РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2017, том 62, № 7, с. 642–650

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 537.874.2

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ, РАСПОЛОЖЕННОЙ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

© 2017 г. Б. А. Беляев[1, 2, *], В. В. Тюрнев[1]

[1]*Институт физики им. Л.В. Киренского, Российская Федерация, 660036 Красноярск, Академгородок, 50/38*

[2]*Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика М.Ф. Решетнева, Российская Федерация, 660014 Красноярск, просп. им. Газеты "Красноярский рабочий", 31*

**E-mail: belyaev@iph.krasn.ru*

Поступила в редакцию 25.06.2016 г.

Впервые получены простые формулы для определения компонент матрицы рассеяния плоской электромагнитной волны при ее нормальном падении на тонкую безграничную металлическую 2D-решетку с квадратными окнами, расположенную на границе раздела двух сред. Рассчитанные по формулам амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) такой структуры хорошо согласуются с характеристиками, полученными численным электродинамическим анализом 3D-модели, когда период решетки меньше половины длины волны. Показанная возможность эффективного управления АЧХ исследованной структуры изменением ширины проводников и периода решетки позволяет изготавливать на ее основе зеркала с заданной отражательной способностью. Такие зеркала на границах раздела диэлектрических слоев необходимы, например, при конструировании многослойных радиопрозрачных в заданном диапазоне частот поверхностей или оптических полосно-пропускающих фильтров.

DOI: 10.7868/S0033849417070026

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы активно исследуются особенности распространения электромагнитных волн, падающих на слоистые конструкции из диэлектрических пластин, на границах раздела которых сформированы различные периодические структуры (2D-решетки или сетки) из полосковых проводников. Большой интерес к таким конструкциям обусловлен возможностью создания на их основе частотно-селективных поверхностей, служащих полосно-пропускающими и полосно-заграждающими фильтрами, в диапазонах от микронных [1–3] до дециметровых [4–6] длин волн. Полосковые элементарные ячейки, из которых составляется периодическая 2D-структура, например металлические квадраты или ячейки металлической сетки, как правило, являются резонаторами, которые проявляют свойства параллельных или последовательных колебательных контуров, включенных параллельно линии передачи [1]. А поэтому на "низких" частотах, когда длина волны больше периода решеток, они проявляют реактивные свойства индуктивности или емкости соответственно. При этом пара решеток индуктивного и емкостного типа, разделенных тонким диэлектрическим слоем, в области "низких" частот могут совместно проявлять свойства параллельного колебательного контура. Поэтому на таких субволновых многорешеточных конструкциях можно создавать различные полосно-пропускающие фильтры [6–9]. Заметим, что длина волны на центральной частоте полосы пропускания в таком фильтре не только много больше периода решеток, но и много больше толщины диэлектрических слоев.

Известны также конструкции полосно-пропускающих фильтров на диэлектрических слоях полуволновой толщины, разделенных нерезонансными субволновыми 1D-решетками, например, из параллельных полосковых проводников [10]. В таких мультислойных структурах решетки служат зеркалами с заданными отражательными свойствами, обеспечивающими необходимую связь между резонаторами, а также связь крайних резонаторов с пространством. Изменяя отражательные свойства решетки, например варьированием ширины проводников при заданном периоде, несложно обеспечить требуемую ширину полосы пропускания фильтра и допустимую величину неравномерности амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) в ней [11]. При конструировании многослойных частотно-селективных поверхностей возможно и сочетание описанных выше способов. Например, в [12] исследована конструкция, в которой полоса пропускания формируется двумя парами субволновых 2D-решеток полосковых проводников, между которыми расположен полуволновый диэлектрический слой.

Важно отметить, что собственные добротности резонансных структур, которые построены на 2D-решетках полосковых проводников, разделенных диэлектрическими слоями с толщинами много меньше длины волны, существенно ниже добротности полуволновых диэлектрических слоев, разделенных субволновыми металлическими решетками-зеркалами. В результате частотно-селективные поверхности, построенные на резонансных диэлектрических слоях, окруженных зеркалами, обладают меньшими потерями в полосах прозрачности. Поэтому исследование свойств субволновых металлических 2D-решеток, на которых конструируются зеркала с заданными отражательными свойствами, весьма актуальная задача.

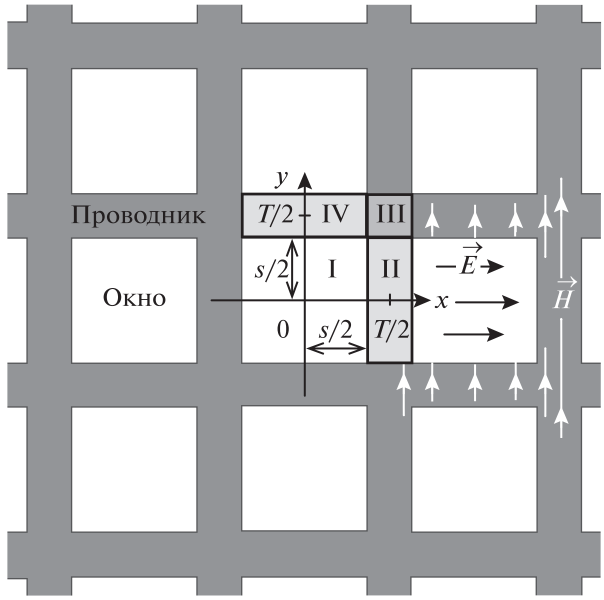

Рис. 1. Решетчатая 2D-структура из полосковых проводников; I, II, III и IV – выделенные участки ее элементарной ячейки.

При расчете отражательных свойств металлических сеточных конструкций используют как численные, так и численно-аналитические методы. Численные методы наиболее популярны, так как они реализованы во многих коммерческих универсальных пакетах программ электродинамического моделирования 3D-структур. Из численно-аналитических методов наиболее известен метод моментов, использующий разложение компонент искомого поля по базисным функциям [13]. Также известен метод усредненных граничных условий, дающий рецепт нахождения эквивалентных граничных условий для различных сетчатых структур [14]. Эквивалентные граничные условия для металлической ленточной 1D-решетки на границе раздела двух сред получены в [15].

Численные и численно-аналитические методы расчета требуют достаточно высоких вычислительных ресурсов и значительного машинного времени. Поэтому исследователи часто прибегают к использованию простых приближенных формул [16, 17], полученных для некоторых типов конкретных решеток. При выводе таких формул металлические сетки обычно моделируют, используя эквивалентные схемы [18]. Электрические параметры эквивалентных схем рассчитывают, используя, как правило, приближенные формулы из справочника [19], полученные для 1D-решеток из полосковых проводников. При этом во многих работах, например, в [20, 21] используется недоказанное предположение о том, что нерезонансная металлическая 2D-сетка и 1D-решетка полосковых проводников с тем же периодом и той же шириной проводников обладают одинаковыми отражательными свойствами, если их период много меньше длины падающей волны. В действительности, как будет показано ниже, некоторое различие в отражающих свойствах 2D-сетки и 1D-решетки все же существует.

Таким образом, до сих пор не были получены формулы, описывающие отражение и прохождение электромагнитной волны, падающей нормально на безграничную бесконечно тонкую идеально проводящую металлическую сетку с квадратными окнами (рис. 1), расположенную на границе раздела двух сред с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2. Решению этой задачи посвящена настоящая работа. В ней предполагается, что период сетки много меньше длины волны, поэтому расчет компонентов электромагнитного поля выполняется в квазистатическом приближении. Точность полученных формул оценивается сравнением рассчитанных по ним АЧХ с результатами численного электродинамического анализа 3D-модели рассматриваемой конструкции.

1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ РЕШЕТКИ

Рассмотрим электромагнитные колебания вблизи металлической сетки (см. рис. 1), возбуждаемые нормально падающими на нее с обеих сторон линейно поляризованными волнами с компонентами

$$E_x^{\text{пад}} = \begin{cases} E_1^{\text{пад}} \exp\,(ik_1 z - i\omega t), & \text{если } z < 0, \\ E_2^{\text{пад}} \exp\,(-ik_2 z - i\omega t), & \text{если } z > 0, \end{cases}$$
$$H_y^{\text{пад}} = \begin{cases} Z_1 E_1^{\text{пад}} \exp\,(ik_1 z - i\omega t), & \text{если } z < 0, \\ -Z_2 E_2^{\text{пад}} \exp\,(-ik_2 z - i\omega t), & \text{если } z > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$k_{1,2} = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_{1,2}} \tag{2}$$

– волновые числа,

$$Z_{1,2} = Z_0 \Big/ \sqrt{\varepsilon_{1,2}}, \;\; Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} \tag{3}$$

– характеристические сопротивления. Здесь начало отсчета координаты z выбрано на поверхности решетки.

Так как компоненты поля падающих волн (1) однородны в плоскости решетки, то компоненты поля решетки ($\vec{E}^{\text{реш}}$, $\vec{H}^{\text{реш}}$) будут в общем случае периодическими функциями координат x и y с периодом, равным периоду решетки T. Это значит, что любая из компонент электромагнитного поля может быть разложена в двойной ряд Фурье по аргументам x и y. Учитывая симметрию компонент полей относительно плоскостей симметрии решетки, можно записать в системе координат, указанной на рис. 1, следующие разложения:

$$\begin{aligned} E_x^{\text{реш}}(x,y,z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} E_x^{nm}(z)\cos(k_n x)\cos(k_m y), \\ H_y^{\text{реш}}(x,y,z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} H_y^{nm}(z)\cos(k_n x)\cos(k_m y), \\ E_z^{\text{реш}}(x,y,z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} E_z^{nm}(z)\sin(k_n x)\cos(k_m y), \\ H_z^{\text{реш}}(x,y,z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} H_z^{nm}(z)\cos(k_n x)\sin(k_m y), \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$k_n = 2\pi n / T. \tag{5}$$

Потребуем, чтобы каждый член двойного ряда Фурье в выражениях (4) удовлетворял уравнениям Гельмгольца

$$\left(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 + k_{1,2}^2\right)\vec{E}^{\text{реш}} = 0, \tag{6}$$

$$\left(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 + k_{1,2}^2\right)\vec{H}^{\text{реш}} = 0. \tag{7}$$

В этом случае формулы (4) принимают вид

$$\begin{aligned} E_x^{\text{реш}}(x,y,z) &= E_{x,00}^{(1,2)}\exp(ik_{1,2}|z|) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} E_{x,\,nm}^{(1,2)}\cos(k_n x)\cos(k_m y)\exp(-k_{nm}^{(1,2)}|z|), \\ H_y^{\text{реш}}(x,y,z) &= H_{y,00}^{(1,2)}\exp(ik_{1,2}|z|) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} H_{y,\,nm}^{(1,2)}\cos(k_n x)\cos(k_m y)\exp(-k_{nm}^{(1,2)}|z|), \\ E_z^{\text{реш}}(x,y,z) &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} E_{z,nm}^{(1,2)}\sin(k_n x)\cos(k_m y)\exp(-k_{nm}^{(1,2)}|z|), \\ H_z^{\text{реш}}(x,y,z) &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} H_{z,nm}^{(1,2)}\cos(k_n x)\sin(k_m y)\exp(-k_{nm}^{(1,2)}|z|), \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$k_{nm}^{(1,2)} = \sqrt{k_n^2 + k_m^2 - k_{1,2}^2}. \tag{9}$$

Формулы (8) можно рассматривать как разложение компонент поля решетки $\vec{E}^{\text{реш}}$, $\vec{H}^{\text{реш}}$ в ряд по всем модам, отвечающим симметрии решетки и поляризации падающей волны.

А. Первое частное решение

Будем предполагать, что период решетки T много меньше длины волны, т.е.

$$k_{1,2}T \ll 2\pi. \tag{10}$$

В этом случае уравнения Гельмгольца (6) и (7) упрощаются и превращаются в уравнения Лапласа

$$\left(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2\right)\vec{E}^{\text{реш}} = 0, \tag{11}$$

$$\left(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2\right)\vec{H}^{\text{реш}} = 0. \tag{12}$$

При этом в суммах (8) все члены в рядах Фурье, кроме основных членов с $n = m = 0$, быстро убывают с ростом $|z|$. Поэтому при $k_{1,2}T \ll k_{1,2}|z| \ll 2\pi$ формулы (8) упрощаются и с учетом симметрии по x и y принимают вид

$$\begin{aligned} E_x^{\text{реш}}(x,y,z) &= \left\langle E_x^{(1,2)}\right\rangle, \\ H_y^{\text{реш}}(x,y,z) &= \left\langle H_y^{(1,2)}\right\rangle, \\ E_z^{\text{реш}}(x,y,z) &= 0, \\ H_z^{\text{реш}}(x,y,z) &= 0, \end{aligned} \tag{13}$$

где значения неопределенных констант $\left\langle E_x^{(1,2)}\right\rangle$, $\left\langle H_y^{(1,2)}\right\rangle$ выражаются интегралами

$$\left\langle E_x^{(1,2)}\right\rangle = \frac{1}{T^2}\int\limits_{x=-s/2}^{T-s/2}\int\limits_{y=-s/2}^{T-s/2} E_x^{\text{реш}}(x,y,z)\Big|_{z=0}dxdy, \quad (14)$$

$$\left\langle H_y^{(1,2)}\right\rangle = \frac{1}{T^2}\int\limits_{x=-s/2}^{T-s/2}\int\limits_{y=-s/2}^{T-s/2} H_y^{\text{реш}}(x,y,z)\Big|_{z=0}dxdy. \quad (15)$$

Здесь s – ширина окна решетки. Зная константы $\left\langle E_x^{(1,2)}\right\rangle$ и $\left\langle H_y^{(1,2)}\right\rangle$, мы сможем вычислить элементы матрицы рассеяния **S**.

Таким образом, компоненты $\vec{E}^{\text{реш}}$ и $\vec{H}^{\text{реш}}$ электромагнитного поля решетки должны удовлетворять соответствующим граничным условиям на поверхности решетки и при $k_{1,2}|z| \ll 2\pi$ быть решениями уравнений (11), (12). Эти уравнения являются дифференциальными уравнения второго порядка. Поэтому они должны иметь два линейно независимых решения. Для определенности потребуем, чтобы компонента $H_y^{\text{реш}}$ для одного из частных решений была четной функцией координаты z, а для другого – нечетной. Из уравнений Максвелла следует, что если компонента $H_y^{\text{реш}}$ является четной функцией, то отвечающая ей компонента $E_x^{\text{реш}}$ является нечетной функцией, и наоборот.

Одно из частных решений уравнений (11), (12), имеющее четную компоненту $H_y^{\text{реш}}$, очевидно. Оно имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{E}^{\text{реш}}(x,y,z) &= 0, \\ H_x^{\text{реш}}(x,y,z) &= 0, \\ H_y^{\text{реш}}(x,y,z) &= H_0, \\ H_z^{\text{реш}}(x,y,z) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Это решение не содержит электрической компоненты электромагнитного поля, в том числе и на поверхности проводников, а поэтому оно будет удовлетворять граничному условию на поверхности решетки.

Б. Второе частное решение

Второе решение уравнений (11), (12) должно иметь электрическую компоненту $\vec{E}^{\text{реш}}$, а ее тангенциальная составляющая $E_x^{\text{реш}}$ должна быть четной функцией координаты z. При $z = 0$ она будет отлична от нуля только в области, где нет металлизации, т.е. внутри окна решетки. Эта область на рис. 1 отмечена цифрой I. Нормальная же компонента $E_z^{\text{реш}}$ будет отличаться от нуля только вне окна, т.е. на поверхности проводников. Таких областей три – II, III и IV (см. рис. 1). Магнитная компонента $H_y^{\text{реш}}$, будучи нечетной функцией z, должна обращаться в нуль в области I и отличаться от нуля только в областях II–IV.

Найдем взаимосвязь на поверхности решетки между электрической компонентой $E_x^{\text{реш}}$, отличающейся от нуля только в области I, и магнитной компонентой $H_y^{\text{реш}}$ в областях II и IV. В области IV компонента $H_y^{\text{реш}}$ связана с плотностью продольных поверхностных токов J_x уравнением

$$H_y^{\text{реш}} = J_x. \quad (17)$$

Она направлена ортогонально к краю металлизации. На краю компонента $H_y^{\text{реш}}$ поворотом ее вектора преобразуется в компоненту $H_z^{\text{реш}}$. При этом обе компоненты испытывают сингулярность, отвечающую условиям Мейкснера на ребре [22]

$$\begin{aligned} H_y^{\text{реш}}\Big|_{y=s/2+\rho} &\propto \rho^{-1/2}, \\ H_z^{\text{реш}}\Big|_{y=s/2-\rho} &\propto \rho^{-1/2}\ (\rho \to 0), \end{aligned} \quad (18)$$

где ρ – расстояние от точки наблюдения до ребра окна. Таким образом, продольный поверхностный ток J_x на проводнике в области IV создает поток магнитной индукции, пронизывающий площадь окна.

Этот поток должен сопровождаться электродвижущей силой вдоль периметра окна. Поэтому компонента $H_y^{\text{реш}}$ на поверхности металлизации в области IV должна быть непосредственно связана с электрической компонентой $E_x^{\text{реш}}$ на поверхности решетки внутри окна. Установим такую взаимосвязь компоненты $E_x^{\text{реш}}$ в области I на поверхности решетки с компонентой $H_y^{\text{реш}}$ в области IV.

Заметим, что из закона сохранения заряда следует, что интегральный ток, текущий по любому поперечному сечению полоскового проводника в области IV, остается постоянным, т.е. не зависит от координаты x. Учитывая, что ширина полоскового проводника и ширина окна фиксированы, расчет взаимосвязи компонент $E_x^{\text{реш}}$ и $H_y^{\text{реш}}$ можно выполнить в приближении независимости от координаты x этих компонент. В этом случае строгое решение уравнения Лапласа (12) для компоненты $\vec{H}^{\text{реш}}(y,z)$, удовлетворяющее граничному условию

$$H_z^{\text{реш}}(y,z)\Big|_{y>s/2,\ z=0} = 0, \quad (19)$$

а потому и условиям на ребре (18), можно получить с помощью конформных отображений [23]. Это решение описывает электромагнитное поле волн магнитного типа. Оно имеет вид

$$H_y^{\text{реш}} = -\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Im}\Psi(y+iz), \tag{20}$$

$$H_z^{\text{реш}} = -\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{Im}\Psi(y+iz), \tag{21}$$

где аналитическая функция $\Psi(\zeta)$ комплексного аргумента ζ определяется формулой

$$\Psi(\zeta) = \operatorname{arch}\left(\cos\left(\frac{\pi\zeta}{T}\right)\Big/\cos\left(\frac{\pi s}{2T}\right)\right). \tag{22}$$

Отсюда находим, что компонента $H_y^{\text{реш}}$ на поверхности решетки выражается формулой

$$H_y^{\text{реш}} = \pm\operatorname{Im}\left[\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{arch}\left(\cos\left(\pi\frac{y}{T}\right)\Big/\cos\left(\frac{\pi s}{2T}\right)\right)\right]. \tag{23}$$

Здесь знак плюс выбирается при $z < 0$, а знак минус при $z > 0$.

Вычислим вклад $\left\langle H_y^{(1,2),\text{IV,III}}\right\rangle$ в неопределенную константу $\left\langle H_y^{(1,2)}\right\rangle$ в формуле (15) от компоненты $H_y^{\text{реш}}$ в областях IV и III. Подставляя выражение (23) в (15), получаем

$$\left\langle H_y^{(1,2),\text{IV,III}}\right\rangle = \mp\frac{\pi}{T}, \tag{24}$$

где знак минут отвечает вкладу $\left\langle H_y^{(1),\text{IV,III}}\right\rangle$, а знак плюс – вкладу $\left\langle H_y^{(2),\text{IV,III}}\right\rangle$.

Установим взаимосвязь электрической компоненты $E_x^{\text{реш}}$ в области I с магнитным полем $\vec{H}^{\text{реш}}$, выражаемым формулами (20)–(22). Для этого обратимся к уравнению Максвелла

$$(\operatorname{rot}\vec{E}^{\text{реш}})_z = i\omega\mu_0 H_z^{\text{реш}}. \tag{25}$$

Выполнив интегрирование по y, получаем

$$E_x^{\text{реш}} = E_0(z) + i\omega\mu_0\operatorname{Re}\Psi(y+iz), \tag{26}$$

где функция $E_0(z)$ – неопределенная "постоянная" интегрирования. Она должна равняться нулю при $z = 0$, чтобы компонента $E_x^{\text{реш}}$ обращалась в нуль на металлической поверхности при $y > s/2$. Замечаем, что с увеличением $|z|$ второй член в этом уравнении при $|z| > T$ линейно возрастает до бесконечности. Поэтому потребуем, чтобы функция $E_0(z)$ была пропорциональна $|z|$, чтобы компонента $E_x^{\text{реш}}$ плавно переставала зависеть от z при $|z| > T$ в соответствии с формулой (13). В результате формула (26) принимает вид

$$E_x^{\text{реш}} = i\omega\mu_0\left[\operatorname{Re}\Psi(y+iz) - \pi|z|/T\right]. \tag{27}$$

Теперь вычислим константу $\left\langle E_x^{(1,2)}\right\rangle$. Подставляя (27) и (22) в формулу (14), получаем

$$\left\langle E_x^{(1,2)}\right\rangle = -i\omega\mu_0\frac{s}{T}\ln\left(\cos\left(\frac{\pi s}{2T}\right)\right). \tag{28}$$

Здесь было учтено, что

$$\int\limits_{\zeta=-a}^{a}\operatorname{arch}(\cos\zeta/\cos a)\,d\zeta = -\pi\ln(\cos a). \tag{29}$$

Таким образом, магнитное поле $H_y^{\text{реш}}$ на проводящей поверхности в области IV связано с электрическим полем $E_x^{\text{реш}}$, характеризуемым константой $\left\langle E_x^{(1,2)}\right\rangle$, которая выражается формулой (28). Само же поле $H_y^{\text{реш}}$ в областях IV и III характеризуется константой $\left\langle H_y^{(1,2),\text{IV,III}}\right\rangle$, выражаемой формулой (24).

Теперь установим связь электрической компоненты $E_x^{\text{реш}}$ в области I с магнитной компонентой $H_y^{\text{реш}}$ в области II. Заметим, что ширина окна s, которая соответствует длине области II обычно больше ширины проводника $T–s$. Важно также, что электрическая компонента $E_x^{\text{реш}}$ на границах области I должна удовлетворять условиям на ребре

$$\begin{gathered} E_x^{\text{реш}}\Big|_{x=s/2-\rho} \propto \rho^{-1/2}, \\ E_x^{\text{реш}}\Big|_{y=s/2-\rho} \propto \rho^{1/2}\ (\rho\to 0). \end{gathered} \tag{30}$$

Поэтому в области II должно выполняться неравенство $\left|\partial^2 E_x^{\text{реш}}/\partial x^2\right| \gg \left|\partial^2 E_x^{\text{реш}}/\partial y^2\right|$, а значит, в уравнении Лапласа (11) можно пренебречь производной $\partial^2 E_x^{\text{реш}}/\partial y^2$. Таким образом, компоненту $E_x^{\text{реш}}$ в области II при любом значении z, а также в области I, но только на поверхности окна ($z = 0$) можно аппроксимировать формулой

$$E_x^{\text{реш}} = -A\operatorname{Re}\Psi(y)\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Re}\Phi(x+iz), \tag{31}$$

где A – подлежащий нахождению неопределенный коэффициент, а аналитическая функция $\Phi(\zeta)$ комплексного аргумента ζ определена формулой

$$\Phi(\zeta) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi\zeta}{T}\right)\Big/\sin\left(\frac{\pi s}{2T}\right)\right). \tag{32}$$

Действительно, координатная зависимость компоненты $E_x^{\text{реш}}$, заданная формулой (31), является гармонической функцией. В области II она удовлетворяет уравнению Лапласа (11), так как ее зависимость от координат x и z описывается аналитической функцией $\Phi(x + iz)$, а зависимостью $\Psi(y)$ можно пренебречь.

В области I зависимость компоненты $E_x^{\text{реш}}$ от координат x и y на поверхности окна ($z = 0$) отвечает условиям на ребре (30), а ее зависимость от координаты z можно доопределить так, чтобы она удовлетворяла уравнению (11).

Для нахождения значения коэффициента A снова вычислим константу $\left\langle E_x^{(1,2)}\right\rangle$, но теперь будем исходить из формулы (31). После вычисления интеграла (14) получаем

$$\left\langle E_x^{(1,2)}\right\rangle = A\frac{\pi}{T}\ln\left(\cos\left(\frac{\pi s}{2T}\right)\right). \tag{33}$$

Сравнивая формулы (33) и (28), находим значение коэффициента

$$A = -i\,\omega\mu_0 s/\pi. \tag{34}$$

Для нахождения компоненты $H_y^{\text{реш}}$ на поверхности металлического слоя в области II обратимся к уравнению Максвелла

$$(\operatorname{rot}\vec{H}^{\text{реш}})_x = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_{1,2}E_x^{\text{реш}}. \tag{35}$$

Интегрируя это уравнение по z после подстановки в него формул (31) и (34), получаем

$$\begin{gathered} H_y^{\text{реш}} = H(x, y) - \\ - \frac{\omega^2\varepsilon_0\varepsilon_{1,2}\mu_0 s}{\pi}\operatorname{Re}\Psi(y)\operatorname{Im}\Phi(x + iz), \end{gathered} \tag{36}$$

где функция $H(x, y)$ – неопределенная “константа” интегрирования. Ее следует выбрать такой, чтобы искомая компонента $H_y^{\text{реш}}$ была нечетной функцией относительно аргумента z. Таким образом, с учетом формул (22) и (32) получаем, что компонента $H_y^{\text{реш}}$ на проводящей поверхности в области II, т.е. при $s/2 < x < T - s/2$, $-s/2 < y < s/2$ и $z = 0$, описывается формулой

$$\begin{gathered} H_y^{\text{реш}} = -\frac{\omega^2\varepsilon_0\mu_0 s}{\pi}\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}\times \\ \times \operatorname{arch}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi y}{T}\right)}{\cos\left(\frac{\pi s}{2T}\right)}\right)\operatorname{arch}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{T}\right)}{\sin\left(\frac{\pi s}{2T}\right)}\right). \end{gathered} \tag{37}$$

Вычислим вклад $\left\langle H_y^{(1,2),\text{II}}\right\rangle$ от компоненты $H_y^{\text{реш}}$ в области II в неопределенную константу $\left\langle H_y^{(1,2)}\right\rangle$. Подставляя выражение (37) в двойной интеграл (15), получаем

$$\begin{gathered} \left\langle H_y^{(1,2),\text{II}}\right\rangle = \pm\frac{\omega^2\varepsilon_0\mu_0 s}{\pi}\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}\times \\ \times\ln\left(\sin\left(\frac{\pi s}{2T}\right)\right)\ln\left(\cos\left(\frac{\pi s}{2T}\right)\right), \end{gathered} \tag{38}$$

где знак плюс отвечает вкладу $\left\langle H_y^{(1),\text{II}}\right\rangle$, а знак минус вкладу $\left\langle H_y^{(2),\text{II}}\right\rangle$.

Суммируя вклады $\left\langle H_y^{(1,2),\text{IV,III}}\right\rangle$ и $\left\langle H_y^{(1,2),\text{II}}\right\rangle$, выражаемые формулами (24) и (38), находим константу

$$\left\langle H_y^{(1,2)}\right\rangle = \mp\left[\frac{\pi}{T} - \frac{\omega^2\varepsilon_0\mu_0 s}{\pi}\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}\ln\left(\sin\left(\frac{\pi s}{2T}\right)\right)\ln\left(\cos\left(\frac{\pi s}{2T}\right)\right)\right], \tag{39}$$

где знак минус отвечает константе $\left\langle H_y^{(1)}\right\rangle$, а знак плюс константе $\left\langle H_y^{(2)}\right\rangle$.

2. ФОРМУЛЫ ДЛЯ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ

Рассчитаем матрицу рассеяния **S**, рассматривая области по обе стороны решетки как два порта четырехполюсника. Эта матрица связывает нормированные амплитуды рассеянных волн b_1 и b_2, исходящих из первого и второго порта, с нормированными амплитудами падающих волн a_1 и a_2 уравнением [24]

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \mathbf{S}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Сами нормированные амплитуды определяются формулами [24]

$$a_{1,2} = E_{1,2}^{\text{пад}}\Big/\sqrt{Z_{1,2}}, \quad b_{1,2} = E_{1,2}^{\text{рас}}\Big/\sqrt{Z_{1,2}}, \tag{41}$$

где $E_{1,2}^{\text{пад}}$ – амплитуды падающих волн в формуле (1), а $E_{1,2}^{\text{рас}}$ – амплитуды рассеянных волн.

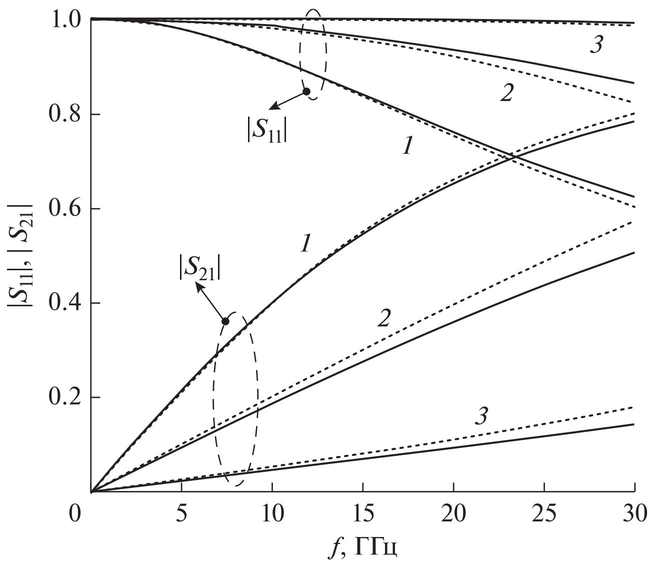

Рис. 2. Частотные зависимости коэффициентов прохождения $|S_{21}|$ и отражения $|S_{11}|$ электромагнитной волны от сетки с периодом $T = 3$ мм для трех значений s/T: 0.9 (*1*), 0.75 (*2*) и 0.5 (*3*). Сплошные линии – расчет по формулам, точки – численный электродинамический анализ 3D-модели сетки.

Запишем граничные условия для электрического поля E_x и магнитного поля H_y в первом порте

$$\begin{aligned} a_1\sqrt{Z_1} + b_1\sqrt{Z_1} &= \left\langle E_x^{(1)}\right\rangle E_0, \\ a_1/\sqrt{Z_1} - b_1/\sqrt{Z_1} &= \left\langle H_y^{(1)}\right\rangle E_0 + H_0, \end{aligned} \qquad (42)$$

где E_0 – неопределенная константа, задающая амплитуду второго (нечетного) частного решения системы линейных уравнений (11) и (12). Напомним, что амплитуду первого (четного) решения задает неопределенная константа H_0.

Здесь предполагается, что плоскость отсчета первого порта отстоит от плоскости решетки на расстоянии порядка ее периода T с тем, чтобы компоненты E_x и H_y считать константами $\left\langle E_x^{(1)}\right\rangle E_0$ и $\left\langle H_y^{(1)}\right\rangle E_0$ согласно формуле (13). В уравнении (42) учтено, что волна с амплитудой b_1 распространяется против направления оси z, и поэтому магнитное поле этой волны отличается знаком.

Аналогичные уравнения записываем для электрического и магнитного поля на втором порте

$$\begin{aligned} \left\langle E_x^{(2)}\right\rangle E_0 &= b_2\sqrt{Z_2} + a_2\sqrt{Z_2}, \\ \left\langle H_y^{(2)}\right\rangle E_0 + H_0 &= b_2/\sqrt{Z_2} - a_2/\sqrt{Z_2}. \end{aligned} \qquad (43)$$

Заметим, что волна с амплитудой a_2 распространяется против направления оси z, поэтому напряженность ее магнитного поля отличается знаком, как и для волны с амплитудой b_1 в формуле (42).

Совместно решая уравнения (42), (43) и учитывая зависимости знаков коэффициентов $\left\langle H_y^{(1,2)}\right\rangle$, $\left\langle E_x^{(1,2)}\right\rangle$ от знака z, находим амплитуды рассеянных волн

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2} + 2Z_0\left\langle H_y^{(2)}\right\rangle / \left\langle E_x^{(2)}\right\rangle}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1} - 2Z_0\left\langle H_y^{(2)}\right\rangle / \left\langle E_x^{(2)}\right\rangle} a_1 + \\ &+ \frac{2\sqrt[4]{\varepsilon_1\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1} - 2Z_0\left\langle H_y^{(2)}\right\rangle / \left\langle E_x^{(2)}\right\rangle} a_2, \\ b_2 &= \frac{2\sqrt[4]{\varepsilon_1\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1} - 2Z_0\left\langle H_y^{(2)}\right\rangle / \left\langle E_x^{(2)}\right\rangle} a_1 + \\ &+ \frac{\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1} + 2Z_0\left\langle H_y^{(2)}\right\rangle / \left\langle E_x^{(2)}\right\rangle}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1} - 2Z_0\left\langle H_y^{(2)}\right\rangle / \left\langle E_x^{(2)}\right\rangle} a_2. \end{aligned} \qquad (44)$$

После подстановки выражений (28) и (39) для коэффициентов $\left\langle E_x^{(2)}\right\rangle$ и $\left\langle H_y^{(2)}\right\rangle$ получаем искомые формулы

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2} - iZ_0Y}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1} + iZ_0Y} & \dfrac{2\sqrt[4]{\varepsilon_1\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1} + iZ_0Y} \\ \dfrac{2\sqrt[4]{\varepsilon_1\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1} + iZ_0Y} & \dfrac{\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1} - iZ_0Y}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1} + iZ_0Y} \end{pmatrix}, \qquad (45)$$

где

$$\begin{aligned} Y &= \frac{2\pi}{\omega\mu_0 s \ln\left(\sec\left(\dfrac{\pi s}{2T}\right)\right)} - \\ &- \omega\varepsilon_0 T\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\pi}\ln\left(\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi s}{2T}\right)\right). \end{aligned} \qquad (46)$$

Заметим, что величина Y является реактивной проводимостью элементарной ячейки решетки. Первое слагаемое в выражении (46) описывает индуктивную часть проводимости, а второе слагаемое – емкостную часть. Элементы матрицы $\mathbf{S}$, как и следовало ожидать, связаны равенствами $S_{12} = S_{21}$, $|S_{11}| = |S_{22}|$.

3. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ ФОРМУЛ

Для оценки погрешности полученных формул проведем сравнение рассчитанных по ним АЧХ с аналогичными характеристиками, рассчитанными с использованием численного электродинамического анализа 3D-модели металлической сетки. На рис. 2 для трех значений относительной ширины окна s/T представлены частотные зависимости коэффициента прохождения $|S_{21}|$ и коэффициента отражения $|S_{11}|$. Сплошные линии построены по формулам (45) и (46), а точками представлены зависимости, полученные с использованием численного электродинамического анализа 3D-модели. Расчет выполнен для случая, когда период

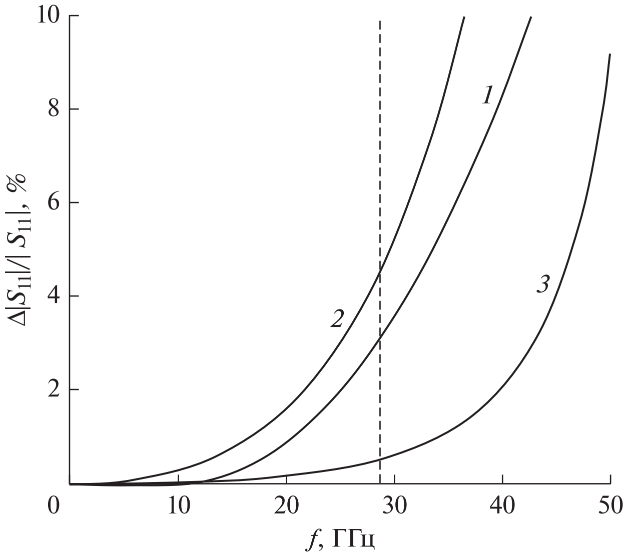

Рис. 3. Частотные зависимости относительного различия коэффициентов отражения электромагнитной волны от сетки с периодом $T = 3$ мм, вычисленных по формуле (45) и рассчитанных с использованием численного электродинамического анализа 3D-модели для трех значений s/T: 0.9 (*1*), 0.75 (*2*) и 0.5 (*3*). Штриховой линией отмечена частота f_0, на которой $\lambda_2/2 = T$.

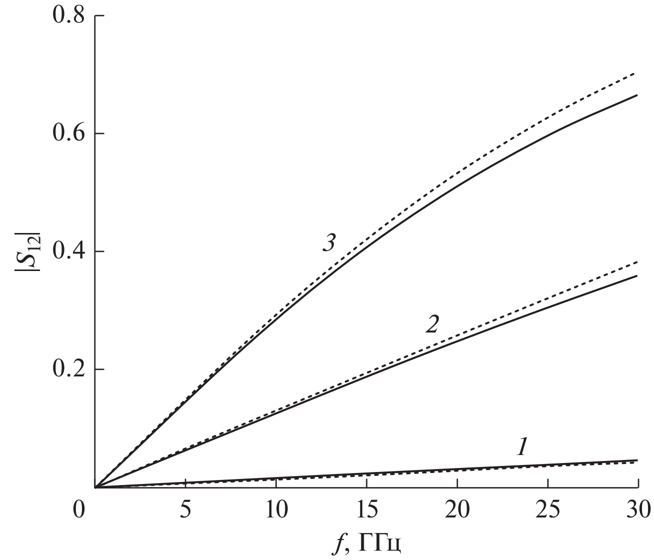

Рис. 4. Частотные зависимости коэффициента прохождения при $T - s = 0.5$ мм для трех значений периода $T = 1$ (*1*), 2 (*2*), 3 мм (*3*). Сплошные линии – расчет по формулам, точки – численный электродинамический анализ 3D-модели сетки.

структуры $T = 3$ мм, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 3$. Видно, что с уменьшением относительного размера окна в решетке коэффициент отражения растет, а коэффициент прохождения электромагнитных волн через структуру соответственно падает. Заметим, что на частоте $f_0 = 28.8$ ГГц длина волны во второй среде $\lambda_2 = 2T$.

Погрешность полученных формул можно оценить по частотным зависимостям относительного различия коэффициентов отражения электромагнитной волны (рис. 3), вычисленных по формулам и рассчитанных с использованием численного электродинамического анализа 3D-модели, который, как известно, достаточно хорошо согласуется с экспериментом. На рис. 3 видно, что относительная погрешность формул в области частот ниже частоты f_0, отмеченной на рисунке штриховой линией, не превышает 4%.

На рис. 4 представлены частотные зависимости коэффициента прохождения для трех значений периода решетки при фиксированной ширине полосковых проводников $T - s = 0.5$ мм. Расчет выполнен для случая, когда $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 3$. Как и следовало ожидать, при неизменной ширине полосковых проводников увеличение периода 2D-решетки приводит к соответственному увеличению прохождения электромагнитных волн через структуру.

Как уже отмечалось, во многих работах считается, что нерезонансная металлическая сеточная 2D-решетка и 1D-решетка полосковых проводников с тем же периодом и той же шириной про-

Погрешность расчета отражения от 2D-решетки по полученным формулам ($\left|\Delta S_{11}^{2D}/S_{11}\right|$) и по известным формулам для 1D-решетки ($\left|\Delta S_{11}^{1D}/S_{11}\right|$)

f/λ_2	$s/T = 0.5$		$s/T = 0.75$		$s/T = 0.9$	
	$\left\|\Delta S_{11}^{2D}/S_{11}\right\|$	$\left\|\Delta S_{11}^{1D}/S_{11}\right\|$	$\left\|\Delta S_{11}^{2D}/S_{11}\right\|$	$\left\|\Delta S_{11}^{1D}/S_{11}\right\|$	$\left\|\Delta S_{11}^{2D}/S_{11}\right\|$	$\left\|\Delta S_{11}^{1D}/S_{11}\right\|$
5 ГГц/35 мм	7.7×10^{-5}	7.0×10^{-4}	6.8×10^{-4}	2.7×10^{-3}	3.2×10^{-4}	5.6×10^{-3}
10 ГГц/17 мм	3.3×10^{-4}	2.8×10^{-3}	3.0×10^{-3}	1.0×10^{-2}	1.9×10^{-4}	1.8×10^{-2}
15 ГГц/12 мм	8.4×10^{-4}	6.0×10^{-3}	7.7×10^{-3}	1.9×10^{-2}	2.4×10^{-3}	2.8×10^{-2}
20 ГГц/10 мм	1.8×10^{-3}	1.0×10^{-2}	1.6×10^{-2}	2.7×10^{-2}	8.8×10^{-3}	3.2×10^{-2}
25 ГГц/7 мм	3.4×10^{-3}	1.5×10^{-2}	3.0×10^{-2}	2.9×10^{-2}	2.0×10^{-2}	2.7×10^{-2}

водников обладают одинаковыми отражательными свойствами, если период структур много меньше длины падающей волны. Поэтому интересно сравнить относительные погрешности расчета коэффициентов отражения от металлической 2D-решетки, получающиеся при использовании полученных формул (45), (46) и известной формулы (39) из работы [23] для 1D-решетки полосковых проводников. Такое сравнение на нескольких частотах для металлической сетки с периодом $T = 3$ мм, расположенной на границе сред с относительными диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_1 = 1$ и $\varepsilon_2 = 3$, приведено в таблице. Видно, что точность расчета по полученным формулам ($\left|\Delta S_{11}^{2D}/S_{11}\right|$) значительно выше точности расчета по известной формуле для 1D решетки ($\left|\Delta S_{11}^{1D}/S_{11}\right|$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, с использованием квазистатического приближения впервые получены простые формулы для расчета элементов матрицы рассеяния плоской электромагнитной волны, падающей ортогонально на металлическую решетку с квадратными окнами, расположенную на границе раздела двух сред. Сравнение частотных зависимостей коэффициентов прохождения и коэффициентов отражения, рассчитанных по формулам, и аналогичных зависимостей, рассчитанных численным электродинамическим анализом 3D-модели исследованных структур, показало достаточно высокую точность полученных формул. Отметим, что сравнительно небольшая относительная погрешность (менее 4%) наблюдается в широкой области частот вплоть до частоты, на которой период решетки равен примерно половине длины волны в среде с большей диэлектрической проницаемостью.

Полученные формулы могут быть использованы при конструировании частотно-селективных поверхностей на слоистых диэлектрических структурах, разделенных решетками из полосковых проводников. При этом металлические решетки, служащие зеркалами, обеспечивают необходимую связь между резонансными диэлектрическими слоями, а также связь наружных слоев с пространством. Отражательной способностью металлической сетки можно управлять в широких пределах, варьируя как относительную ширину окна s/T, так и период сетки T.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ade P.A.R., Pisano G., Tucker C., Weaver S.* // Proc. SPIE. 2006. V. 6275. P. 62750U-1.
2. *Melo A.M., Kornberg M.A., Kaufmann P. et al.* // Appl. Opt. 2008. V. 47. № 32. P. 6064.
3. *Garcia-Vidal F.J., Martin-Moreno L., Ebbesen T.W., Kuipers L.* // Rev. Modern Phys. 2010. V. 82. P. 729.
4. *Munk B.* Frequency selective surfaces: theory and design. N.Y.: John Wiley & Sons, Inc., 2000.
5. *Tomasek P.* // Int. J. Circuits, Systems and Signal Processing. 2014. V. 8. P. 594.
6. *Oh S., Lee H., Jung J-H., Lee G-Y.* // Int. J. Microwave Science and Technology. 2014. V. 2014. P. 857582.
7. *Sarabandi K., Behdad N.* // IEEE Trans. 2007. V. AP-55. № 5. P. 1239.
8. *Zhou H., Qu S.-B., Wang J.-F. et al.* // Electron. Lett. 2012. V. 48. № 1. P. 11.
9. *Salehi M., Behdad N.* // IEEE Microwave and Wireless Components Lett. 2008. V. 18. № 12. P. 785.
10. *Belyaev B.A., Tyurnev V.V.* // Opt. Lett. 2015. V. 40. № 18. P. 4333.
11. *Belyaev B.A., Tyurnev V.V.* // Opt. Lett. 2016. V. 41. № 3. P. 536.
12. *Li Y., Pei Z., Qu S. et al.* // PIERS Proc. Suzhou. China. September 12–16. Cambridge: EMW Publishing, 2011. P. 476.
13. *Mittra R., Chan C.H., Cwik T.* // Proc. IEEE. 1988. V. 76. № 12. P. 1593.
14. *Конторович М.И., Астрахан М.И., Акимов В.П., Ферсман Г.А.* Электродинамика сетчатых структур. М.: Радио и связь, 1987.
15. *Банков С.Е., Левченко И.В.* // РЭ. 1988. Т. 33. № 10. С. 2045.
16. *Luukkonen O., Simovski C., Granet G. et al.* // IEEE Trans. 2008. V. AP-56. № 6. P. 1624.
17. *Мельчакова И.В., Симовский К.Р.* // РЭ. 2008. Т. 53. № 8. С. 925.
18. *Lee C.K., Langley R.J.* // IEE Proc. 1985. V. 132. Pt. H. № 6. P. 395.
19. *Marcuvitz N.* Waveguide handbook. N.Y.: McGraw-Hill, 1951.
20. *Whitbourn L.B., Compton R.C.* // Appl. Opt. 1985. V. 24. № 2. P. 217.
21. *Ulrich R.* // Infrared Phys. 1967. V. 7. P. 37.
22. *Meixner J.* // IEEE Trans. 1972. V. AP-20. № 4. P. 442.
23. *Беляев Б.А., Тюрнев В.В.* // Изв. вузов. Физика. 2015. Т. 58. № 5. С. 57.
24. *Гупта К., Гардж Р., Чадха Р.* Машинное проектирование СВЧ устройств. М.: Радио и связь, 1987.