

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
НА СУБВОЛНОВОЙ РЕШЕТКЕ КВАДРАТНЫХ
ПОЛОСКОВЫХ ПРОВОДНИКОВ

© 2019 г. Б. А. Беляев^{1,2,*}, В. В. Тюрнев^{1,2}, Н. В. Волков^{1,3}

¹Институт физики им. Л.В. Киренского ФИЦ КНЦ СО РАН,
Российская Федерация, 660036 Красноярск, Академгородок, 50/38

²Сибирский федеральный университет,
Российская Федерация, 660041 Красноярск, просп. Свободный, 79

³Сибирский государственный университет науки и технологий им. академика М.Ф. Решетнева,
Российская Федерация, 660014 Красноярск, просп. им. Газеты “Красноярский рабочий”, 31

*E-mail: belyaev@iph.krasn.ru

Поступила в редакцию 13.06.2018 г.

После доработки 05.10.2018 г.

Принята к публикации 05.10.2018 г.

Получены простые формулы для расчета матрицы рассеяния плоской электромагнитной волны, падающей нормально на безграничную 2D-решетку, образованную квадратными полосковыми проводниками и расположенную на границе раздела двух диэлектрических сред. Впервые учтено вихревое поведение электрического поля решетки, что позволило многократно уменьшить погрешность вычислений на высоких частотах. Это подтверждается хорошим согласием рассчитанных по формулам амплитудно-частотных характеристик структуры с характеристиками, полученными численным электродинамическим анализом 3D-модели, когда период решетки меньше половины длины волны.

DOI: 10.1134/S0033849419070039

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, многослойные тонкопленочные диэлектрические зеркала широко применяются в оптике благодаря их высокому коэффициенту отражения. При этом возможность варьирования отражательной способности таких зеркал изменением контраста диэлектрической проницаемости и количеством слоев [1] позволяет использовать их в полосно-пропускающих фильтрах (ППФ) в качестве элементов связи между резонаторами, формирующими полосу пропускания, а также элементов связи оконечных резонаторов с окружающим пространством [2]. Однако такие фильтры сложны в изготовлении и, как правило, имеют большую неравномерность амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) в полосе пропускания, когда порядок фильтра выше второго. Известные методы уменьшения неравномерности АЧХ в полосе пропускания многослойных диэлектрических фильтров [3–5] не снижают сложности их изготовления. Поэтому поиск и исследование новых подходов конструирования ППФ на слоистых структурах является важной и актуальной задачей.

В настоящее время для создания фильтров многими исследователями используются кон-

струкции на основе диэлектрических слоев, на поверхности которых сформированы резонансные 2D структуры из металлических проводников, так называемые частотно-селективные поверхности. Такие конструкции служат ППФ и полосно-заграждающими фильтрами в диапазонах от микронных [6–8] до дециметровых [9–11] длин волн. Отметим важную особенность частотно-селективных поверхностей, которая заключается в том, что их частотные характеристики зависят от угла падения и поляризации электромагнитной волны [12].

Первые частотно-селективные поверхности представляли собой плоские двумерно-периодические металлические решетки, элементарные ячейки которых выполнялись как в виде прямоугольных отверстий в тонком металлическом экране (сеток), так и в виде тонких плоских прямоугольных проводников, расположенных на диэлектрической подложке [13]. При этом размер элементарной ячейки решетки равен приблизительно длине волны на резонансной частоте. Каскадирование нескольких таких металлических резонансных решеток позволяет создавать многослойные структуры, АЧХ которых соответствуют ППФ высокого порядка [12]. Однако плоские ме-

таллические решетки, содержащие резонансные элементарные ячейки, обладают низкой собственной добротностью из-за высоких омических потерь в проводниках.

Поэтому более перспективными являются конструкции частотно-селективных поверхностей, в которых, как и в традиционных оптических фильтрах [12], резонаторами являются полуволновые диэлектрические слои. Однако вместо многослойных диэлектрических зеркал в них используются нерезонансные субволновые решетки полосковых проводников, расположенные на границах раздела диэлектрических слоев-резонаторов. Такими решетками, в частности, могут служить 1D-решетки из ленточных полосковых проводников с периодом много меньше длины волны, имеющих параллельное направление осей симметрии на всех слоях [14, 15]. Электродинамический анализ таких ленточных полосковых структур представлен в работах [16, 17]. Фильтры на диэлектрических слоях, зеркала которых представляют собой ленточные полосковые структуры с параллельными осями, обладают частотно-селективными свойствами только для электромагнитных волн с линейной поляризацией и направлением вектора электрического поля вдоль полосковых проводников. Волны ортогональной поляризации такие фильтры пропускают с малыми потерями в диапазоне частот от нуля и выше.

Резонаторы в конструкциях рассматриваемых фильтров могут состоять не из одного, а из двух диэлектрических слоев, разделенных также субволновой 1D-решеткой полосковых проводников, но с ортогональной осью по отношению к 1D-решеткам на границах двухслойных резонаторов [18]. Такой фильтр одновременно является поляризатором. В заданной полосе частот он пропускает волны линейной поляризации с направлением вектора электрического поля вдоль наружных полосковых проводников, но практически не пропускает волны ортогональной поляризации [18].

Фильтр, в котором в качестве зеркал на границах диэлектрических слоев-резонаторов использованы субволновые металлические сетки с квадратными окнами, уже не проявляет поляризационных свойств. В работе [19] исследован экспериментальный образец фильтра третьего порядка с сетками между диэлектрическими слоями, обладающий не только высокими характеристиками, но и хорошим согласием АЧХ измеренных и АЧХ рассчитанных численным электродинамическим анализом 3D-модели устройства. Однако программы электродинамического анализа таких сложных конструкций требуют большого машинного времени, поэтому параметрический синтез фильтра проводился скоростным матричным методом с использованием формул, полученных в работе [20], которые достаточно хорошо описывают отражательные свойства металлических сеток. Найденные в результате синтеза конструктивные

параметры были использованы в качестве начальных параметров при параметрическом синтезе с использованием электродинамического анализа 3D-модели.

Для решеток из квадратных полосковых проводников, которые также могут служить зеркалами в фильтрах на диэлектрических слоях-резонаторах, подобные формулы, описывающие их отражательные свойства, до сих пор не были получены. В расчетах решетки из полосковых проводников обычно используют формулы для матрицы рассеяния электромагнитных волн линейной поляризации на соответствующей решетке параллельных ленточных проводников [13, 21] с тем же периодом и шириной, когда вектор электрического поля ортогонален направлению проводников. Очевидно, что при таком подходе элементы матрицы рассеяния описывают только емкостные взаимодействия полосковых проводников, но полностью игнорируются индуктивные взаимодействия, относительный вклад которых растет пропорционально квадрату частоты.

В данной работе выполнен расчет матрицы рассеяния электромагнитных волн, падающих ортогонально на плоскую 2D-решетку квадратных полосковых проводников, расположенных на границе раздела двух диэлектрических сред. При расчете используется метод решений уравнений Максвелла для определенных выделенных областей рассматриваемой структуры, который был применен в работе [20]. В этом расчете наряду с потенциальной частью электрического поля рассматривается и вихревая часть, что существенно повышает точность расчета в высокочастотной области.

1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ РЕШЕТКИ ИЗ КВАДРАТНЫХ ПОЛОСКОВЫХ ПРОВОДНИКОВ

Рассчитаем электромагнитные поля вблизи решетки квадратных полосковых проводников на границе раздела двух диэлектрических сред (рис. 1). Поля возбуждаются нормально падающими на решетку с обеих сторон линейно поляризованными волнами с компонентами

$$E_x^{\text{пад}} = \begin{cases} E_1^{\text{пад}} \exp(ik_1z - i\omega t), & \text{если } z < 0, \\ E_2^{\text{пад}} \exp(-ik_2z - i\omega t), & \text{если } z > 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$H_y^{\text{пад}} = \begin{cases} Z_1^{-1} E_1^{\text{пад}} \exp(ik_1z - i\omega t), & \text{если } z < 0, \\ -Z_2^{-1} E_2^{\text{пад}} \exp(-ik_2z - i\omega t), & \text{если } z > 0, \end{cases}$$

где

$$k_{1,2} = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_{1,2}} \quad (2)$$

— волновые числа, а

$$Z_{1,2} = Z_0 / \sqrt{\epsilon_{1,2}}, \quad Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} \quad (3)$$



Рис. 1. Решетка полосковых проводников; I, II, III и IV – рассматриваемые участки ее элементарной ячейки.

– характеристические сопротивления, нижние индексы 1 и 2 указывают на стороны решетки, соприкасающиеся соответственно со средой с диэлектрической проницаемостью ε_1 и со средой с диэлектрической проницаемостью ε_2 . Начало отсчета координаты z выбрано на поверхности решетки.

Так как компоненты поля падающих волн (1) однородны в плоскости решетки, то возбуждаемые ими компоненты поля решетки $\vec{E}^{\text{реш}}$ и $\vec{H}^{\text{реш}}$ будут в общем случае периодическими функциями координат x и y с периодом, равным периоду решетки T . Это значит, что любая из компонент электромагнитного поля может быть разложена в двойной ряд Фурье по аргументам x и y . Учитывая симметрию компонент полей относительно плоскостей симметрии решетки, можно записать следующие разложения:

$$\begin{aligned}
 E_x^{\text{реш}}(x, y, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} E_x^{nm}(z) \cos(k_n x) \cos(k_m y), \\
 H_y^{\text{реш}}(x, y, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} H_y^{nm}(z) \cos(k_n x) \cos(k_m y), \\
 E_z^{\text{реш}}(x, y, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} E_z^{nm}(z) \sin(k_n x) \cos(k_m y), \\
 H_z^{\text{реш}}(x, y, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} H_z^{nm}(z) \cos(k_n x) \sin(k_m y),
 \end{aligned} \quad (4)$$

где $k_n = 2\pi n/T$, $k_m = 2\pi m/T$. Потребуем, чтобы каждый член двойного ряда Фурье в выражениях (4) удовлетворял уравнениям Гельмгольца

$$(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 + k_{1,2}^2) \vec{E}^{\text{реш}} = 0, \quad (5)$$

$$(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 + k_{1,2}^2) \vec{H}^{\text{реш}} = 0. \quad (6)$$

В этом случае формулы (4) принимают вид: при $z < 0$ –

$$\begin{aligned}
 E_x^{\text{реш}} &= E_x^{00} \exp(ik_1 |z|) + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E_x^{nm} \cos(k_n x) \cos(k_m y) \exp(-k_1^{nm} |z|), \\
 H_y^{\text{реш}} &= H_y^{00} \exp(ik_1 |z|) + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} H_y^{nm} \cos(k_n x) \cos(k_m y) \exp(-k_1^{nm} |z|), \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$E_z^{\text{реш}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E_z^{nm} \sin(k_n x) \cos(k_m y) \exp(-k_1^{nm} |z|),$$

$$H_z^{\text{реш}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} H_z^{nm} \cos(k_n x) \sin(k_m y) \exp(-k_1^{nm} |z|)$$

и при $z > 0$ –

$$\begin{aligned}
 E_x^{\text{реш}} &= E_x^{00} \exp(ik_2 |z|) + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E_x^{nm} \cos(k_n x) \cos(k_m y) \exp(-k_2^{nm} |z|), \\
 H_y^{\text{реш}} &= H_y^{00} \exp(ik_2 |z|) + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} H_y^{nm} \cos(k_n x) \cos(k_m y) \exp(-k_2^{nm} |z|), \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$E_z^{\text{реш}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E_z^{nm} \sin(k_n x) \cos(k_m y) \exp(-k_2^{nm} |z|),$$

$$H_z^{\text{реш}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} H_z^{nm} \cos(k_n x) \sin(k_m y) \exp(-k_2^{nm} |z|),$$

где

$$k_{1,2}^{nm} = \sqrt{k_n^2 + k_m^2 - k_{1,2}^2}. \quad (9)$$

Здесь мы учли, что компоненты поля $E_x^{\text{реш}}$ и $H_z^{\text{реш}}$ непрерывны при $z = 0$. Формулы (7) и (8) можно рассматривать как разложение компонент поля решетки $\vec{E}^{\text{реш}}$, $\vec{H}^{\text{реш}}$ в ряд по всем модам, отвечающим симметрии решетки и поляризации падающих волн.

Будем предполагать, что период решетки T много меньше длины волны, т.е. $k_{1,2} T \ll 2\pi$. Это позволяет нам выполнять электродинамический расчет в квазистатическом приближении и вме-

сто уравнений Гельмгольца (5) и (6) решать уравнения Лапласа

$$(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2) \bar{E}^{\text{реш}} = 0, \quad (10)$$

$$(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2) \bar{H}^{\text{реш}} = 0. \quad (11)$$

В этом случае в разложениях (7) и (8) все члены рядов Фурье, кроме основных членов с $n = m = 0$, быстро убывают с ростом $|z|$. Поэтому формулы (7) и (8) в дальней зоне при $k_{1,2}|z| \gg 1$ упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} E_x^{\text{реш}}(x, y, z) &= E_x^{00} \exp(ik_1|z|) \\ H_y^{\text{реш}}(x, y, z) &= \begin{cases} H_{1y}^{00} \exp(ik_1|z|) & \text{при } z < 0 \\ H_{2y}^{00} \exp(ik_2|z|) & \text{при } z > 0, \end{cases} \quad (12) \\ E_z^{\text{реш}}(x, y, z) &= 0, \\ H_z^{\text{реш}}(x, y, z) &= 0, \end{aligned}$$

где амплитуды компонент поля выражаются интегралами

$$E_x^{00} = \frac{1}{T^2} \int_{x=-w/2}^{T-w/2} \int_{y=-w/2}^{T-w/2} E_x^{\text{реш}}(x, y, 0) dx dy, \quad (13)$$

$$H_{1y}^{00} = \frac{1}{T^2} \int_{x=-w/2}^{T-w/2} \int_{y=-w/2}^{T-w/2} H_y^{\text{реш}}(x, y, 0) dx dy \quad \text{при } z < 0, \quad (14)$$

$$H_{2y}^{00} = \frac{1}{T^2} \int_{x=-w/2}^{T-w/2} \int_{y=-w/2}^{T-w/2} H_y^{\text{реш}}(x, y, 0) dx dy \quad \text{при } z > 0.$$

Здесь w – размер стороны квадратного полоскового проводника в решетке. Очевидно, найдя величины E_x^{00} , H_{1y}^{00} и H_{2y}^{00} , мы сможем вычислить элементы искомой матрицы рассеяния \mathbf{S} для дальней зоны рассматриваемой решетки.

Для нахождения амплитуд E_x^{00} , H_{1y}^{00} и H_{2y}^{00} по формулам (13) и (14) нам достаточно получить решения уравнений Максвелла только вблизи поверхности проводников решетки. Запишем граничные условия, которым эти решения должны удовлетворять. Для этого поверхность элементарной ячейки решетки удобно разбить на четыре прямоугольные области I–IV (рис. 1). Тогда в области I, занимающей четверть площади полоскового проводника, граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} E_x^{\text{реш}}(x, y, 0) &= 0, \quad E_y^{\text{реш}}(x, y, 0) = 0, \\ H_z^{\text{реш}}(x, y, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

а в областях II, III и IV, свободных от металлизации, кроме условий непрерывности никаких других ограничений на компоненты электромагнитного поля нет.

Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в приповерхностной области решетки име-

ют два решения, удовлетворяющие граничным условиям (15). Первое квазистатическое решение тривиально. В статическом пределе оно имеет единственную магнитную компоненту H_0 , не зависящую от координат и направленную вдоль вектора магнитного поля падающей волны, т.е. вдоль оси y . Электрическое поле $\bar{E}^{\text{реш}}$ у первого решения существует только в динамике, оно является вихревым и обращается в нуль на всей поверхности решетки.

Второе квазистатическое решение имеет в статическом пределе только компоненты электрического поля $\bar{E}^{\text{реш}}$. Оно содержит лишь потенциальную часть $\bar{E}^{\text{пот}}$. Магнитное поле $\bar{H}^{\text{реш}}$ у второго решения появляется только в динамике. Оно является вихревым, так как связано с электрическим полем $\bar{E}^{\text{реш}}$ уравнением Максвелла

$$\text{rot } \bar{H}_{1,2}^{\text{реш}} = -i\omega\epsilon_0\epsilon_{1,2}\bar{E}_{1,2}^{\text{реш}}. \quad (16)$$

Поэтому в дальнейшем магнитное поле второго решения будем обозначать как $\bar{H}_{1,2}^{\text{вих}}$. Электрическое же поле в этом случае следует представить суммой

$$\bar{E}^{\text{реш}} = \bar{E}^{\text{пот}} + \bar{E}^{\text{вих}}, \quad (17)$$

где $\bar{E}^{\text{пот}}$ – потенциальная часть электрического поля, а $\bar{E}^{\text{вих}}$ – вихревая часть. Потенциальную часть электрического поля удобно описывать скалярным потенциалом ϕ , используя уравнение

$$\bar{E}^{\text{пот}} = -\text{grad } \phi. \quad (18)$$

Поверхность каждого полоскового проводника вместе с пересекающей его плоскостью симметрии, ортогональной оси x , эквипотенциальна. Это следует из граничных условий (15) и из симметрии задачи. Полагая, что разность потенциалов ϕ между соседними проводниками равна U , по формуле (13) находим величину вклада в амплитуду E_x^{00} от потенциальной части электрического поля $E_x^{\text{пот}}$

$$\langle E_x^{\text{пот}} \rangle_{TT} = U/T. \quad (19)$$

Здесь нижний индекс TT указывает на то, что усреднение $E_x^{\text{пот}}$ произведено по площади элементарной ячейки решетки с периодом T .

Потенциальная часть $\bar{E}^{\text{пот}}$ электрического поля связана с поверхностными зарядами ρ на полосковых проводниках граничным условием

$$\epsilon_0\epsilon_2 E_{2z}^{\text{пот}} - \epsilon_0\epsilon_1 E_{1z}^{\text{пот}} = \rho. \quad (20)$$

В свою очередь, заряды ρ связаны с поверхностными токами \vec{J} законом сохранения

$$\operatorname{div} \vec{J} = i\omega\rho, \quad (21)$$

а сами поверхностные токи \vec{J} связаны с вихревым магнитным полем $\vec{H}^{\text{вих}}$ на обеих сторонах решетки граничным условием

$$H_{2x}^{\text{вих}} - H_{1x}^{\text{вих}} = J_y, \quad H_{2y}^{\text{вих}} - H_{1y}^{\text{вих}} = -J_x. \quad (22)$$

Так как магнитное поле $\vec{H}^{\text{вих}}$ является вихревым, то его тангенциальные компоненты меняют знак при переходе с одной стороны полоскового проводника на другую сторону. Поэтому граничные условия (22) можно переписать в виде

$$2H_{2x}^{\text{вих}} = J_y, \quad 2H_{2y}^{\text{вих}} = -J_x. \quad (23)$$

Найдем амплитуду магнитного поля H_{2y}^{00} . Из формул (14) и (23) получаем

$$H_{2y}^{00} = -\frac{1}{2T} \int_{x=-w/2}^{T-w/2} \langle J_x(x) \rangle_T dx, \quad (24)$$

где

$$\langle J_x(x) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{y=-w/2}^{T-w/2} J_x(x, y) dy \quad (25)$$

– усредненная по координате y функция плотности продольного поверхностного тока. Эта функция, согласно уравнению (21), связана с усредненной функцией плотности поверхностных зарядов

$$\langle \rho(x) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{y=-w/2}^{T-w/2} \rho(x, y) dy \quad (26)$$

равенством

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle J_x(x) \rangle_T = i\omega \langle \rho(x) \rangle_T. \quad (27)$$

Здесь было учтено, что усредненная функция плотности поперечного тока равна $\langle J_y(x) \rangle_T = 0$. При расчете усредненной функции плотности зарядов $\langle \rho(x) \rangle_T$ следует учитывать то обстоятельство, что поверхностные электрические заряды $\rho(x, y)$ концентрируются не только вблизи края полоскового проводника, обращенного к области II, но и вблизи другого края, обращенного к области IV. Те заряды, которые концентрируются на краю проводника, обращенном к области IV, порождают компоненту $E_x^{\text{пот}}$ не только в областях I и II, но и в областях IV и III. Именно поэтому усреднение $\rho(x, y)$ по координате y следует производить в областях I и IV, т.е. по всему периоду T .

Потенциал $\varphi(x, z)$, отвечающий усредненной функции $\langle \rho(x) \rangle_T$ и разности потенциалов U , выражается формулой

$$\varphi(x, z) = \frac{U}{\pi} \operatorname{Im} \operatorname{arch} \left(\cos \left(\pi \frac{x + iz}{T} \right) / \cos \left(\frac{\pi w}{2T} \right) \right). \quad (28)$$

Формула (28) является точным решением 2D-уравнения Лапласа для квазистатического потенциала решетки полосковых проводников [16]. Этот потенциал постоянен на поверхности решетки при $|x| < w/2$ и при $|x-T| < w/2$.

По формулам (18) и (28) находим нормальную компоненту потенциальной части электрического поля на верхней стороне решетки

$$\begin{aligned} \langle E_{2z}^{\text{пот}}(x, 0) \rangle_T &= \\ &= -\frac{U}{\pi} \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{arch} \left(\cos \left(\frac{\pi x}{T} \right) / \cos \left(\frac{\pi w}{2T} \right) \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Так как потенциал φ является четной функцией координаты z , то компонента $E_{1z}^{\text{пот}}$ на нижней стороне полоскового проводника отличается от компоненты $E_{2z}^{\text{пот}}$ только знаком. Тогда из формул (20) и (29) получаем

$$\begin{aligned} \langle \rho(x) \rangle_T &= -\epsilon_0 \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\pi} U \times \\ &\times \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{arch} \left(\cos \left(\frac{\pi x}{T} \right) / \cos \left(\frac{\pi w}{2T} \right) \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Отсюда по формуле (27) находим усредненный продольный ток

$$\begin{aligned} \langle J_x(x) \rangle_T &= -i\omega\epsilon_0 \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\pi} U \times \\ &\times \operatorname{Re} \operatorname{arch} \left(\cos \left(\frac{\pi x}{T} \right) / \cos \left(\frac{\pi w}{2T} \right) \right), \end{aligned} \quad (31)$$

а по формуле (23) – усредненное магнитное поле

$$\begin{aligned} \langle H_{2y}^{\text{вих}}(x, 0) \rangle_T &= \\ &= i\omega\epsilon_0 \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2\pi} U \operatorname{Re} \operatorname{arch} \left(\cos \left(\frac{\pi x}{T} \right) / \cos \left(\frac{\pi w}{2T} \right) \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Подставляя выражение (31) в интеграл (24), находим амплитуду магнитного поля

$$H_{2y}^{00} = i\omega\epsilon_0 \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2\pi} U \ln \left(\sec \left(\frac{\pi w}{2T} \right) \right), \quad (33)$$

где было учтено значение интеграла

$$\int_{\xi=-a}^a \operatorname{arch} \left(\frac{\cos \xi}{\cos a} \right) d\xi = \pi \ln(\sec a). \quad (34)$$

Для нахождения вклада вихревой части электрического поля $E_x^{\text{вих}}$ в среднее значение $\langle E_x^{\text{вих}} \rangle_{TT}$ необходимо знать компоненту магнитного поля

$H_z^{\text{ВВХ}}$, с которой $E_x^{\text{ВВХ}}$ связана уравнением Максвелла

$$(\text{rot } \vec{E}^{\text{ВВХ}})_z = i\omega\mu_0 H_z^{\text{ВВХ}}. \quad (35)$$

Для этого запишем формулы усреднения для тока $J_x(x, y)$ и магнитной компоненты $H_{2y}^{\text{ВВХ}}(x, y, z)$ по координате x :

$$\langle J_x(y) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{x=-w/2}^{T-w/2} J_x(x, y) dx, \quad (36)$$

$$\langle H_{2y}^{\text{ВВХ}}(y, z) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{x=-w/2}^{T-w/2} H_{2y}^{\text{ВВХ}}(x, y, z) dx. \quad (37)$$

Эти величины, согласно граничному условию (23), связаны на поверхности решетки равенством

$$\langle J_x(y) \rangle_T = -2 \langle H_{2y}^{\text{ВВХ}}(y, 0) \rangle_T. \quad (38)$$

Так как усредненная компонента $\langle H_{2y}^{\text{ВВХ}}(y, z) \rangle_T$ не зависит от координаты x , то решение 2D-уравнения Лапласа (11) для усредненных компонент может быть получено методом конформных отображений [16]. Это решение имеет вид

$$\langle H_{2y}^{\text{ВВХ}}(y, z) \rangle_T = i\omega\epsilon_0 \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2\pi^2} TU \times \ln \left(\sec \left(\frac{\pi w}{2T} \right) \text{Re} \frac{\partial}{\partial y} \arcsin \left(\frac{\sin \left(\pi \frac{y + iz}{T} \right)}{\sin \left(\frac{\pi w}{2T} \right)} \right) \right). \quad (39)$$

Оно отвечает значению амплитуды H_{2y}^{00} , выражаемому формулой (33). Сравнение формул (32) и (39) позволяет построить функцию

$$H_{2y}^{\text{ВВХ}}(x, y, 0) = i\omega\epsilon_0 \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2\pi^2} TU \times \text{Re arch} \left(\frac{\cos(\pi x/T)}{\cos(\pi w/2T)} \right) \text{Re} \frac{\partial}{\partial y} \arcsin \left(\frac{\sin(\pi y/T)}{\sin(\pi w/2T)} \right), \quad (40)$$

которая описывает зависимость компоненты $H_{2y}^{\text{ВВХ}}$ от координат x и y на всей поверхности решетки. Видно, что компонента $H_{2y}^{\text{ВВХ}}$ отлична от нуля только на поверхности полоскового проводника. Полученной компоненте $H_{2y}^{\text{ВВХ}}(x, y, 0)$, согласно граничному условию (23), соответствует продольный ток

$$J_x(x, y) = -i2\omega\epsilon_0 \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2\pi^2} TU \times \text{Re arch} \left(\frac{\cos(\pi x/T)}{\cos(\pi w/2T)} \right) \text{Re} \frac{\partial}{\partial y} \arcsin \left(\frac{\sin(\pi y/T)}{\sin(\pi w/2T)} \right). \quad (41)$$

Поперечный же ток $J_y(x, y)$ может быть рассчитан из закона сохранения заряда (21), но для этого необходимо знать кроме продольного тока $J_x(x, y)$ еще и плотность поверхностных зарядов $\rho(x, y)$. Поэтому неизвестную функцию $\rho(x, y)$ аппроксимируем функцией $\langle \rho(x) \rangle_w$, получаемой усреднением $\rho(x, y)$ по координате y . В отличие от функции $\langle \rho(x) \rangle_T$, заданной формулой (26), усреднение произведем не по периоду решетки T , а по ширине полоскового w . Из формулы (30) получаем

$$\langle \rho(x) \rangle_w = -\frac{T}{w} \epsilon_0 \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\pi} \times U \text{Re} \frac{\partial}{\partial x} \text{arch} \left(\cos \left(\frac{\pi x}{T} \right) / \cos \left(\frac{\pi w}{2T} \right) \right). \quad (42)$$

Подставляя формулы (41) и (42) в уравнение (21), находим поперечный ток

$$J_y(x, y) = i\omega\epsilon_0 \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\pi^2} TU \times \text{Re} \frac{\partial}{\partial x} \text{arch} \left(\frac{\cos(\pi x/T)}{\cos(\pi w/2T)} \right) \times \text{Re} \left[\arcsin \left(\frac{\sin(\pi y/T)}{\sin(\pi w/2T)} \right) - \frac{\pi y}{w} \right]. \quad (43)$$

Здесь константа интегрирования выбрана равной нулю для того, чтобы ток J_y обращался в нуль на краю полоскового проводника при $y = w/2$. Согласно граничному условию (23), току J_y соответствует компонента магнитного поля

$$H_{2x}^{\text{ВВХ}}(x, y, 0) = i\omega\epsilon_0 \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2\pi^2} TU \times \text{Re} \frac{\partial}{\partial x} \text{arch} \left(\frac{\cos(\pi x/T)}{\cos(\pi w/2T)} \right) \times \text{Re} \left[\arcsin \left(\frac{\sin(\pi y/T)}{\sin(\pi w/2T)} \right) - \frac{\pi y}{w} \right]. \quad (44)$$

Она отвечает условиям Мейкснера на ребре [22]

$$\begin{aligned} H_x|_{|x| \leq w/2, y=w/2-r} &\propto r^{1/2}, & H_x|_{x=w/2-r, |y| \leq w/2} &\propto r^{-1/2}, \\ H_y|_{|x| \leq w/2, y=w/2-r} &\propto r^{-1/2}, & H_y|_{x=w/2-r, |y| \leq w/2} &\propto r^{1/2}, \\ H_z|_{|x| \leq w/2, y=w/2-r} &\propto r^{-1/2}, \\ H_z|_{x=w/2-r, |y| \leq w/2} &\propto r^{-1/2} \quad (r \rightarrow 0). \end{aligned} \quad (45)$$

Видно, что две компоненты магнитного поля $H_{2x}^{\text{ВВХ}}$ и $H_z^{\text{ВВХ}}$ на краю полоскового проводника между областями I и II имеют сингулярность. Это значит, что вблизи этого края можно пренебречь третьей компонентой $H_{2y}^{\text{ВВХ}}$, а в уравнении Лапласа (11) пренебречь производными компонент $H_{2x}^{\text{ВВХ}}$ и $H_z^{\text{ВВХ}}$ по координате y по сравнению с про-

изводными этих же компонент по координате x . Тогда из формулы (44) следует, что компоненту $H_z^{\text{вих}}$ в области II можно аппроксимировать функцией

$$H_z^{\text{II}}(x, y, 0) = -i\omega\epsilon_0 \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2\pi^2} TU \times \\ \times \frac{\partial}{\partial x} \arccos \left(\frac{\cos(\pi x/T)}{\cos(\pi w/2T)} \right) \times \\ \times \left[\arcsin \left(\frac{\sin(\pi y/T)}{\sin(\pi w/2T)} \right) - \frac{\pi y}{w} \right]. \quad (46)$$

Очевидно, что такая аппроксимация $H_z^{\text{вих}}$ в области II правомерна только в случае, когда ширина этой области $(T-w)$ меньше ее высоты w . Но именно этот случай и является интересным с точки зрения практических применений решетки из полосковых проводников.

На другом краю проводника между областями I и IV, согласно условиям (45), сингулярность имеют уже компоненты $H_{2y}^{\text{вих}}$ и $H_z^{\text{вих}}$. Поэтому в области IV из формулы (40) и уравнения Максвелла

$$\text{div}(\mu_0 \vec{H}) = 0 \quad (47)$$

находим нормальную компоненту

$$H_z^{\text{IV}}(x, y, 0) = -i\omega\epsilon_0 \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2\pi^2} TU \times \\ \times \text{arch} \left(\frac{\cos(\pi x/T)}{\cos(\pi w/2T)} \right) \text{Im} \frac{\partial}{\partial y} \arcsin \left(\frac{\sin(\pi y/T)}{\sin(\pi w/2T)} \right). \quad (48)$$

Для нахождения вихревого поля $\vec{E}^{\text{вих}}$ в областях II, III и IV обратимся к уравнению Максвелла (35).

В области III, согласно формулам (40) и (44), отсутствуют магнитные компоненты $H_{2y}^{\text{вих}}$ и $H_{2x}^{\text{вих}}$, поэтому будет отсутствовать и третья компонента $H_z^{\text{вих}}$, связанная с первыми двумя компонентами уравнением (47). Следовательно, в области III вихревое электрическое поле равно $E_x^{\text{III}} = 0$.

В области II выполним интегрирование уравнения (35) по площади, ограниченной неравенствами $w/2 < x < T-w/2$ и $y' < y < w/2$. Используя теорему Стокса о роторе, получаем

$$\int_{x=w/2}^{T-w/2} E_x^{\text{II}}(x, y', 0) dx = \\ = i\omega\mu_0 \int_{x=w/2}^{T-w/2} \int_{y=y'}^{w/2} H_z^{\text{II}}(x, y, 0) dy dx, \quad (49)$$

где мы учли, что на краях проводников, т.е. при $x = w/2$ и $x = T-w/2$, компонента $E_y^{\text{II}} = 0$, а на границе областей II и III компонента $E_x^{\text{II}} = 0$. Уравне-

ние (49) после подстановки в него выражения (46) принимает вид

$$\int_{x=w/2}^{T-w/2} E_x^{\text{II}}(x, y, 0) dx = \\ = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2\pi^2} T^2 U \left[I \left(\frac{\pi y}{T}, \frac{\pi w}{2T} \right) + \pi^2 \frac{4y^2 - w^2}{8wT} \right], \quad (50)$$

где функция $I(\zeta, a)$ обозначает интеграл

$$I(\zeta, a) = \int_{\xi=\zeta}^a \arcsin \left(\frac{\sin \xi}{\sin a} \right) d\xi. \quad (51)$$

Для нахождения вклада $\langle E_x^{\text{II}} \rangle_{TT}$ в амплитуду E_x^{00} от компоненты $E_x^{\text{вих}}$ на участке II подставляем выражение (50) в формулу (13). После интегрирования имеем

$$\langle E_x^{\text{II}} \rangle_{TT} = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\pi^3} TU \left[X \left(\frac{\pi w}{2T} \right) - \frac{\pi^3 w^2}{24T^2} \right], \quad (52)$$

где функция $X(a)$ обозначает двойной интеграл

$$X(a) = \int_{\zeta=0}^a \left[\int_{\xi=\zeta}^a \arcsin \left(\frac{\sin \xi}{\sin a} \right) d\xi \right] d\zeta. \quad (53)$$

В области IV выполним интегрирование уравнения (35) по площади, ограниченной неравенствами $|x| < w/2$ и $w/2 < y < y'$. Используя теорему Стокса о роторе, получаем

$$- \int_{x=-w/2}^{w/2} E_x^{\text{IV}}(x, y', 0) dx = \\ = i\omega\mu_0 \int_{x=-w/2}^{w/2} \int_{y=w/2}^{y'} H_z^{\text{IV}}(x, y, 0) dy dx, \quad (54)$$

где мы учли, что на краю полоскового проводника, т.е. при $y = w/2$, компонента $E_y^{\text{IV}} = 0$, а на границе областей III и IV также и компонента $E_x^{\text{IV}} = 0$. Уравнение (54) после подстановки в него выражения (48) принимает вид

$$- \int_{x=-w/2}^{w/2} E_x^{\text{IV}}(x, y', 0) dx = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2\pi^2} T^2 U \times \\ \times \ln \left(\sec \left(\frac{\pi w}{2T} \right) \right) \text{arch} \left(\frac{\sin(\pi y'/T)}{\sin(\pi w/2T)} \right). \quad (55)$$

Для нахождения вклада $\langle E_x^{\text{IV}} \rangle_{TT}$ в амплитуду E_x^{00} от компоненты $E_x^{\text{вих}}$ на участке IV подставим вы-

ражение (55) в формулу (13). После интегрирования получим

$$\begin{aligned} \langle E_x^{IV} \rangle_{TT} &= -\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2\pi^2} \times \\ &\times TU \ln \left(\sec \left(\frac{\pi w}{2T} \right) \right) \ln \left(\operatorname{cosec} \left(\frac{\pi w}{2T} \right) \right), \end{aligned} \quad (56)$$

где было учтено значение интеграла

$$\int_{\xi=a}^{\pi-a} \operatorname{arch} \left(\frac{\sin \xi}{\sin a} \right) d\xi = \pi \ln(\operatorname{cosec} a). \quad (57)$$

Суммируя вклады $\langle E_x^{\text{пот}} \rangle_{TT}$, $\langle E_x^{\text{II}} \rangle_{TT}$ и $\langle E_x^{\text{IV}} \rangle_{TT}$, выражаемые формулами (19), (52) и (56), находим

$$\begin{aligned} E_x^{00} &= \frac{U}{T} \left[1 - \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2\pi^2} T^2 \times \right. \\ &\times \left[\ln \left(\sec \left(\frac{\pi w}{2T} \right) \right) \ln \left(\operatorname{cosec} \left(\frac{\pi w}{2T} \right) \right) + \right. \\ &\left. \left. + \frac{\pi^2 w^2}{12T^2} - \frac{2}{\pi} X \right] \left(\frac{\pi w}{2T} \right) \right]. \end{aligned} \quad (58)$$

Полученные формулы (33) и (58) для амплитуд H_{2y}^{00} и E_x^{00} позволяют приступить к непосредственному расчету матрицы рассеяния.

2. ФОРМУЛЫ ДЛЯ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ

Рассчитаем матрицу рассеяния \mathbf{S} , рассматривая поверхности по обе стороны решетки как два порта четырехполюсника. Эта матрица связывает нормированные амплитуды рассеянных волн b_1 и b_2 , исходящих из первого и второго порта, с нормированными амплитудами падающих волн a_1 и a_2 уравнением [23]

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \quad (59)$$

Сами нормированные амплитуды определяются формулами [23]

$$a_{1,2} = E_{1,2}^{\text{пад}} / \sqrt{Z_{1,2}}, \quad b_{1,2} = E_{1,2}^{\text{рас}} / \sqrt{Z_{1,2}}, \quad (60)$$

где $E_{1,2}^{\text{пад}}$ – амплитуды падающих волн в формуле (1), а $E_{1,2}^{\text{рас}}$ – амплитуды рассеянных волн.

Запишем граничные условия для электрического поля E_x и магнитного поля H_y в первом порте

$$\begin{aligned} a_1 \sqrt{Z_1} + b_1 \sqrt{Z_1} &= E_x^{00}, \\ a_1 / \sqrt{Z_1} - b_1 / \sqrt{Z_1} &= H_{1y}^{00} + H_0. \end{aligned} \quad (61)$$

В уравнении (61) учтено, что волна с амплитудой b_1 распространяется против направления оси z , и поэтому магнитное поле этой волны отличается знаком.

Аналогичные уравнения записываем для электрического и магнитного поля на втором порте

$$\begin{aligned} b_2 \sqrt{Z_2} + a_2 \sqrt{Z_2} &= E_x^{00}, \\ b_2 / \sqrt{Z_2} - a_2 / \sqrt{Z_2} &= H_{2y}^{00} + H_0. \end{aligned} \quad (62)$$

Отметим, что волна с амплитудой a_2 распространяется против направления оси z , поэтому напряженность ее магнитного поля имеет противоположный знак, как и для волны с амплитудой b_1 в формуле (61).

Совместно решая уравнения (61), (62) и учитывая, что амплитуды H_{1y}^{00} и H_{2y}^{00} различаются только знаком, находим нормированные амплитуды рассеянных волн

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2} - Z_0 / Z^{\text{реш}}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2} + Z_0 / Z^{\text{реш}}} a_1 + \\ &+ \frac{2^4 \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2} + Z_0 / Z^{\text{реш}}} a_2, \\ b_2 &= \frac{2^4 \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2} + Z_0 / Z^{\text{реш}}} a_1 + \\ &+ \frac{\sqrt{\epsilon_2} - \sqrt{\epsilon_1} - Z_0 / Z^{\text{реш}}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2} + Z_0 / Z^{\text{реш}}} a_2, \end{aligned} \quad (63)$$

где введена величина $Z^{\text{реш}} = E_x^{00} / (2H_{1y}^{00})$, которая согласно формулам (33) и (58) принимает значение

$$\begin{aligned} Z^{\text{реш}} &= \frac{i}{\omega \epsilon_0 \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\pi} T \ln \left(\sec \left(\frac{\pi w}{2T} \right) \right)} - \\ &- i \omega \mu_0 T \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\operatorname{cosec} \left(\frac{\pi w}{2T} \right) \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\pi w^2 / 24T^2 - \pi^{-2} X(\pi w / 2T)}{\ln \left(\sec \left(\frac{\pi w}{2T} \right) \right)} \right]. \end{aligned} \quad (64)$$

Из уравнений (63) получаем искомую матрицу рассеяния

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2} - Z_0 / Z^{\text{реш}}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2} + Z_0 / Z^{\text{реш}}} & \frac{2^4 \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2} + Z_0 / Z^{\text{реш}}} \\ \frac{2^4 \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2} + Z_0 / Z^{\text{реш}}} & \frac{\sqrt{\epsilon_2} - \sqrt{\epsilon_1} - Z_0 / Z^{\text{реш}}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2} + Z_0 / Z^{\text{реш}}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (65)$$

Заметим, что величина $Z^{\text{реш}}$ является импедансом элементарной ячейки решетки. Первое слагаемое в формуле (64), которое обратно пропорционально частоте ω , описывает емкостную составляющую импеданса. Второе слагаемое, пропорциональное ω , описывает индуктивную составляющую импеданса. При этом первый член индуктивной части импеданса обусловлен продольными токами J_x , а второй член – поперечными токами J_y .

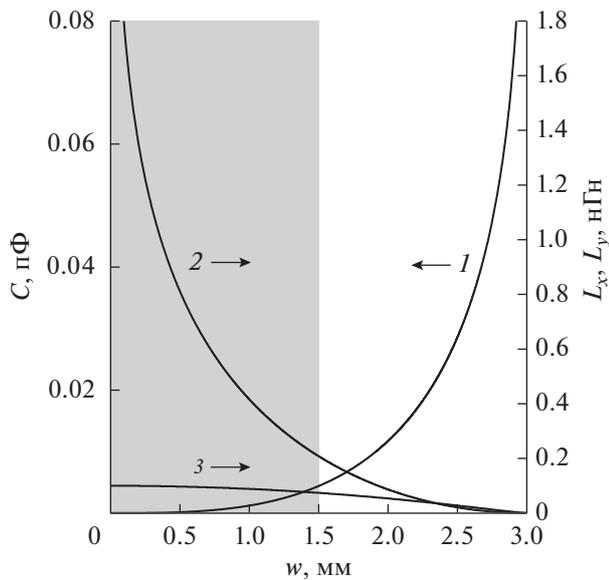


Рис. 2. Зависимости емкости C (1), “продольной” L_x (2) и “поперечной” L_y (3) индуктивностей элементарной ячейки решетки от ширины ее проводников при периоде решетки $T = 3$ мм.

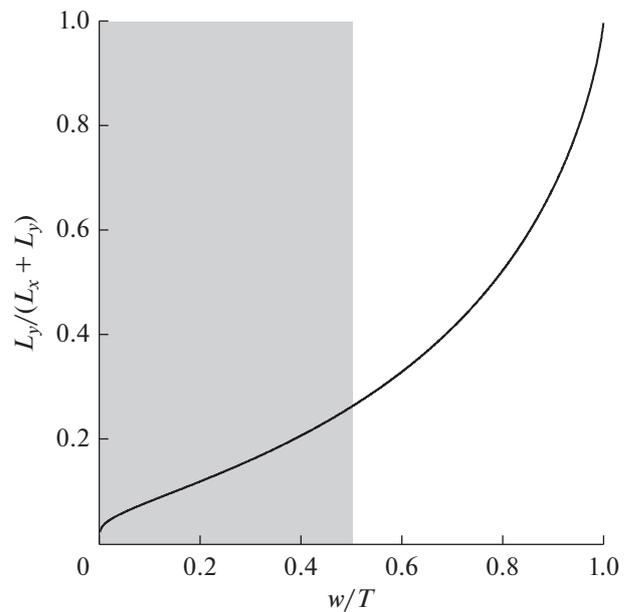


Рис. 3. Зависимость отношения поперечной части индуктивности к полной индуктивности от относительной ширины полосковых проводников решетки.

Элементы матрицы \mathbf{S} связаны равенствами $S_{12} = S_{21}$, $|S_{11}| = |S_{22}|$. Первое равенство свидетельствует о том, что рассматриваемая решетка является взаимным четырехполюсником. Формула (65) точно совпадает с формулой для матрицы рассеяния волн на стыке линий передачи с волновыми сопротивлениями Z_1 и Z_2 , выражаемыми формулой (3), когда этот стык нагружен на параллельный колебательный контур с импедансом $Z^{\text{реш}}$.

3. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ ФОРМУЛ

Проанализируем подробнее формулу (64). В соответствии со сказанным выше ее можно записать в виде

$$Z^{\text{реш}} = \frac{i}{\omega C} - i\omega(L_x + L_y), \quad (66)$$

где

$$C = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\pi} T \ln \left(\sec \left(\frac{\pi w}{2T} \right) \right) \quad (67)$$

– емкость элементарной ячейки решетки,

$$L_x = \frac{\mu_0 T}{2\pi} \ln \left(\operatorname{cosec} \left(\frac{\pi w}{2T} \right) \right) \quad (68)$$

– первая часть индуктивности элементарной ячейки, связанная с продольным током J_x ,

$$L_y = \mu_0 T \frac{\frac{\pi w^2}{24T^2} - \frac{1}{\pi^2} X(\pi w/2T)}{\ln(\sec(\pi w/2T))} \quad (69)$$

– вторая часть индуктивности элементарной ячейки, связанная с поперечным током J_y .

На рис. 2 построены зависимости емкости C и индуктивностей L_x и L_y элементарной ячейки решетки от ширины w ее полосковых проводников. Расчет этих зависимостей выполнен по формулам (65)–(69) для решетки с периодом $T = 3$ мм, расположенной на границе сред с диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_1 = 1$ и $\varepsilon_2 = 2$. Видно, что с увеличением ширины w проводников от нуля до T емкость C растет от нуля до бесконечности, индуктивность L_x , отвечающая продольным токам, убывает от бесконечности до нуля, а индуктивность L_y , отвечающая поперечным токам, убывает до нуля от некоторого конечного значения. Однако, как уже отмечалось, правомерность используемого в расчете приближения определяется условием: ширина области Π (см. рис. 1) ($T - w$) должна быть меньше ее высоты w . Зона, где не выполняется это условие, обозначена на рис. 2 серым тоном.

Зависимость отношения “поперечной” части индуктивности L_y к полной индуктивности $L_x + L_y$ от относительной ширины проводников w/T представлена на рис. 3. Это отношение не зависит ни от периода T , ни от диэлектрических проницаемостей сред, между которыми решетка расположена. Видно, что оно всегда растет с увеличением ширины полоскового проводника и приближается к единице при $w \rightarrow T$. Зона, где не выполняется условие правомерности используемого в расчете приближения, также отмечена серым фоном.

По формулам (53), (64) и (65) были построены частотные зависимости коэффициента отражения $|S_{11}|^2$ и коэффициента прохождения $|S_{21}|^2$ элек-

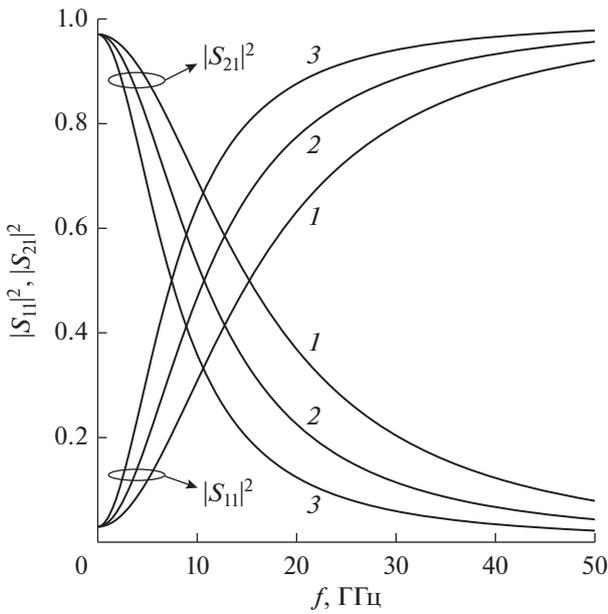


Рис. 4. Частотные зависимости коэффициентов отражения $|S_{11}|^2$ и прохождения $|S_{21}|^2$ для решетки с периодом $T = 3$ мм и шириной проводников $w = 2.85$ (1), 2.95 (2), 2.99 мм (3).

ромагнитной волны через решетку на границе раздела сред с диэлектрическими проницаемостями $\epsilon_1 = 1$ и $\epsilon_2 = 2$ (рис. 4). Эти зависимости рассчитаны для нескольких значений ширины проводников w при фиксированном периоде решетки $T = 3$ мм. Видно, что коэффициент отражения $|S_{11}|^2$ растет как с увеличением частоты, так и с увеличением ширины полосковых проводников.

Для оценки погрешности полученных формул нами был выполнен численный электродинамический расчет 3D-модели решетки квадратных полосковых проводников в пакете программ CST Microwave Studio. Предполагалось, что проводники имеют бесконечную проводимость и нулевую толщину. Сравнение матричных элементов, рассчитанных по формулам и полученных с помощью пакета программ, производилось для решетки проводников, расположенной на границе раздела сред с диэлектрическими проницаемостями $\epsilon_1 = 1$ и $\epsilon_2 = 2$, имеющей период $T = 3$ мм. Численные расчеты 3D-модели показали, что для рассмотренных решеток самая низкая резонансная частота, на которой коэффициент прохождения $|S_{21}|^2$ обращается в нуль, приблизительно равна 70 ГГц. Однако в области столь высоких частот не выполняются условия квазистатического приближения, поэтому полученные формулы здесь уже не могут быть использованы.

На рис. 5 для трех значений ширины полосковых проводников w представлены частотные зависимости относительных погрешностей расчета

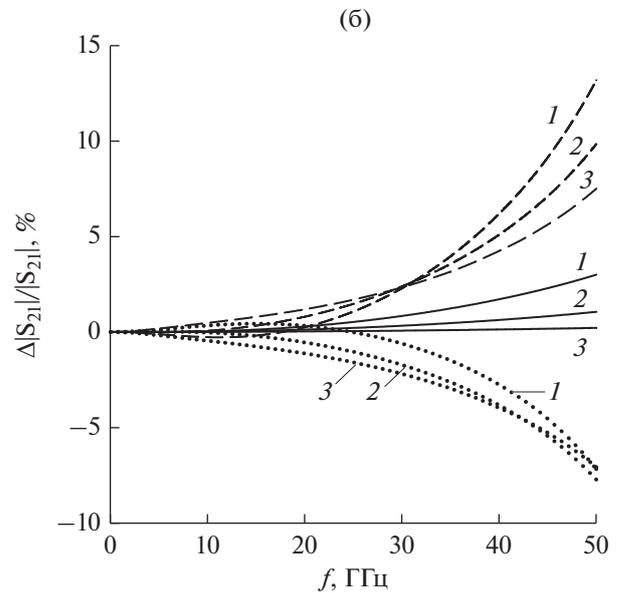
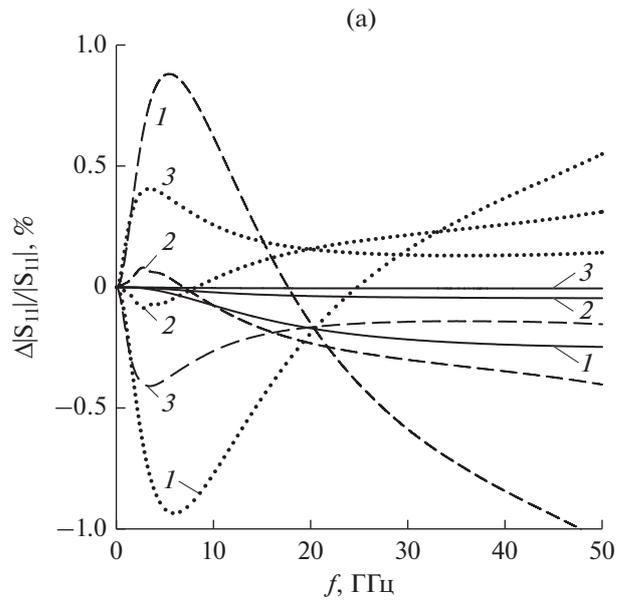


Рис. 5. Частотные зависимости относительной погрешности расчета элементов матрицы рассеяния S_{11} (а) и S_{21} (б) для трех значений ширины полоскового проводника, $w = 2.85$ (1), 2.95 (2), 2.99 мм (3); штриховые линии – расчет по известным формулам, пунктирные линии – расчет по полученным формулам (65)–(69), сплошные линии – использование усредненной формулы (71).

элементов матрицы рассеяния. Пунктирные линии изображают погрешность расчета по полученным формулам (65)–(69). Штриховые линии изображают погрешность расчета по известной формуле [12, 24]

$$Z^{\text{реш}} = \frac{i}{\omega \epsilon_0 \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\pi} T \ln \left(\sec \left(\frac{\pi w}{2T} \right) \right)}, \quad (70)$$

если ее подставить в формулу (65) для расчета матрицы рассеяния электромагнитных волн на емкостной решетке полосковых проводников. Эта формула отличается от полученной формулы (66) только отсутствием индуктивностей L_x и L_y . Как видим, различие между пунктирными и штриховыми линиями заключается прежде всего в противоположности знаков отображаемых ими погрешностей. Поэтому вместо полученной формулы (66) мы предлагаем использовать усредненную формулу

$$Z^{\text{реш}} = \frac{i}{\omega C} - i\omega \frac{L_x + L_y}{2} \quad (71)$$

с прежними значениями электрических параметров C , L_x и L_y . Погрешность расчета матрицы рассеяния при использовании усредненной формулы (71) также приведена на рис. 5. Эта погрешность оказывается многократно меньше погрешности, получающейся при использовании формул (66) или (70).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение уравнений Максвелла, полученное в работе в квазистатическом приближении, подтверждает тот факт, что решетка полосковых проводников на границе раздела двух сред эквивалентна последовательному колебательному контуру, подключенному параллельно к точкам каскадного соединения двух линий передачи. Значения элементов матрицы рассеяния такой решетки зависят только от импеданса $Z^{\text{реш}}$ ее элементарной ячейки, который определяется топологией полосковых проводников и диэлектрических проницаемостей сред ϵ_1 и ϵ_2 . Импеданс $Z^{\text{реш}}$, согласно формуле (66), является суммой двух частей, различающихся частотной зависимостью. Его емкостная часть убывает по абсолютной величине обратно пропорционально частоте ω , а индуктивная часть растет по абсолютной величине прямо пропорционально ω . Это значит, что на низких частотах емкостная часть $Z^{\text{реш}}$ преобладает по абсолютной величине над индуктивной частью. Поэтому на достаточно низких частотах можно пренебречь индуктивностью элементарной ячейки по сравнению с ее емкостью, выражаемой формулой (67).

Формула (67) подтверждает эмпирическое предположение [13, 21] о совпадении на низких частотах отражательных свойств субволновой решетки квадратных полосковых проводников и решетки ленточных полосковых проводников в случае падения на нее линейно поляризованной электромагнитной волны с направлением вектора электрического поля ортогонально полосковым проводникам. При этом обе решетки должны иметь один и тот же период, а ширина ленточ-

ных полосковых проводников должна быть равна размеру стороны квадратных проводников.

Однако с увеличением частоты необходимо учитывать не только емкостную, но и индуктивную часть импеданса $Z^{\text{реш}}$, обусловленную как продольной J_x , так и поперечной J_y компонентами тока в квадратных полосковых проводниках. Индуктивная часть импеданса характеризуется суммой соответствующих индуктивностей L_x и L_y , описываемых формулами (68) и (69), которые были получены впервые. Сравнение частотных характеристик, рассчитанных по формулам и полученным численным электродинамическим расчетом 3D-модели рассматриваемой структуры, показало, что учет индуктивной части импеданса позволяет многократно повысить точность расчета на высоких частотах.

Важно отметить, что исследованная структура может использоваться для создания зеркал, обладающих заданной отражательной способностью, на границах раздела диэлектрических слоев. Такие зеркала необходимы при конструировании оптических и СВЧ многослойных полосно-пропускающих фильтров или радиопрозрачных в заданном диапазоне частот поверхностей для укрытия антенн. При этом решетки из квадратных полосковых проводников на границах диэлектрических слоев-резонаторов позволяют обеспечить оптимальные связи резонаторов друг с другом, а крайних резонаторов с пространством. Перспективность таких фильтров демонстрируют аналогичные многослойные конструкции, но с решетками в виде металлических сеток на границах раздела диэлектрических слоев [19]. Использование формул, полученных в [20] для металлических сеток, и формул, полученных в данной работе для решеток квадратных металлических проводников, позволит многократно сократить время конструирования частотно-селективных устройств на многослойных диэлектрических структурах.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение № 14.575.21.0142, уникальный идентификатор проекта RFMEFI57517X0142).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Belyaev B.A., Turnev V.V. // *Microw. Opt. Technol. Lett.* 2013. V. 55. № 7. P. 1613.
2. Macleod H.A. *Thin-film Optical Filters*. Boca Raton: CRC Press, 2010.
3. Беляев Б.А., Турнев В.В., Шабанов В.Ф. // *ДАН*. 2014. Т. 454. № 6. С. 551.
4. Беляев Б.А., Турнев В.В., Шабанов В.Ф. // *ДАН*. 2014. Т. 456. № 4. С. 413.

5. *Belyaev B.A., Tyurnev V.V., Shabanov V.F.* // Opt. Lett. 2014. V. 39. № 12. P. 3512.
6. *Ade P.A.R., Pisano G., Tucker C., Weaver S.* // Proc. SPIE. 2006. V. 6275. P. 62750U-1.
7. *Melo A.M., Kornberg M.A., Kaufmann P. et al.* // Appl. Opt. 2008. V. 47. № 32. P. 6064.
8. *Garcia-Vidal F.J., Martin-Moreno L., Ebbesen T.W., Kuipers L.* // Rev. Modern Phys. 2010. V. 82. P. 729.
9. *Munk B.* Frequency Selective Surfaces: Theory and Design. N.Y.: John Wiley & Sons, Inc., 2000.
10. *Tomasek P.* // Int. J. Circuits, Systems and Signal Processing. 2014. V. 8. P. 594.
11. *Oh S., Lee H., Jung J.-H., Lee G.-Y.* // Int. J. Microwave Sci. Technol. 2014. V. 2014. Article number 857582.
12. *Al-Joutayly M.A., Behdad N.* // IEEE Trans. 2010. V. AP-58. № 12. P. 4030.
13. *Ulrich R.* // Infrared Phys. 1967. V. 7. P. 37.
14. *Belyaev B.A., Tyurnev V.V.* // Opt. Lett. 2015. V. 40. № 18. P. 4333.
15. *Belyaev B.A., Tyurnev V.V.* // Opt. Lett. 2016. V. 41. № 3. P. 536.
16. *Беляев Б.А., Тюрнев В.В.* // Известия вузов. Физика. 2015. Т. 58. № 5. С. 57.
17. *Банков С.Е., Левченко И.В.* // РЭ. 1988. Т. 33. № 10. С. 2045.
18. *Belyaev B.A., Tyurnev V.V.* // Microw. Opt. Technol. Lett. 2018. V. 60. № 3. P. 630.
19. *Беляев Б.А., Тюрнев В.В., Волошин А.С., Галеев Р.Г.* // Письма в ЖТФ. 2018. Т. 44. № 10. С. 3.
20. *Беляев Б.А., Тюрнев В.В.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 7. С. 642.
21. *Whitbourn L.B., Compton R.C.* // Appl. Opt. 1985. V. 24. № 2. P. 217.
22. *Meixner J.* // IEEE Trans. 1972. V. AP-20. № 4. P. 442.
23. *Гунта К., Гардж Р., Чадха Р.* Машинное Проектирование СВЧ устройств. М.: Радио и связь, 1987.
24. *Luukkonen O., Simovski C., Granet G. et al.* // IEEE Trans. 2008. V. AP-56. № 6. P. 1624.