

Оригинальная статья / Original Paper

DOI 10.15826/urej.2023.7.4.006

УДК 537.877

Формулы электродинамики для сред с отрицательной диэлектрической проницаемостью*

Б. А. Беляев^{1,2}✉, **В. В. Тюрнев¹**¹ Институт физики им. Л. В. Киренского СО РАН, Россия, 660036, г. Красноярск, Академгородок 50, строение 38² Сибирский федеральный университет, Россия, 660041, г. Красноярск, Проспект Свободный, 79

✉ belyaev@iph.krasn.ru

Аннотация

Формулы электродинамики, широко используемые при описании объектов, содержащих диэлектрические среды, дают противоречащие физике результаты в случае, когда диэлектрическая проницаемость среды принимает отрицательное значение. Проблему снимают уточненные формулы, позволяющие рассчитывать электрические потенциалы точечного заряда и точечного дипольного момента, емкость конденсатора, а также плотность энергии электромагнитного поля и добротность материала. Формулы справедливы для любых сред как с положительной, так и с отрицательной действительной частью комплексной диэлектрической проницаемости.

Ключевые слова

отрицательная диэлектрическая проницаемость, квазистатический расчет, потенциал заряда, электрическая емкость, добротность материала

Для цитирования

Беляев Б. А., Тюрнев В. В. Формулы электродинамики для сред с отрицательной диэлектрической проницаемостью. *Ural Radio Engineering Journal*. 2023;7(4):457–469. DOI: 10.15826/urej.2023.7.4.006.

* Публикуется в порядке обсуждения.

Electrodynamic Formulas for Media with Negative Permittivity*

B. A. Belyaev^{1,2}✉, **V. V. Tyurnev¹**

¹ Kirensky Institute of Physics SB RAS, Akademgorodok 50, stroenie 38,
Krasnoyarsk, 660036, Russia

² Siberian Federal University, 79 Svobodny Pr., Krasnoyarsk, 660041, Russia

✉ belyaev@iph.krasn.ru

Abstract

Electrodynamic formulas widely used in the description of objects containing dielectric media give results contrary to physics in the case when the permittivity of the medium takes a negative value. The problem is solved by refined formulas that allow calculating the electric potentials of the point charge and the point dipole moment, the capacitance of the capacitor, as well as the energy density of the electromagnetic field and the quality factor of the material. The formulas are valid for any media, both with positive and negative real part of the complex permittivity.

Keywords

negative permittivity, quasistatic calculation, charge potential, capacity, quality factor of the material.

For citation

Belyaev B. A., Tyurnev V. V. Electrodynamic formulas for media with negative permittivity. *Ural Radio Engineering Journal*. 2023;7(4):457–469. (In Russ.) DOI: 10.15826/urej.2023.7.4.006.

Введение

Отрицательной вещественной частью диэлектрической проницаемости ε обладают металлы [1], а также некоторые композитные материалы [2–3], содержащие металлические наночастицы. Например, серебро на длине волны $\lambda = 0,496 \mu\text{m}$ имеет диэлектрическую проницаемость $\varepsilon = -9,64 + i0,32$ [4]. Для таких сред некоторые широко используемые формулы электродинамики не работают, так как дают, с точки зрения физики, абсурдные результаты. Например, электрические заряды одинакового знака не расталкиваются, а притягиваются. Добротность материала становится отрицательной. Отрицательными становятся емкость конденсатора, а также энергия заряженного конденсатора. Более того, энергия электромагнитного поля, запасаемая в материале, может обнулиться и даже принять отрицательное значение. Поэтому для сред с отрицательной диэлектрической проницаемостью некоторые формулы электродинамики требуют уточнения.

* Published in order of discussion.

Расчеты будем проводить в квазистатическом приближении, которое предполагает, что размеры рассматриваемых объектов много меньше длины электромагнитной волны. Такое приближение, как известно, хорошо работает не только в радиодиапазоне, но и в оптическом диапазоне частот, например, при рассмотрении металлических наночастиц в диэлектрической матрице [5–8].

Квазистатические электрические потенциалы точечного заряда и диполя

В расчетах будем предполагать, что колебания всех физических величин описываются множителем $\exp(-i\omega t)$ и поэтому амплитуды этих колебаний, учитывающие их фазу, принимают комплексные значения. Начнем с известной частной формулы

$$\varphi^q = \frac{q}{4\pi r \varepsilon_0 \varepsilon}, \quad (1)$$

которая описывает в квазистатическом приближении электрический потенциал φ^q , порождаемый точечным зарядом q в изотропной среде с положительной вещественной частью диэлектрической проницаемости $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ в точке на расстоянии r от заряда.

При произвольном знаке вещественной проницаемости ε' вместо формулы (1) рассмотрим сначала формулу

$$\varphi^q = \frac{q}{4\pi r \varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon'^2}}. \quad (2)$$

Эта формула является частным случаем известной корректной формулы [9]

$$\varphi^q = \frac{q}{4\pi r \varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon^{(x)} \varepsilon^{(y)} \varepsilon^{(z)}}} \left[\frac{x^2}{\varepsilon^{(x)}} + \frac{y^2}{\varepsilon^{(y)}} + \frac{z^2}{\varepsilon^{(z)}} \right]^{-1/2}, \quad (3)$$

описывающей электрический потенциал точечного заряда в анизотропной среде. Здесь $\varepsilon^{(x)}$, $\varepsilon^{(y)}$, $\varepsilon^{(z)}$ — элементы тензора относительной диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$, главные оси которого направлены вдоль осей координат x , y , z . Заметим, что потенциал φ^q , вычисляемый по формуле (2), сохраняет свое значение при изменении знака ε' , то есть при замене $\varepsilon' \rightarrow -\varepsilon'$. Поэтому электрические заряды одинакового знака всегда расталкиваются в среде с любым знаком вещественной диэлектрической проницаемости. Для того чтобы заряды одинакового знака расталкивались и при комплексной диэлектрической проницаемости ε , квадратный корень в формуле следует извлекать с соответствующим знаком. Это значит, что в формулу следует ввести множитель $\text{sign}(\text{Im } \varepsilon)$. Тогда с уче-

том выполнения необходимого условия $\varepsilon'' \geq 0$, характеризующего затухание электромагнитных волн в любом материале, получим

$$\varphi^q = \text{sign}(\varepsilon') \frac{q}{4\pi r \varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (4)$$

Эта формула уточняет формулу (2) при произвольных значениях ε .

Электрический потенциал точечного дипольного момента \mathbf{p} в квазистатическом приближении обычно описывают формулой

$$\varphi^p = \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{4\pi r^3 \varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (5)$$

Для обобщения этой формулы на случай произвольных значений ε воспользуемся известным соотношением [10]

$$\varphi^p = -\frac{\mathbf{p}}{q} \text{grad} \varphi^q, \quad (6)$$

связывающим потенциал точечного дипольного момента с потенциалом точечного заряда. Подставляя формулу (4) в это соотношение, получаем вместо частной формулы (5) обобщенное выражение

$$\varphi^p = \text{sign}(\varepsilon') \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{4\pi r^3 \varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (7)$$

Емкость конденсатора

Зависимость емкости конденсатора от относительной диэлектрической проницаемости его заполнения обычно выражают частной формулой

$$C = C_0 \varepsilon, \quad (8)$$

где C_0 — емкость обкладок конденсатора в отсутствие диэлектрического заполнения. Для обобщения этого соотношения на случай произвольного знака ε' обратимся к формуле (4). Суммируя на обеих обкладках конденсатора потенциалы φ^q от всех точечных зарядов, непрерывно распределенных по эквипотенциальным поверхностям обкладок, замечаем, что оба суммарных потенциала пропорциональны $\text{sign}(\varepsilon')/\varepsilon$. Это значит, что и напряжение U на обкладках конденсатора при фиксированном заряде q будет пропорционально $\text{sign}(\varepsilon')/\varepsilon$. Поэтому формула

$$C = \text{sign}(\varepsilon') C_0 \varepsilon \quad (9)$$

является обобщением частной формулы (8) на случай произвольных значений ε . Видно, что емкость C , вычисляемая по этой формуле, сохраняет свое значение при замене $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$.

Плотность энергии электромагнитного поля

Энергия электромагнитного поля является вещественной величиной. Ее усредненную по времени плотность в среде без потерь обычно описывают формулой [9]

$$w = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \frac{d}{d\omega} (\omega \varepsilon') |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{4} \mu_0 \frac{d}{d\omega} (\omega \mu') |\mathbf{H}|^2. \quad (10)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} — амплитуды колебаний электрического и магнитного поля. При отсутствии частотной дисперсии эта формула упрощается и принимает вид

$$w = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \varepsilon' |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{4} \mu_0 \mu' |\mathbf{H}|^2. \quad (11)$$

Первое слагаемое в этой формуле описывает плотность энергии электрического поля w_E , а второе — плотность энергии магнитного поля w_H .

В средах с потерями мнимые части ε'' и μ'' комплексных проницаемостей ε и μ ответственны за поглощение электромагнитных волн, поэтому их не учитывают при расчете запасаемой плотности энергии. В результате плотности энергий w_E , w_H и w выражают формулами [11, 12]

$$w_E = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \varepsilon' |\mathbf{E}|^2, \quad (12)$$

$$w_H = \frac{1}{4} \mu_0 \mu' |\mathbf{H}|^2, \quad (13)$$

$$w = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \varepsilon' |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{4} \mu_0 \mu' |\mathbf{H}|^2. \quad (14)$$

Для обобщения частной формулы (12) на случай $\varepsilon' < 0$ обратимся к формуле

$$W_C = \frac{1}{4} \operatorname{Re}(C) |U|^2, \quad (15)$$

описывающей усредненную по времени энергию заряженного конденсатора. Эта энергия связана с плотностью энергии w_E интегралом

$$W_C = \iiint_V w_E dv, \quad (16)$$

где V — объем конденсатора. Из формул (16) и (15) следует, что плотность энергии w_E пропорциональна W_C , а энергия W_C пропорциональна $\operatorname{Re}C$. В свою очередь емкость C , согласно формуле (9),

пропорциональна $\text{sign}(\varepsilon')\varepsilon$. Поэтому $\text{Re}C$ всегда пропорциональна $|\varepsilon'|$. Отсюда следует, что формула

$$w_E = \frac{1}{4} \varepsilon_0 |\varepsilon'| |\mathbf{E}|^2 \quad (17)$$

является уточнением формулы (12) на случай произвольного значения ε .

Из решения системы уравнений Максвелла известно, что для бегущей плоской электромагнитной волны комплексные амплитуды полей \mathbf{E} и \mathbf{H} связаны соотношением [9]

$$\varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}^2 = \mu_0 \mu \mathbf{H}^2. \quad (18)$$

С учетом этого соотношения обобщение частной формулы (14) на случай любых знаков величин ε' и μ' имеет вид

$$w = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \left(|\varepsilon'| + \left| \frac{\varepsilon}{\mu} \right| |\mu'| \right) |\mathbf{E}|^2. \quad (19)$$

Для немагнитных сред эта формула становится проще:

$$w = \frac{1}{4} \varepsilon_0 (|\varepsilon'| + |\varepsilon|) |\mathbf{E}|^2. \quad (20)$$

Важно отметить, что запасаемая магнитная энергия, выраженная через амплитуду поля \mathbf{E} , пропорциональна модулю комплексной диэлектрической проницаемости среды, как это показывает формула (13). То есть она определяется также и мнимой частью диэлектрической проницаемости ε'' . Заметим, что плотность энергии w , вычисляемая как по формуле (19), так и по формуле (20), не зависит от знака ε' .

В некоторых случаях формула (20) может быть полезна при нахождении значения какого-либо кристаллографического или структурного параметра p , который используется в математической модели материальной среды, включая композитные среды, и присутствует в формуле для расчета диэлектрической проницаемости $\varepsilon(p)$. Очевидно, что искомому значению параметра p должна отвечать минимальная плотность энергии $w(p)$, вычисляемая по формуле (20).

Добротность материала

Общее определение добротности для любой колебательной системы выражается формулой [12, 13]

$$Q = \frac{\omega'}{2\omega''}, \quad (21)$$

где $\omega = \omega' - i\omega''$ — комплексная собственная частота. Из этого определения следует, что добротность резонатора может быть вычислена по формуле [12, 14]

$$Q = 2\pi W / \Delta W, \quad (22)$$

где W — усредненная запасенная энергия резонатора, а ΔW — его энергия поглощения за период колебания. Отсюда видно, что добротность Q может принимать только вещественные положительные значения.

Добротность же материала часто вычисляют по традиционной приближенной формуле [15]

$$Q = \varepsilon' / \varepsilon''. \quad (23)$$

Однако это отношение принимает отрицательные значения, когда $\varepsilon' < 0$. Поэтому формула (23) требует уточнения. Для этого обратимся к исходной формуле (22), которую в случае электромагнитных колебаний в материальной среде, можно представить в виде [12]

$$Q = \frac{k'}{2k''}, \quad (24)$$

где $k = k' + ik''$ — волновое число, выражаемое формулой

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu}. \quad (25)$$

В случае немагнитной среды формула (24) после подстановки в нее формулы (25) принимает вид

$$Q = \frac{\operatorname{Re} \sqrt{\varepsilon}}{2 \operatorname{Im} \sqrt{\varepsilon}}. \quad (26)$$

Эта формула является уточнением формулы (23). Используя показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$, эту уточненную формулу можно переписать в виде

$$Q = \frac{n'}{2n''}. \quad (27)$$

Учитывая тот факт, что ни $n' = \operatorname{Re} n$, ни $n'' = \operatorname{Im} n$ по определению не могут принимать отрицательные значения (см. вставку на рис. 1а), добротность материала Q остается всегда положительной величиной. В результате добротность серебра на длине волны $\lambda = 0,496 \mu\text{m}$, вычисленная согласно уточненной формуле (26) по приведенному ранее значению его диэлектрической проницаемости $\varepsilon = -9,64 + i0,32$, принимает значение $Q = 0,0083$, а не $Q = -30,1$, как это дает традиционная формула (23).

На рис. 1 построены зависимости добротности Q от вещественной части комплексной диэлектрической проницаемости материала ε' , изменяемой в интервале от -10 до $+10$. Расчет выполнялся по формуле (26) для трех значений мнимой части диэлектрической проницаемости ε'' (1 , 10^{-2} и 10^{-4}).

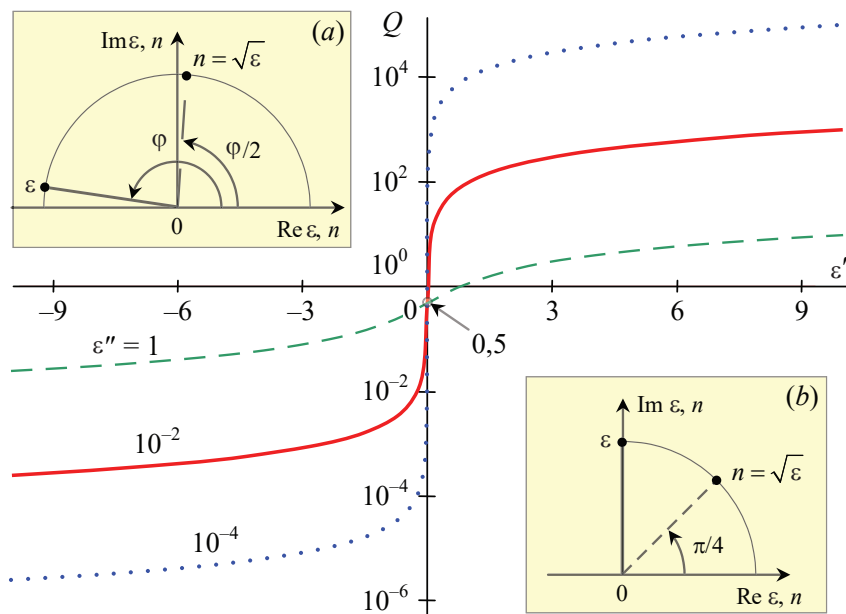


Рис. 1. Зависимости добротности Q от действительной части ε' комплексной диэлектрической проницаемости материала для трех указанных значений мнимой части ε'' . На вставках для $|\varepsilon| = 1$ представлены показатели преломления n при: $a - \varepsilon' \approx -1$; $b - \varepsilon' = 0$

Fig. 1. Dependences of the quality factor Q on the real part ε' of the complex permittivity of the material for the three indicated values of the imaginary part ε'' . The insets for $|\varepsilon| = 1$ show the refractive indices at $\varepsilon' \approx -1$ — (a) and $\varepsilon' = 0$ — (b)

Видно, что при любом фиксированном значении ε'' добротность $Q(\varepsilon')$ монотонно растет. Ее величина изменяется от $Q = 0$ при $\varepsilon' \rightarrow -\infty$, достигает значения $Q = 0,5$ в точке $\varepsilon' = 0$ (см. вставку на рис. 1b) и стремится к значению $Q = \infty$ при $\varepsilon' \rightarrow \infty$. Важно отметить, что в отличие от сред с положительной действительной частью комплексной диэлектрической проницаемости, добротность сред с отрицательными значениями ε' увеличивается с ростом ε'' . При этом ее максимальное значение $Q = 0,5$.

На рис. 2 представлены рассчитанные по формуле (26) зависимости добротности среды Q от мнимой части ее комплексной диэлектрической проницаемости ε'' , изменяемой в пределах от 10^{-2}

до 10^2 . Сплошные линии соответствуют трем средам, имеющим отрицательные действительные части диэлектрической проницаемости ε' (-1 , -4 и -16), а штриховые линии соответствуют также трем средам, но с положительными ε' (1 , 4 и 16).

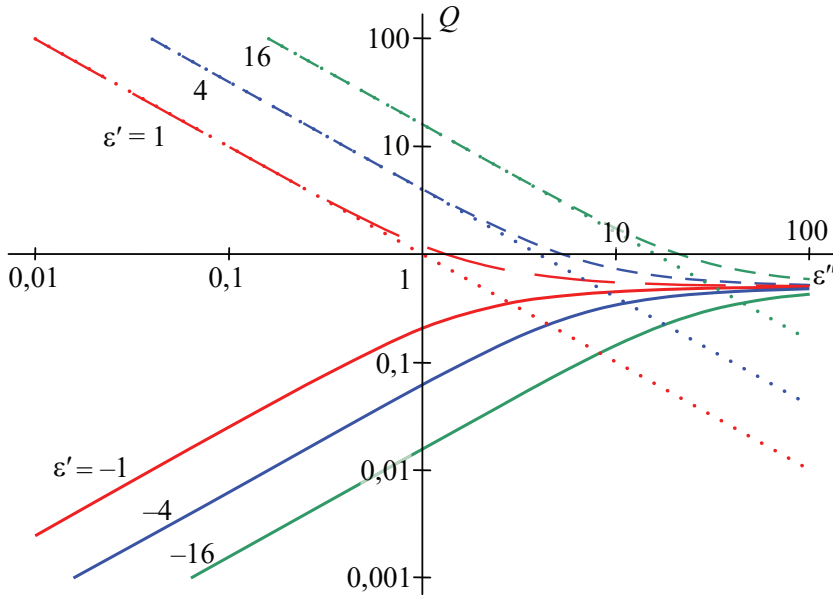


Рис. 2. Зависимости добротности Q от мнимой части ε'' комплексной диэлектрической проницаемости материала для трех положительных и трех отрицательных значений вещественной части ε'

Fig. 2. Dependences of the quality factor Q on the imaginary part ε'' of the complex permittivity of the material for three positive and three negative values of the real part ε'

Для сравнения при $\varepsilon' > 0$ на рис. 2 пунктирными линиями представлены зависимости $Q(\varepsilon'')$, рассчитанные по приближенной формуле (23). Видно, что эта простая формула хорошо аппроксимирует зависимости $Q(\varepsilon'')$, рассчитанные по точной формуле (26), но только при $\varepsilon'' \ll \varepsilon'$. Отметим, что при увеличении ε'' от 0 до ∞ в случае $\varepsilon' > 0$ добротность материала убывает от ∞ до 0,5, а в случае $\varepsilon' < 0$ она растет от 0 до 0,5.

Заключение

Проведено уточнение электродинамических формул, традиционно используемых при описании объектов, содержащих диэлектрические среды, включая композиты, волноведущие структуры и различные устройства на их основе. Уточненные формулы исключают противоречащие физике результаты, которые возникали при рассмотрении объектов, содержащих среды с отрица-

тельной относительной диэлектрической проницаемостью. Они позволяют рассчитывать не только электрические потенциалы точечного заряда и точечного дипольного момента, но и емкость конденсатора, а также плотность энергии электромагнитного поля в материалах и добротность материальной среды.

На основе полученных формул показано, что изменение знака комплексной диэлектрической проницаемости среды не влияет на электрические потенциалы, порождаемые точечными зарядами и точечными диполями. Неизменными при этом остаются также емкость конденсатора и усредненная по времени плотность энергии электромагнитного поля в диэлектрической среде. При исследовании композитного материала минимизация плотности энергии, вычисляемой по полученной формуле (22), позволяет находить значения структурного или кристаллографического параметра, входящих в теоретическую модель диэлектрической проницаемости.

Показано также, что при отрицательной вещественной части диэлектрической проницаемости материала его добротность Q с увеличением мнимой части ε'' не уменьшается как обычно, а растет. При этом интервал изменения добротности ограничен неравенством $0 < Q(\varepsilon'') < 0,5$.

Благодарности

Финансирование работы: работа выполнена в рамках научной тематики Госзадания Института физики им. Л. В. Киренского СО РАН.

Acknowledgments

The investigation was carried out within the state assignment of Kirensky Institute of Physics.

Список литературы

1. Johnson P. B., Christy R. W. Optical Constants of the Noble Metals. *Physical Review B*. 1972;6(12):4370–4379.
2. Hou C., Fan G., Xie X., Zhang X., Sun X., Zhang Y., et al. TiN/ Al_2O_3 binary ceramics for negative permittivity metacomposites at kHz frequencies. *Journal of Alloys and Compounds*. 2021;855, part 2. 157499. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2020.157499>
3. Gu H., Guo J., Wei S., Guo Z. Polyaniline nanocomposites with negative permittivity. *Journal of Applied Polymer Science*. 2013;130:2238–2244. DOI: 10.1002/app.39420
4. Babar S., Weaver J. H. Optical constants of Cu, Ag, and Au revisited. *Applied Optics*. 2015; 54: 477–481. <https://doi.org/10.1364/AO.54.000477>

5. Belyaev B. A., Tyurnev V. V. Resonances of Electromagnetic Oscillations in a Spherical Metal Nanoparticle. *Microwave and Optical Technology Letters*. 2016;58(8):1883–1886.

6. Беляев Б. А., Тюрнев В. В. Электродинамический расчет эффективных электромагнитных параметров диэлектрической среды с металлическими наночастицами заданных размеров. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2018;154(4):716–729. <http://dx.doi.org/10.1134/S0044451018100036>

7. Беляев Б. А., Лексиков Ан.А., Тюрнев В. В., Шабанов Д. А. Исследование композита: металлические наночастицы в диэлектрической матрице и многослойных полосно-пропускающих фильтров на его основе. *Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки*. 2021;497(1):5–11. DOI: 10.31857/S2686740021020024

8. Беляев Б. А., Тюрнев В. В., Шабанов Д. А. Излучение материальной частицы, находящейся в диэлектрической среде под воздействием электромагнитного поля. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2022;162(6):830–834. DOI: 10.31857/S0044451022120033

9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Электродинамика сплошных сред*. М.: Наука; 1982. 620 с.

10. Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M. *The Feynman lectures on physics*. Vol. II. New York: Basic Books; 2010. 566 с.

11. Nunes F. D., Vasconcelos T. C., Bezerra M., Weiner J. J. Electromagnetic energy density in dispersive and dissipative media. *Journal of the Optical Society of America B*. 2011;28(6):1544–1552. DOI:10.1364/JOSAB.28.001544

12. Григорьев А. Д. *Электродинамика и техника СВЧ*. М.: Высшая школа; 1990. 335 с.

13. Вайнштейн Л. А. *Электромагнитные волны*. М.: Радио и связь; 1988. 440 с.

14. Kajfes D., Guilon P. *Dielectric Resonators*. Atlanta: Noble Publishing Corporation, 1998. 571 p.

15. Семенов Н. А. *Техническая электродинамика*. М.: Связь; 1973. 480 с.

References

1. Johnson P. B., Christy R. W. Optical Constants of the Noble Metals. *Physical Review B*. 1972;6(12):4370–4379.

2. Hou C., Fan G., Xie X., Zhang X., Sun X., Zhang Y., et al. TiN/ Al_2O_3 binary ceramics for negative permittivity metacomposites at kHz frequencies. *Journal of Alloys and Compounds*. 2021; 855, part 2. 157499. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2020.157499>

3. Gu H., Guo J., Wei S., Guo Z. Polyaniline nanocomposites with negative permittivity. *Journal of Applied Polymer Science*. 2013;130:2238–2244. DOI: 10.1002/app.39420

4. Babar S., Weaver J. H. Optical constants of Cu, Ag, and Au revisited. *Applied Optics*. 2015; 54: 477–481. <https://doi.org/10.1364/AO.54.000477>
5. Belyaev B. A., Tyurnev V. V. Resonances of Electromagnetic Oscillations in a Spherical Metal Nanoparticle. *Microwave and Optical Technology Letters*. 2016;58(8):1883–1886.
6. Belyaev B. A., Tyurnev V. V. Electrodynamic Calculation of Effective Electromagnetic Parameters of a Dielectric Medium with Metallic Nanoparticles of a Given Size. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2018;127(4):608–619. DOI: 10.1134/S1063776118100114
7. Belyaev B. A., Leksikov An.A., Tyurnev V. V., Shabanov D.A. Study of a Composite Consisting of Metal Nanoparticles in a Dielectric Matrix and Multilayer Bandpass Filters Based on It. *Doklady Physics*. 2021;66(3):59–63. DOI: 10.1134/S1028335821030010
8. Belyaev B. A., Tyurnev V. V., Shabanov D. A. Radiation of a Material Particle Placed in a Dielectric Medium under the Action of Electromagnetic Field. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2022;135(6):796–799. DOI: 10.1134/S1063776122120020
9. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Course of Theoretical Physics. Vol. 8. Electrodynamics of Continuous Media*. Moscow: Nauka; 1982. New York: Pergamon; 1984. 460 p.
10. Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M. *The Feynman lectures on physics*. Vol. II. New York: Basic Books; 2010. 566 c.
11. Nunes F. D., Vasconcelos T. C., Bezerra M., Weiner J. J. Electromagnetic energy density in dispersive and dissipative media. *Journal of the Optical Society of America B*. 2011;28(6):1544–1552. DOI:10.1364/JOSAB.28.001544
12. Grigor'ev A. D. *Elektrodinamika i tekhnika SVCh* [Electrodynamics and microwave techniques]. Moscow: Vysshaya shkola; 1990. 335 p. (In Russ.)
13. Vainshtein L. A. *Elektromagnitnye volny* [Electromagnetic waves]. Moscow: Radio i svyaz'; 1988. 440 p. (In Russ.)
14. Kajfes D., Guilon P. *Dielectric Resonators*. Atlanta: Noble Publishing Corporation; 1998. 571 p.
15. Semenov N. A. *Tekhnicheskaya elektrodinamika* [Technical electrodynamics]. Moscow: Svyaz', 1973. 480 p. (In Russ.)

Информация об авторах

Беляев Борис Афанасьевич, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт физики им. Л. В. Киренского СО РАН; профессор, Сибирский федеральный университет; г. Красноярск, Россия.

Тюрнев Владимир Вениаминович, доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт физики им. Л. В. Киренского СО РАН; г. Красноярск, Россия.

Information about the authors

Boris A. Belyaev, Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Research Scientist, Kirensky Institute of Physics SB RAS, Siberian Federal University; Krasnoyarsk, Russia.

Vladimir V. Tyurnev, Doctor of Technical Sciences, Professor, Senior Research Scientist, Kirensky Institute of Physics SB RAS, Krasnoyarsk, Russia.

Поступила / Received: 02.10.2023

Принята в печать / Accepted: 10.11.2023