

02,12

О дираковской массе хаббардовских фермионов в сильно коррелированном топологическом сверхпроводнике высокого порядка

© С.В. Аксенов, А.Д. Федосеев, М.С. Шустин, А.О. Злотников

Институт физики им. Л.В. Киренского ФИЦ КНЦ СО РАН,
Красноярск, Россия

E-mail: asv86@iph.krasn.ru

Поступила в Редакцию 17 апреля 2023 г.

В окончательной редакции 17 апреля 2023 г.

Принята к публикации 11 мая 2023 г.

Угловые майорановские состояния обладают рядом преимуществ перед классическими майорановскими состояниями в вопросах выполнения топологически защищенных квантовых вычислений. Однако проблема влияния кулоновского отталкивания на фазы высокого порядка, неизбежно возникающая при попытках практической реализации таких систем, изучена слабо. В настоящей работе проанализированы особенности поведения топологического инварианта, описывающего нетривиальную фазу с угловыми модами, для двумерной двухорбитальной модели гибридной структуры в режиме предельно сильных электронных корреляций. С этой целью получены приближенные волновые функции состояний краевого спектра с линейным законом дисперсии и связанные с ними дираковские массы, возникающие при учете сверхпроводящего спаривания в системе.

Ключевые слова: топологические фазы, дираковские фермионы, кулоновское взаимодействие, сильные корреляции, майорановские моды.

DOI: 10.21883/FTT.2023.07.55830.31H

1. Введение

Двумерные топологические сверхпроводники и изоляторы высокого порядка отличаются от традиционных тем, что их бесщелевые возбуждения имеют размерность на два меньше, чем размерность системы [1]. Угловые майорановские состояния, возникая в сверхпроводящих системах, отделены энергетической щелью как от краевых, так и от объемных возбуждений. Учитывая строгую локализацию в углах 2D-системы, такие объекты могут оказаться более привлекательными с точки зрения реализации топологически защищенных квантовых вычислений по сравнению с классическими майорановскими состояниями [2,3].

Одним из возможных способов выявления условий возникновения топологических угловых состояний в 2D-системах является критерий смены знака дираковской массы. Условием для его применения выступает наличие некоторого взаимодействия (например, сверхпроводящего спаривания или гибридизации), которое нарушает одну из симметрий традиционной топологической системы и приводит к появлению массового члена в дираковском законе дисперсии для краевых состояний. Причем знак этой массы должен быть разным на смежных сторонах 2D-структуры. Данная величина как топологический индекс ранее была использована для описания возникновения майорановских угловых мод в различных сверхпроводящих системах без взаимодействия [2,4–6].

Стоит отметить, что на сегодняшний день ведутся активные дискуссии относительно того, какой из

предлагаемых инвариантов наиболее полно описывает топологические фазы высокого порядка как в системах без взаимодействия, так и в ситуации, когда зарядовые корреляции играют существенную роль. Наряду с анализом дираковской массы, вычисление топологических индексов предлагается проводить, например, на основе собственных значений обратной функции Грина [7], электрических мультипольных моментов [8,9], поляризации и других свойств квантовой запутанности [10,11], фазы Берри [12].

В настоящей статье мы проводим подробное аналитическое описание волновых функций краевых состояний 2D топологического изолятора и их дираковской массы, которая возникает при включении сверхпроводящего спаривания и индуцирует нетривиальную фазу, в режиме сильных электронных корреляций при $U \rightarrow \infty$ (где U — интенсивность кулоновского отталкивания на одном узле). На основе полученных выражений анализируется фазовая диаграмма топологического сверхпроводника высокого порядка (ТСВП) и определяются границы применимости критерия, основанного на дираковской массе.

2. Гамильтониан ТСВП в режиме сильных электронных корреляций

Проблему топологической сверхпроводимости высокого порядка в режиме сильных корреляций будем рассматривать на примере модели 2D двухорбитального то-

пологического изолятора на квадратной решетке в форме квадрата, который, как предполагается, находится на поверхности высокотемпературного сверхпроводника с s_{\pm} -типом симметрии параметра порядка [13], например, на основе железа [14]. Вследствие эффекта близости, сверхпроводящее спаривание расширенного s -типа наводится в 2D-структуре. Стоит заметить, что получаемая в итоге зависимость амплитуды спаривания от волнового вектора является принципиально важным фактором для реализации разного знака дираковской массы у краевых состояний на смежных границах. Существенность этого обстоятельства для реализации принципа соответствия между спектральными свойствами системы с периодическими граничными условиями вдоль одного из направлений и системы с открытыми граничными условиями („edge-corner correspondence“) также подчеркивалась в работе [13]. Однако, эти рассуждения были приведены авторами вне контекста дираковской массы.

Как было показано в работе [15], в пределе $U \rightarrow \infty$ при использовании атомного представления гамильтониан данной системы сводится к описанию нижних хаббардовских подзон для каждой орбитали и записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_{f\sigma} \sum_{l=A,B} (-\mu + \eta_l \Delta \varepsilon) X_{fl}^{\sigma\sigma} + \sum_{f\bar{l}\sigma} \sum_{\delta=\pm x, \pm y} \eta_l t_{\delta} X_{fl}^{\sigma 0} X_{f+\delta, \bar{l}}^{0\sigma} \\ & + \sum_{f\bar{l}\sigma} \alpha_{\sigma\delta} X_{fl}^{\sigma 0} X_{f+\delta, \bar{l}}^{0\bar{\sigma}} + \sum_{f\delta\bar{l}} (\Delta_1 X_{fl}^{\uparrow 0} X_{f+\delta, \bar{l}}^{\downarrow 0} + \Delta_1^* X_{f+\delta, \bar{l}}^{0\downarrow} X_{fl}^{0\uparrow}), \end{aligned} \quad (1)$$

где $l = A(B)$ — орбитальный индекс, для которого $\bar{l} = B(A)$ соответственно; μ — химпотенциал, $\Delta \varepsilon$ определяет сдвигку одноузельной энергии для разных орбиталей в силу того, что $\eta_A = +1$, $\eta_B = -1$.

Операторы Хаббарда определяются в стандартном виде: $X_{fl}^{nm} = |fl, n\rangle\langle fl, m|$, где $|fl, n\rangle$ — базисные электронные состояния на узле f для орбитали l . После проектирования с помощью оператора $P = \prod_f \sum_{l=A,B} (X_{fl}^{00} + X_{fl}^{\uparrow\uparrow} + X_{fl}^{\downarrow\downarrow})$ на подпространство состояний, не содержащее состояния с двумя электронами на узле ($n = 2$) в каждой орбитали, набор базисных состояний имеет вид: $n = 0$ — состояние без электронов, $n = \sigma$ — состояние с одним электроном с проекцией спинового момента σ . Отметим, что одноузельные состояния с двумя электронами из разных орбиталей допускаются. Действие операторов Хаббарда на базис состояний определяется в виде

$$X_{fl}^{nm} |f'l', p\rangle = \delta_{ff'} \delta_{ll'} \delta_{mp} |fl, n\rangle,$$

где δ_{ij} — символы Кронекера. Связь исходных фермиевских операторов с хаббардовскими операторами до проектирования записывается в виде $c_{f\sigma} = X_{fl}^{0\sigma} + \sigma X_{fl}^{\bar{\sigma}2}$. Легко убедиться, что с учетом проектирования для гамильтониана (1) переход между операторами записывается в виде: $X_{fl}^{0\sigma} = P c_{f\sigma} P$, $X_{fl}^{\sigma\sigma} = P c_{f\sigma}^{\dagger} c_{f\sigma} P$. Алгебра операторов Хаббарда подробно изложена в [16,17].

В гамильтониане (1) параметр перескока фермионов по узлам решетки удовлетворяет соотношениям $t_{\pm x} = -t_{\pm y} = t$. При этом различие знаков перескоков для разных орбиталей, определяемое множителем η_l , обеспечивает инвертированность затравочных электронных зон. Параметр спин-орбитальной связи обладает свойствами $\alpha_{\sigma, \pm x} = \mp \alpha \sigma$, $\alpha_{\sigma, \pm y} = \pm i \alpha$. Амплитуда куперовских спариваний на ближайших узлах решетки определяется параметром Δ_1 . При этом в пределе $U \rightarrow \infty$ одноузельные куперовские спаривания полностью подавлены хаббардовским отталкиванием.

3. Функции Грина и эффективный гамильтониан

3.1. Уравнения движения для функций Грина

Запишем уравнение движения для оператора $X_{fl}^{0\sigma}(t)$ в гейзенберговском представлении:

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} X_{fl}^{0\sigma}(t) = & (-\mu + \eta_l \Delta \varepsilon) X_{fl}^{0\sigma} \\ & + \sum_{\delta=\pm x, \pm y} t_{\delta} \eta_l [(X_{fl}^{00} + X_{fl}^{\sigma\sigma}) X_{f+\delta, l}^{0\sigma} + X_{fl}^{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} X_{f+\delta, \bar{l}}^{0\bar{\sigma}}] \\ & + \sum_{\delta} [\alpha_{\sigma\delta} (X_{fl}^{00} + X_{fl}^{\sigma\sigma}) X_{f+\delta, \bar{l}}^{0\bar{\sigma}} + \alpha_{\bar{\sigma}\delta} X_{fl}^{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} X_{f+\delta, \bar{l}}^{0\bar{\sigma}}] \\ & + \sum_{\delta} \Delta_1 \sigma [(X_{fl}^{00} + X_{fl}^{\sigma\sigma}) X_{f+\delta, \bar{l}}^{\bar{\sigma}0} - X_{fl}^{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} X_{f+\delta, \bar{l}}^{0\bar{\sigma}}]. \end{aligned} \quad (2)$$

Далее воспользуемся формализмом двухвременных температурных функций Грина, определенных в виде

$$\langle\langle A(t) | B(t') \rangle\rangle = -i \Theta(t - t') \langle \{A(t), B(t')\} \rangle, \quad (3)$$

где $\Theta(t - t')$ — функция Хевисайда, $A(t)$ и $B(t')$ в общем виде могут быть произвольными операторами Хаббарда. При поиске фермиевского спектра возбуждений выбираются операторы фермиевского типа, тогда скобки $\{ \dots \}$ означают антикоммутатор. Воспользуемся приближением Хаббард-I [18], в рамках которого делается простейшее расщепление уравнений движения для функций Грина с выделением корреляторов

$$H_{fl\sigma} = \langle X_{fl}^{00} + X_{fl}^{\sigma\sigma} \rangle = 1 - \langle X_{fl}^{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} \rangle. \quad (4)$$

Последнее равенство следует из условия полноты операторов Хаббарда. Корреляторы $\langle X_{fl}^{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} X_{fl}^{0\sigma} \rangle$, описывающие переворот спина фермиона на узле, также не учитываются в данном приближении. В режиме $U \rightarrow \infty$ приближение Хаббард-I может рассматриваться как хорошее первое приближение, на фоне которого можно учесть корреляционные поправки (см., например, [19–23]). При этом некоторые спектральные [24] и сверхпроводящие [25,26] свойства сильно коррелированных систем удовлетворительно описываются в рамках отмеченного приближения.

Видно, что замкнутая система уравнений движения в используемом приближении получается для набора операторов $X_{fl}^{0\sigma}, X_{f\bar{l}}^{0\bar{\sigma}}, X_{fl}^{\sigma 0}, X_{f\bar{l}}^{\sigma 0}$. Тогда система уравнений для функций Грина на выделенном подпространстве состояний в квазиимпульсном представлении имеет вид

$$G^{-1}(k, \omega) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{C}; \quad (5)$$

$$G^{-1}(k, \omega) = \begin{pmatrix} \omega - \xi_{kl} & \alpha_{kl\sigma} & -\sigma\Delta_{kl} & 0 \\ \alpha_{kl\sigma}^* & \omega - \xi_{k\bar{l}} & 0 & \sigma\Delta_{k\bar{l}} \\ -\sigma\Delta_{kl}^* & 0 & \omega + \xi_{kl} & \alpha_{kl\sigma} \\ 0 & \sigma\Delta_{k\bar{l}}^* & \alpha_{kl\sigma}^* & \omega + \xi_{k\bar{l}} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \langle\langle X_{kl}^{0\sigma} | B \rangle\rangle \\ \langle\langle X_{k\bar{l}}^{0\bar{\sigma}} | B \rangle\rangle \\ \langle\langle X_{kl}^{\sigma 0} | B \rangle\rangle \\ \langle\langle X_{k\bar{l}}^{\sigma 0} | B \rangle\rangle \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{C} = \left(\langle\langle X_{kl}^{0\sigma}, B \rangle\rangle, \langle\langle X_{k\bar{l}}^{0\bar{\sigma}}, B \rangle\rangle, \langle\langle X_{kl}^{\sigma 0}, B \rangle\rangle, \langle\langle X_{k\bar{l}}^{\sigma 0}, B \rangle\rangle \right)^T.$$

Фигурирующая здесь матрица G^{-1} есть аналог обратной матричной функции Грина после аналитического продолжения, полученной в мацубаровском представлении в рамках диаграммной техники в приближении, учитывающем только беспетлевые диаграммы (см. например [17,21,27]). Отличие в том, что здесь корреляторы вычисляются по полному гамильтониану, а не только по его диагональной части. Введены обозначения

$$\begin{aligned} \xi_{kl} &= -\mu + \eta_l \Delta \varepsilon + 2\eta_l t_l (\cos k_x - \cos k_y), \\ \alpha_{kl\sigma} &= \alpha_l (\sin k_y + i\sigma \sin k_x), \\ \Delta_{kl} &= 2\Delta_l (\cos k_x + \cos k_y), \end{aligned} \quad (6)$$

где $t_l = tH_l$, $\alpha_l = 2\alpha H_l$ и $\Delta_l = \Delta_1 H_l$ — ренормированные параметры перескока, спин-орбитальной связи и куперовских спариваний между ближайшими соседями. В рассматриваемом случае хаббардовские ренормировки $H_{fl\sigma} \equiv H_l$ являются однородными на решетке и не зависят от проекции спинового момента, но при $\Delta \varepsilon \neq 0$ они различны для разных орбиталей.

3.2. Эффективный гамильтониан

Для вычисления спектра возбуждений перейдем в новое „квазичастичное“ представление с использованием унитарной матрицы U :

$$G^{-1}\mathbf{V} \rightarrow \mathcal{G}^{-1}\tilde{\mathbf{V}} = UG^{-1}U^+U\mathbf{V} = U\mathbf{C},$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{-1} &= UG^{-1}U^+ \\ &= \text{diag}(\omega - E_{1k}, \omega - E_{2k}, \omega + E_{1k}, \omega + E_{2k}), \end{aligned}$$

собственные значения которой есть E_{jk} ($j = 1, 2$). Последняя запись фактически описывает задачу диагонализации эффективного гамильтониана

$$\tilde{H}(k) = \omega - G^{-1}(k). \quad (7)$$

Для определения дираковской массы первоначально достаточно провести диагонализацию этой матрицы в случае топологического изолятора (без сверхпроводимости, $\Delta_1 = 0$). Тогда матрица эффективного гамильтониана представляется в виде прямой суммы „гамильтонианов“ на электронном и дырочном подпространствах

$$\tilde{H} = \tilde{H}_e \oplus \tilde{H}_h = \begin{pmatrix} \xi_{kl} & -\alpha_{kl\sigma} \\ -\alpha_{k\bar{l}\sigma}^* & \xi_{k\bar{l}} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -\xi_{kl} & -\alpha_{kl\sigma} \\ -\alpha_{k\bar{l}\sigma}^* & -\xi_{k\bar{l}} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Собственные векторы для матриц \tilde{H}_e и \tilde{H}_h будем обозначать как $(u_{k\sigma}, w_{k\bar{\sigma}})^T$ и $(v_{k\sigma}, z_{k\bar{\sigma}})^T$ соответственно.

В данном подходе хаббардовские ренормировки $H_l = 1 - \langle n_l \rangle / 2$ и корреляторы $\langle n_l \rangle$ также определяются без учета поправок от амплитуды сверхпроводящих спариваний ($\Delta_1 = 0$). В результате из связи коррелятора с функцией Грина получаем уравнение самосогласования

$$\langle n_l \rangle \equiv \sum_{\sigma} \langle X_{fl}^{\sigma 0} X_{fl}^{0\sigma} \rangle = H_l I_0 + \eta_l H_l I_1,$$

$$I_0 = \sum_k (f_{1k} + f_{2k}),$$

$$I_1 = \sum_k \frac{1}{\lambda_k} [\Delta \varepsilon + (H_A + H_B)t_k/2](f_{2k} - f_{1k}), \quad (9)$$

где $f_{1,2k}$ — функции Ферми-Дирака, соответствующие ветвям спектра топологического изолятора $\varepsilon_{1,2k}$ при рассмотрении периодических граничных условий

$$\varepsilon_{1,2k} = -\mu + \frac{H_A - H_B}{2} t_k \mp \lambda_k,$$

$$\lambda_k = \sqrt{(\Delta \varepsilon + (H_A + H_B)t_k/2)^2 + \alpha_{kA\sigma}\alpha_{kB\bar{\sigma}}}. \quad (10)$$

В дальнейшем при вычислении спектров возбуждений и дираковских масс рассматривается предел нулевой температуры и температурные поправки в (9) не учитываются.

3.3. Континуальное описание

Рассмотрим систему в окрестности симметричных точек $(k_{x0}, k_{y0}) = (0, \pi)$, $(k_{x0}, k_{y0}) = (\pi, 0)$, в которых возможна реализация инверсии зон топологического изолятора [13]. Тогда

$$\begin{aligned} \cos k_x &\rightarrow c_x - \frac{1}{2} c_x (k_x - k_{x0})^2; \\ \sin k_x &\rightarrow c_x (k_x - k_{x0}); \quad c_x = \cos k_{x0}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \cos k_y &\rightarrow c_y - \frac{1}{2} c_y (k_y - k_{y0})^2; \\ \sin k_y &\rightarrow c_y (k_y - k_{y0}); \quad c_y = \cos k_{y0}, \end{aligned} \quad (12)$$

Далее, для перехода к континуальному описанию, сделаем замены

$$k_x - k_{x0} \rightarrow -i\partial_x, \quad k_y - k_{y0} \rightarrow -i\partial_y,$$

а электронно- и дырочноподобные волновые функции эффективного гамильтониана с квазиимпульсами p и q соответственно, будем искать в виде:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_{k\sigma} \\ w_{k\bar{\sigma}} \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} u_\sigma \\ w_{\bar{\sigma}} \end{pmatrix} e^{i(p_x x + p_y y)}; \\ \begin{pmatrix} u_{k\sigma} \\ z_{k\bar{\sigma}} \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} u_\sigma \\ z_{\bar{\sigma}} \end{pmatrix} e^{i(q_x x + q_y y)}, \end{aligned} \quad (13)$$

где векторы $(u_\sigma, w_{\bar{\sigma}})^T$ и $(v_\sigma, z_{\bar{\sigma}})^T$ имеют смысл огибающих электронно- и дырочноподобных волновых функций. Производя переход к континуальному описанию, получим, что задача на собственные значения для электронного подпространства имеет вид (далее $m_l = -\mu + \eta_l \Delta \varepsilon + 2t_l \eta_l (c_x - c_y)$):

$$\begin{aligned} (E - \mathcal{H}_e) \mathbf{U}_e &= \begin{pmatrix} E - m_l + \eta_l t_l (c_x p_x^2 - c_y p_y^2) & \alpha_l (c_y p_y + i \sigma c_x p_x) \\ \alpha_l (c_y p_y - i \sigma c_x p_x) & E - m_l - \eta_l t_l (c_x p_x^2 - c_y p_y^2) \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} u_{l\sigma} \\ w_{l\bar{\sigma}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

При этом задача для дырочного подпространства $(E - \mathcal{H}_h) \mathbf{U}_h = \mathbf{0}$ получается из описанной выше заменой $m_l \rightarrow -m_l, t_l \rightarrow -t_l$. Поэтому в дальнейшем полученные результаты обобщаются и на этот случай.

Следует отметить, что при вычислении спектра возбуждений и волновых функций краевых мод в ограниченной решетке система уравнений (14) должна быть расширена в силу того, что хаббардовские перенормировки становятся зависимыми от координаты. Однако для определения дираковских масс, отношение которых выступает в роли топологического инварианта в топологических системах высокого порядка, и построения топологической фазовой диаграммы достаточно ограничиться рассмотрением идеализированной границы, для которой корреляторы $\langle n_l \rangle$ определяются из уравнения (9), полученного для периодических граничных условий, а параметры гамильтониана (1) не изменяются вблизи границ. Иными словами, реальная система с границами должна описываться с учетом соответствующих поправок, которые, однако, не приводят к изменению принципиальных выводов о существовании и области реализации топологически защищенных состояний. Такой подход ранее применялся, например, в работах [15,28].

В этой связи для вычисления топологического инварианта будем использовать систему уравнений для случая однородных корреляторов (14), для которой вид решения зависит от рассматриваемой границы решетки. Для поиска условий формирования топологических угловых состояний на квадратной решетке в форме квадрата достаточно ограничиться простыми случаями:

– если граница расположена вдоль оси Ox , тогда

$$p_x \rightarrow p, \quad p_y \rightarrow i\lambda: \quad \Im(p) = 0, \quad \Re(\lambda) > 0,$$

– если граница расположена вдоль оси Oy , тогда

$$p_x \rightarrow iv, \quad p_y \rightarrow q: \quad \Im(q) = 0, \quad \Re(v) > 0.$$

4. Вычисление дираковской массы

Рассмотрим подробно случай, когда граница системы расположена вдоль оси Ox . Тогда уравнение Шредингера примет вид

$$\begin{aligned} (E - \mathcal{H}_e) \mathbf{U}_e &= \begin{pmatrix} E - m_l + \eta_l t_l (c_x p^2 + c_y \lambda^2) & i \alpha_l (c_y \lambda + \sigma c_x p) \\ i \alpha_l (c_y \lambda - \sigma c_x p) & E - m_l - \eta_l t_l (c_x p^2 + c_y \lambda^2) \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} u_{l\sigma} \\ w_{l\bar{\sigma}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (15)$$

Условие на существование решения такой системы имеет вид

$$\begin{aligned} \det(E - \mathcal{H}_e) &= -t_{AtB} \lambda^4 + (b_1 E + b_0) \lambda^2 \\ &+ (E^2 + c_1 E + c_0) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= c_y (t_A - t_B); \\ b_0 &= -2c_x c_y t_{AtB} p^2 + \alpha_A \alpha_B - c_y (t_A m_B - t_B m_A); \\ c_1 &= c_x (t_A - t_B) p^2 - m_A - m_B; \\ c_0 &= -t_{AtB} p^4 - (c_x (t_A m_B - t_B m_A) + \alpha_A \alpha_B) p^2 + m_A m_B. \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда имеем два решения для $r = \lambda^2$:

$$r_{1,2} = \frac{b_1 E + b_0}{2t_{AtB}} \pm \frac{\sqrt{(b_1 E + b_0)^2 + 4t_{AtB} (E^2 + c_1 E + c_0)}}{2t_{AtB}}. \quad (18)$$

В используемом подходе для краевых состояний, волновые функции которых спадают с ростом расстояния от границы, решения должны удовлетворять условию $\Re(\lambda) > 0$. При этом в актуальной области параметров корни $r_{1,2}$ являются комплексно сопряженными. В этом случае

$$\begin{aligned} \lambda_1 \neq \lambda_2 &\implies \Psi(x, y) \\ &= C_1 \begin{pmatrix} u_{1l\sigma} \\ w_{1l\bar{\sigma}} \end{pmatrix} e^{ipx - \lambda_1 y} + C_2 \begin{pmatrix} u_{2l\sigma} \\ w_{2l\bar{\sigma}} \end{pmatrix} e^{ipx - \lambda_2 y}. \end{aligned} \quad (19)$$

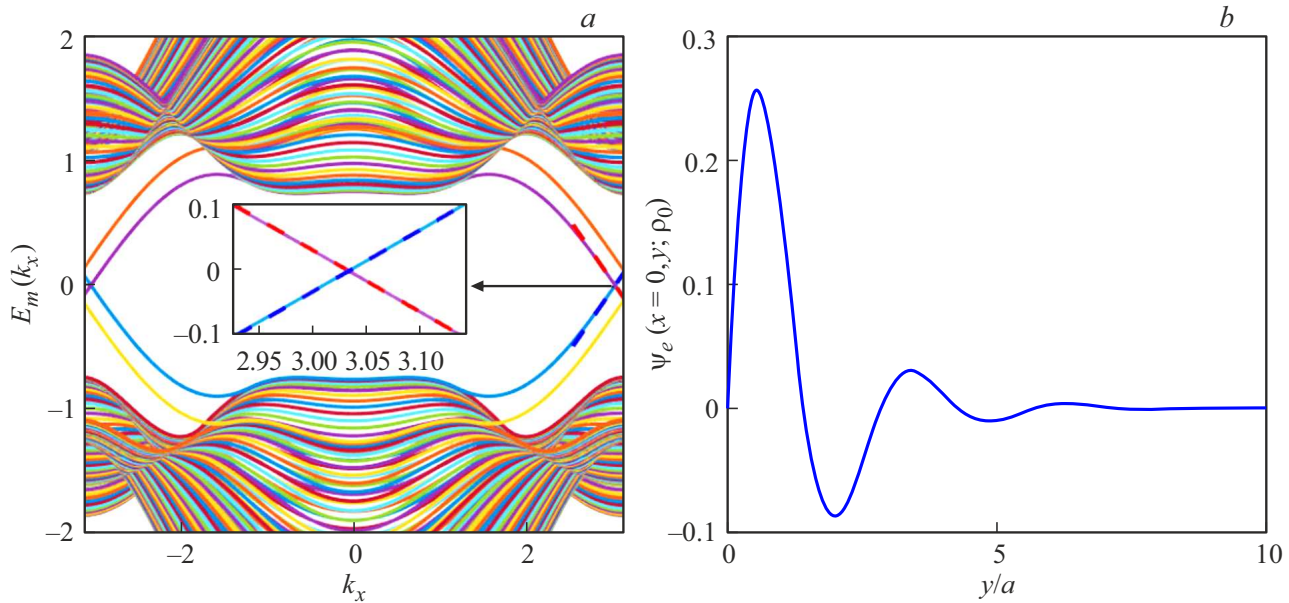


Рис. 1. *a)* Спектр возбуждений системы: сплошные линии — результат численной диагонализации эффективного гамильтониана (7) при периодических граничных условиях вдоль оси Ox с числом узлов 1000 и открытых граничных условиях вдоль оси Oy со 100 узлами; различные сплошные линии соответствуют различным значениям индекса m ; пунктирные линии — результат вычислений по формуле (23). На вставке — дираковский спектр красевых состояний в увеличенном масштабе. *b)* Поведение электронноподобной волновой функции для квазиимпульса, отвечающего вершине конуса дираковского спектра; a — параметр решетки. Параметры системы в единицах t : $\mu = -0.25$, $\alpha = 3/4$, $\Delta\varepsilon = 1$, $k_{x0} = \pi$, $k_{y0} = 0$, $\sigma = +1$.

Из граничного условия $\Psi(x, y = 0) = 0$ получаем уравнения на коэффициенты $C_{1,2}$:

$$\begin{pmatrix} u_{1l\sigma} & u_{2l\sigma} \\ w_{1l\bar{\sigma}} & w_{2l\bar{\sigma}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$u_{1,2;l\sigma} = -i\alpha_l(c_y\lambda_{1,2} + \sigma c_x p);$$

$$w_{1,2;l\bar{\sigma}} = E - m_l + \eta_l t_l(c_x p^2 + c_y \lambda_{1,2}^2). \quad (20)$$

Условие разрешимости этой системы сводится к уравнению

$$\eta_l \sigma c_x t_l p (\lambda_1 + \lambda_2) = -\eta_l c_y t_l \lambda_1 \lambda_2 + E - (m_l - \eta_l c_x t_l p^2). \quad (21)$$

Для $\lambda_{1,2}$ выполняются соотношения

$$\lambda_1^2 \lambda_2^2 = -\frac{E^2 + c_1 E + c_0}{t_A t_B}; \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{b_1 E + b_0}{t_A t_B}. \quad (22)$$

Данные комбинации можно получить, дважды возводя в квадрат уравнение (21). В результате получается уравнение 4-ой степени по ω , которое, как легко убедиться, обладает линейным по p решением (при $t > 0$, $\alpha > 0$):

$$E = \sigma c_x s(p - p_0); \quad s = 4 \frac{H_A H_B}{H_A + H_B} \alpha,$$

$$p_0 = -\sigma c_x \frac{-\mu(H_A + H_B) - \Delta\varepsilon(H_A - H_B)}{4H_A H_B \alpha}. \quad (23)$$

Случай без кулоновского взаимодействия получается из (23), если положить $H_A = H_B = 1$. В этом случае

видно, что $p_0 = 0$ при $\mu = 0$ и дираковский конус центрирован в точности в точке разложения (в данном случае $k_{x0} = \pi$). Появление хаббардовских ренормировок в режиме сильных корреляций приводит к смещению центра дираковского конуса в том числе при $\mu = 0$ (смещение относительно точки k_{x0} определяется p_0). Сравнение аналитического выражения для линейной части спектра возбуждения (штриховые линии) и численного расчета спектра системы (сплошные линии) с границей вдоль оси Ox представлены на рис. 1. Слева на рис. 1 представлено сравнение аналитических и численных расчетов. Численные расчеты проводились посредством диагонализации эффективного гамильтониана (7) с периодическими граничными условиями вдоль направления Ox и открытыми граничными условиями вдоль направления Oy . Это позволило ввести квазиимпульс k_x . При этом хаббардовские ренормировки H_l в формуле (4) вычислялись самосогласованно со спектром возбуждений E_{k_x} в предположении о периодических граничных условиях вдоль обоих пространственных направлений. Аналитическое построение дираковского спектра осуществлялось с использованием формулы (23). Аналогичные уравнения для дырочных компонент можно получить заменой $E \rightarrow -E$, которые также приведены на рис. 1. Легко убедиться, что дираковский спектр возникает симметрично и для отрицательных квазиимпульсов.

Входящие в (23) комбинации хаббардовских ренормировок с помощью уравнений самосогласования (9)

можно представить в виде

$$\frac{H_A H_B}{H_A + H_B} = \frac{1}{2 + I_0}, \quad \frac{H_A H_B}{H_A - H_B} = -\frac{1}{I_1}. \quad (24)$$

В наиболее интересном случае, когда хипотенициал лежит в щели между ветвями спектра $\varepsilon_{1,2k}$ и формируются краевые состояния, $I_0 = 1$ в пределе нулевой температуры. Тогда при учете сильных корреляций коэффициент наклона дираковского конуса уменьшается в 1.5 раза по сравнению со случаем отсутствия взаимодействия, для которого $s = 2\alpha$.

Используя решение системы уравнений (20), общий вид волновой функции краевого состояния можно записать в виде

$$\Psi_{Ox}^{(e)}(x, y; p) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}_x \mathcal{N}_y}} F_y e^{ipx},$$

где нормировочные множители $\mathcal{N}_x = \int_0^{L_x} dx$, $\mathcal{N}_y = \int_0^\infty (F_y^+ F_y) dy$, $L_x = N_x a$ — размер решетки вдоль оси Ox , а

$$F_y = \begin{pmatrix} u_{1\sigma} u_{2\sigma} \\ w_{1\bar{\sigma}} u_{2\sigma} \end{pmatrix} e^{-\lambda_1 y} - \begin{pmatrix} u_{1\sigma} u_{2\sigma} \\ u_{1\sigma} w_{2\bar{\sigma}} \end{pmatrix} e^{-\lambda_2 y}. \quad (25)$$

При этом, как отмечалось ранее, интересен случай, когда $\lambda_1 = \lambda_2^* = \lambda$. В этом случае выражение для волновых функций можно привести к простой форме. Для такого упрощения учтем, что из системы уравнений (20) следует равенство $\omega_{1\bar{\sigma}} u_{2\sigma} = u_{1\sigma} \omega_{2\bar{\sigma}}$. Далее, из (20) получаем, что $u_{1\sigma} = -u_{2\sigma}^*$ и $w_{1\bar{\sigma}} = w_{2\bar{\sigma}}^*$. В результате находим $w_{2\bar{\sigma}} = i u_{2\sigma}$. Тогда легко прийти к следующим выражениям для волновых функций краевых состояний

$$\Psi_{Ox}^{(e)}(x, y; p) = \sqrt{\frac{2\lambda'}{\mathcal{N}_x}} \left(\frac{|\lambda|}{|\lambda''|} \right) \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{ipx - \lambda'y} \sin(\lambda''y). \quad (26)$$

$$\Psi_{Ox}^{(h)}(x, y; p) = \sqrt{\frac{2\lambda'}{\mathcal{N}_x}} \left(\frac{|\lambda|}{|\lambda''|} \right) \begin{pmatrix} -i \\ -1 \end{pmatrix} e^{ipx - \lambda'y} \sin(\lambda''y). \quad (27)$$

В последних выражениях $\lambda' = \Re(\lambda)$, $\lambda'' = \Im(\lambda)$. Учитывая это, получаем окончательное выражение для дираковской массы в случае границы вдоль оси Ox (достаточно рассмотреть $p = p_0$):

$$M_{Dx} = (\Psi_{Ox}^{(e)}, \hat{\Delta} \Psi_{Ox}^{(h)}) = \frac{1}{2} \Delta_1 \sigma (H_A + H_B) [2(c_x + c_y) - c_x p_0^2 - c_y |\lambda|^2];$$

$$\hat{\Delta} = \sigma \Delta_1 (2c_x + 2c_y + c_x \partial_x^2 + c_y \partial_y^2) \begin{pmatrix} H_l & 0 \\ 0 & -H_l \end{pmatrix};$$

$$|\lambda|^2 = \sqrt{\frac{t_A t_B p_0^4 + (c_x (t_A m_B - t_B m_A) + \alpha_A \alpha_B) p_0^2 - m_A m_B}{t_A t_B}}. \quad (28)$$

Оператор $\hat{\Delta}$ получен из недиагональных блоков матрицы (5) при переходе к континуальному описанию.

Действуя аналогично, нетрудно получить волновые функции краевого состояния в случае периодических граничных условий по оси Oy и открытых граничных условий вдоль оси Ox :

$$\Psi_{Oy}^{(e)}(x, y; q) = i \sqrt{\frac{2v'}{\mathcal{N}_y}} \left(\frac{|v|}{|v''|} \right) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{iqy - v'x} \sin(v''x), \quad (29)$$

$$\Psi_{Oy}^{(h)}(x, y; q) = i \sqrt{\frac{2v'}{\mathcal{N}_y}} \left(\frac{|v|}{|v''|} \right) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{iqy - v'x} \sin(v''x). \quad (30)$$

В последнем выражении $v' = \Re(v)$, $v'' = \Im(v)$, $\mathcal{N}_y = \int_0^{L_y} dy$, $L_y = N_y a$ — размер решетки вдоль оси Oy . Следовательно, матричный элемент оператора взаимодействия, вызванного наведенным сверхпроводящим спариванием, при границе вдоль оси Oy имеет вид:

$$M_{Dy} = (\Psi_{Oy}^{(e)}, \hat{\Delta} \Psi_{Oy}^{(h)}) = \frac{1}{2} \Delta_1 \sigma (H_A + H_B) [2(c_x + c_y) - c_x |v|^2 - c_y q_0^2];$$

$$|v|^2 = \sqrt{\frac{t_A t_B q_0^4 - (c_y (t_A m_B - t_B m_A) - \alpha_A \alpha_B) q_0^2 - m_A m_B}{t_A t_B}},$$

$$q_0^2 = p_0^2. \quad (31)$$

5. Топологический инвариант для угловых мод

Как известно, смена знака дираковской массы на смежных идеализированных границах 2D топологического сверхпроводника высокого порядка свидетельствует о формировании топологически защищенных угловых майорановских мод. В этой связи аналогом топологического инварианта для таких состояний может служить отношение дираковских масс, полученных в рамках описанного подхода на границах вдоль осей Ox и Oy :

$$\frac{M_{Dx}}{M_{Dy}} = \frac{2(c_x + c_y) - c_x p_0^2 - c_y |\lambda|^2}{2(c_x + c_y) - c_x |v|^2 - c_y p_0^2}. \quad (32)$$

Для рассматриваемых точек (k_x, k_y) $c_x = -c_y$. Тогда $|v|^2 = |\lambda|^2$, и отношение дираковских масс равно -1 во всей области, где существует решение с линейным спектром (23). Данная область определяется из условия, что объемный энергетический спектр топологического изолятора (без сверхпроводящих спариваний) с периодическими граничными условиями обладает щелью, т.е. хипотенициал лежит между нижними хаббардовскими подзонами (см. (10)). В этой связи при вычислениях используются хаббардовские перенормировки, определяемые именно уравнениями (9) без учета граничных эффектов. Границы данной фазы показаны на рис. 2 на

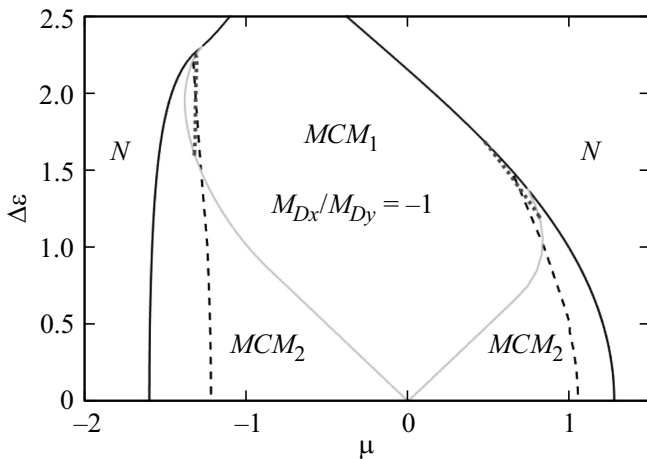


Рис. 2. Топологическая фазовая диаграмма ТСВП с фазой MCM_1 , в которой отношение дираковских масс, равно -1 , допускает реализацию майорановских угловых мод. В фазе MCM_2 дираковское решение отсутствует, однако в ней также могут формироваться майорановские угловые моды (объяснение приведено в тексте статьи). В нодальных фазах N объемный спектр ТСВП является бесщелевым, и топологических состояний не возникает. Штриховыми линиями показаны условия закрытия щели в краевом спектре ТСВП в рассмотренном приближенном подходе, однако на данных линиях топологических переходов не происходит. Пунктирные линии в фазе MCM_1 — приближенные решения, полученные из обращения в нуль дираковских масс. Параметры $\alpha = 3/4$, $\Delta_1 = 0.5$.

диаграмме в переменных $\mu - \Delta\varepsilon$ сплошными светлыми линиями для параметров $\alpha = 3/4$, $\Delta_1 = 0.5$, а сама фаза обозначена MCM_1 .

Как показано выше, сверхпроводящие спаривания в данной фазе индуцируют массу в дираковском спектре топологического изолятора, и в силу того, что дираковские массы для смежных границ обладают разным знаком, могут приводить к формированию майорановских угловых мод в 2D-системе с открытыми граничными условиями. Когда химпотенциал пересекает хаббардовские подзоны, объемный спектр становится бесщелевым, в результате чего в ограниченной системе характер решения при нулевой энергии изменяется и включает вклады от объемных состояний и от границ. Поэтому в данной области параметров развитый подход к определению дираковских масс становится неприменимым.

Как обычно, при переходе к ограниченной 2D-решетке энергия возбуждения майорановских угловых мод определяется только степенью перекрытия волновых функций локализованных мод на разных углах. Таким образом, с увеличением размеров решетки (числа узлов $N_{x,y}$ вдоль границы) энергия возбуждения майорановских угловых мод становится экспоненциально малой $\sim \exp(-N_{x,y})$, а энергия следующего по величине возбуждения определяется дираковской массой $\sim \Delta_1$ и со-

ответствует состоянию, локализованному вдоль границ решетки.

Однако угловые моды с нулевой энергией могут существовать внутри более широкой области, границы которой отмечены на рис. 2 темными сплошными линиями. Данные линии определяют границы между нодальными фазами, обозначенными N , в которых объемный спектр возбуждений является бесщелевым даже при учете сверхпроводящих спариваний, и областями с щелью в объемном спектре, индуцируемой сверхпроводимостью. Отметим, что указанные границы определяются из анализа квазичастичного спектра системы с периодическими граничными условиями, найденного с помощью (5) при учете куперовских спариваний. Для этой системы хаббардовские перенормировки являются пространственно однородными на решетке. Таким образом, в областях, заключенных между темными и светлыми сплошными линиями и обозначенных MCM_2 , реализуется иной механизм формирования угловых мод по сравнению с описанным выше. В областях MCM_2 объемный спектр топологического изолятора является бесщелевым, в результате чего решений типа (26)–(29) при рассмотрении идеализированных границ не существует. Учет сверхпроводимости индуцирует щель как в объемном, так и в краевом спектрах, а не только приводит к формированию дираковской массы в линейном спектре вдоль границ, как в фазе MCM_1 . При этом для 2D-системы с открытыми граничными условиями в параметрических фазах MCM_2 также могут появляться нулевые угловые моды (см. [15]). Из рис. 2 видно, что при учете сверхпроводимости переход между фазами MCM_1 и MCM_2 может быть реализован без какого-либо закрытия щели в спектре (левее штриховой линии в области отрицательных значений химпотенциала и правее штриховой линии при положительных μ). В результате угловые моды в фазах MCM_2 также могут являться майорановскими.

В работе [15] также были найдены области реализации топологически тривиальных фаз в рассмотренной модели, которые обозначались 0. На рис. 2 эти фазы не приведены, так как они граничат с фазами N при более низких и более высоких значениях химпотенциала, чем рассмотренный в данной работе интервал значений μ . При этом данные области являются тривиальными без краевых состояний, так как они соответствуют либо полностью пустым, либо полностью заполненным хаббардовским зонам в модели топологического изолятора. Поэтому подход с использованием дираковских масс в данных фазах также неприменим, как и в областях N и MCM_2 .

Следует отметить, что дираковские массы могут обращаться в 0. Аналитические выражения, полученные в рамках рассмотренного приближенного подхода, для параметров, при которых $M_{Dx} = M_{Dy} = 0$ определяются в виде (в соответствии с положением дираковской точки

на рис. 1, здесь рассматривается $c_x = -1$):

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{c1,2} = & -\mu \frac{H_A + H_B}{H_A - H_B} - 2 \frac{H_A H_B}{H_A - H_B} \frac{H_A + H_B}{H_A - H_B} \frac{\alpha^2}{t} \\ & + 2 \frac{H_A H_B}{H_A - H_B} \frac{\alpha}{t} \sqrt{\left(\frac{H_A + H_B}{H_A - H_B} \right)^2 \alpha^2 + 8t^2 + 4 \frac{\mu t}{H_A - H_B}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Полученные решения обозначены пунктирными линиями на рис. 2. Как отмечалось ранее, входящие в выражение (33) хаббардовские множители не зависят от номера узла в решетке и должны удовлетворять уравнениям самосогласования (9) при выбранных параметрах. Новые комбинации хаббардовских ренормировок можно также представить через интегралы I_0, I_1 , определенные в (9):

$$\frac{H_A + H_B}{H_A - H_B} = -\frac{2 + I_0}{I_1}, \quad \frac{1}{H_A - H_B} = -\frac{(2 + I_0)^2 - I_1^2}{4I_1}. \quad (34)$$

Тогда с помощью (24) выражение (33) можно переписать через I_0 и I_1 , которые, однако, сами зависят от H_A, H_B .

Нулевые дираковские массы свидетельствуют о закрытии щели в краевом спектре при учете сверхпроводящих спариваний. При этом данные условия следует рассматривать только в фазе MCM_1 с $M_{Dx}/M_{Dy} = -1$, так как в других областях дираковского решения не существует. На рис. 2 видно, что пунктирные линии с нулевыми дираковскими массами в фазе с $M_{Dx}/M_{Dy} = -1$ формируются только вблизи границ фазы. При этом, как показано выше, формирование бесщелевых возбуждений на этих линиях не изменяет соотношение $M_{Dx}/M_{Dy} = -1$ и не приводит к топологическому переходу.

Штриховыми линиями показаны условия реализации бесщелевых возбуждений в краевом спектре топологического сверхпроводника высокого порядка, полученные в рамках численного решения также при рассмотрении постоянных значений корреляторов на решетке (9). Видно, что в фазе $M_{Dx}/M_{Dy} = -1$ аналитическое приближенное решение примерно соответствует численному. Отличия связаны с тем, что вблизи границ фазы смещение p_0 относительно точек (k_{x0}, k_{y0}) увеличивается до ≈ 0.5 , в результате чего разложение (11) становится неточным. Наиболее хорошо развитый подход работает вдали от границ внутри фазы MCM_1 (см. рис. 1).

Следует отметить, что граничные эффекты, например зависимость хаббардовских перенормировок от расстояния до границ решетки, могут изменять положение штриховой линии. Однако это не скажется на описании топологической фазовой диаграммы, до тех пор, пока штриховая линия пересекает область фазы MCM_1 . Из того факта, что в этой фазе реализация бесщелевых возбуждений в краевом спектре топологического сверхпроводника высокого порядка не приводит к изменению топологического инварианта — отношения дираковских масс и, соответственно, к топологическому фазовому переходу, следует, что в областях MCM_2 топологические

состояния должны быть эквивалентны состояниям в MCM_1 . Отметим, что в работах [13,15] такой переход индуцировался за счет изменения амплитуды Δ_0 одноузельных сверхпроводящих спариваний, которые полностью подавлены при большой величине кулоновского отталкивания. В результате майорановские угловые моды должны формироваться как слева, так и справа от штриховых линий в областях MCM_2 .

6. Заключение

Для вычисления топологического инварианта — отношения дираковских масс на смежных границах топологического сверхпроводника высокого порядка при формировании ансамбля хаббардовских фермионов в режиме предельно сильных кулоновских корреляций (параметр взаимодействия $U \rightarrow \infty$) получены приближенные аналитические выражения для волновых функций краевых состояний вблизи границ 2D-решетки и соответствующего им дираковского энергетического спектра в пренебрежении неоднородностями вблизи границы. Это позволило подробно описать топологически нетривиальную фазу, которая допускает формирование майорановских нулевых мод в ограниченной 2D-системе.

По сравнению с результатами для модели без взаимодействий, приближенный дираковский спектр, полученный для расчета дираковской массы с учетом корреляций, имеет уменьшенный угол наклона и смещенную дираковскую точку. Как и в случае отсутствия взаимодействий, формирование сверхпроводящих спариваний, например, за счет эффекта близости в структуре топологического изолятор–сверхпроводник, приводит к открытию энергетической щели в краевом спектре возбуждений (ненулевой дираковской массе). При этом показано, что во всей параметрической области реализации отмеченных решений дираковские массы на смежных границах квадратной решетки имеют разные знаки, приводя к формированию фазы топологической сверхпроводимости высокого порядка, в которой должны формироваться майорановские моды, локализованные в углах решетки.

В ограниченных областях параметров с бесщелевыми возбуждениями в объемном энергетическом спектре топологического изолятора, полученном при рассмотрении периодических граничных условий вдоль обоих направлений квадратной решетки, также продемонстрирована возможность формирования угловых мод. В этих областях дираковского решения для краевых состояний не существует, и предложенный в работе подход к определению дираковских масс становится неприменимым. Однако в этом случае куперовские спаривания могут индуцировать щель как в объемном, так и в краевом спектре. Показано, что данные фазы могут быть связаны с фазой с нетривиальным отношением дираковских масс на разных границах посредством изменения параметров без закрытия щелей в спектрах обоих типов. Таким об-

разом, угловые моды, возникающие в рассматриваемых областях, также являются топологически защищенными.

Доказано, что в фазе топологической сверхпроводимости высокого порядка закрытие щели в краевом спектре не приводит к топологическому фазовому переходу. Остальные области параметров соответствуют нодальным фазам, в которых объемный спектр остается бесщелевым даже при наличии сверхпроводимости, либо топологически тривиальным фазам, описанным ранее.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда № 22-22-20076, Красноярского краевого фонда науки.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] A.O. Zlotnikov, M.S. Shustin, A.D. Fedoseev. *J. Supercond. Nov. Magn.* **34**, 3053 (2021).
- [2] S.-B. Zhang, W.B. Rui, A. Calzona, S.-J. Choi, A.P. Schnyder, B. Trauzettel. *Phys. Rev. Res.* **2**, 043025 (2020).
- [3] S.-B. Zhang, A. Calzona, B. Trauzettel. *Phys. Rev. B* **102**, 100503(R) (2020).
- [4] J. Langbehn, Y. Peng, L. Trifunovic, F. von Oppen, P.W. Brouwer. *Phys. Rev. Lett.* **119**, 246401 (2017).
- [5] E. Khalaf. *Phys. Rev. B* **97**, 205136 (2018).
- [6] A.D. Fedoseev. *Phys. Rev. B* **105**, 155423 (2022).
- [7] H. Li, H.-Y. Kee, Y.B. Kim. *Phys. Rev. B* **106**, 155116 (2022).
- [8] W.A. Benalcazar, B.A. Bernevig, T.L. Hughes. *Phys. Rev. B* **96**, 245115 (2017).
- [9] W.A. Wheeler, L.K. Wagner, T.L. Hughes. *Phys. Rev. B* **100**, 245135 (2019).
- [10] T. Fukui, Y. Hatsugai. *Phys. Rev. B* **98**, 035147 (2018).
- [11] Y. You, J. Bibo, F. Pollmann. *Phys. Rev. Res.* **2**, 033192 (2020).
- [12] H. Araki, T. Mizoguchi, Y. Hatsugai. *Phys. Rev. Res.* **2**, 012009 (2020).
- [13] Q. Wang, C.-C. Liu, Y.-M. Lu, F. Zhang. *Phys. Rev. Lett.* **121**, 186801 (2018).
- [14] P.J. Hirschfeld, M.M. Korshunov, I.I. Mazin. *Rev. Mod. Phys.* **74**, 124508 (2011).
- [15] S.V. Aksenov, A.D. Fedoseev, M.S. Shustin, A.O. Zlotnikov. *Phys. Rev. B* **107**, 125401 (2023).
- [16] Ю.А. Изюмов. УФН **167**, 465 (1997).
- [17] В.В. Вальков, С.Г. Овчинников. *Квазичастицы в сильнокоррелированных системах*. СО РАН, Новосибирск (2001); *Hubbard Operators in the Theory of Strongly Correlated Electrons*, Imperial College Press, London (2004).
- [18] J. Hubbard. *Proc. Roy. Soc. A* **276**, 238 (1963).
- [19] Р.О. Зайцев. *ЖЭТФ* **70**, 1100 (1976).
- [20] Е.В. Кузьмин, С.Г. Овчинников. *ТМФ* **31**, 379 (1977).
- [21] В.В. Вальков, Д.М. Дзедзисашвили. *ЖЭТФ* **134**, 791 (2008).
- [22] В.В. Вальков, Д.М. Дзедзисашвили. *ФТТ* **51**, 833 (2009).
- [23] В.В. Вальков, М.М. Коровушкин. *ЖЭТФ* **139**, 126 (2011).
- [24] C. Grober, R. Eder, W. Hanke. *Phys. Rev. B* **62**, 4336 (2000).
- [25] Р.О. Зайцев, В.А. Иванов. *ФТТ* **29**, 2554 (1987).
- [26] A.V. Rozhkov, A.L. Rakhmanov. *J. Phys. Condens. Matter* **23**, 065601 (2011).
- [27] В.В. Вальков, А.О. Злотников. *Письма в ЖЭТФ* **104**, 512 (2016).
- [28] В.В. Вальков. *Письма в ЖЭТФ* **111**, 772 (2020).

Редактор Е.Ю. Флегонтова