

В. В. Вальков, Д. М. Дзебисашвили, Динамическая магнитная восприимчивость в спин-фермионной модели купратных сверхпроводников, $TM\Phi$, 2017, том 193, номер 3, 515–529

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf8967

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки: IP: 193.218.138.78 14 мая 2022 г., 10:15:09



ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА Том 193, № 3 декабрь, 2017

© 2017 г.

В.В. Вальков^{*}, Д.М. Дзебисашвили^{*†} ДИНАМИЧЕСКАЯ МАГНИТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ В СПИН-ФЕРМИОННОЙ МОДЕЛИ КУПРАТНЫХ СВЕРХПРОВОДНИКОВ

В рамках SU(2)-инвариантной спин-фермионной модели электронного строения CuO₂-плоскости оксидов меди методом диаграммных техник для спиновых и фермиевских операторов получено точное представление для мацубаровской функции Грина подсистемы локализованных спинов $D_{\perp}(k, i\omega_m)$. Это представление включает массовый оператор Ларкина $\Sigma_{\rm L}(k, i\omega_m)$, силовой $P(k, i\omega_m)$ и поляризационный $\Pi(k, i\omega_m)$ операторы. Вычисление в однопетлевом приближении массового и силового операторов для гейзенберговской системы спинов, находящейся в состоянии квантовой спиновой жидкости, позволило в явном виде записать функцию Грина $D_{\perp}(k, i\omega_m)$ и установить соответствие с результатом Шимахары и Такады. Существенным моментом развитого подхода явился учет спин-поляронной природы фермиевских квазичастиц спин-фермионной модели при нахождении вкладов кислородных дырок в спиновую восприимчивость через поляризационный оператор $\Pi(k, i\omega_m)$.

Ключевые слова: высокотемпературные сверхпроводники, спин-фермионная модель, магнитная восприимчивость, спиновый полярон.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf8967

1. ВВЕДЕНИЕ

Актуальность проблемы вычисления магнитной восприимчивости легированных купратных высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) обусловлена необходимостью корректной интерпретации большого набора экспериментальных данных

Исследование было выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-02-00073), Правительства Красноярского края и Красноярского краевого фонда поддержки научной и научно-технической деятельности (грант № 16-42-240435), а также комплексной программы СО РАН № II.2П (грант № 0356-2015-0405).

*Институт физики им. Л.В. Киренского, ФИЦ КНЦ СО РАН, Красноярск, Россия. E-mail: vvv@iph.krasn.ru

[†]Сибирский государственный университет науки и технологий им. академика М. Ф. Решетнева, Красноярск, Россия. E-mail: ddm@iph.krasn.ru по спиновому отклику в купратах [1]. Родительские соединения ВТСП на основе меди являются антиферромагнитными диэлектриками Мотта–Хаббарда. При легировании в них появляются носители тока и одновременно разрушается дальний магнитный порядок. Из-за сильных электронных корреляций проблема вычисления магнитной восприимчивости в купратных соединениях является нетривиальной.

В работах [2]–[9] отмеченная проблема решалась в рамках двумерной (t–J)-модели и модели Хаббарда. При этом в большинстве случаев [3]–[7] вычисление магнитной восприимчивости проводилось на основе метода функции памяти [10]–[12]. В статье [13] проблема магнитного отклика купратов исследовалась в рамках фрустрированной модели Гейзенберга, а для расчета спиновых функций Грина использовался сферически-симметричный подход [14].

Считается, что (t-J)-модель является низкоэнергетической эффективной моделью, полученной из более общей так называемой трехзонной (p-d)-модели [15]–[17]. Последняя содержит в себе все необходимые взаимодействия, которые позволяют описывать главные особенности электронного строения CuO₂-плоскости купратных ВТСП. Среди всех взаимодействий в трехзонной (p-d)-модели наиболее существенное значение имеют следующие: 1) гибридизация между *p*-состояниями ионов кислорода и *d*-состояниями ионов меди, интенсивность которой определяется величиной t_{pd} ; 2) наличие энергетической щели $\Delta_{pd} = \varepsilon_p - \varepsilon_d$, определяющей разность энергий между состояниями дырок на ионах меди ε_d и кислорода ε_p ; 3) кулоновское взаимодействие двух дырок на одном и том же ионе меди U_d .

Малость параметра смешивания t_{pd} по сравнению с энергетической разностью Δ_{pd} и энергией кулоновского взаимодействия U_d позволяет получить SU(2)-инвариантную спин-фермионную модель [18], [19]. В отличие от (t-J)-модели спин-фермионная модель учитывает: 1) присутствие двух ионов кислорода в элементарной ячейке CuO₂-плоскости; 2) наличие двух подсистем дырок: коллективизированные дырки в подрешетках ионов кислорода и дырки, локализованные на ионах меди. Очевидно, что спин-фермионная модель является более адекватной по сравнению с (t-J)-моделью для описания низкотемпературной термодинамики купратных ВТСП.

В работе [20] при изучении динамической магнитной восприимчивости локализованных спиновых моментов в рамках спин-фермионной модели была предложена формула, выражающая спиновую функцию Грина спин-фермионной модели через спиновую функцию Грина модели Гейзенберга и поляризационный оператор, учитывающий вклады коллективизированных дырок. При этом вычисление функции Грина модели Гейзенберга основывалось на применении сферически-симметричного подхода [14], а расчет поляризационного оператора в [20] был выполнен в приближении хаотических фаз, причем фермиевские функции Грина, формирующие в приближении хаотических фаз фермионную петлю, аппроксимировались затравочными фермиевскими пропагаторами.

В настоящей работе в рамках спин-фермионной модели методом диаграммной техники как для спиновых [21], так и для фермиевских операторов [22] получено точное представление для динамической магнитной восприимчивости локализованных спинов. Указаны приближения, при которых из полученного точного представления для восприимчивости следует предложенная в статье [20] приближенная формула. Но в отличие от статьи [20], входящая в эту приближенную формулу функция Грина модели Гейзенберга для спин-жидкостной фазы рассчитана методом диаграммной техники для спиновых операторов [21]. Фермиевские функции Грина, определяющие фермионную петлю в поляризационном операторе, вычислены на основе спин-поляронного подхода [23], который учитывает формирование спин-поляронных квазичастиц. Последнее обстоятельство является принципиальным для описания свойств купратных сверхпроводников.

2. ГАМИЛЬТОНИАН СПИН-ФЕРМИОННОЙ МОДЕЛИ

В режиме сильных электронных корреляций, когда $U_d > \Delta_{pd} \gg t_{pd}$, гамильтониан спин-фермионной модели можно записать в виде [19], [24]

$$\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{H}}_0 + \hat{\mathscr{H}}_J + \hat{\mathscr{H}}_I, \tag{1}$$

где

$$\hat{\mathscr{H}}_{0} = \sum_{k,\alpha} [\xi_{k_{x}} a_{k\alpha}^{+} a_{k\alpha} + \xi_{k_{y}} b_{k\alpha}^{+} b_{k\alpha} + t_{k} (a_{k\alpha}^{+} b_{k\alpha} + b_{k\alpha}^{+} a_{k\alpha})],$$

$$\hat{\mathscr{H}}_{J} = \frac{J}{N} \sum_{k,q,f,\alpha,\beta} e^{if(q-k)} u_{k\alpha}^{+} (\vec{S}_{f} \vec{\sigma}_{\alpha\beta}) u_{q\beta}, \qquad \hat{\mathscr{H}}_{I} = \sum_{f,m} \frac{I_{fm}}{2} \vec{S}_{f} \vec{S}_{m}.$$
(2)

Гамильтониан $\hat{\mathscr{H}}_0$ описывает подсистему кислородных дырок в импульсном представлении. Операторы $a_{k\alpha}^{\dagger}(a_{k\alpha})$ рождают (уничтожают) дырки с проекцией спина $\alpha = \pm 1/2$ в кислородной подсистеме с p_x -орбиталями. Аналогичным образом операторы $b_{k\alpha}^{\dagger}(b_{k\alpha})$ действуют в кислородной подсистеме с p_y -орбиталями. Функции, задающие затравочную зонную структуру кислородных дырок, определяются выражениями

$$\xi_{k_{x(y)}} = \varepsilon_p - \mu + 2\tau \nu_{kx(y)}^2, \quad t_k = (2\tau - 4t)\nu_{kx}\nu_{ky}, \quad \nu_{kx} = \sin\frac{k_x}{2}, \quad \nu_{ky} = \sin\frac{k_y}{2}.$$
 (3)

Здесь посредством ε_p обозначена затравочная одноузельная энергия дырок, μ – химический потенциал системы; интенсивность перескоков дырок по ионам кислорода задается интегралами туннелирования τ и t. Первый интеграл возникает в результате учета гибридизационных процессов во втором порядке теории возмущений и выражается через параметры исходной модели Эмери:

$$\tau = \frac{t_{pd}^2}{\Delta_{pd}} \left(1 - \frac{\Delta_{pd}}{U_d - \Delta_{pd} - 2V_{pd}} \right). \tag{4}$$

Интеграл туннелирования t отражает наличие прямых перескоков дырок между ближайшими ионами кислорода.

Обменная связь между кислородной подсистемой и подсистемой локализованных спинов описывается оператором $\hat{\mathcal{H}}_J$, в котором \vec{S}_f – векторный оператор локализованного на узле f спина, $\vec{\sigma} = (\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z)$ – вектор, составленный из матриц Паули, а оператор

$$u_{k\alpha} = \nu_{kx}a_{k\alpha} + \nu_{ky}b_{k\alpha} \tag{5}$$

определен в виде линейной комбинации операторов $a_{k\alpha}$ и $b_{k\alpha}$.

Величина обменной связи между локализованными спинами и кислородными дырками определяется формулой

$$J = \frac{4t_{pd}^2}{\Delta_{pd}} \left(1 + \frac{\Delta_{pd}}{U_d - \Delta_{pd} - 2V_{pd}} \right). \tag{6}$$

Третье слагаемое гамильтониана (1) учитывает сверхобменное взаимодействие между локализованными спинами, находящимися в узлах f и m, величина которого определяется параметром I_{fm} .

Появление в формулах (3) и (5) тригонометрических функций от ν_{kx} и ν_{ky} является следствием явного учета знаков интегралов туннелирования дырок, обусловленных фазовыми факторами *p*- и *d*-орбиталей.

Из выражения (1) для гамильтониана спин-фермионной модели следует, что если считать интеграл туннелирования t для прямых кислород-кислородных перескоков малым по сравнению с параметром τ , то операторную структуру гамильтониана (1) можно существенно упростить. Для этого проведем унитарное преобразование

$$\phi_{k\alpha} = \frac{\nu_{kx}a_{k\alpha} + \nu_{ky}b_{k\alpha}}{\nu_k}, \qquad \psi_{k\alpha} = \frac{-\nu_{ky}a_{k\alpha} + \nu_{kx}b_{k\alpha}}{\nu_k}, \tag{7}$$

где $\nu_k^2 = \nu_{kx}^2 + \nu_{ky}^2$. Введенные операторы удовлетворяют обычным фермиевским коммутационным соотношениям: $\{\varphi_{k\sigma}, \varphi_{p\sigma'}^+\} = \{\psi_{k\sigma}, \psi_{p\sigma'}^+\} = \delta_{kp}\delta_{\sigma\sigma'}$.

В представлении операторов $\varphi_{k\alpha}$ и $\psi_{k\alpha}$ операторы $\hat{\mathcal{H}}_0$ и $\hat{\mathcal{H}}_J$ приобретают вид

$$\hat{\mathscr{H}}_{0} = \sum_{k,\alpha} [\xi_{k}\varphi_{k\alpha}^{+}\varphi_{k\alpha} + (\varepsilon_{p} - \mu)\psi_{k\alpha}^{+}\psi_{k\alpha}],$$
$$\hat{\mathscr{H}}_{J} = \frac{1}{N} \sum_{k,q,f,\alpha,\beta} e^{if(q-k)} J_{kq}\varphi_{k\alpha}^{+}(\vec{S}_{f}\vec{\sigma}_{\alpha\beta})\varphi_{q\beta},$$
(8)

где $\xi_k = \varepsilon_p - \mu + 2\tau \nu_k^2$ и $J_{kq} = J\nu_k\nu_q$.

Из полученных выражений видно, что с локализованной спиновой подсистемой на ионах меди взаимодействуют только квазичастицы, описываемые операторами φ_k . Оказывается, что квазичастицы, отвечающие операторам ψ_k , не связаны с локализованной подсистемой и, следовательно, не участвуют в образовании спин-поляронного состояния. Поэтому в дальнейшем второе слагаемое в операторе $\hat{\mathcal{H}}_0$ в (8) мы не учитываем. Кроме того, для удобства построения спиновой диаграммной техники введем инфинитезимальное поле $h \to +0$. В результате получаем окончательный вид для эффективного гамильтониана [25]:

$$\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{H}}_0 + \hat{\mathscr{H}}_J + \hat{\mathscr{H}}_I, \tag{9}$$

где

$$\hat{\mathscr{H}}_0 = \sum_{k,\alpha} \xi_k \varphi_{k\alpha}^+ \varphi_{k\alpha} - h \sum_f S_f^z.$$
(10)

3. МАЦУБАРОВСКАЯ ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ ПОДСИСТЕМЫ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ СПИНОВ

Динамическая магнитная восприимчивость для подсистемы локализованных спинов, как известно, связана с мацубаровской спиновой функцией Грина [21]:

$$D_{\perp}(f\tau; f'\tau') = -\frac{1}{2} \langle T_{\tau} \tilde{S}_{f}^{+}(\tau) \tilde{S}_{f'}^{-}(\tau') \rangle = \frac{T}{N} \sum_{k,\omega_{n}} e^{ik(f-f') - i\omega_{n}(\tau-\tau')} D_{\perp}(k, i\omega_{n}).$$
(11)

Зависимость $D_{\perp}(f\tau; f'\tau')$ от мацубаровских временных аргументов τ и τ' связана с эволюцией спиновых операторов в "гейзенберговском" представлении

$$\tilde{S}_f^{\pm}(\tau) = e^{\tau \hat{\mathscr{H}}} S_f^{\pm} e^{-\tau \hat{\mathscr{H}}}, \qquad (12)$$

где 0 < τ < 1/ β , β = 1/T, T – температура. Циркулярные компоненты спина обычным образом связаны с "декартовыми" компонентами: $S_f^{\pm} = S_f^x \pm i S_f^y$. Входящий в формулу (11) оператор T_{τ} является оператором хронологического упорядочения по мацубаровским временным аргументам. Угловые скобки в (11) означают, что стоящее внутри них операторное выражение усредняется по матрице плотности, соответствующей большому каноническому ансамблю. При проведении преобразования Фурье координатно-временной функции Грина учитывается, что из-за квазибозевских перестановочных соотношений для спиновых операторов суммирование по мацубаровским частотам осуществляется только по четным $\omega_m = 2\pi mT$, $m = 0, \pm, 1 \pm 2, \ldots$ (см. книгу [21]).

Для вычисления D_{\perp} по теории возмущений используется переход к представлению взаимодействия [21]. Тогда

$$D_{\perp}(f\tau; f'\tau') = -\frac{1}{2} \langle T_{\tau} S_f^+(\tau) S_{f'}^-(\tau') \mathfrak{S}(\beta) \rangle_{0c}, \qquad (13)$$

где температурная матрица рассеяния определяется выражением

$$\mathfrak{S}(\beta) = T_{\tau} \exp\left\{-\int_{0}^{\beta} d\tau \left(\hat{\mathscr{H}}_{J}(\tau) + \hat{\mathscr{H}}_{I}(\tau)\right)\right\},\tag{14}$$

а зависимость от времени операторов без знака "тильда" говорит о том, что эти операторы берутся в представлении взаимодействия с нулевым гамильтонианом. В частности,

$$S_{f}^{\pm}(\tau) = e^{\tau \hat{\mathscr{H}}_{0}} S_{f}^{\pm} e^{-\tau \hat{\mathscr{H}}_{0}}.$$
 (15)

Аналогичные выражения можно записать для операторов $\hat{\mathscr{H}}_{J}(\tau)$ и $\hat{\mathscr{H}}_{I}(\tau)$. Нижний индекс "0" у правой скобки в (13) означает, что термодинамическое среднее определяется статистическим оператором с гамильтонианом $\hat{\mathscr{H}}_{0}$. При разложении $\mathfrak{S}(\beta)$ в ряд и раскрытии каждого из слагаемых ряда по теореме Вика для спиновых операторов учитываются только вклады, соответствующие связанным диаграммам [21]. Этим объясняется наличие дополнительного индекса "с" в (13).

4. УРАВНЕНИЕ ДАЙСОНА. СИЛОВОЙ И ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЙ ОПЕРАТОРЫ

Особенность коммутационных соотношений для спиновых операторов обусловлена тем, что результатом коммутации двух различных спиновых операторов, относящихся к одному узлу, является снова оператор, а не число, как для бозевских операторов. В диаграммной технике это проявляется в том, что возникают так называемые концевые множители [26], [27]. Полная совокупность вкладов от концевых множителей во всех порядках теории возмущений определяет силовой оператор $P(k, i\omega_n)$. Тогда функцию Грина $D_{\perp}(k, i\omega_n)$ можно выразить через полный пропагатор $G_{\perp}(k, i\omega_n)$ и силовой оператор посредством соотношения [26], [27]

$$D_{\perp}(k, i\omega_n) = G_{\perp}(k, i\omega_n) P(k, i\omega_n).$$
⁽¹⁶⁾

Для пропагатора $G_{\perp}(k, i\omega_n)$ справедливо уравнение Дайсона, которое в графическом виде можно представить следующим образом:

где двойная пунктирная линия обозначает функцию $G_{\perp}(k, i\omega_m)$, одинарная пунктирная линия отвечает затравочному пропагатору $g(i\omega_m) = (i\omega_m - h)^{-1}$, а кругу с символом $\Sigma_{\rm D}$ соответствует массовый оператор Дайсона. Последний есть сумма всех неприводимых по Дайсону собственно энергетических частей. Неприводимость по Дайсону означает невозможность представить собственно энергетическую часть в виде двух несвязанных частей путем разрезания только одной одинарной пунктирной линии. Разрешая уравнение (17) относительно функции $G_{\perp}(k, i\omega_m)$, получаем уравнение Дайсона

$$D_{\perp}(k, i\omega_m) = \frac{P(k, i\omega_m)}{i\omega_m - h - \Sigma_{\rm D}(k, i\omega_m)}$$
(18)

для функции Грина $D_{\perp}(k, i\omega_m)$.

Квадратичная по спиновым операторам форма гейзенберговского обменного взаимодействия позволяет представить массовый оператор Дайсона $\Sigma_{\rm D}(k, i\omega_m)$ в виде суммы двух слагаемых:

$$\Sigma_{\rm D}(k, i\omega_m) = \Sigma_{\rm L}(k, i\omega_m) + P(k, i\omega_m)[I_k + \Pi(k, i\omega_m)],$$
(19)

где $\Sigma_{\rm L}(k, i\omega_m)$ – неприводимая по Ларкину собственно энергетическая часть спиновой функции Грина, $P(k, i\omega_m)$ – силовой оператор (такое представление для гейзенберговской модели впервые было введено в [28], [29]), I_k – фурье-образ обменного интеграла, а $\Pi(k, i\omega_m)$ – поляризационный оператор. С учетом сказанного получаем удобное представление для спиновой функции Грина спин-фермионной модели:

$$D_{\perp}(k, i\omega_m) = \frac{P(k, i\omega_m)}{i\omega_m - h - \Sigma_{\rm L}(k, i\omega_m) - I_k P(k, i\omega_m) - P(k, i\omega_m) \Pi(k, i\omega_m)}.$$
 (20)

Введение функции Грина

$$D_{\rm L}(k, i\omega_m) = [i\omega_m - h - \Sigma_{\rm L}(k, i\omega_m) - P(k, i\omega_m)I_k]^{-1}P(k, i\omega_m)$$
(21)

позволяет переписать уравнение (20) в виде

$$D_{\perp}(k, i\omega_m) = \{ D_{\rm L}(k, i\omega_m)^{-1} - \Pi(k, i\omega_m) \}^{-1}.$$
 (22)

При этом роль массового оператора в функции $D_{\perp}(k, i\omega_m)$ играет только поляризационный оператор. В техническом отношении это удобно при проведении конкретных расчетов (см. текст далее). Отличие диаграммного ряда для функции Грина $D_{\rm L}(k, i\omega_m)$ от ряда для функции $D_{\perp}(k, i\omega_m)$ состоит в том, что первый не содержит вкладов в массовый оператор, приводимых по поляризационному оператору. Это означает, что в ряде для $D_{\rm L}(k, i\omega_m)$ нет диаграмм, которые можно разрезать поперек двух фермиевских линий распространения на две не связанные между собой части.

Заметим, что приближение хаотических фаз, использованное в статье [20] при анализе магнитной восприимчивости в купратах, следует из формулы (22), если в качестве поляризационного оператора $\Pi(k, i\omega_m)$ взять одну фермионную петлю с затравочными фермиевскими функциями Грина $G^{(0)}(k, i\omega_n) = (i\omega_n - \varepsilon_k)^{-1}$ ($\omega_n = (2n+1)\pi T, n = 0, \pm 1, ...$), а в диаграммном разложении функции Грина $D_L(k, i\omega_m)$ отбросить все вклады, обусловленные взаимодействием $\hat{\mathcal{M}}_J$. В этом случае функция Грина $D_L(k, i\omega_m)$ описывает чисто спиновую систему с гейзенберговским взаимодействием.

Для функции Грина $D_{\rm L}(k, i\omega_m)$ при J = 0 в работе [20] было предложено использовать выражение, полученное в статье [14] в рамках сферически-симметричной теории [30]. Ниже выражение для спиновой функции Грина модели Гейзенберга в фазе квантовой спиновой жидкости получено методом диаграммной техники для спиновых операторов.

5. ОДНОПЕТЛЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ ГРИНА ЛОКАЛИЗОВАННЫХ СПИНОВ, НАХОДЯЩИХСЯ В СОСТОЯНИИ КВАНТОВОЙ СПИНОВОЙ ЖИДКОСТИ

Хорошо известно, что при легировании купратных ВТСП достаточно малым количеством кислородных дырок инициируется разрушение дальнего антиферромагнитного порядка. Это позволяет использовать концепцию, в соответствие с которой при конечной температуре двумерная система локализованных спинов находится в состоянии квантовой спиновой жидкости. При этом в нулевом приближении по концентрации дырок коллективные характеристики такого ансамбля локализованных спинов определяются гейзенберговским гамильтонианом

$$\hat{\mathscr{H}}_{\Gamma} = \hat{\mathscr{H}}_{0\Gamma} + \hat{\mathscr{H}}_{I} \quad \left(\hat{\mathscr{H}}_{0\Gamma} = -h\sum_{f}S_{f}^{z}\right).$$
(23)

Тогда можно считать, что после взятия предела $h \to +0$ ансамбль локализованных спинов ионов меди будет находиться в состоянии SU(2)-инвариантной квантовой спиновой жидкости. Это означает, что $\langle S_f^x \rangle = \langle S_f^y \rangle = \langle S_f^z \rangle = 0$, а спиновые корреляционные функции $C_j = \langle \vec{S}_f \vec{S}_{f+r_j} \rangle$ отличны от нуля $(r_j -$ радиус-вектор *j*-й координационной сферы). При этом корреляторы C_j удовлетворяют соотношениям

$$C_{r_j} \equiv C_j = 3\langle S_f^x S_{f+r_j}^x \rangle = 3\langle S_f^y S_{f+r_j}^y \rangle = 3\langle S_f^z S_{f+r_j}^z \rangle.$$
(24)

Отмеченные условия приводят к тому, что при расчете функции Грина методом диаграммной техники не следует учитывать графики, вклад которых пропорционален термодинамическому среднему $\langle S_f^z \rangle_{0\Gamma}$. Нижний индекс "0Г" в выражении $\langle S_f^z \rangle_{0\Gamma}$ означает, что усредненеие проводится с матрицей плотности, определяемой "нулевым" гамильтонианом $\hat{\mathscr{H}}_{0\Gamma}$.



Рис. 1. Однопетлевые диаграммы для массового оператора Дайсона спиновой функции Грина в модели Гейзенберга.

Спиновая функция Грина $D_{\rm L}(k, i\omega_m)$ для модели Гейзенберга, как и функция Грина $D_{\perp}(k, i\omega_m)$, определяется уравнением (11), а ряд теории возмущений порождается разложением температурной матрицы рассеяния в (13) с той лишь разницей, что матрица плотности, используемая при термодинамическом усреднении, теперь определяется гамильтонианом $\hat{\mathscr{H}}_{I}$.

С учетом сказанного вклад в массовый оператор Дайсона $\Sigma_{\rm D}(k, i\omega_m)$ в однопетлевом приближении определяется суммой шести графиков, показанных на рис. 1. Одинарная пунктирная линия, как и ранее, обозначает затравочный пропагатор $g(i\omega_m) = (i\omega_m - h)^{-1}$. Двойной пунктирной линии отвечает функция Грина $G_{\Gamma}(k, i\omega_m)$, удовлетворяющая уравнению Дайсона (17). Волнистым линиям сопоставляется фурье-образ интеграла обменного взаимодействия I_k . При этом волнистым линиям с кругами отвечает продольное взаимодействие, а линиям со стрелкой – поперечное. Заштрихованные (или "ужирненные" по терминологии книги [21]) овалы с двумя кругами обозначают третью часть от фурье-образа спиновых корреляторов $C_k = \sum_r e^{-ikr}C_r$. Ужирнение овалов производится за счет добавления к затравочному (светлому) овалу таких диаграмм, которые допускают передачу через овал квазиимпульса, но не допускают передачу мацубаровской частоты. Один из возможных способов ужирнения овала демонстрируется графическим уравнением

где светлому овалу с двумя кружками отвечает кумулянт второго порядка, возникающий при вычислении парной корреляционной функции $\langle S_f^z S_a^z \rangle_{0\Gamma}$ [21].

Сумму аналитических вкладов для диаграмм на рис. 1в-е, содержащих ужирненный овал, можно представить в виде

$$\Sigma_{\rm L}^{(\rm B-e)}(k, i\omega_m) = \frac{1}{N} \sum_q \frac{C_q}{3} G_{\rm L}(k-q, i\omega_m) (I_q - I_k) (I_q - I_{k-q}).$$
(26)

Для суммы вкладов от диаграмм на рис. 1а и 16 получаем выражение

$$\Sigma_{\rm L}^{(\rm a6)}(k,i\omega_m) = \frac{T}{N} \sum_{q,\omega_n} I_q [G_{\rm L}(q,i\omega_n) - G_{\rm L}(k-q,i\omega_n)].$$
(27)

Рассмотрим приближение, в котором двойные пунктирные линии в диаграммах 1а-е заменяются на одинарные пунктирные линии. Этому приближению, как



Рис. 2. Однопетлевые диаграммы для силового оператора спиновой функции Грина в модели Гейзенберга.

будет видно из дальнейшего, соответствуют результаты Шимахары–Такада. В аналитическом виде этому приближению соответствует замена функций Грина $G_{\Gamma}(k - q, i\omega_m)$ в формуле (26) на пропагаторы $g(i\omega_m)$. Легко видеть, что такая замена приводит к обращению в ноль собственно энергетической части $\Sigma_{\Gamma}^{(a6)}$. В результате в отмеченном приближении собственная энергия $\Sigma_{\Gamma}(k, i\omega_m)$ обусловлена только вкладами от $\Sigma_{\Gamma}^{(B-e)}(k, i\omega_m)$:

$$\Sigma_{\Gamma}(k, i\omega_m) = \Sigma_{\Gamma}^{(\mathbf{B}-\mathbf{e})}(k, i\omega_m) = g(i\omega_m) \frac{1}{N} \sum_q \frac{C_q}{3} (I_q - I_k) (I_q - I_{k-q}).$$
(28)

Для силового оператора $P_{\Gamma}(k, i\omega_m)$ учитываемые нами однопетлевые графики представлены на рис. 2.

В спин-волновом приближении аналитическое выражение для силового оператора имеет вид

$$P_{\Gamma}(k, i\omega_m) = g(i\omega_m) \frac{1}{3N} \sum_q C_q(I_{k-q} - I_q).$$
⁽²⁹⁾

Учитывая формулы (28) и (29) и выполняя предельный переход $h \to 0$, получаем окончательное выражение для спиновой функции Грина D_{Γ} :

$$D_{\Gamma}(k, i\omega_m) = \frac{\frac{1}{3N} \sum_q C_q (I_{k-q} - I_q)}{(i\omega_m)^2 - \Omega_k^2},$$
(30)

где Ω_k – спектр парамагнонных возбуждений, определяемый уравнением

$$\Omega_k^2 = \frac{1}{N} \sum_q \frac{C_q}{3} (I_q - I_k) (I_q - I_{k-q}).$$
(31)

Если обменный интеграл I_{fg} отличен от нуля только для ближайших соседей, то выражение для спектра (31), записанное через спиновые корреляторы (24), имеет вид

$$\Omega_k^2 = \frac{4}{3} I_1^2 (1 - \gamma_{1k}) \left[\frac{3}{4} + 2C_2 + C_3 - 4C_1 \gamma_{1k} \right], \tag{32}$$

где I₁ – обменный интеграл для ближайших соседей. Структура полученной функции Грина соответствует результатам работы Шимахары и Такады [14].

6. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР И ДИНАМИЧЕСКАЯ МАГНИТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ ЛОКАЛИЗОВАННОЙ ПОДСИСТЕМЫ В СПИН-ФЕРМИОННОЙ МОДЕЛИ

Расчет магнитной восприимчивости локализованной подсистемы в спин-фермионной модели при учете влияния кислородных дырок проведем по формуле (22)

$$D_{\perp}(k, i\omega_m) = \{ D_{\rm L}(k, i\omega_m)^{-1} - \Pi(k, i\omega_m) \}^{-1},$$

используя два типа приближения. Первое приближение заключается в применении для функции Грина $D_{\rm L}$ выражения (30). Такая замена, как уже отмечалось, означает, что мы пренебрегаем в диаграммном разложении $\Sigma_{\rm L}$ всеми вкладами, пропорциональными параметру J. В этом случае вклад от кислородных дырок содержится только в поляризационном операторе $\Pi(k, i\omega_m)$. Второе приближение заключается в учете для поляризационного оператора только однопетлевых диаграмм (приближение хаотических фаз). В этом приближении для $\Pi(k, i\omega_m)$ получаем равенство

$$\Pi(k, i\omega_m) = \frac{T}{N} \sum_{q, \omega_n} J_{q, q+k}^2 G(q, i\omega_n) G(q+k, i\omega_m + i\omega_n),$$
(33)

где фермиевские функции Грина $G(q, i\omega_n)$, образующие фермионную петлю, определены соотношением

$$G(q, i\omega_n) = \int_0^\beta d\tau \, e^{i\omega_n \tau}(-) \langle T_\tau \tilde{\varphi}_{q\sigma}(\tau) \tilde{\varphi}^+_{q\sigma}(0) \rangle. \tag{34}$$

В формуле (34) φ -операторы записаны в представлении Гейзенберга, а ω_n – нечетная мацубаровская частота, $\omega_n = (2n+1)\pi T$.

Как отмечалось выше, для вычисления $\Pi(k, i\omega_m)$ в работе [20] вместо полных фермиевских функций Грина $G(q, i\omega_n)$ было предложено использовать затравочные фермиевские пропагаторы $G^{(0)}(q, i\omega_n) = (i\omega_n - \varepsilon_q)^{-1}$. В этом случае спин-поляронный характер фермиевских квазичастиц, очевидно, не учитывается.

В настоящей работе для вычисления функции Грина $G(q, i\omega_n)$ мы воспользуемся проекционной техникой Цванцига–Мори [10]–[12], позволяющей описать формирование спиновых поляронов с использованием спин-фермионной модели. В рамках этой техники вводится такой набор базисных операторов, который является достаточным для удовлетворительного описания динамики системы. Для операторов базиса выписываются уравнения движения, которые затем проецируются на выбранный базис.

В качестве первого базисного оператора выберем оператор φ_k . Уравнение движения для φ_k имеет вид

$$i\frac{d\varphi_{k\sigma}}{dt} = [\varphi_{k\sigma}, \hat{\mathscr{H}}] = \xi_k \varphi_{k\sigma} + J\nu_k L_{k\sigma}, \qquad (35)$$

где

$$L_{k\sigma} = \frac{1}{N} \sum_{f,q,\beta} e^{if(q-k)} \nu_q(\vec{S}_f \vec{\sigma}_{\sigma\beta}) \varphi_{q\beta}.$$
 (36)

Оператор $L_{k\sigma}$ учитывает связь между спиновыми и зарядовыми степенями свободы и отвечает за формирование в системе спинового полярона. В качестве второго базисного оператора возьмем оператор $L_{k\sigma}$ и этим ограничимся.

Для удобства введем обозначения $A_{1k} = \varphi_k$ и $A_{2k} = L_k$. Тогда разложение уравнений движения по базису операторов $\{A_{1k}; A_{2k}\}$ записывается в виде $i dA_{jk\sigma}/dt = [A_{jk\sigma}, \hat{\mathscr{H}}] = \sum_l R_{jl} A_{lk\sigma}$. При этом для матрицы \hat{R} можно написать равенство $\hat{R} = \hat{F}\hat{K}^{-1}$, где элементы матриц \hat{F} и \hat{K} определены соотношениями

$$F_{ij} = \langle \{ [A_{ik\sigma}, \hat{\mathscr{H}}], A_{jk\sigma}^+ \} \rangle, \qquad K_{ij} = \langle \{ A_{ik\sigma}, A_{jk\sigma}^+ \} \rangle.$$

С учетом введенных обозначений систему уравнений движения для запаздывающих функций Грина $\mathcal{G}_{ij}(k,\omega) = \langle \langle A_{ik} | A^+_{jk} \rangle \rangle_{\omega}$ можно представить в виде

$$\hat{\mathcal{G}} = (\omega - \widehat{F}\widehat{K}^{-1})^{-1}\widehat{K}.$$
(37)

Вычисляя матричные элементы K_{ij} и F_{ij} , получаем формулы

$$K_{11} = 1, \qquad K_{12} = K_{21} = 0, \qquad K_{22} \equiv K = \frac{3}{4} - C_1 \gamma_{1k},$$

$$F_{11} = \xi_k, \qquad F_{12} = F_{21} = J\nu_k K,$$

$$F_{22} \equiv \xi_L K = (\varepsilon_p - \mu + 4\tau) K + \tau \left(-\frac{9}{8} + C_2 \gamma_{2k} + \frac{C_3 \gamma_{3k}}{2} \right) - \frac{3J}{4} + J C_1 \left(2\gamma_{1k} + \frac{1}{4} \right) - I C_1 (4 + \gamma_{1k}),$$
(38)

где $\gamma_{2k} = \cos k_x \cos k_y, \ \gamma_{3k} = (\cos 2k_x + \cos 2k_y)/2.$

Выражения для двух ветвей поляронного спектра ε_k^{\pm} определяются из условия равенства нулю детерминанта det $|\omega - \hat{F}\hat{K}^{-1}|$ и имеют вид

$$\varepsilon_k^{\pm} = \frac{\xi_k + \xi_{\rm L}(k)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\xi_k - \xi_{\rm L}(k))^2 + 4J^2 \nu_k^2 K(k)}.$$
(39)

Заметим, что нижняя ветвь ε_k^- этого спектра совпадает со спин-поляронным спектром гамильтониана (1), рассчитанным в базисе $\{c_{f+a_x}; c_{f+a_y}; 1/2\sum_{\delta}(\vec{S}_f\vec{\sigma})c_{f+\delta}\}$ трех операторов в работе [31].

Решая систему уравнений (37) относительно функции Грина $\mathcal{G}_{11}(k,\omega)$, находим, что

$$\mathcal{G}_{11}(k,\omega) = \frac{\omega - \xi_{\rm L}(k)}{(\omega - \varepsilon_k^+)(\omega - \varepsilon_k^-)}.$$
(40)

Замена частоты ω на нечетную мацубаровскую частоту $i\omega_n$ преобразует запаздывающую функцию Грина $\mathcal{G}_{11}(k,\omega)$ в мацубаровскую функцию Грина $\mathcal{G}_{\varphi}(k,i\omega_n)$. Подставляя найденную таким способом функцию $\mathcal{G}_{\varphi}(k,i\omega_n)$ в выражение для поляризационного оператора (33), получаем выражение

$$\Pi(k,i\omega_m) = \frac{T}{N} \sum_{q,\omega_n} J_{q,q+k}^2 \frac{i\omega_n - \xi_{\rm L}(q)}{(i\omega_n - \varepsilon_q^-)(i\omega_n - \varepsilon_q^+)} \times \frac{i\omega_{n+m} - \xi_{\rm L}(q+k)}{(i\omega_{n+m} - \varepsilon_{q+k}^-)(i\omega_{n+m} - \varepsilon_{q+k}^+)}.$$
(41)

После вычисления суммы по мацубаровской частоте ω_n поляризационный оператор принимает вид

$$\Pi(k,i\omega_m) = \frac{T}{N} \sum_{q} J_{q,q+k}^2 \bigg\{ f(\varepsilon_q^-) \frac{\varepsilon_q^- - \xi_{\rm L}(q)}{(\varepsilon_q^- - \varepsilon_q^+)} \times \frac{\varepsilon_q^- + i\omega_m - \xi_{\rm L}(q+k)}{(\varepsilon_q^- - \varepsilon_{q+k}^- + i\omega_m)(\varepsilon_q^- - \varepsilon_{q+k}^+ + i\omega_m)} + f(\varepsilon_{q+k}^-) \frac{\varepsilon_{q+k}^- - \xi_{\rm L}(q+k)}{(\varepsilon_{q+k}^- - \varepsilon_{q+k}^+)} \times \frac{\varepsilon_{q+k}^- - i\omega_m - \xi_{\rm L}(k)}{(\varepsilon_{q+k}^- - \varepsilon_q^- - i\omega_m)(\varepsilon_{q+k}^- - \varepsilon_q^+ - i\omega_m)} \bigg\},$$

$$(42)$$

где $f(\varepsilon) = (e^{\varepsilon/T} + 1)^{-1}$ – функция распределения Ферми–Дирака. При получении последнего выражения были отброшены слагаемые, содержащие функции распределения квазичастиц по верхней зоне с дисперсией ε_q^+ , поскольку в интересующей нас области низких концентраций носителей тока химический потенциал μ всегда лежит в нижней спин-поляронной зоне.

Объединяя формулы (22) и (30), после аналитического продолжения $(i\omega_m \rightarrow \omega + i\delta)$ получаем окончательное выражение для динамической магнитной восприимчивости:

$$\chi(k,\omega) = \frac{\frac{1}{3N} \sum_{q} C_q(I_q - I_{k-q})}{\omega^2 - \Omega_k^2 + \frac{1}{3N} \sum_{q} C_q(I_q - I_{k-q}) \Pi(k, i\omega_m \to \omega + i\delta)},$$
(43)

где спектр парамагнонных возбуждений Ω_k определяется формулой (31), а поляризационный оператор $\Pi(k, i\omega_m)$ – формулой (42).

Видно, что в отсутствие легирования поляризационный оператор равен нулю и выражением (43) описывается восприимчивость локализованной спиновой подсистемы. Эта восприимчивость соответствует сферически-симметричной теории Шимахары–Такады [14]. Добавление в систему носителей тока приводит к затуханию, обусловленному мнимой частью поляризационного оператора $\Pi(k, \omega)$. По мере увеличения концентрации носителей тока затухание, очевидно, должно усиливаться, что в конце концов должно полностью разрушить ближний магнитный порядок.

Выражение (43) для динамической магнитной восприимчивости в спин-фермионной модели, учитывающее коллективизированную подсистему в приближении хаотических фаз, по своей структуре соответствует выражениям для восприимчивости, полученным другими авторами [2]–[9], [13]. Несмотря на различие используемых моделей и применяемых теоретических подходов, конечную формулу для динамической магнитной восприимчивости во всех цитированных работах можно представить в едином виде $\chi(k,\omega) = P(k,\omega)/(\omega^2 - \omega_k^2 - \Sigma(k,\omega))$. Такой же вид имеет и полученная в настоящей работе формула (43). Однако принципиально новым является то, что поляризационный оператор вычислен при учете спин-поляронной природы квазичастиц.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение диаграммной техники для спиновых операторов и обычной фейнмановской техники оказалось эффективным при изучении систем с сильной связью между локализованными спинами и коллективизированными фермионами. В данной работе это продемонстрировано для спин-фермионной модели, в которой пространственная разнесенность центров Ванье спиновой и фермиевской подсистем, а также наличие p_x - и p_y -орбиталей кислородных дырок в одной элементарной ячейке играют принципиальную роль в формировании нетривиальных свойств нормальной и сверхпроводящей фаз оксидов меди.

Полученное точное представление для поперечной спиновой функции Грина $D_{\perp}(k, i\omega_m)$ через массовый оператор Ларкина $\Sigma_{\rm L}(k, i\omega_m)$, силовой $P(k, i\omega_m)$ и поляризационный $\Pi(k, i\omega_m)$ операторы позволило в удобном виде проводить вычисления по теории возмущений, используя ее диаграммную форму.

Применение полученного представления с последующим вычислением $\Sigma_{\rm L}(k, i\omega_m)$ и $P(k, i\omega_m)$ в однопетлевом приближении для гейзенберговской системы спинов, находящейся в состоянии квантовой спиновой жидкости, позволило простым путем получить спиновую функцию $D_{\rm L}(k, i\omega_m)$ и установить соответствие с известными результатами. Поскольку в спин-жидкостном состоянии дальний магнитный порядок отсутствует, а сохраняется только ближний порядок, определяемый спиновыми корреляционными функциями, то спиновые корреляторы должны определяться самосогласованным образом. В этой связи представляется важным, что полученное выражение для $D_{\rm L}(k, i\omega_m)$ обладает большей общностью и позволяет развивать самосогласованное борновское приближение, а также учитывать эффекты запаздывания.

Появление при легировании кислородных дырок открывает дополнительный канал воздействия на спин-жидкостное состояние через механизм спин-фермионной связи. Это инициирует появление новых диаграмм для массового оператора Ларкина $\Sigma_{\rm L}(k, i\omega_m)$ и силового оператора $P(k, i\omega_m)$. Однако наибольший эффект связан с появлением поляризационного оператора $\Pi(k, i\omega_m)$. Как известно, простейшее приближение для него приводит к выражению, содержащему величины, зависящие от энергетического спектра фермионов.

В настоящее время установлено [32], [33], что в спин-фермионной модели из-за большой величины константы связи между локализованными спинами и кислородными дырками происходит формирование отщепленной спин-поляронной зоны фермиевских квазичастиц. Ансамбль этих квазичастиц формирует необычные свойства нормальной фазы, а также инициирует особенности куперовской неустойчивости оксидов меди [31], [34]. Поэтому корректное решение задачи о влиянии кислородных дырок на свойства спин-жидкостной фазы подсистемы локализованных спинов предполагает, что поляризационный оператор следует выразить через характеристики спин-поляронных квазичастиц. Решение такой задачи составляет один из результатов данной работы. В совокупности с полученным выражением для спиновой функции Грина гейзенберговской системы $D_L(k, i\omega_m)$ это дает ответ на поставленную задачу о нахождении в однопетлевом приближении поперечной спиновой функции Грина $D_{\perp}(k, i\omega_m)$ и динамической магнитной восприимчивости локализованной подсистемы.

Список литературы

- J. M. Tranquada, "Neutron scattering studies of antiferromagnetic correlations in cuprates", Handbook of High-Temperature Superconductivity. Theory and Experiment, eds. J. R. Schrieffer, J. S. Brooks, Springer, New-York, 2007, 257–298.
- [2] H. Shimahara, S. Takada, "Fragility of the antiferromagnetic long-range-order and spin correlation in the two-dimensional t-J model", J. Phys. Soc. Japan, 61:3 (1992), 989–997.

- [3] A. Sherman, M. Schreiber, "Two-dimensional t-J model at moderate doping", Eur. Phys. J. B, 32:2 (2003), 203-214, arXiv: cond-mat/0302356.
- [4] I. Sega, P. Prelovšek, J. Bonča, "Magnetic fluctuations and resonant peak in cuprates: towards a microscopic theory", *Phys. Rev. B*, 68:5 (2003), 054524, 6 pp.
- [5] I. Larionov, "Spin dynamics in lightly doped $La_{2-x}Sr_xCuO_4$: relaxation function within the *t*-*J* model", *Phys. Rev. B*, **69**:21 (2004), 214525, 17 pp.
- [6] А. А. Владимиров, Д. Иле, Н. М. Плакида, "Динамическая спиновая восприимчивость в t-J-модели: метод функции памяти", ТМФ, 145:2 (2005), 240–255.
- [7] A. A. Vladimirov, D. Ihle, N. M. Plakida, "Dynamic spin susceptibility of superconducting cuprates: a microscopic theory of the magnetic resonance mode", *Phys. Rev. B*, 83:2 (2011), 024411, 13 pp.
- [8] M. V. Eremin, I. M. Shigapov, I. M. Eremin, "Dual features of magnetic susceptibility in superconducting cuprates: a comparison to inelastic neutron scattering", *Eur. Phys. J. B*, 85 (2012), 131.
- В. А. Москаленко, Н. М. Плакида, "Динамическая спиновая восприимчивость в модели Хаббарда", ТМФ, 113:1 (1997), 124–138.
- [10] R. Zwanzig, "Memory effects in irreversible thermodynamics", Phys. Rev., 124:4 (1961), 983–992.
- [11] H. Mori, "Transport, collective motion, and Brownian motion", Prog. Theor. Phys., 33:3 (1965), 423-455.
- [12] H. Mori, "A continued-fraction representation of the time-correlation functions", Progr. Theor. Phys., 34:3 (1965), 399–416.
- [13] А. В. Михеенков, А. Ф. Барабанов, "Спиновая восприимчивость купратов в рамках модели двумерного фрустрированного антиферромагнетика. Роль перенормировок спиновых флуктуаций для описания нейтронных экспериментов", ЖЭТФ, 132:2 (2007), 392–405.
- [14] H. Shimahara, S. Takada, "Green's function theory of the two-dimensional Heisenberg model-spin wave in short range order", J. Phys. Soc. Japan, 60:7 (1991), 2394–2405.
- [15] V. J. Emery, "Theory of high-T_c superconductivity in oxides", *Phys. Rev. Lett.*, 58:26 (1987), 2794–2797.
- [16] C. M. Varma, S. Schmitt-Rink, E. Abrahams, "Charge transfer excitations and superconductivity in 'ionic' metals", *Solid State Commun.*, 62:10 (1987), 681–685.
- [17] J. E. Hirsch, "Antiferromagnetism, localization, and pairing in a two-dimensional model for CuO₂", *Phys. Rev. Lett.*, **59**:2 (1987), 228–231.
- [18] А. А. Барабанов, Л. А. Максимов, Г. Уймин, "Об элементарных возбуждениях в плоскостях CuO₂", Письма в ЖЭТФ, 47:10 (1988), 532–535.
- [19] J. Zaanen, A. M. Oleś, "Canonical perturbation theory and the two-band model for high-T_c superconductors", Phys. Rev. B, 37:16 (1988), 9423–9438.
- [20] H. Shimahara, "Antiferromagnetic long-range-order and spin waves in the spin-fermion model on the CuO₂ lattice", J. Phys. Soc. Japan, 61:10 (1992), 3708.
- [21] Ю. А. Изюмов, Ф. А. Кассан-оглы, Ю. Н. Скрябин, Полевые методы в теории ферромагнетизма, Наука, М., 1974.
- [22] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, Методы квантовой теории поля в статистической физике, Физматгиз, М., 1962.
- [23] A. F. Barabanov, L. A. Maksimov, A. V. Mikheenkov, "Spin polaron in the cuprate superconductor: interpretation of the ARPES results", *Spectroscopy of High-T_c Superconductors*. *A Theoretical View*, ed. N. M. Plakida, CRC Press, Boca Raton, 2003.
- [24] A. F. Barabanov, R. O. Kuzian, L. A. Maksimov, "Spectral function of small spin polaron in two-dimensional spherically symmetric antiferromagnetic state", *Phys. Rev. B*, 55:7 (1997), 4015–4018.

- [25] В. В. Вальков, Д. М. Дзебисашвили, А. Ф. Барабанов, "Обобщенная модель решетки Кондо и ее спин-поляронная реализация проекционным методом для купратов", *ТМФ*, 191:2 (2017), 319–333.
- [26] Р.О. Зайцев, "Диаграммная техника и газовое приближение в модели Хаббарда", ЖЭТФ, 70:3 (1976), 1100–1111.
- [27] Р.О. Зайцев, Диаграммные методы в теории сверхпроводимости и ферромагнетизма, Едиториал УРСС, М., 2004.
- [28] В. Г. Барьяхтар, В. Н. Криворучко, Д. А. Яблонский, "Уравнение Дайсона для спиновых функций Грина", ТМФ, 56:1 (1983), 149–153.
- [29] В. Г. Барьяхтар, В. Н. Криворучко, Д. А. Яблонский, Функции Грина в теории магнетизма, Наукова думка, Киев, 1984.
- [30] J. Kondo, K. Yamaji, "Green's-function formalism of the one-dimensional Heisenberg spin system", Prog. Theor. Phys., 47:3 (1972), 807–818.
- [31] V. V. Val'kov, D. M. Dzebisashvili, A. F. Barabanov, "d-Wave pairing in an ensemble of spin polaron quasiparticles in the spin-fermion model of the electronic structure of the CuO₂ plane", *Phys. Lett. A*, **379**:5 (2015), 421–426.
- [32] А. А. Барабанов, В. А. Березовский, Э. Жасинас, Л. А. Максимов, "О происхождении растянутой седловой особенности в спектре дырочных возбуждений в плоскости CuO₂", *ЖЭТФ*, **110**:4 (1996), 1480–1496.
- [33] R. O. Kuzian, R. Hayn, A. F. Barabanov, L. A. Maksimov, "Spin-polaron damping in the spin-fermion model for cuprate superconductors", *Phys. Rev. B*, 58:10 (1998), 6194–6207.
- [34] В. В. Вальков, Д. М. Дзебисашвили, М. М. Коровушкин, А. Ф. Барабанов, "Устойчивость сверхпроводящей d_{x²-y²}-фазы ВТСП относительно межузельного кулоновского отталкивания кислородных дырок", Письма в ЖЭТФ, 103:6 (2016), 433–437.

Поступила в редакцию 21.05.2015, после доработки 31.10.2016