ЖЭТФ, 2019, том 155, вып. 1, стр. 138–146

ВЛИЯНИЕ РАЗМЕРОВ НА УСЛОВИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ КРАЕВЫХ СОСТОЯНИЙ В ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМАХ

А. Д. Федосеев[*]

Институт физики им. Л. В. Киренского Сибирского отделения Российской академии наук
660036, Красноярск, Россия

Поступила в редакцию 21 мая 2018 г.,
после переработки 21 июня 2018 г.
Принята к публикации 27 июня 2018 г.

Предложен критерий, позволяющий выявлять краевые состояния в случае, когда размеры системы сравнимы с длиной локализации этих состояний. Продемонстрировано применение алгоритма определения краевых состояний в коротких системах на примерах модели Берневига – Хьюза – Жанга в геометрии цилиндра, модели Китаева и цепочки со спин-орбитальным взаимодействием и наведенной сверхпроводимостью. Показано, что в одномерных системах конечной длины существуют области параметров, для которых краевые состояния не возникают, хотя топологический индекс нетривиален, и, наоборот, продемонстрировано возникновение майорановских мод в областях с тривиальным топологическим индексом.

DOI: 10.1134/S0044451019010127

1. ВВЕДЕНИЕ

Свойства топологически нетривиальных систем привлекают особое внимание исследователей в последние десятилетия [1–7]. Такие системы характеризуются наличием топологически защищенных состояний в диэлектрической щели, что приводит, в частности, к возможности движения фермиона без рассеяния на немагнитных примесях. Свойства таких краевых состояний изучаются, как правило, на полубесконечных моделях с одной границей, а введение ограниченных систем в подавляющем большинстве случаев связано с вычислительными трудностями. При этом полученные выводы для полубесконечных систем переносятся на системы конечных размеров и наоборот.

Дополнительный интерес к системам, в которых реализуются краевые состояния, вызвало предсказание Китаевым нулевых краевых (майорановских) мод в одномерных системах со сверхпроводящим спариванием [8]. Обнаружение областей параметров, обеспечивающих возникновение майорановских мод в открытых системах, чаще всего осуществляется путем поиска топологически нетривиальных фаз при учете периодических граничных условий. Для невзаимодействующих электронов классификация таких фаз проводилась в работах [9, 10]. При этом системы считались достаточно большими, чтобы эффектами размеров системы можно было пренебречь. Выходом за пределы подобного подхода являются работы [11, 12], в которых для случая одномерных моделей конечных размеров было показано возникновение линий параметров, отвечающих возникновению майорановских мод, которые также разделяли области с разной четностью основного состояния.

Несмотря на огромное количество работ, направленных на изучение свойства краевых состояний в системах с одной границей, особенности реализации краевых состояний в коротких цепочках изучаются крайне ограниченно [13–17]. Все эти работы сосредоточены на выявлении особенностей свойств краевых состояний, вызванных конечными размерами систем, вопрос же о влиянии размеров на условия возникновения краевых состояний остается без рассмотрения. Этот вопрос и является предметом обсуждения в данной работе.

2. ПРОБЛЕМА ИНТЕРПРЕТАЦИИ ХАРАКТЕРА СОСТОЯНИЯ В СИСТЕМАХ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Широко распространено представление о краевых состояниях как о состояниях, волновая функция которых сосредоточена преимущественно в первых атомных слоях [18]. Однако скорость убывания амплитуды волновой функции может быть сколь

[*] E-mail: fad@iph.krasn.ru

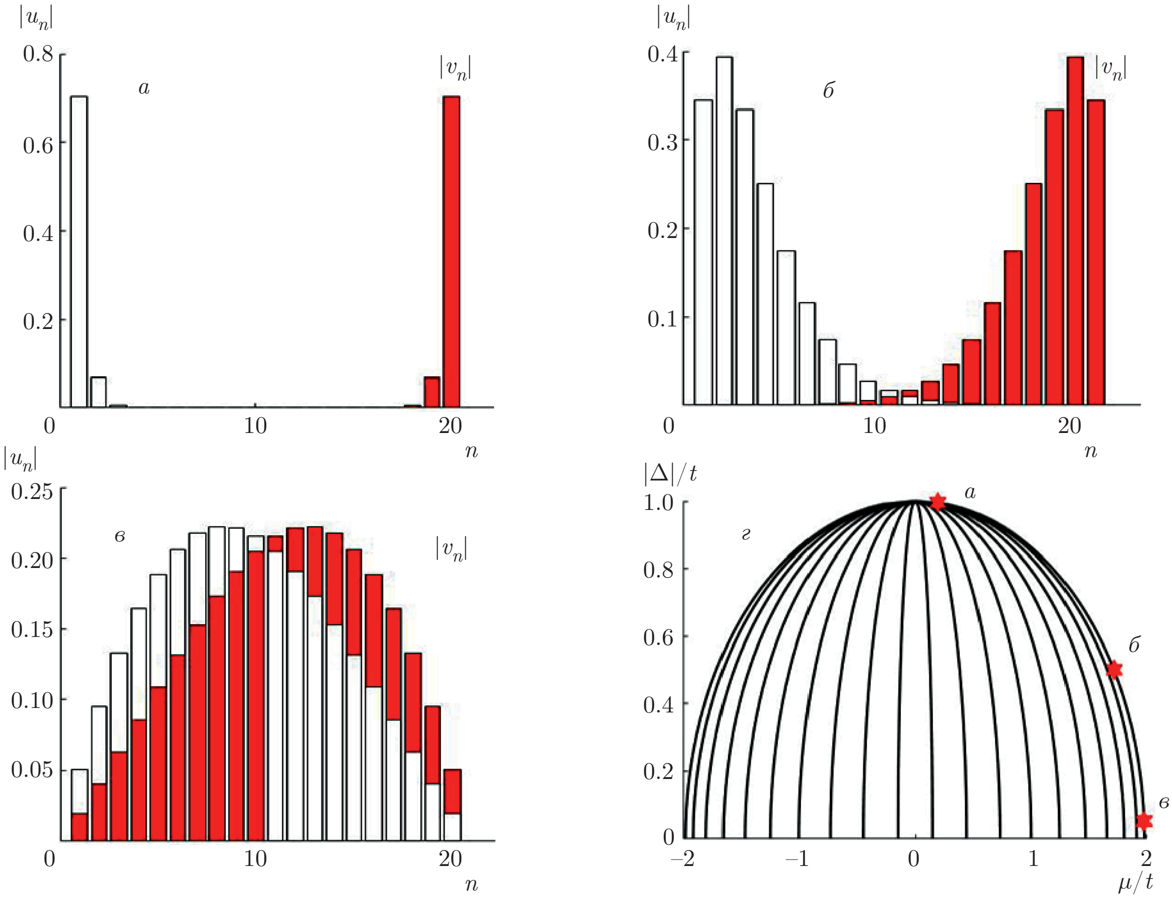

Рис. 1. Зависимость коэффициентов разложения (1) от номера узла (*а,б,в*) для особых линий параметров (*г*) в модели Китаева для цепочки конечной длины. Несмотря на то что на рисунке *в* коэффициенты разложения имеют максимум практически посередине цепочки, этот случай соответствует краевой моде

угодно малой, а характерная длина локализации может составлять сотни атомных слоев. При этом энергия такого одноэлектронного состояния будет находиться в щели объемного спектра, а его свойства будут зависеть от граничных условий. В своих работах и Тамм [19, 20], и Шокли [21] подчеркивали присутствие энергии краевых состояний в «запрещенных» полосах как важную характеристику краевого состояния.

Проблемы, связанные с указанным выше определением по длине локализации, можно показать на двух примерах. Первым примером является состояние с нулевой энергией возбуждения на особых линиях [11] параметров в модели Китаева конечной длины (рис. 1). При непрерывном изменении параметров вдоль особых линий в параметрическом пространстве, максимум амплитуды коэффициентов разложения непрерывно смещается от края (рис. 1*а*) к центру цепочки (рис. 1*в*). И хотя согласно графику амплитуды на рис. 1*в* такое возбуждение не является краевым с точки зрения локализации в первых атомных слоях, оно все же обладает свойствами краевого. Во-первых, это возбуждение обладает энергией $E = 0$, которая заведомо находится в щели объемного спектра возбуждений. Во-вторых, это возбуждение возникает только при наличии в цепочке открытых границ. В-третьих, следует обратить внимание на аналитическое выражение для коэффициентов разложения оператора уничтожения такого возбуждения по одноузельным операторам. Выражение для фермиевского оператора, соответствующего энергии возбуждения $E = 0$, имеет вид

$$d_0 = \frac{1}{2\sqrt{A}} \sum_{n=1}^{N} \left[r^n \sin\phi_m n \left(c_{2n-1} + i c_{2N+2-2n} \right) \right], \quad (1)$$

$$\phi_m = \frac{\pi m}{(N+1)}, \quad r = \sqrt{\frac{t-\Delta}{t+\Delta}},$$

$$\mu = 2\sqrt{t^2 - \Delta^2}\cos\phi_m, \quad m = 1, \ldots, N,$$

где операторы c_j — майорановские. Видно, что коэффициенты разложения имеют тенденцию к экспоненциальному убыванию от краев при любом значении параметров, пока они находятся на особой линии, но в случае, представленном на рис. 1*в*, длина цепочки не позволяет увидеть это убывание из-за того, что цепочка слишком короткая.

Другим примером, иллюстрирующим возникающую в системах конечных размеров проблему, является модель BHZ с периодическими граничными условиями вдоль одного направления и открытыми граничными условиями вдоль другого. Поскольку в такой геометрии можно ввести классификацию возбуждений по величине квазиимпульса вдоль направления, в котором реализуются периодические граничные условия, задача сводится к одномерной с параметрами, зависящими от величины этого квазиимпульса k. Характерный вид амплитуды волновой функции на узлах вдоль направления, которое разомкнуто, для одноэлектронного состояния, испытывающего переход из краевого в некраевое при изменении квазиимпульса k, представлен на рис. 2. Виден непрерывный переход от явного вида краевого состояния к некраевому, который происходит особенно быстро в окрестности $k = 1.76\pi$, но по степени локализации волновой функции невозможно установить значение квазиимпульса, при котором состояние перестает быть краевым.

3. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ КРАЕВЫХ СОСТОЯНИЙ НА СЛУЧАЙ ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Вопрос определения краевых состояний для одномерных систем конечных размеров поднимался в работе [22], где был предложен расширенный вариант трактовки краевых состояний и исследовались их свойства. Автор [22] предложил трактовку краевого состояния в одномерной системе конечного размера как состояния, которое существует только при наличии границы, и свойства которого определяются положением этой границы. На примере одномерной системы с непрерывным периодическим потенциалом было продемонстрировано, что значения энергий краевых состояний находятся в щели объемного спектра, а скорость убывания волновой функции краевого состояния находится в зависимости от положения значения энергии краевого состояния в щели объемного спектра: энергия в середине щели отвечает быстрому убыванию, в то время как энергия, близкая к объемной зоне, приводит к существенному увеличению области локализации краевого состояния.

Критерии краевого состояния также обсуждались в работе [23], в которой исследовалась модель Берневига – Хьюза – Жанга (BHZ) с периодическими граничными условиями вдоль одного направления и одной открытой границей вдоль другого. Авторы отметили, что локальная плотность состояния со значением энергии, находящимся в щели объемного спектра, испытывает пространственные осцилляции, вследствие которых максимум локальной плотности состояний смещается с первого от границы слоя атомов в глубь системы. В работе было предложено для определения областей параметров, при которых существует краевое состояние, изучать действительные части показателей экспонент, входящих в волновую функцию одноэлектронного состояния.

В данной работе ограничимся обсуждением понятия краевых состояний в приближении сильной связи. В строгом смысле, краевое состояние можно определить только для полубесконечной системы с одной границей[1)]: краевое состояние — это состояние, локальная плотность вероятности которого стремится к нулю внутри полубесконечной решетки

$$\lim_{n\to\infty} |\Psi_n|^2 \to 0. \qquad (2)$$

Коэффициенты разложения волновой функции одноэлектронного состояния по одноузельным состояниям можно представить в виде суммы решений уравнений для коэффициентов без учета границ (общего уравнения). Такие решения общего уравнения представляют собой экспоненты и в случае, когда гамильтониан безграничной системы обладает симметрией инверсии, входят в разложение попарно: как $e^{\lambda_j n}$ и как $e^{-\lambda_j n}$, причем число таких пар равно числу уравнений на границе системы:

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} u_n a_n^+ |0\rangle, \;\; u_n = \sum_j \left(A_j e^{-\lambda_j n} + B_j e^{\lambda_j n} \right), \quad (3)$$

где сумма по j подразумевает суммирование по указанным парам решений, а u_n и a_n^+ могут быть вектором-строкой и столбцом при учете спина и многозонной структуры системы.

Пусть все решения λ_j имеют отличную от нуля действительную часть $\mathrm{Re}\,\lambda_j > 0$. Тогда для полубесконечной системы из требования ограниченности

1) Автор выражает благодарность рецензенту, указавшему на этот факт.

волновой функции следует, что все коэффициенты $B_j = 0$, а волновая функция (3) будет удовлетворять определению краевого состояния (2).

Перейдем к рассмотрению случая, когда показатель экспоненты одного из общих решений λ_j мнимый. Поскольку число пар общих решений равняется числу уравнений на границе, приравнять нулю одновременно соответствующие этой паре решений коэффициенты A_j и B_j невозможно. В таком случае, волновая функция будет иметь незатухающую компоненту, и такое состояние не будет краевым. Очевидно, что в случае большего числа чисто мнимых показателей экспонент общих решений состояние также будет иметь проникающий характер. Таким образом, можно сформулировать математический критерий для краевого состояния в одномерной системе.

Критерий

Если все действительные части показателей экспонент, являющихся решением общего уравнения для коэффициентов разложения волновой функции по узлам системы при заданной энергии состояния, отличны от нуля, то состояние является краевым, в противном случае оно является некраевым (проникающим):

$$\forall \lambda_j : \ \mathrm{Re}\,\lambda_j \neq 0. \tag{4}$$

Этот математический критерий является взаимнооднозначным строгому определению (2) краевого состояния в полубесконечной системе. Но в отличие от последнего, он не требует неограниченности системы и может быть применен к одномерным системам конечного размера. Предложенный критерий независимо от размеров системы делит все состояния на два класса.

1. Одноэлектронные состояния, волновые функции которых экспоненциально убывают с краев системы. В полубесконечной системе такие состояния являются краевыми в строгом смысле этого слова. В системе конечных размеров этот же класс решений отвечает основным свойствам краевых состояний: локализация у границы и значение энергии, находящееся в щели объемного спектра. Кроме того, эти состояния возникают только при наличии границ и исчезнут в случае введения периодических граничных условий. Исходя из сказанного выше подобные состояния в одномерных системах конечных размеров следует называть краевыми.

2. Одноэлектронные состояния, в разложении которых (3) присутствует незатухающая компонента и которые следует называть некраевыми или проникающими.

Краевое состояние в одномерной системе помимо предложенного критерия (4) можно определять исходя из энергии этого состояния. Так, если значение энергии состояния находится в объемном спектре, то для такого состояния хотя бы один показатель экспоненты λ_j должен быть чисто мнимым, поскольку энергии объемных состояний являются решением задачи на собственные значения того же общего уравнения, и такое состояние является проникающим. В случае, когда значение энергии попадает в щель объемного спектра, ни один показатель экспоненты мнимым быть не может, и состояние является краевым.

4. КРАЕВЫЕ СОСТОЯНИЯ В МОДЕЛИ BHZ В ГЕОМЕТРИИ УЗКОЙ ПОЛОСЫ

Детально проиллюстрируем применение предложенного критерия краевых состояний на примере модели BHZ [2] с периодическими граничными условиями вдоль оси x и открытыми граничными условиями вдоль направления y. Гамильтониан модели BHZ в приближении сильной связи, следуя работе [24], запишем в виде

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{BHZ} &= \sum_{nm\sigma} \left[-\Delta\varepsilon a^{+}_{nm\sigma} a_{nm\sigma} + \Delta\varepsilon d^{+}_{nm\sigma} d_{nm\sigma} \right] + \\
&+ \sum_{NN\sigma} \left[(t-\Delta t) a^{+}_{n'm'\sigma} a_{nm\sigma} + (t+\Delta t) d^{+}_{n'm'\sigma} d_{nm\sigma} \right] - \\
&- i\alpha \sum_{nm\sigma} \sigma \left[d^{+}_{n+1m\sigma} a_{nm\sigma} - a^{+}_{nm\sigma} d_{n+1m\sigma} - \right. \\
&\left. - d^{+}_{n-1m\sigma} a_{nm\sigma} + a^{+}_{nm\sigma} d_{n-1m\sigma} \right] + \\
&+ \alpha \sum_{nm\sigma} \left[d^{+}_{nm+1\sigma} a_{nm\sigma} + a^{+}_{nm\sigma} d_{nm+1\sigma} - \right. \\
&\left. - d^{+}_{nm-1\sigma} a_{nm\sigma} - a^{+}_{nm\sigma} d_{nm-1\sigma} \right]. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Здесь индекс n отвечает нумерации узлов по оси x, а m — по оси y, обозначение NN подразумевает суммирование по ближайшим соседям.

Наличие периодических граничных условий позволяет перейти к эффективно одномерному случаю, при этом к набору энергетических параметров добавляется величина квазиимпульса k вдоль оси x, которая также будет влиять на реализацию краевого состояния. Волновая функция для одноэлектронного состояния с проекцией спина σ и значением квазиимпульса k имеет вид

$$\Psi_{k\sigma} = A \sum_{m} e^{ikm} \sum_{n=1}^{N} \left[u_{n\sigma} a^{+}_{nm\sigma} + v_{n\sigma} d^{+}_{nm\sigma} \right] |0\rangle, \tag{6}$$

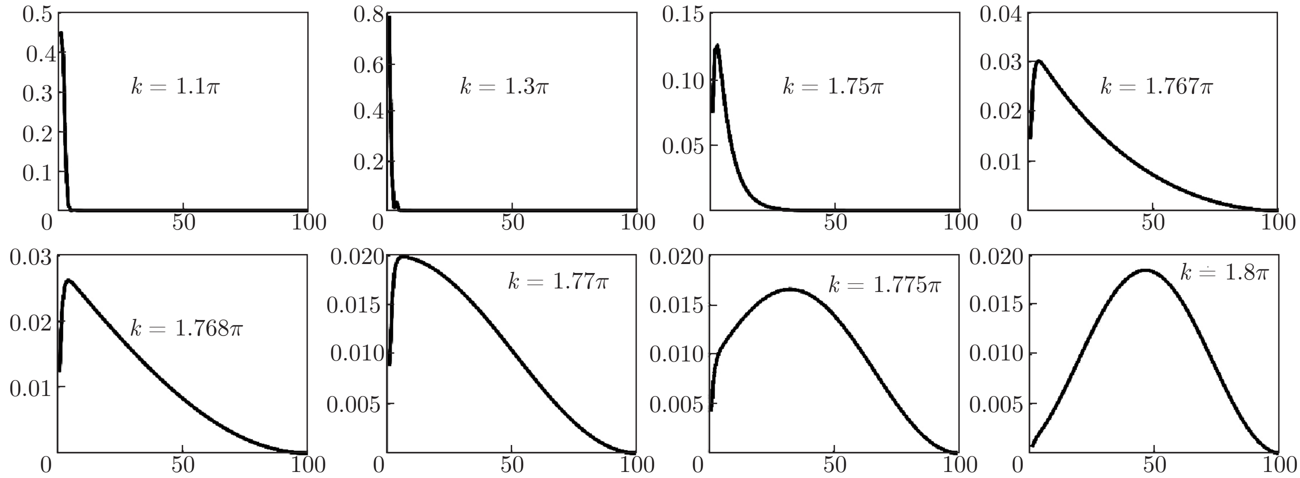

Рис. 2. Зависимость амплитуды вероятности от номера узла для состояния с проекцией спина $\sigma =\uparrow$ при переходе от краевого к некраевому характеру в модели BHZ с геометрией типа цилиндра $t = 0$, $\Delta t = 1$, $\alpha = 0.5$, $\Delta\varepsilon = 0.5$, $N = 100$ для различных значений квазиимпульса k. Состояние $k = 1.767\pi$ (правый верхний график) является краевым, в то время как состояние $k = 1.768\pi$ (левый нижний) — некраевым

где коэффициенты разложения являются решениями общего уравнения:

$$\begin{gathered} Eu_{n\sigma} = (-\Delta\varepsilon + t_k^-)u_{n\sigma} - s_{k\sigma}v_{n\sigma} + \\ + t^-(u_{n+1m\sigma} + u_{n-1m\sigma}) + \alpha(v_{n+1\sigma} - v_{n-1\sigma}), \\ Ev_{n\sigma} = (\Delta\varepsilon + t_k^+)v_{n\sigma} - s_{k\sigma}u_{n\sigma} + \\ + t^+(v_{n+1m\sigma} + u_{n+1m\sigma}) - \alpha(u_{n+1\sigma} - u_{n-1\sigma}), \\ t_k^\pm = 2t^\pm \cos k, \quad t^\pm = t \pm \Delta t, \\ s_{k\sigma} = 2\alpha\sigma \sin k, \quad \sigma = \pm 1. \end{gathered} \tag{7}$$

Общее решение для коэффициентов разложения записывается в следующем виде:

$$u_{n\sigma} = ue^{\lambda n}, \quad v_{n\sigma} = ve^{\lambda n}. \tag{8}$$

При этом если λ является решением, то $-\lambda$ и λ^* также будут решениями. В таком случае существуют четыре типа наборов для $\lambda = a + ib$:

I. $\lambda = \pm ib_1, \quad \pm ib_2$;
II. $\lambda = \pm a_1 + i\pi l, \quad \pm ib_1$;
III. $\lambda = \pm a_1 \pm ib_1$;
IV. $\lambda = \pm a_1 + i\pi l_1, \quad \pm a_2 + i\pi l_2$.

Здесь a и b — действительные и отличные от нуля, а добавка $+i\pi l$, где l — целое, введена для учета решений с знакопеременными действительными решениями. Решения типа I и II имеют неубывающую компоненту, а их энергии находятся в области зонных решений, поэтому краевыми являться не могут. Решения типа III и IV представляют собой краевые решения, поскольку все их компоненты убывают либо с правого, либо с левого края, и их энергии находятся в щели объемного спектра. Как показывают численные расчеты, часто встречаются объемные решения II типа, т. е. имеющие дополнительно убывающую компоненту, и краевые решения III типа, вызывающие пространственные осцилляции плотности вероятности, что мешает отличать объемные состояния от краевых по степени их локализации на границе (рис. 2).

Характерный вид зависимости λ от k для состояния, меняющего характер с краевого на некраевой в зависимости от величины k, и состояния, являющегося некраевым при любых значениях k, представлен на рис. 3. Видно, что существует четко выраженная точка k_{cr}, для которой состояние перестает быть краевым и становится объемным. Для случая, представленного на рис. 2, квазиимпульс, при котором исчезает краевое состояние, имеет значение $k_{cr} = 1.7675\pi$. Эта же точка соответствует отщеплению энергии состояния от зоны объемных состояний. При этом поведение мнимой части показателя экспоненты $b = \operatorname{Im}\lambda$ роли не играет.

Важным результатом является тот факт, что значение квазиимпульса k_{cr}, при котором появляются краевые состояния, зависит от длины цепочки N. Такая зависимость приведена на рис. 4. Это наглядно демонстрирует, что размеры одномерной системы влияют на условия возникновения краевых состояний.

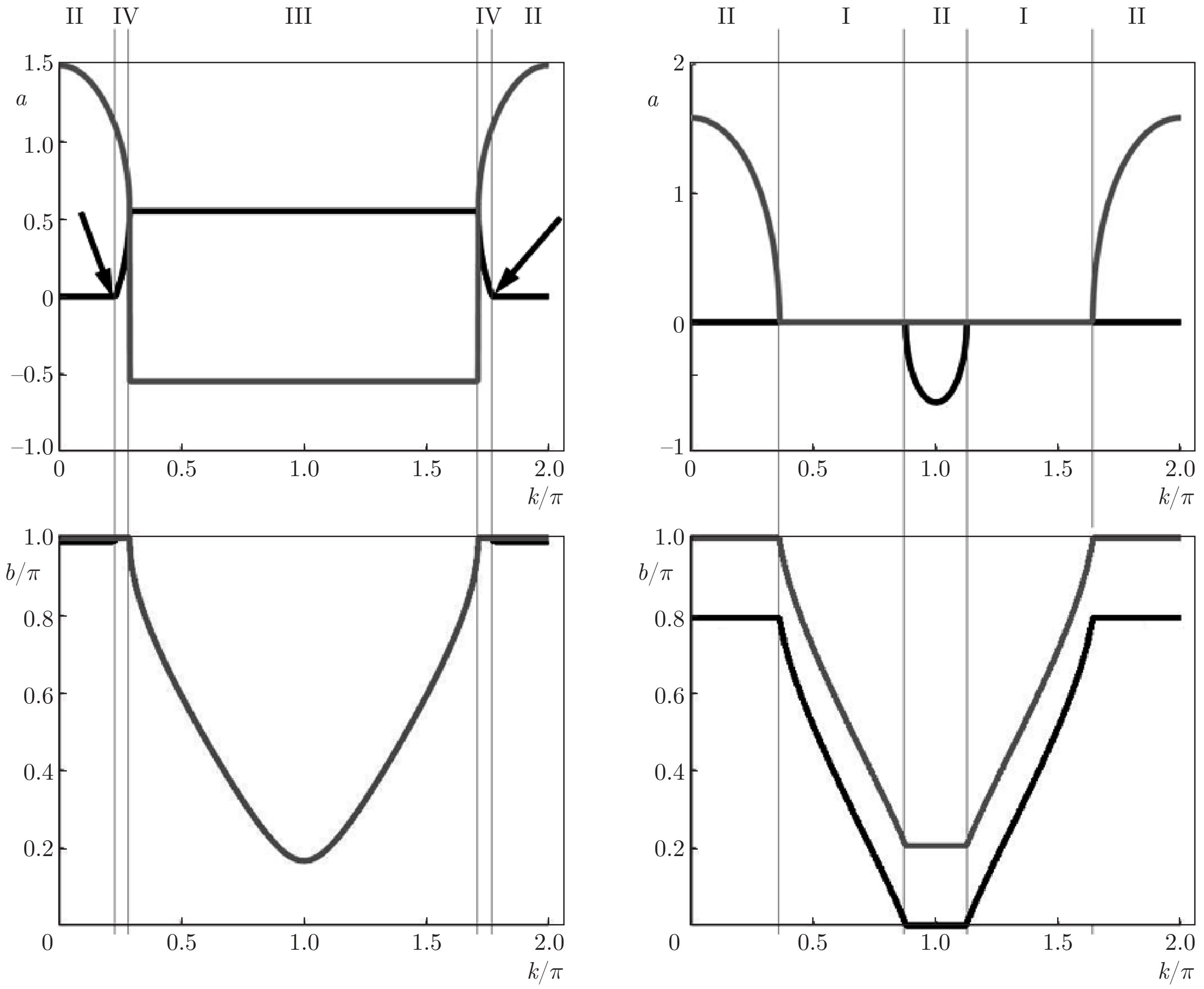

Рис. 3. Действительная $a = \mathrm{Re}\,\lambda$ сверху и мнимая $b = \mathrm{Im}\,\lambda$ снизу части показателей экспонент для решения, меняющего свой характер с краевого на некраевое при изменении величины квазиимпульса k (слева) и являющегося некраевым во всем диапазоне значений k (справа), в модели BHZ с геометрией цилиндра $t = 0$, $\Delta t = 1$, $\alpha = 0.5$, $\Delta\varepsilon = 0.5$, $N = 100$. Римскими цифрами указан тип общих решений

5. КРАЕВЫЕ СОСТОЯНИЯ В МОДЕЛИ КИТАЕВА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Проиллюстрируем влияние размеров на условия возникновения краевых возбуждений на примере модели Китаева [8]. Гамильтониан запишем в виде

$$\mathcal{H}_K = -\sum_{n=1}^{N} \mu a_l^\dagger a_l - t\sum_{l=1}^{N-1}\left(a_l^\dagger a_{l+1} + a_{l+1}^\dagger a_l\right) + \\ + \sum_{l=1}^{N-1}\left(\Delta a_l a_{l+1} + \Delta^* a_{l+1}^\dagger a_l^\dagger\right). \quad (9)$$

Области параметров, при которых возникают краевые состояния в такой модели, представлены на рис. 5. Конечные размеры системы, помимо отмеченной ранее реализации нулевой моды только на особых линиях [11], приводят к двум эффектам. Во-первых, линии, ограничивающие область реализации краевых состояний и определяемые в бесконечно длинной цепочке выражением $|\mu| = \pm 2|t|$, становятся зависящими от параметра сверхпроводящего спаривания $|\Delta|$ и область становится тем меньше, чем короче цепочка. Во-вторых, при малых значениях $|\Delta|$ внутри области возникают карманы, расположенные между линиями реализации нулевых энергий возбуждения, где краевое состояние не возникает. Это вызвано тем, что достаточно сильное перекрытие краевых возбуждений, стремящихся к локализации на противоположных краях цепочки,

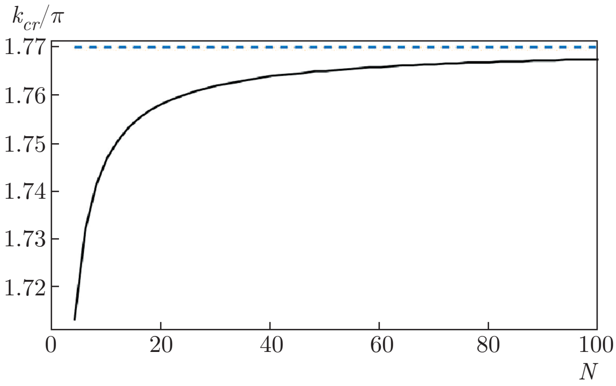

Рис. 4. Зависимость значения k_{cr}, соответствующего точке перехода состояния из краевого в некраевое в модели BHZ в геометрии цилиндра, от длины цилиндра N, $t = 0$, $\Delta t = 1$, $\alpha = 0.5$, $\Delta\varepsilon = 0.5$. Штриховая линия соответствует значению k_{cr} для случая $N \to \infty$

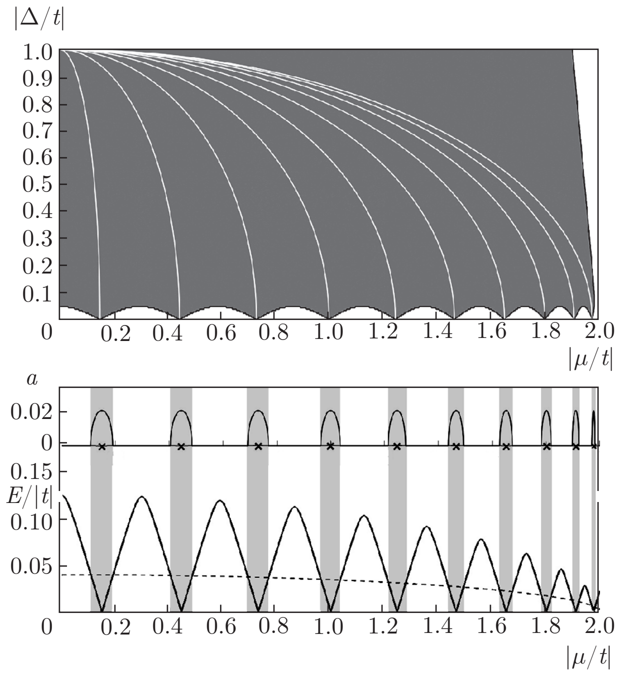

Рис. 5. Сверху: область существования краевых состояний в модели Китаева при длине цепочки $N = 20$ обозначена темным, белые линии — линии майорановских мод. Снизу: зависимость $a = \mathrm{Re}\,\lambda$ и минимальной энергии возбуждения при $|\Delta/t| = 0.02$, штриховая линия — граница зоны объемных возбуждений, крестами обозначены значения химического потенциала, при которых реализуется майорановская мода

приводит к попаданию энергии возбуждения в объемную зону и изменению характера возбуждения на некраевое. На рис. 5 также наглядно показана связь между величиной $a = \mathrm{Re}\,\lambda$ и тем, насколько глубоко в щели находится краевое возбуждение, при этом максимум достигается на линиях нулевых мод.

6. КРАЕВЫЕ СОСТОЯНИЯ В ОГРАНИЧЕННОЙ ЦЕПОЧКЕ СО СПИН-ОРБИТАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ И НАВЕДЕННОЙ СВЕРХПРОВОДИМОСТЬЮ

В качестве другого примера рассмотрим одномерную цепочку со спин-орбитальным взаимодействием и наведенной сверхпроводимостью, помещенную в магнитное поле [25, 26]:

$$\mathcal{H}_{wire} = \sum_{n=1,\sigma}^{N} (-\mu + h\sigma)\, a^+_{n\sigma} a_{n\sigma} - \\ - \sum_{n=1,\sigma}^{N-1} \left(\frac{t}{2} a^+_{n\sigma} a_{n+1\sigma} + \frac{\alpha}{2} \sigma a^+_{n\sigma} a_{n+1\overline{\sigma}} \right) + \\ + \sum_{n=1}^{N} \Delta a_{n\uparrow} a_{n\downarrow} + \text{H.c.} \quad (10)$$

На диаграмме области химического потенциала μ и магнитного поля h, в которых возникают краевые возбуждения, показаны на рис. 6. Как и в случае модели Китаева, внутри области реализации краевых состояний, полученной из анализа топологического инварианта для периодических граничных условий, возникают карманы, где краевые состояния отсутствуют ввиду конечной длины цепочки. И напротив, для случая короткой цепочки в области параметров, соответствующей тривиальному числу Майорана, существуют линии параметров, при которых возникают майорановские моды.

Кроме того, в области параметров при $\mu < t$ существует область реализации краевых состояний, которая не определяется из топологического инварианта, поскольку эти состояния обладают хоть и отщепленной от объемной зоны, но не экспоненциально малой энергией (рис. 7). Эта область тем больше, а энергия возбуждения тем лучше отщеплена от объемной зоны, чем длиннее цепочка. Следует отметить, что наличие топологического перехода, не связанного с майорановскими модами, в этой области энергетических параметров было недавно обнаружено в работе [27] на основе анализа спиновых и зарядовых характеристик достаточно длинной цепочки. Возможность возникновения краевых состояний в топологически тривиальной области также ранее была показана на примере треугольной решетки с неколлинеарным магнитным порядком и киральной сверхпроводимостью d-типа [28] в геомет-

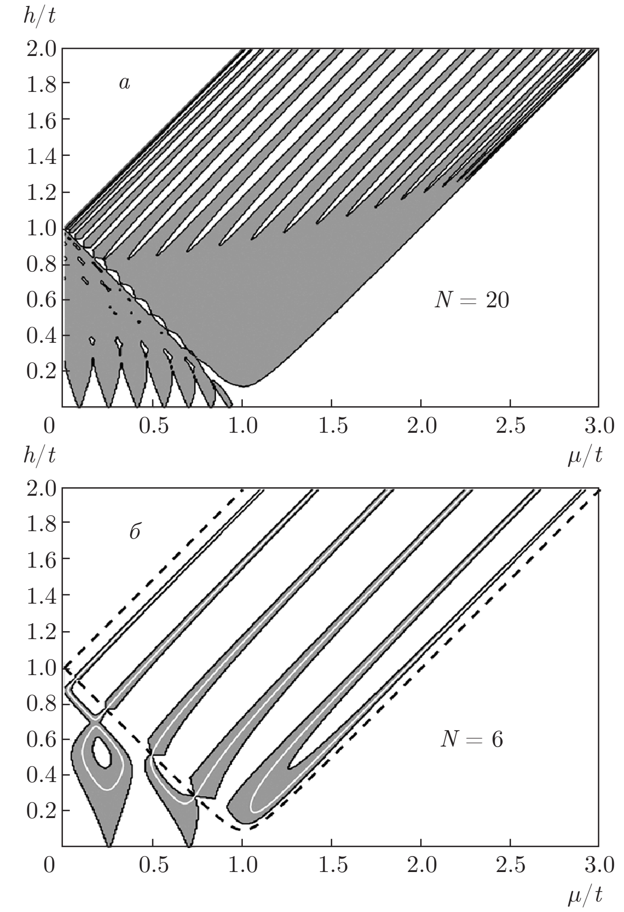

Рис. 6. Область реализации краевых состояний в цепочке со спин-орбитальным взаимодействием и наведенной сверхпроводимостью при $N = 20$ (a) и $N = 6$ ($б$). Темные области соответствуют параметрам, при которых существует краевое состояние. На нижнем рисунке белыми линиями отмечены линии параметров, при которых реализуются майорановские моды в цепочке. Штриховой линией обозначены параметры, при которых закрывается объемная щель и меняется топологический инвариант, $\alpha = 0.5t$, $\Delta = 0.1t$

рии цилиндра. Эти результаты показывают, что для поиска краевых решений с не экспоненциально малой энергией и майорановских мод в коротких системах метод анализа топологического инварианта не применим, и следует использовать иные способы, в частности, предложенный в данной работе.

7. ВЫВОДЫ

В работе предложен подход к определению краевых состояний в одномерных системах конечных размеров. В качестве главного критерия выбрано отсутствие общего решения с чисто мнимым

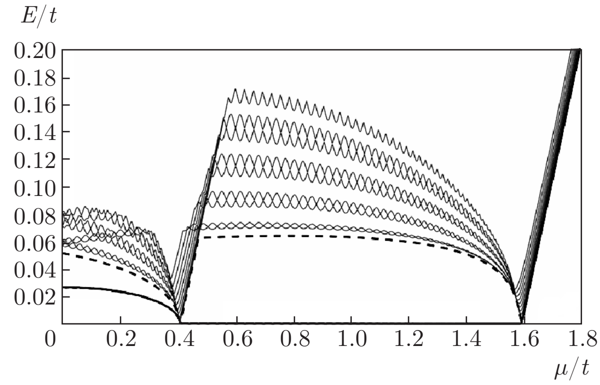

Рис. 7. Зависимость первых 10 энергий собственных возбуждений в цепочке со спин-орбитальным взаимодействием и сверхпроводящим спариванием от величины химического потенциала μ. Нижняя энергия возбуждения обозначена черной сплошной линией, граница зоны объемных одночастичных возбуждений — черной штриховой, $\alpha = 0.5t$, $\Delta = 0.1t$, $h = 0.6t$, $N = 100$

показателем экспоненты для заданной энергии состояния, что однозначно связано с нахождением энергии такого состояния за пределами области разрешенных энергий объемных состояний. На примерах модели BHZ, модели Китаева и цепочки со спин-орбитальным взаимодействием и наведенной сверхпроводимостью показано влияние конечной длины цепочки на условия возникновения краевых решений в одномерных (и сводящихся к ним) системах. В частности, показано возникновение внутри областей параметров с нетривиальным топологическим индексом карманов, где краевые состояния отсутствуют, а размер и число таких карманов определяются длиной цепочки. Возникновения подобных карманов следует ожидать и в других эффективно одномерных системах с конечными размерами, где возникают линии параметров, соответствующие реализации майорановских мод. В случае цепочки со спин-орбитальным взаимодействием и сверхпроводящим спариванием предложенный алгоритм определения краевых состояний выявил область параметров, отвечающих возникновению в цепочке краевых возбуждений с конечной энергией, причем эту область невозможно обнаружить методом анализа топологического инварианта.

Автор выражает благодарность сотрудникам лаборатории теоретической физики ИФ СО РАН за многочисленные дискуссии и внимание к работе.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, Правительства Красноярского края, Красноярского краевого фонда поддержки научной и научно-технической деятельности в рамках научного проекта № 17-42-240441 «Связанные майорановские фермионы в наноматериалах с сильными электронными корреляциями и квантовый транспорт электронов в устройствах на их основе», № 18-32-00443 «Эффекты конечных размеров и роль электронных корреляций при формировании майорановских мод в низкоразмерных системах со спин-орбитальным взаимодействием», № 18-42-243017 «Проявление кулоновских взаимодействий и эффектов ограниченной геометрии в свойствах топологических краевых состояний наноструктур со спин-орбитальным взаимодействием», № 18-42-243018 «Контактные явления и магнитный беспорядок в проблеме формирования и детектирования топологически защищенных краевых состояний в полупроводниковых наноструктурах», а также гранта Президента РФ (МК-3722.2018.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Волков, О. А. Панкратов, Письма в ЖЭТФ **42**, 145 (1985).
2. B. A. Bernevig, T. L. Hughes, and S.-C. Zhang, Science **314**, 1757 (2006).
3. L. Fu, C. L. Kane, and E. J. Mele, Phys. Rev. Lett. **98**, 106803 (2007).
4. M. Z. Hasan and C. L. Kane, Rev. Mod. Phys. **82**, 3045 (2010).
5. D. V. Khomitsky and A. A. Chubanov, ЖЭТФ **145**, 525 (2014).
6. В. А. Волков, В. В. Еналдиев, ЖЭТФ **149**, 702 (2016).
7. V. D. Kurilovich, P. D. Kurilovich, and I. S. Burmistrov, Phys. Rev. B **95**, 115430 (2017).
8. A. Yu. Kitaev, Usp. Fiz. Nauk **44**, 131 (2001).
9. A. P. Schnyder, S. Ryu, A. Furusaki et al., Phys. Rev. B **78**, 195125 (2008).
10. A. Yu. Kitaev, AIP Conf. Proc. **22** (2009).
11. S. Hegde, V. Shivamoggi, S. Vishveshwara et al., New J. Phys. **17**, 053036 (2015).
12. В. В. Вальков, В. А. Мицкан, М. С. Шустин, Письма в ЖЭТФ **106**, 762 (2017).
13. R. Chen and B. Zhou, Chin. Phys. B **25**, 067204 (2016).
14. M.-C. Hsu, Y.-C. Lin, and C.-R. Chang, J. Appl. Phys. **118**, 043909 (2015).
15. K. Hattori, J. Phys. Soc. Jpn. **84**, 044701 (2015).
16. L. Ortiz, R. A. Molina, G. Platero et al., Phys. Rev. B **93**, 205431 (2016).
17. V. V. Valkov, A. O. Zlotnikov, A. D. Fedoseev et al., J. Magn. Magn. Mat. **440**, 37 (2017).
18. А. Я. Беленький, УФН **134**, 125 (1981).
19. I. Tamm, Physik. Zeits. Sowjetunion **1**, 733 (1932).
20. И. Е. Тамм, *Собрание научных трудов*, Наука, Москва (1975).
21. W. Shockley, Phys. Rev. **56**, 317 (1939).
22. S. Y. Ren, *Electronic states in crystal of finite size*, Springer Tracts in Modern Physics **212**.
23. X. Dang, J. D. Burton, A. Kalitsov et al., Phys. Rev. B **90**, 155307 (2014).
24. Ф. Бег, П. Пужоль, Р. Рамазашвили, ЖЭТФ **153**, 108 (2018).
25. D. Sticklet, C. Bena, and P. Simon, Phys. Rev. Lett. **108**, 096802 (2012).
26. V. V. Val'kov and S. V. Aksenov, J. Magn. Magn. Mat. **440**, 112 (2017).
27. M. Serina, D. Loss, and J. Klinovaja, arXiv:1803.00544v (2018).
28. V. V. Val'kov, A. O. Zlotnikov, and M. S. Shustin, submitted to J. Magn. Magn. Mat. (2018).