phys. Rev. B **12**, 125 (1975).
36. А. М. Афанасьев, Ю. Каган, ЖЭТФ **43**, 1456 (1962).
37. D. V. Efremov, M. S. Mar'enko, M. A. Baranov, and M. Yu. Kagan, JETP **90**, 861 (2000).
38. G.-H. Oh, Y. Ishimoto, T. Kawae et al., J. Low Temp. Phys. **95**, 525 (1994).
39. M. Yu. Kagan, Phys. Lett. A **152**, 303 (1991).
40. M. Yu. Kagan and V. V. Val'kov, ЖЭТФ **140**, 179 (2011); ФНТ **37**, 84 (2011); *A Lifetime in Magnetism and Superconductivity: A Tribute to Professor David Schoenberg*, Cambridge Scientific Publishers, Cambridge (2011).
41. M. Yu. Kagan, V. V. Val'kov, and P. Woelfle, J. Low Temp. Phys. **37**, 1046 (2011).
42. М. А. Баранов, М. Ю. Каган, М. С. Марьенко, Письма в ЖЭТФ **58**, 734 (1993).
43. J. G. Bednorz and K. A. Müller, Z. Phys. B **64**, 189 (1986).
44. J. C. Hubbard, Proc. Roy. Soc. London A **276**, 238 (1963).
45. Ю. А. Изюмов, М. И. Кацнельсон, Ю. Н. Скрябин, *Магнетизм коллективизированных электронов*, Наука, Москва (1994).
46. Ю. А. Изюмов, УФН **165**, 403 (1995).
47. A. Georges, G. Kotliar, W. Krauth, and M. J. Rozenberg, Rev. Mod. Phys. **68**, 13 (1996).
48. H. Tasaki, J. Phys.: Condens. Matter. **68**, 4353 (1998).
49. В. В. Вальков, С. Г. Овчинников, *Квазичастицы в сильнокоррелированных системах*, Изд-во СО РАН, Новосибирск (2001).
50. M. A. Baranov and M. Yu. Kagan, Z. Phys. B **86**, 237 (1992).
51. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика: нерелятивистская теория*, Наука, Москва (1989).
52. D. J. Scalapino, E. Loh, Jr., and J. E. Hirsch, Phys. Rev. B **34**, 8190 (1986); **35**, 6694 (1987).
53. А. Н. Козлов, *Сверхпроводимость: физика, химия, техника* **2**, 64 (1989).
54. R. Hlubina, Phys. Rev. B **59**, 9600 (1999); J. Mráz and R. Hlubina, Phys. Rev. B **67**, 174518 (2003).
55. D. Zanchi and H. J. Schulz, Phys. Rev. B **54**, 9509 (1996).
56. И. Е. Дзялошинский, В. М. Яковенко, ЖЭТФ **94**, 344 (1988); И. Е. Дзялошинский, И. М. Кричевер, Я. Хронек, ЖЭТФ **94**, 344 (1988).
57. A. T. Zheleznyak, V. M. Yakovenko, and I. E. Dzyaloshinskii, Phys. Rev. B **55**, 3200 (1997).
58. S. Raghu, S. A. Kivelson, and D. J. Scalapino, Phys. Rev. B **81**, 224505 (2010).
59. A. S. Alexandrov and V. V. Kabanov, Phys. Rev. Lett. **106**, 136403 (2011).
60. S. Shubin and S. Vonsowsky, Proc. Roy. Soc. A **145**, 159 (1934); Sow. Phys. **7**, 292 (1935); **10**, 348 (1936).
61. S. V. Vonsovsky and M. I. Katsnelson, J. Phys. C: Sol. St. Phys. **12**, 2043 (1979); 2055 (1979).
62. Р. О. Зайцев, ЖЭТФ **78**, 1132 (1980).
63. Р. О. Зайцев, В. А. Иванов, Ю. В. Михайлова, ФММ **65**, 1032 (1988); 1108 (1989).
64. Р. О. Зайцев, ЖЭТФ **125**, 891 (2004).
65. В. В. Вальков, М. М. Коровушкин, ЖЭТФ **139**, 126 (2011).
66. М. Ю. Каган, D. V. Efremov, M. S. Marienko, and V. V. Val'kov, JETP Lett. **93**, 819 (2011).
67. S. Raghu, E. Berg, A. V. Chubukov, and S. A. Kivelson, Phys. Rev. B **85**, 024516 (2012).
68. М. Ю. Каган, В. В. Вальков, В. А. Мицкан, М. М. Коровушкин, Письма в ЖЭТФ **97**, 253 (2013); ЖЭТФ **144**, 837 (2013).
69. K. Okazaki, Y. Ota, Y. Kotani et al., Science **337**, 1314 (2012).
70. M. Yu. Kagan and T. M. Rice, J. Phys.: Condens. Matter **6**, 3771 (1994).
71. Н. М. Плакида, Письма в ЖЭТФ **74**, 38 (2001); Н. М. Плакида, Л. Антон, С. Адам, Г. Адам, ЖЭТФ **124**, 367 (2003).
72. J. C. Hubbard, Proc. R. Soc. London A **285**, 542 (1965).
73. Р. О. Зайцев, ЖЭТФ **68**, 207 (1975); **70**, 1100 (1976).
74. M. Eremin, I. Eremin, and S. Varlamov, Phys. Rev. B **64**, 214512 (2001).
75. M. V. Eremin, I. M. Shigapov, and I. M. Eremin, Eur. Phys. J. B **85**, 131 (2012).

76. N. M. Plakida and V. S. Oudovenko, *Eur. Phys. J. B* **86**, 115 (2013).
77. J. E. Hirsch, *Phys. Lett. A* **136**, 153 (1989).
78. V. Yu. Yushankhai, G. M. Vujicic, and R. B. Zakula, *Phys. Lett. A* **151**, 254 (1990).
79. V. V. Val'kov, T. A. Val'kova, D. M. Dzebisashvili, and S. G. Ovchinnikov, *Mod. Phys. Lett. B* **17**, 441 (2003).
80. В. В. Вальков, Д. М. Дзэбисашвили, *ЖЭТФ* **127**, 686 (2005).
81. М. М. Коршунов, С. Г. Овчинников, А. В. Шерман, *Письма в ЖЭТФ* **80**, 45 (2004).
82. В. В. Вальков, А. А. Головня, *ЖЭТФ* **134**, 1167 (2008).
83. В. В. Вальков, М. М. Коровушкин, А. Ф. Барабанов, *Письма в ЖЭТФ* **88**, 426 (2008).
84. В. В. Вальков, А. А. Шкляев, М. М. Коровушкин, А. Ф. Барабанов, *ФТТ* **53**, 1895 (2011).
85. M. S. Marienko, J. D. Sau, and S. Tewari, arXiv: 1202.5784v1.
86. H. B. Heersche, P. Jarillo-Herrero, J. B. Oostinga, L. M. K. Vandersypen, and A. F. Morpurgo, *Nature (London)* **446**, 56 (2007).
87. N. M. R. Peres, F. Guinea, and A. H. Castro Neto, *Phys. Rev. B* **72**, 174406 (2005).
88. E. C. Marino and L. H. C. M. Nunes, *Nucl. Phys. B* **741**, 404 (2006).
89. J. González, F. Guinea, and M. A. H. Vozmediano, *Phys. Rev. B* **63**, 134421 (2001).
90. B. Uchoa and A. H. Castro Neto, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 146801 (2007).
91. A. M. Black-Schaffer and S. Doniach, *Phys. Rev. B* **75**, 134512 (2007).
92. C. Honerkamp, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 146404 (2008).
93. M. L. Kiesel, C. Platt, W. Hanke, D. A. Abanin, and R. Thomale, *Phys. Rev. B* **86**, 020507(R) (2012).
94. J. González, *Phys. Rev. B* **78**, 205431 (2008).
95. R. S. Markiewicz, *J. Phys. Chem. Sol.* **58**, 1179 (1997).
96. B. Valenzuela and M. A. H. Vozmediano, *New J. Phys.* **10**, 113009 (2008).
97. R. Nandkishore, L. S. Levitov, and A. V. Chubukov, *Nature Phys.* **8**, 158 (2012).
98. R. Nandkishore, G.-W. Chern, and A. V. Chubukov, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 227204 (2012).
99. R. Nandkishore and A. V. Chubukov, *Phys. Rev. B* **86**, 115426 (2012).
100. M. Yu. Kagan, V. V. Val'kov, V. A. Mitskan, and M. M. Korovushkin, submitted to *Sol. St. Comm.*
101. T. O. Wehling, E. Şaşıoğlu, C. Friedrich, A. I. Lichtenstein, M. I. Katsnelson, and S. Blugel, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 236805 (2011).
102. Р. О. Зайцев, *Письма в ЖЭТФ* **94**, 224 (2011); **95**, 423 (2012).