Письма в ЖЭТФ, том 117, вып. 12, с. 929 – 934

Зависимость скорости релаксации когерентных состояний от числа коррелированных спинов и порядка когерентности

В. Е. Зобов[+], *А. А. Лундин**[1)]

[+]*Институт физики им. Л. В. Киренского Сибирского отделения РАН – обособленное подразделение Федерального исследовательского центра "Красноярский научный центр Сибирского отделения РАН", 660036 Красноярск, Россия*

[*]*Федеральный исследовательский центр химической физики им. Н. Н. Семенова РАН, 117977 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 28 марта 2023 г.
После переработки 17 мая 2023 г.
Принята к публикации 18 мая 2023 г.

Рассматривается релаксация компонент многоквантового спектра ЯМР твердого тела под влиянием диполь-дипольных взаимодействий на периоде эволюции. Учтено, что на подготовительном периоде образуются кластеры динамически коррелированных спинов разных размеров, деградация которых зависит от их размера и порядка когерентности. Для расчетов функции распределения кластеров по размерам и функции их деградации предложена и развивается физическая модель, позволившая получить для многоквантового спектра аналитический результат, учитывающий релаксационные процессы. Получено согласие теоретических и экспериментальных зависимостей скоростей деградации когерентности в адамантане, масштабируемых на квадратный корень из среднего размера кластера. Из сравнения этих зависимостей между собой найдены параметры вышеупомянутых функций.

DOI: 10.31857/S1234567823120091, EDN: ewirns

Процессы возникновения и разрастания динамических корреляций между частицами, и их релаксации, вызываемой различными механизмами деградации, играют фундаментальную роль в физике многих тел. Прежде подобного рода исследования проводились, в целях развития неравновесной статистической механики [1]. Однако в настоящее время их изучение стало необходимым для практической реализации квантовых приборов и технологий [2–4]. В том числе при создании и применении так называемых NISQ-компьютеров [5, 6] (*Noisy intermediate-scale quantum computers*), размер которых ограничен процессами декогерентизации. Например, в работе [7] NISQ-компьютер реализован на динамически коррелированных спинах ядер ^{1}H в поликристаллическом адамантане. Управление спиновой системой осуществляется методами ядерного магнитного резонанса (ЯМР) с помощью последовательности когерентных радиочастотных (РЧ) импульсов. В условиях эксперимента достигнутый размер регистра составлял 25 спинов.

Среди методов изучения многочастичных динамических корреляций выделяется многоквантовая (МК) ЯМР спектроскопия твердых тел [8, 9]. В МК экспериментах, посредством облучения спиновой системы последовательностью когерентных РЧ импульсов, исследователи преобразуют гамильтониан межъядерных спин-спиновых взаимодействий (как правило – диполь-дипольный) в некоторый "запланированный" заранее межъядерный спин-спиновый гамильтониан, называемый эффективным. Затем, с его помощью, не только наблюдают развитие многоспиновых корреляций (среди нескольких тысяч спинов) [10–13], но и управляют ростом этих корредяций и их деградацией [8, 14–16]. Несмотря на большое число публикуемых работ, в этой области по-прежнему присутствует множество нерешенных проблем [15, 16]. Одной из центральных (но и наиболее сложных) проблем в области МК спиновой динамики является описание деградации больших МК кластеров в зависимости от размера и квантового числа (порядка когерентности).

В пионерской работе [10] в поликристаллическом адамантане была измерена релаксация компонент МК спектра при увеличении длительности интервала эволюции с гамильтонианом диполь-дипольных взаимодействий (ДДВ), располагавшимся между подготовительным периодом и периодом смешивания. Найдена зависимость скорости декогерентизации от порядка когерентности и от размера среднего кластера динамически коррелированных спинов, который образуется вследствие двухквантового-

[1)]e-mail: rsa@iph.krasn.ru; ya-andylun2012@yandex.ru

двухспинового взаимодействия на подготовительном периоде и определяется его длительностью.

Первый теоретический анализ этих результатов был дан в работе [17]. Авторы предложили поле от ДДВ со спинами кластера делить на коррелированную и некоррелированную части. Исходя из этого, сигнал от компоненты МК спектра представлен в виде суммы двух слагаемых от спинов, динамику которых определяет или коррелированное поле, или некоррелированное поле, соответственно. Первое слагаемое является функцией от порядка когерентности, а второе – от числа спинов в кластере. Степень коррелированности определяется соотношением амплитуд двух слагаемых.

Несмотря на сходство теоретических зависимостей с результатами, полученными в эксперименте, в рассматриваемой однородной спиновой системе адамантана при высоких температурах предполагаемая гетерофазность искомой сложной временной корреляционной функции (ВКФ) нуждается в обосновании. Более естественным и давно используемым при объяснении динамики ядерной спиновой системы твердого тела является предположение, что локальное поле состоит из двух частей на каждом спине, а не на разных спинах. Так, например, разделение локального поля на некотором выделенном (любом) спине на две компоненты: от ближайших соседей (ячейки) и от более далеких спинов (далекое окружение) впервые позволило дать объяснение характерным особенностям сигнала свободной прецессии (фурье-образа спектра поглощения ЯМР) в твердом теле [18] и добиться корректного их описания.

Выполнив разделение локального поля от ДДВ на каждом из спинов кластера динамически коррелированных спинов на две компоненты [19], мы получили функцию, описывающую деградацию кластера, в виде произведения двух сомножителей от двух вкладов в локальное поле:

$$\Gamma_{KM}(t_1) = \exp\left(-KB^2t_1^2/2\right)\exp\left(-A^2M^2t_1^2\right), \qquad (1)$$

где t_1 – длительность интервала эволюции, K – число спинов в кластере, а M – порядок когерентности. Параметр B^2 характеризует некоррелированный вклад в локальное поле на каждом из спинов кластера, независящий от локального поля на других спинах. Параметр же A^2 характеризует среднее по кластеру поле, коррелировано действующее на все спины кластера. Порядок величины параметров B^2 и A^2 определяется вторым моментом спектра автокорреляционной функции одного спина m_2, но точный их расчет практически невозможен [19]. Поэтому мы их будем полагать далее некоторыми феноменологическими константами, определяемыми из экспериментальных данных. На основании представления (1) в работе [19] мы выполнили свой анализ экспериментальных зависимостей из работ [10, 11]. Учитывая быстро увеличивающуюся с ростом M погрешность экспериментов (см. рис. 5 из работы [10]), достигающую при больших значениях M величин, близких к 100 % и необычную форму приведенных кривых, при обработке эксперимента для извлечения данных нам пришлось ограничиться лишь центральной частью экспериментальных результатов [19].

В описанных выше теоретических подходах, в полученных формулах зависимость скорости деградации кластера от порядка когерентности M есть только у вклада от коррелированного поля, тогда как вклад от некоррелированных полей на спинах кластера не зависит от M, а зависит только от числа спинов в кластере. Дело в том, что в обеих теориях рассматривается деградация на эволюционном периоде под действием ДДВ кластера коррелированных спинов среднего размера $\bar{K}$, образовавшегося на подготовительном периоде. На самом же деле в конце подготовительного периода матрица плотности является суммой кластеров разного размера K, каждый из которых будет деградировать со своей скоростью на эволюционном периоде.

В настоящей работе мы рассчитаем зависимость от M скорости декогерентности компонент МК спектра, учтя образование на подготовительном периоде кластеров разного размера. Для задания весов кластеров разного размера используем функцию распределения, предложенную нами в работах [20–24] на основании простой модели, соответствующей эксперименту и приводящей к экспоненциальному росту среднего размера кластера коррелированных спинов при увеличении длительности подготовительного периода.

Теперь представим наблюдаемый МК спектр $G_M(T, t_1)$ в виде суммы МК спектров g_{KM} кластеров разного размера K, образовавшихся на подготовительном периоде длительностью T и деградировавших затем на эволюционном периоде длительности t_1:

$$G_M(T, t_1) = \sum_{K=|M|}^{\infty} g_{KM}\Gamma_{KM}(t_1)P(K, T), \qquad (2)$$

где $\Gamma_{KM}(t_1)$ – функция деградации (1), а $P(K, T)$ представляет собой распределение по числу кластеров с K спинами. Следуя комбинаторной теории

[8], для МК спектра отдельного кластера используем функцию Гаусса:

$$g_{KM} = \frac{1}{\sqrt{\pi K}} \exp\left(-\frac{M^2}{K}\right). \quad (3)$$

В качестве распределения кластеров по размерам возьмем функцию

$$P(K,T) = \frac{(th^2(T/\sqrt{2}))^{K-1}K}{ch^4(T/\sqrt{2})}, \quad (4)$$

полученную в работах [22–24] на основании простой модели роста кластеров. Она удовлетворяет условию нормировки: $\sum_{K=1}^{\infty} P(K,T) = 1$ и обеспечивает для среднего размера кластера:

$$\bar{K}_0(T) = \sum_{K=1}^{\infty} KP(K,T) = 1 + 2sh^2(T/\sqrt{2}) \quad (5)$$

экспоненциальный рост $\bar{K}_0(T) \sim \exp(\sqrt{2}T)/2$ (при $T \gg 1$), характерный для плотных спиновых систем, таких как адамантан или флюорит [20, 21]. (Здесь и ниже время выражено в единицах обратного второго момента $(1/\sqrt{m_2})$ автокорреляционной функции.)

Совершенно очевидно, что при больших временах T основной вклад в МК спектр, определяемый суммой (2), будут вносить большие кластеры ($K \gg 1$). Используя формулу (5), позволяющую выразить гиперболические функции в соотношении (4) через $\bar{K}_0(T)$, формулы преобразования гиперболических функций и второй замечательный предел, несложно получить для больших значений K:

$$P(K,T) = K\left(\frac{2}{\bar{K}_0+1}\right)^2 \left(\frac{\bar{K}_0-1}{\bar{K}_0+1}\right)^{K-1} \approx$$
$$\approx K\left(\frac{2}{\bar{K}_0+1}\right)^2 \exp\left(-2\frac{K-1}{\bar{K}_0+1}\right) \sim$$
$$\sim K\left(\frac{2}{\bar{K}_0}\right)^2 \exp\left(-2\frac{K}{\bar{K}_0}\right). \quad (6)$$

Подставим (1) и (6) в (2). Заменив суммирование интегрированием с равным нулю нижним пределом, что справедливо по-крайней мере для больших кластеров, и вынеся вклад от коррелированного поля за знак интеграла, вычислим интеграл [25]

$$G_M(T,t_1) = \exp(-A^2M^2t_1^2) \cdot \left(\frac{2}{\bar{K}_0}\right)^2 \times$$
$$\times \int_0^{\infty} \exp\left\{-K\frac{2}{\bar{K}_0}(1+\bar{K}_0B^2t_1^2/4) - \frac{M^2}{K}\right\} \sqrt{K/\pi}dK =$$
$$= \frac{1}{2(q)^{3/2}}(1+2|M|\sqrt{q}) \exp(-2|M|\sqrt{q}) \exp(-A^2M^2t_1^2). \quad (7)$$

Здесь $q = (2/\bar{K}_0)(1+\bar{K}_0B^2t_1^2/4)$.

Вследствие деградации суммарная интенсивность МК спектра

$$N(T,t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} G_M(T,t_1)dM \quad (8)$$

уменьшается с ростом t_1. Форму МК спектра описывает функция, получающаяся из (7) после нормировки на $N(T,t_1)$. В частности, при отсутствие коррелированного вклада в локальное поле (т.е. при значении константы $A = 0$) получаем универсальную форму МК спектра

$$f_1(M) = G_M(T,t_1)/N(T,t_1) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\bar{K}_1}}\left(1+2\sqrt{\frac{2M^2}{\bar{K}_1}}\right)\exp\left(-2\sqrt{\frac{2M^2}{\bar{K}_1}}\right), \quad (9)$$

масштабируемую на средний размер кластера коррелированных спинов,

$$\bar{K}_1 = 2\langle M^2\rangle = \bar{K}_0/(1+\bar{K}_0B^2t_1^2/4), \quad (10)$$

полученный при учете деградации только от независимого вклада в локальное поле и равный удвоенному второму моменту МК спектра. Хотя соотношение среднего размера кластера со вторым моментом спектра $\langle M^2\rangle$ такое же, как у функции Гаусса (3), задаваемая соотношением (9) форма спектра существенно отличается от гауссовской. Полученная экспоненциальная зависимость спектра от M линейна в отличие от квадратичной гауссовской зависимости: M^2. Кроме того, найденный спектр спадает в e раз при $M_e \approx 1.05\sqrt{\langle M^2\rangle}$, тогда как для гауссовской функции падение в е раз происходит при значении $M_e = \sqrt{2\langle M^2\rangle}$. Тем самым, развиваемая в настоящей работе модель, позволила объяснить экспоненциальную форму МК спектров, наблюдаемую в экспериментах [14, 26].

Найденный для МК спектра результат (7) позволяет рассчитать скорость релаксаии спектральной компоненты с порядком когерентности M, определяемую через время $\tau = t_1$, при котором ее амплитуда уменьшается в "e" раз. Эта скорость релаксации впервые измерялась еще при экспериментах [10] с целью изучения зависимости скорости деградации кластера от порядка когерентности M. Таким образом, из (7) следует уравнение:

$$\frac{G_M(T,t_1=0)}{G_M(T,t_1=\tau)} = e =$$

$$= \exp\left(2\sqrt{qM^2} - 2\sqrt{q_0M^2} + A^2M^2\tau^2\right) \times$$
$$\times \frac{1+2\sqrt{q_0M^2}}{1+2\sqrt{qM^2}}\left(\frac{q}{q_0}\right)^{3/2}, \qquad (11)$$

где $q_0 = 2/\bar{K}_0$. Для решения уравнения (11) в нем целесообразно перейти к новым переменным, "масштабирующим" координатные оси:

$$m^2 = q_0M^2 = 2M^2/\bar{K}_0;$$
$$z = \sqrt{q/q_0} = (1+\bar{K}_0B^2\tau^2/4)^{1/2}. \qquad (12)$$

В новых переменных $A^2M^2\tau^2 = 2\alpha m^2(z^2-1)$ (где $\alpha = A^2/B^2$) и уравнение (11) примет вид при $m \geq 0$:

$$\exp\{2m(z-1) + 2\alpha m^2(z^2-1)\}\frac{1+2m}{1+2mz}z^3 = e. \qquad (13)$$

Приближенные решения уравнения (13) для больших и малых значений m могут быть найдены аналитически. Так при $m^2 \ll 1$ находим:

$$R(m) = \frac{1}{\sqrt{\bar{K}_0}B\tau} = \frac{1}{2\sqrt{z^2-1}} \approx$$
$$\approx \frac{1}{2\sqrt{e^{2/3}-1}}[1 + m^2(1+\alpha)\frac{2}{3}e^{2/3}] =$$
$$= 0.5136\,[1 + 1.298m^2(1+\alpha)]. \qquad (14)$$

Если $m^2 \gg 1$, то для решения уравнения (13) находим:

$$R(m) \approx \frac{1}{2\sqrt{2\delta_0}}\left(1 + \frac{1}{2m(1+2\alpha m)} - \frac{\delta_0}{4}\right), \qquad (15)$$

$$\delta_0 = \frac{1/m}{1+2\alpha m + \sqrt{(1+2\alpha m)^2 + 2\alpha}}, \qquad (16)$$

где δ_0 – решение, обеспечивающее равенство 1 показателя экспоненты в (13). В частности, при $m^2 \gg 1$ и $\alpha = 0$:

$$R(m) = \frac{1}{\sqrt{\bar{K}_0}B\tau} = \frac{\sqrt{m}}{2}\left(1 + \frac{3}{8m}\right), \qquad (17)$$

а при $m^2 \gg 1$ и $m\alpha \gg 1$:

$$R(m) \approx \frac{\sqrt{\alpha}m}{\sqrt{2}} \approx \left(1 + \frac{1}{4\alpha m} + \frac{1}{16\alpha m^2}\left(1 + \frac{2.5}{\alpha}\right)\right). \qquad (18)$$

Найденное численно решение уравнения (13) при различных значениях α приведено на рис. 1 в масштабированных координатах:

$$R(m) = \frac{1}{\sqrt{\bar{K}_0}B\tau} \text{ в зависимости от } m = \sqrt{2M^2/\bar{K}_0}. \qquad (19)$$

Приведенные там же на рисунке приближенные зависимости, рассчитанные по формуле (15), хорошо описывают результаты точных расчетов при больших m. Появление дополнительного вклада в спиновую релаксацию кластеров, возникающего от воздействия "коррелированного поля" (т.е. $A \neq 0$), приводит к убыстрению скорости роста R в зависимости от M.

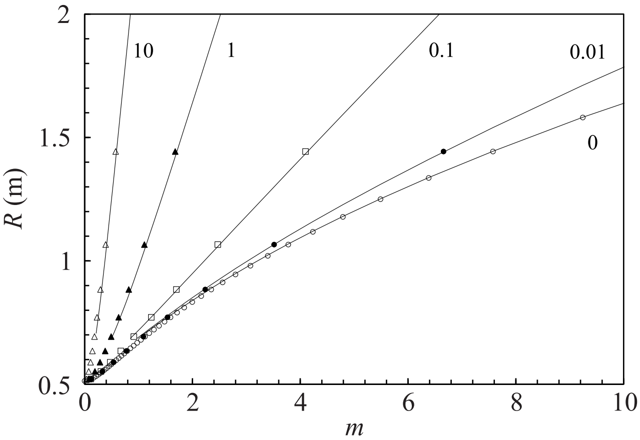

Рис. 1. Масштабированная скорость релаксации (декогерентизации) компоненты МК спектра $R(m) = \frac{1}{\sqrt{\bar{K}_0}B\tau}$ как функция масштабированного порядка когерентности $m = \sqrt{2M^2/\bar{K}_0}$ при разных значениях параметра $\alpha = A^2/B^2$, показанных цифрами у кривых. Линиями показаны приближенные зависимости (15), тогда как соответствующие результаты численного решения уравнения (13) показаны фигурами

Полученные зависимости от порядка когерентности M скоростей релаксации R компонент МК спектра демонстрируют с ростом M переход от квадратичной зависимости $R(m) \sim M^2$ (14) к корневой $R(m) \sim \sqrt{M}$ (17). Подобное замедление роста скорости релаксации наблюдалось экспериментально (см. рис. 5 из [10]). Именно для объяснения этого эффекта в работе [17] предложена формула с суммой двух вкладов в релаксацию. Для более обстоятельного сравнения предлагаемой нами теории с экспериментом данные (их часть при $M \geq 0$), приведенные на рис. 5 из работы [10], были оцифрованы и перестроены на рис. 2 в координатах, масштабируемых на $\sqrt{\bar{K}}$. По вертикальной оси приведены экспериментальные скорости релаксации, деленные на величину $\sqrt{\bar{K}}$. По горизонтальной оси – $m_g = \sqrt{2M^2/\bar{K}}$. Отметим, что пропорциональность скорости релаксации величине $\sqrt{\bar{K}}$ была обнаружена экспериментально в работе [10]. Из этой же работы нами взяты значения $\bar{K}$ при разных длительностях T, которые вычислялись через ширины МК спектров на половине вы-

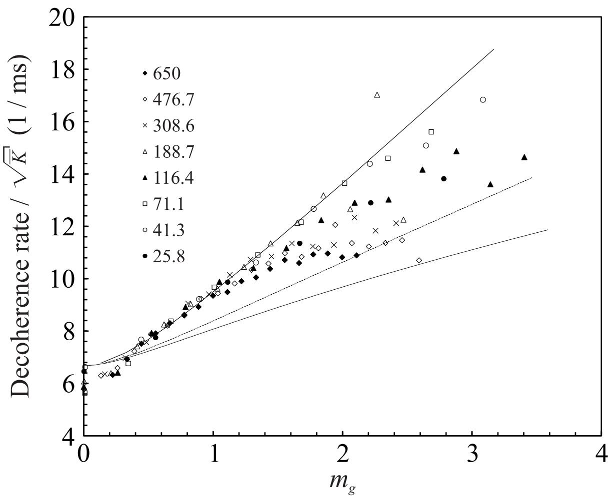

Рис. 2. Экспериментальные скорости релаксации (декогерентизации) [10], деленные на $\sqrt{\bar{K}}$, как функции порядка когерентности M, взятого в виде $m_g = \sqrt{2M^2/\bar{K}}$. Результаты, полученные при разных средних размерах кластеров $\bar{K} = \bar{K}_{0g}$ (колонка цифр на рисунке), показаны разными фигурами. Теоретические результаты, найденные численным решением уравнения (13), показаны линиями в виде функций $13R(0.7134 \cdot m_g)$/мс при трех значениях параметра α: $\alpha = 0$ (пунктирная линия), $\alpha = 0.1$ (штриховая линия) и $\alpha = 0.5$ (сплошная линия)

соты σ. Авторы полагали, что спектр имел гауссову форму, задаваемую формулой (3), и, следовательно,

$$\bar{K} = \bar{K}_{0g} = \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2. \qquad (20)$$

Однако, полученное нами выше выражение (9) для формы спектра влечет иное соотношение между $\bar{K} = \bar{K}_0$ и этой шириной:

$$\bar{K} = \bar{K}_0 = 2\left(\frac{2}{x}\right)^2\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2. \qquad (21)$$

Здесь $x \approx 1.68$ решение уравнения $e^x = 2(1+x)$. Таким образом, приходим к соотношению:

$$\bar{K}_{0g}/\bar{K}_0 \approx 0.509 = (0.7134)^2. \qquad (22)$$

На рисунке 2, помимо экспериментальных, приведены теоретические зависимости скорости релаксации когерентных состояний, полученные численным решением уравнения (13) при трех значениях параметра α: $\alpha = 0$ (пунктирная линия), $\alpha = 0.1$ (штриховая линия) и $\alpha = 0.5$ (сплошная линия). Учитывая соотношение (22) и взятое из эксперимента значение параметра $B = 9.27 \cdot 10^{-3}$ (1/мкс), эти зависимости представлены функцией $R(0.7134 \cdot m_g)13$/мс. Поясним ее вид: во-первых, теоретическая скорость $R(m)$ (рис. 1) является функцией от $m = \sqrt{2M^2/\bar{K}_0}$, тогда как экспериментальная скорость на рис. 2 – функция от $m_g = \sqrt{2M^2/\bar{K}_{0g}}$ Между аргументами соотношение: $m = \sqrt{\bar{K}_{0g}/\bar{K}_0} m_g = 0.7134 m_g$. Во-вторых, мы хотим, чтобы при $M = 0$ теоретическая скорость релаксации (14) $R(0) = \frac{1}{\sqrt{\bar{K}_0 B\tau}} = 0.5136$ совпала с экспериментальной $\frac{1}{\tau\sqrt{\bar{K}_{0g}}} \approx 6.68\frac{1}{\text{мс}}$. Отсюда находим значения коэффициента $13\frac{1}{\text{мс}} \approx \frac{B\sqrt{\bar{K}_0}}{\sqrt{\bar{K}_{0g}}}$ и параметра $B \approx 0.7134 \cdot 13\frac{1}{\text{мс}} = 9.2742\frac{1}{\text{мс}}$.

При масштабировании данных на рис. 2 мы исходили из результата (7). Ранее в МК спектроскопии масштабирование данных выполнялось в работах [15, 26, 27]. В работе [26] выполнено масштабирование каждого МК спектра, получаемого при увеличении времени приготовления, на его ширину (пусть и с некоторыми оговорками). В работах [15, 27] изучалось влияние возмущения, добавляемого на подготовительном периоде, и проведены масштабирования роста среднего размера кластера [27] и затухания суммарной интенсивности МК спектра [15]. Для масштабирования взяты степенные функции с подбираемыми показателями степеней.

Как видно из рис. 2, зависимость с $\alpha = 0.5$ несколько лучше согласуется с экспериментальными результатами [10], чем при других использованных нами значениях α. Однако, хорошее согласие с экспериментом наблюдается в области значений m порядка единицы, тогда как при больших m теоретическая зависимость от m сильнее, чем экспериментальная. По-видимому, это свидетельствует о том, что представление функцией Гаусса от M вклада в деградацию от коррелированного поля (1) является неточным для больших значениях M, т.е. для больших кластеров. Следует учесть топологию кластеров, что приведет к замене одной функции релаксации на сумму функций, зависящих от размера кластера и отношения его поверхности к объему [28]. В качестве примера негауссовой зависимости скорости релаксации от M укажем работу [29]. В этой работе выполнен численный расчет релаксации компонент МК спектра для системы с большим числом эквивалентных спинов. Поскольку константы ДДВ одинаковы между всеми спинами, то остается только коррелированный вклад в локальное поле. В работе показано, что время релаксации уменьшается при увеличении числа спинов и порядка МК когерентности . При этом скорость изменения замедляется при больших значениях M.

Таким образом, развиваемая в предлагаемой работе физическая модель, впервые позволила учесть как распределение кластеров динамически коррелированных спинов по размеру, так и исследовать их деградацию под действием возмущения. Ранее в работе [19] мы анализировали зависимость скорости релаксации от порядка когерентности M в модели одного кластера, имеющего некоторый средний размер. В частности, мы нашли для величины коррелированного вклада, единственно отвечающего при таком подходе за зависимость от M, значение: $A^2 = 205(1/\text{мс})^2$ (при $T = 660\,\text{мкс}$). В настоящей же работе, выполненный учет распределения кластеров по размерам (2), позволил рассчитать вклад некоррелированного поля из (1) в зависимость скорости релаксации от величины M. Выделение этого вклада привело к уменьшению вклада второго сомножителя в (1) до величины $A^2 \approx 43/(\text{мс})^2$. Таким образом, подтверждена гипотеза авторов работы [10] о возможной связи наблюдаемой зависимости скорости релаксации от порядка M с наличием кластеров разного размера. Наконец, в настоящей работе показано, что сопоставление предлагаемой теории с экспериментом открывает, возможность "численного" разделения коррелированного и некоррелированного вкладов, как в локальное поле на ядрах многоспинового кластера, так и в скорость декогерентизации.

Благодарим К. В. Зобова за помощь в оцифровке экспериментальных кривых из работы [10] и численном решении уравнения (13).

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема # 122040500060-4).

1. P. Gaspard, *From dynamical system theory to nonequilibrium thermodynamics, Symposium Henri Poincare, Proceedings*, ed. by P. Gaspard, M. Henneaux, and F. Lambert, International Solvay Institute for Physics and Chemistry, Brussels (2007), p. 97.
2. Д. Прескилл, *Квантовая информация и квантовые вычисления*, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", М., Ижевск (2008), т. 1.
3. D. Suter and G. A. Álvarez, Rev. Mod. Phys. **88**, 041001 (2016).
4. L. Pezze, A. Smerzi, M. K. Oberthaler, R. Schmied, and P. Treutlein, Rev. Mod. Phys. **90**, 035005 (2018).
5. J. Preskill, Quantum **2**, 79 (2018).
6. Bin Cheng, Xiu-Hao Deng, Xiu Gu, Yu He et al. (Collaboration), arXiv: 2303.04061 (2023).
7. T. Kusumoto, K. Mitarai, K. Fujii, M. Kitagawa, and M. Negoro, npj Quantum Inf. **7**, 94 (2021).
8. J. Baum, M. Munovitz, A. N. Garroway, and A. Pines, J. Chem. Phys. **83**, 2015 (1985).
9. Р. Эрнст, Дж. Боденхаузен, А. Вокаун, *ЯМР в одном и двух измерениях*, Мир, М. (1990).
10. H. G. Krojanski and D. Suter, Phys. Rev. Lett. **93**, 090501 (2004).
11. H. G. Krojanski and D. Suter, Phys. Rev. A **74**, 062319 (2006).
12. G. Cho, P. Cappelaro, D. G. Cory, and C. Ramanathan, Phys. Rev. B **74**, 224434 (2006).
13. C. M. Sanchez, R. H. Acosta, P. R. Levstein, H. M. Pastawski, and A. K. Chattah, Phys. Rev. A **90**, 042122 (2014).
14. G. A. Álvarez and D. Suter, Phys. Rev. A **84**, 012320 (2011).
15. F. D. Domínguez, M. C. Rodríguez, R. Kaiser, D. Suter, and G. A. Alvarez, Phys. Rev. A **104**, 012402 (2021).
16. C. M. Sanchez, A. K. Chattah, and H. M. Pastawski, Phys. Rev. A **105**, 052232 (2022).
17. A. Fedorov and L. Fedichkin, J. Phys.: Condens. Matter **18**, 3217 (2006).
18. А. А. Лундин, Б. Н. Провоторов, ЖЭТФ **70**, 1047 (1976).
19. В. Е. Зобов, А. А. Лундин, ЖЭТФ **139**, 519 (2011).
20. В. Е. Зобов, А. А. Лундин, ЖЭТФ **130**, 1047 (2006).
21. В. Е. Зобов, А. А. Лундин, Химическая физика **27**, 18 (2008).
22. А. А. Лундин, В. Е. Зобов, ЖЭТФ **147**, 885 (2015).
23. V. E. Zobov and A. A. Lundin, Appl. Magn. Res. **52**, 879 (2021).
24. В. Е. Зобов, А. А. Лундин, ЖЭТФ **162**, 778 (2022).
25. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды, раздел 2.3.16(2)*, Наука, М. (1981).
26. S. Lacelle, S. Hwang, and B. Gerstein, J. Chem. Phys. **99**, 8407 (1993).
27. G. A. Alvarez, D. Suter, and R. Kaiser, Science **349**, 846 (2015).
28. В. Е. Зобов, ТМФ **165**, 242 (2010).
29. S. I. Doronin, E. B. Fel'dman, and A. I. Zenchuk, J. Chem. Phys. **134**, 034102 (2011).