ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

А.А.Галеев, В.Н.Ораевский, Р.З.Сагдеев N2

УНИВЕРСАЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ МАГНИТНОГО УДЕРЖАНИЯ ПЛАЗМЫ

Новосибирск, 1962 г.

Аннотация.

Показано, что разреженная плазма малого давления ($p << \frac{H^2}{8\pi}$), удерживаемая магнитным полем, "универсально" неустойчива относительно локальных коротковолновых возмущений, не искажающих магнитного поля, при любом соотношении между пространственными градиентами плотности и температуры $\frac{d\ln T}{d\ln n}$. Аналогом подобной "универсальной" неустойчивости в гидродинамическом приближении является неустойчивость, связанная с конечной величиной теплопроводности вдоль силовых линий магнитного поля.

THE UNIVERSAL INSTABILITY OF PLASMA MAGNETIC CONFINEMENT

A.A.GALEYEV , V.N.ORAYEWSKI , R.S.SAGDEEV.

The "universal" instability of low pressure plasma ($p \ll \frac{H^2}{8\pi}$), confined by magnetic field , against local short-wave disturbances is demonstrated.

§ I. Исследование устойчивости равновесия плазмы в магнитном поле, основанное на магнитогидродинамической модели плазмы, приводит, как известно, к целому классу различных неустойчивостей, в зависимости от конфигурации магнитного поля (такие неустойчивости удобно назвать "конфигурационными"). Одной из важнейших задач теории устойчивости было отыскание оптимальных устойчивых конфигураций плазмы в магнитном поле. Однако, описание разреженной плазмы в рамках простой магнитогидродинамической модели не исчерпывает всех возможных типов движений. Существуют коротковолновые возмущения (с длинами волн значительно меньшими характерной длины свободного пробега частиц), которые можно последовательно рассмотреть только в рамках кинетической теории, основанной на уравнении Больцмана - с самосогласованным электромагнитным полем. Оказывается, что учет некоторых типов таких коротковолновых возмущений приводит к локальной (не зависящей от конфигурации магнитного поля) неустойчивости. В этом смысле подобная неустойчивость является универсальной.

Последовательное построение теории локальной устойчивости плазмы на основе кинетической теории трудно осуществить. Представляется разумным, поэтому, рассмотреть две предельные модели:

а) когда магнитогидродинамическое описание плазмы уже незаконно,но длина свободного пробега не слишком велика, так что можно рассматривать плазму как две взаимопроникающие жидкости (электронную и ионную). Для этого случая мы воспользуемся так называемой 2-х жидкостной гидродинамикой;

б) когда столкновения становятся настолько редкими, что их можно вообще не учитывать. Для этого случая мы будем пользоваться кинетическими уравнениями без интеграла столкновений.

Известно, что плазма, достаточно удаленная от состояния термодинамического равновесия, может оказаться неустойчивой относительно самовозбуждения различного рода плазменных колебаний. В настоящее время хорошо изучены неустойчивости "однородной", "бесконечно протяженной" плазмы, неравномерность которой выражается в том, что распределение частиц по скоростям отличается от максвелловского. Важным обстоятельством здесь является то, что неустойчивость имеет место не при любом немаксвелловском распределении частиц по скоростям. Иначе говоря, плазма имеет некоторый"запас устойчивости" около термодинамического равновесия.

В приложении к проблеме "магнитной термоизоляции" больший интерес представляет исследование устойчивости состояний плазмы, для которых неравновесность проявляется в наличии пространственных градиентов плотности и температуры (если даже локальное распределение частиц по скоростям сколь угодно близко к максвелловскому). Основной вопрос здесь заключается в следующем: имеет ли неоднородная плазма некоторый "запас устойчивости" или нет, т.е. начинается ли неустойчивость при сколь угодно малых градиентах температуры и плотности или для появления неустойчивости необходимо превышение некоторого критического значения пространственного градиента? Если идти от аналогии с неустойчивостью однородной немаксвелловской плазмы, например, "пучковой" неустойчивости, то может показаться естественным наличие такого критического градиента.

Действительно, для возникновения "пучковой" неустойчивости необходимо, чтобы средняя скорость электронов относительно ионов превышала фазовые скорости распространения соответствующих волн. (Некоторые типы таких "пороговых" неустойчивостей рассмотрены в /1,2/).

Однако, в неоднородной плазме ситуация меняется и качественно. Чтобы убедиться в этом, обратимся к рис.1. Пусть магнитное поле направлено H вдоль оси z (мы рассматриваем локальные неустойчивости, поэтому можно считать, что H "всюду" направлено одинаково) и зависит от пространственной координаты ; соответственно функции распределения ионов и электронов в невозмущенной плазме имеют вид $f_{i,e}(v,x)$. Рассмотрим теперь малое возмущение, распространяющееся в такой плазме вдоль оси z, $\exp i(\omega t-kz)$ В однородной плазме основным источником мнимой части в дисперсионном уравнении является член типа $\frac{e}{m}E_z\frac{\partial f}{\partial v_z}\Big|_{v_z=\frac{\omega}{k}}$. В максвелловской плазме он ответственен за затухание волны (т.н. "затухание Ландау"). Естественно, что члены с такой структурой сохраняются и в слабо неоднородной плазме. Однако появляются еще и дополнительные слагаемые, получающиеся из члена $v\nabla f$ в кинетическом уравнении. Например, при малых частотах ($\omega \ll \Omega_i=\frac{eH}{Mc}$), когда движение ионов и электронов поперек H имеет вид дрейфа, член $v\nabla f$ дает для "электрического" дрейфа вклад $c\frac{E_y}{H}\frac{\partial f}{\partial x}\Big|$. Этот член, естественно, должен дать добавку к мнимой части за счет соответствующего полувычета $c\frac{E_y}{H}\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{v=\omega/k}$. Если $E_y \gg E_z$ (а это имеет место, например, для безвихревых возмущений $\mathrm{rot}\,E=0$ с пространственной зависимостью $\exp i(k_y y+k_z z)$ при $k_y \gg k_z$ эта добавка даже при малых градиентах может превысить "затухание Ландау" и плазма окажется неустойчивой.

Для того, чтобы убедиться в этом, оценим работу, совершаемую электрическим полем волны над частицами плазмы:

$$\widetilde{j_z E_z}=e v_z \widetilde{f_1 E_z}\Big|_{v_z=-\frac{\omega}{k_z}} \sim e\frac{\omega}{k_z}E_z\left(\frac{e}{m}E_z\frac{\partial f_0}{\partial v_z}+c\frac{E_y}{H}\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)\Big|_{v_z=-\frac{\omega}{k_z}}=\frac{e^2E_z^2 f_0\omega^2}{T k_z^2}\left[1-c\frac{k_y T}{eH\omega}\left(\frac{n'}{n}-\frac{T'}{2T}\right)\right]\Bigg|_{v_z=-\frac{\omega}{k_z}} \quad (1.1)$$

где $f_0=\frac{n(x)}{\sqrt{2\pi T(x)}}\, e^{-\frac{mv^2}{2T(x)}}$

Как видно из (1.1) для достаточно малых частот ω передача энергии от частиц к волне, связанная с неоднородностью (второе слагаемое) действительно превышает затухание Ландау. При сделанных предположениях ($v_i \ll \frac{\omega}{k_z}$) движением ионов вдоль H можно пренебречь и уравнение непрерывности для них имеет вид:

$$i\omega n_1+v_x\frac{dn_0}{dx}=0\,, \qquad v_x=c\frac{E_y}{H} \quad (2.1)$$

Электроны же, двигаясь вдоль силовых линий со скоростями $v_e \gg \frac{\omega}{k_z}$ успевают перераспределяться по Больцману $n_1=n_0\frac{e\varphi}{T}$

(3.1)

Из (2.I) и (3.I), используя $E_y = -ik_y\varphi$, находим частоту

$$\omega = k_y c \frac{T}{eH} \frac{n_0'}{n_0} \qquad (4.I)$$

При выводе (4.I) мы предполагали, что для ионов применимо дрейфовое приближение (т.е. ларморов радиус предполагался много меньшим длины волны). Подставляя найденную частоту (4.I) в (I,I) получим критерий неустойчивости

$$\frac{d \ln T}{d \ln n} < 0 \quad x) \qquad (5.I)$$

Таким образом, в приближении "нулевого ларморовского радиуса" остается устойчивой область /3/

$$0 < \frac{d \ln T}{d \ln n} < 2 \qquad (6.I)$$

При учете конечности ларморовского радиуса частота ω уменьшается, поэтому роль неоднородного члена в (I.I) возрастает и щель (6.I) может закрыться.

Причина уменьшения частоты, когда длины волны становится меньше ларморовского радиуса, заключается в том,что эффективное электрическое поле, усредненное по орбите частицы, уменьшается. Поэтому средняя скорость дрейфа частиц v_x в уравнении (2.I) падает. Так, при достаточно больших $k_y r_H$, v_x будет порядка $\sim c \frac{E_y}{H} \frac{1}{k_y r_H}$. Действительно, строгое рассмотрение с помощью кинетического уравнения показывает, что щель (6.I) закрывается, так что плазма оказывается универсально неустойчивой.

Любопытно, что аналогом кинетических неустойчивостей, получающихся за счет полувычетов $c \frac{E_y}{H} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{v = \frac{\omega}{k}}$, в двухжидкостной гидродинамике являются неустойчивости, возникающие при учете конечной теплопроводности вдоль силовых линий магнитного поля (§ 3).

§ 2. Исследование устойчивости редкой неоднородной плазмы в магнитном поле в пренебрежении столкновениями.

I. Дисперсионное уравнение.

При выводе дисперсионного уравнения предполагается:

1) $p \ll \frac{H^2}{8\pi}$ – давление плазмы мало в сравнении с магнитным.

2) Квазинейтральность плазмы, т.е. $n_i = n_e$

3) Потенциальность электрических полей возмущений, т.е. $\mathrm{rot}\, E = 0$ (Это справедлико, если $\frac{\omega}{k_{y,z}} \ll \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}}$).

В работе /4/ было выведено дисперсионное уравнение для исследования стабилизации магнитогидродинамической неустойчивости, возникающей в неоднородной

---

x) Если сделать аналогичную оценку для случая $\omega \ll k_z v_i$, можно получить границу области устойчивости при положительных $\frac{d \ln T}{d \ln n}$, а именно $\frac{d \ln T}{d \ln n} = 2$

плазме, поддерживаемой магнитным полем против силы тяжести, конечным ларморовским радиусом. Мы воспользуемся методом, примененным в этой работе для того, чтобы получить интересующее нас дисперсионное уравнение, не накладывая ограничения

В отличие от /4/ мы учтем также и неоднородность температуры. Поэтому функция распределения невозмущенной плазмы примет вид:

$$f_j = \left[1 + \left(x + \frac{v_y}{\Omega_j}\right)\frac{d}{dx}\right] f_{oj} \quad , \quad j = i, e \tag{1.2}$$

где $f_{oj} = n_o \left(\frac{m_j}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_j v^2}{2T}\right)$ - максвелловская функция распределения (сохраняя обозначения /4/), тогда как в /4/ используется функция

$$f_j = \left[1 + \left(x + \frac{v_y}{\Omega_j}\right)\frac{1}{n_o}\frac{dn_o}{dx}\right] f_{oj} \tag{2.2}$$

Кроме того, сразу опустим не интересующую нас силу тяжести и возмущения выберем в виде $\exp i(-\omega t + k_z z + k_y y)$. В работе /4/ они выбраны как $\exp i(-\omega t + k_y y)$ Опуская вывод, лишь несущественными деталями отличающийся от вывода, данного в /4/ (что, кстати, будет видно даже из сравнения дисперсионных уравнений), вместо дисперсионного уравнения Розенблюта-Кролла-Ростокера

$$0 = \frac{2n}{T} - \sum_j \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{\omega}{T} - \frac{k_y}{m_j \Omega_j}\frac{1}{n_o}\frac{dn_o}{dx}\right) \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{m_j v_\perp^2}{2T}} \frac{m_j v_\perp dv_\perp}{T}}{\omega - \ell\Omega_j} J_\ell^2\left(\frac{k_y v_\perp}{\Omega_j}\right) \tag{3.2}$$

получаем уравнение

$$0 = \frac{2n}{T} - \sum_j \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{\omega}{T} - \frac{k_y}{m_j \Omega_j}\frac{d}{dx}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_j(v_z)\, dv_z}{\omega - k_z v_z - \ell\Omega_j} \int_0^{\infty} e^{-\frac{m_j v_\perp^2}{2T}} J_\ell^2\left(\frac{k_y v_\perp}{\Omega_j}\right) \frac{m_j v_\perp dv_\perp}{T} \tag{4.2}$$

При $\omega \ll \Omega_j$, а именно такой случай мы рассматриваем, в сумме по ℓ достаточно удержать лишь член с $\ell = 0$ (см. приложение), так что дисперсионное уравнение (4.2) принимает вид:

$$\frac{2n}{T} - \sum_j \left\{ \left[\frac{\omega}{T} - \frac{k_y}{m_j \Omega_j}\frac{d}{dx}\right] A(\theta_j) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_j\, dv}{\omega - k_z v} \right\} = 0 \tag{5.2}$$

где

$$A(\theta_j) = \int_0^{\infty} e^{-t} J_0^2(\theta_j t^{1/2})\, dt = e^{-\frac{\theta_j^2}{2}} I_0\left(\frac{\theta_j^2}{2}\right)$$

$$\theta_j = \frac{k_y \left(\frac{2T}{m_j}\right)^{1/2}}{\Omega_j}$$

При $\theta_j \to 0$ (что соответствует приближению, в котором ларморовский радиус частицы равен нулю) $A(\theta_j) \to 1$, и уравнение (5.2) переходит в дисперсионное уравнение, полученное в /3/.

Вводя безразмерную частоту

$$z_j = \frac{\omega}{k_z\left(\frac{2T}{m_j}\right)^{1/2}} \tag{6.2}$$

переписываем уравнение (5.2) в виде:

$$\sum_j \left\{ 1 - \beta A z_j + i\sqrt{\pi}\, w(z_j) \left[z_j + \gamma - \beta z_j^2 \right] A \right\} = 0 \tag{7.2}$$

где

$$w(z) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t}}{z-t}\, dt$$

$$\gamma(\theta) = -\frac{1}{2}\,\frac{\theta}{k_z}\left\{ \frac{dn_0}{dx}\,\frac{1}{n_0} - \frac{1}{2}\,\frac{dT}{dx}\,\frac{1}{T}(1+\delta) \right\}$$

$$\delta(\theta) = \theta^2\left[1 + \frac{I_1\left(\frac{\theta^2}{2}\right)}{I_0\left(\frac{\theta^2}{2}\right)}\right], \qquad \beta(\theta) = \frac{1}{2}\,\frac{\theta}{k_z}\,\frac{1}{T}\,\frac{dT}{dx} \tag{8.2}$$

Ларморовский радиус электрона мы считаем пренебрежимо малым($k_y r_{H_e} = \theta_e \ll 1$) и поэтому в уравнение для электронов можно положить

2. Рассмотрим случай "малых" частот

$$\omega \ll k_z \left(\frac{2T}{M}\right)^{1/2} \tag{9.2}$$

Используя разложение $w(z)$ для малых z

$$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{\Gamma\left(1+\frac{k}{2}\right)} \tag{10.2}$$

приводим уравнение (7.2) к виду:

$$\frac{2}{A} + i(z+\gamma)\sqrt{\pi} - (\beta + 2\gamma) z = 0 \qquad (z = z_i) \tag{11.2}$$

Это уравнение имеет решения для z

$$z = -\frac{\gamma + (4\alpha/\pi A)}{1 + (4\alpha^2/\pi)} + i\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{A^{-1} - \gamma\alpha}{1 + (4\alpha^2/\pi)} \tag{12.2}$$

где

$$\alpha = -\frac{1}{2}(\beta + 2\gamma)$$

Условие неустойчивости ($\operatorname{Im}\omega > 0$) принимает вид:

$$\left[2 - \frac{d\ln T}{d\ln n}(1+\delta)\right]\left[1 - \frac{d\ln T}{d\ln n}\left(1 + \frac{1}{2}\delta\right)\right] + \frac{2}{A}\left(\frac{2k_z}{\theta_i}\right)^2\left(\frac{d\ln n}{dx}\right)^{-2} > 0 \tag{13.2}$$

Вторым слагаемым в этом неравенстве можно пренебречь и как легко видеть, неустойчивость возникает при

$$\frac{d\ln T}{d\ln n} > \frac{2}{1+\delta} \tag{14.2}$$

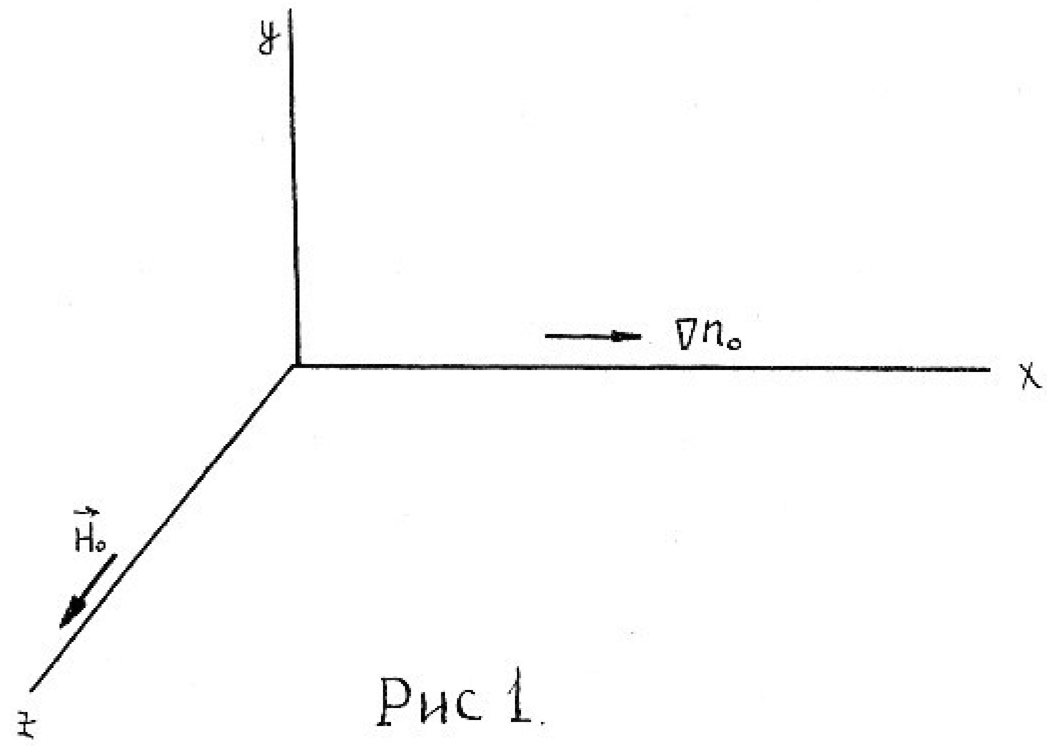

Рис 1.

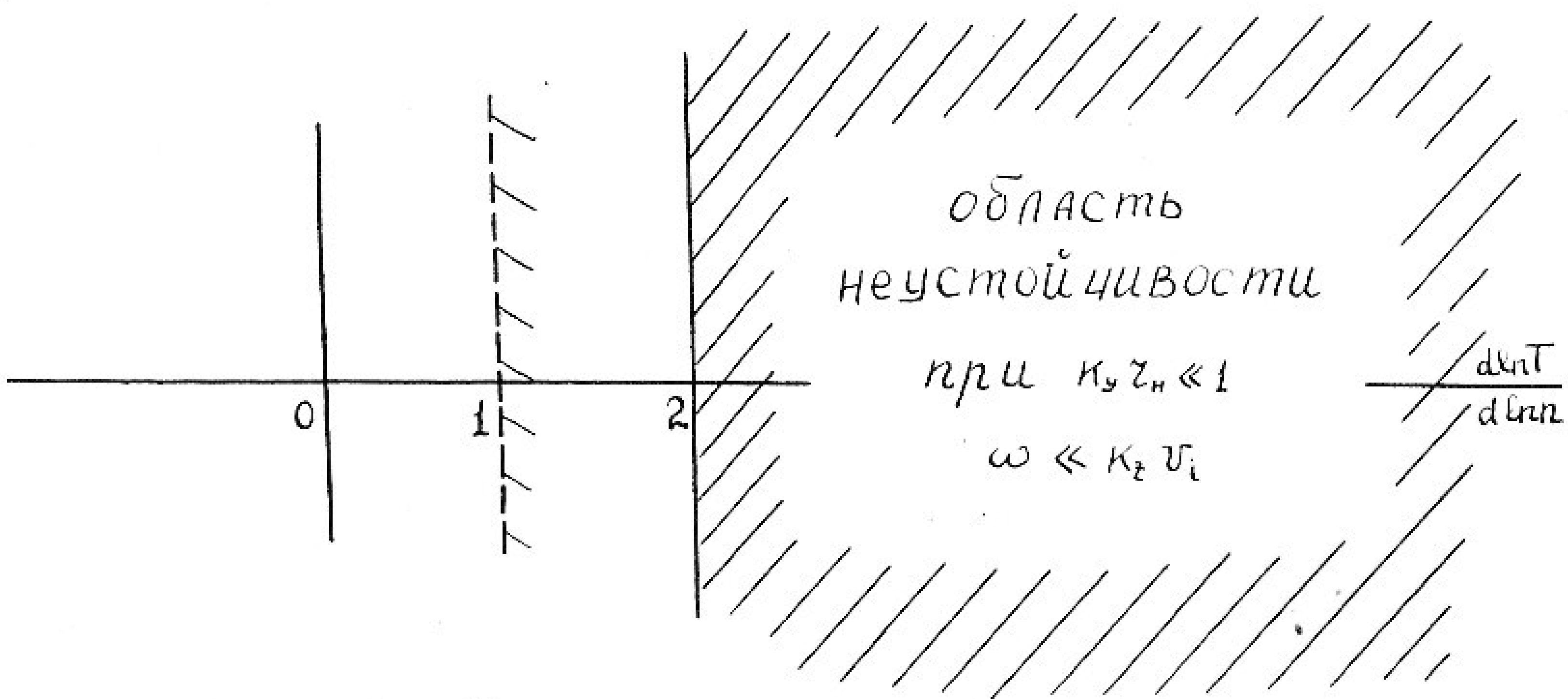

Рис. 2.

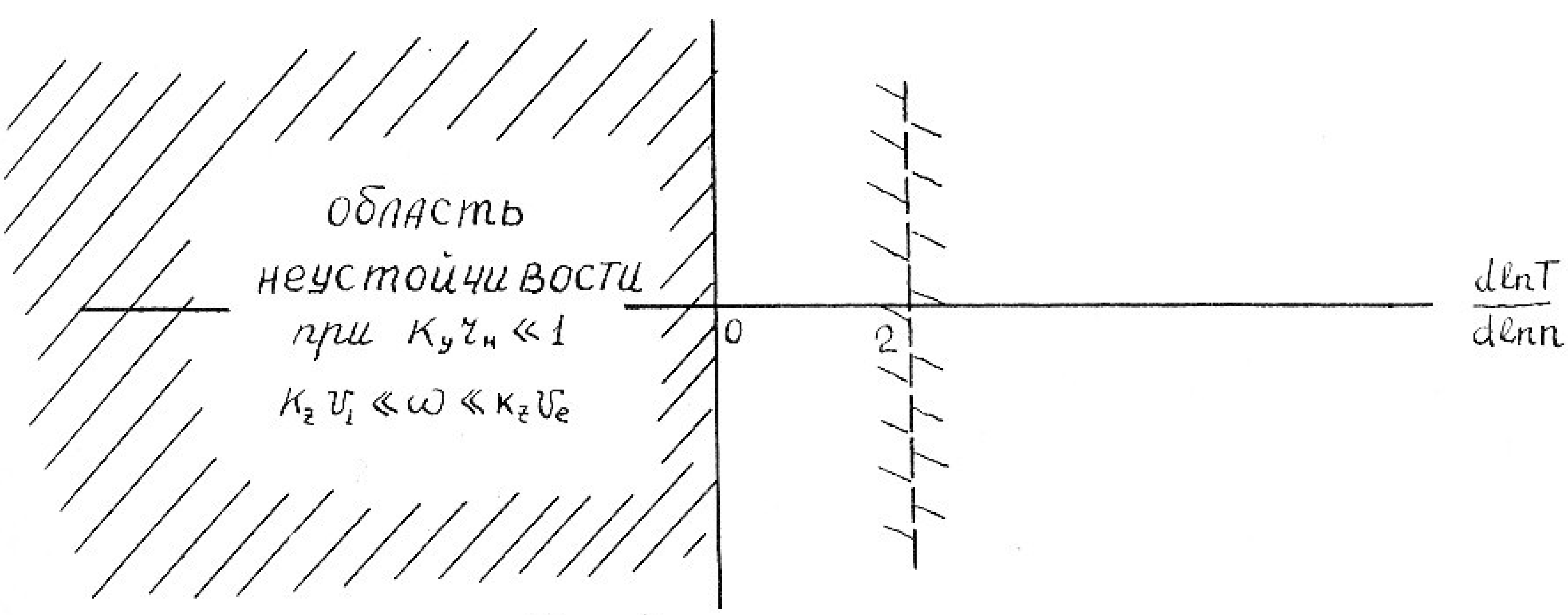

Рис. 3.

При учете "конечности ларморовского радиуса", граница неустойчивости сдвигается с 2 (см.рис.2) (для $\Theta_i \to 0$) до 1, т.к. при $\Theta_i \gg 1 \quad \delta \to 1$

3. Рассмотрим случай "промежуточных" частот, когда:

$$k_z \left(\frac{2T}{M}\right)^{1/2} \ll \omega \ll k_z \left(\frac{2T}{m}\right)^{1/2} \qquad (15.2)$$

Используя в уравнении (7.2) асимптотическое разложение $w(z)$ при больших z для ионов

$$w(z) = \frac{i}{\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{z^{2k+1}} + R_n \,, \quad z \gg 1 \qquad (16.2)$$

и ряд (10.2) по степеням z для электронов, получаем:

$$\frac{2}{A} - 1 + i\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{m}{M}}\,(z-\gamma)\frac{1}{A} - \left(\gamma - \frac{\beta}{2}\right)\frac{1}{z} = 0 \qquad (17.2)$$

Решение имеет вид:

$$z = \frac{A}{2-A}\left(\gamma - \frac{\beta}{2}\right) - i\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{m}{M}}\,\frac{A}{(2-A)^2}\left(\gamma - \frac{\beta}{2}\right)^2\left(1 - \frac{2-A}{A}\,\frac{\gamma}{\gamma - \frac{\beta}{2}}\right) \qquad (18.2)$$

Из выражения для мнимой части частоты получаем условие неустойчивости

$$-\,\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{A} - 1 - \delta\right)\frac{d\ln T}{d\ln n} + \frac{2(A-1)}{A}}{1 - \frac{1}{2}\,\delta\,\frac{d\ln T}{d\ln n}} > 0 \qquad (19.2)$$

Итак имеются две области неустойчивости

$$\frac{d\ln T}{d\ln n} < 2\,\frac{1-A}{1-\frac{1}{2}A(1+\delta)} \quad \text{и} \quad \frac{d\ln T}{d\ln n} > \frac{2}{\delta} \qquad (20.2)$$

Первая область в пределе малых ларморовских радиусов ионов переходит в указанный в работе /3/ критерий неустойчивости

$$\frac{d\ln T}{d\ln n} < 0 \qquad (20.2'')$$

При учете же конечности ларморовского радиуса ионов эта граница неустойчивости сдвигается до $\frac{d\ln T}{d\ln n} = 2$ (при $\Theta_i \gg 1$, $\delta \simeq 1$). Одновременно к этому же значению приближается граница неустойчивости со стороны больших $\frac{d\ln T}{d\ln n}$. Т.о. неустойчивость имеет место при любом $\frac{d\ln T}{d\ln n}$ (в пренебрежении членами $\sim \sqrt{\frac{m}{M}}$).

х) Нам стало известно, что недавно Б.Кадомцев и А.Тимофеев исследовали инкременты неустойчивости, соответствующие этому случаю при специальном предположении $\frac{d\ln T}{d\ln n} = 0$ $n(x) \neq const$ $T(x) = const$ и получили, что безразличное равновесие при $k_y r_H \ll 1$ становится неустойчивым с расчётом конечности ларморовского радиуса.

4. При "больших" частотах

$$\omega \gg k_z v_e \quad , \text{ т.е. } \quad z_i \gg \sqrt{\frac{M}{m}} \tag{21.2}$$

можно воспользоваться асимптотическим разложением (16.2) и привести (7.2) к виду:

$$1 - A - \frac{A(\gamma - \frac{\beta}{2}) - (\gamma_0 - \frac{\beta}{2})}{z} - \frac{M}{m}\frac{1}{2z^2} + \frac{M}{m}\frac{1}{2}\frac{\gamma_0 - \frac{3}{2}\beta}{z^3} = 0 \tag{22.2}$$

где $\gamma_0 = \gamma$ при $\theta_i = 0$

При условии

$$k_0\left(\frac{2T}{M}\right)^{1/2}\theta_i \gg \omega \quad , \quad k_0 = \frac{(nT)'}{nT} \tag{23.2}$$

первый и третий члены малы и мы получаем

$$z = \sqrt{\frac{M}{2m}\,\frac{\gamma_0 - \frac{3}{2}\beta}{A(\gamma - \frac{\beta}{2}) - (\gamma_0 - \frac{\beta}{2})}} = \sqrt{-\frac{M}{m}\,\frac{\frac{d\ln T}{d\ln n} + 1}{(1-A) + \frac{1}{2}\delta A\frac{d\ln T}{d\ln n}}} \tag{24.2}$$

Условие неустойчивости можно записать в виде:

$$\frac{d\ln T}{d\ln n} > -1 \quad \text{и} \quad \frac{d\ln T}{d\ln n} < -2\,\frac{1-A}{A\delta} \tag{25.2}$$

Решение (24.2) применимо лишь при $\theta_i \ll 1$, так чтобы выполнялось (21.2). В этом случае (см.приложение):

$$A \simeq 1 - \frac{1}{2}\theta_i^2 \quad , \quad \delta \simeq \theta_i^2$$

и как видно из (25.2) неустойчивость имеет место при любом значении параметра $\frac{d\ln T}{d\ln n}$ (от него по условиям применимости (23.2) требуется лишь, чтобы он не был слишком близок к "-I").

§ 3. Исследование устойчивости неоднородной плазмы в модели двухжидкостной гидродинамики.

В большинстве современных магнитных ловушек с сильным магнитным полем (типа "Стелларатора","Токамака" и т.п.) практически еще не достигнуты условия, когда столкновения при исследовании устойчивости неоднородной плазмы можно полностью игнорировать. При типичных температурах ($\sim$ десятков eV) длина свободного пробега (при плотности 10^{14} см$^{-3}$) достигает порядка нескольких десятков сантиметров (в то время, как размеры ловушек порядка метров). С другой стороны магнитная гидродинамика здесь уже неприменима, так как, вообще говоря, электронный и ионный газы не успевают за времена порядка времени развития неустойчивости приходить в равновесие друг с другом. Естественно для этого случая пользоваться двухжидкостной гидродинамикой для плазмы, помещенной в сильное магнитное поле /5/. Так же, как и в предыдущем параграфе мы рассмотрим устойчивость плазмы относительно безвихревых возмущений $\mathrm{rot}\,E = 0$, сохраняя обозначения предыдущих разделов: направлено по оси z, T_0, n_0 - невозмущенные температура и плотность. Поскольку в возмущении температуры ионов и электронов могут отличаться, введем T_e и T_i - поправки к электронной и ионной температурам. Эффекты, связанные с конечностью ларморовского радиуса ионов, опустим; это значит мы будем иметь дело с $k_y \ll \frac{1}{r_H}$. В такой плазме, кроме того, можно не учитывать теплопроводности поперек магнитного поля.

Мы не будем выписывать общего дисперсионного уравнения в двухжидкостной модели, а ограничимся рассмотрением наиболее интересного случая "промежуточных" частот

При таких частотах ионы не успевают существенно сместиться вдоль силовых линий (по оси z), поэтому можно не учитывать их движения вдоль z . Для электронов же такие частоты слишком малы и можно пренебречь их инерцией. Система линеаризованных уравнений для возмущенных величин имеет вид:

$$-ik_z(n_oT_e + nT_o) - en_oE_z - 0{,}71\, ik_z n_o T_e = 0 \qquad (1.3)$$

$$-\nabla_\perp p_e - eE_{o\perp}n - eE_\perp n_o - \frac{e}{c}n_o[v\times H] - \frac{e}{c}n[v_o\times H] = 0 \qquad (2,3)$$

$$i\omega n - ik_y c\frac{E_{ox}}{H}n + c\frac{E_y}{H}n_o' = 0 \qquad (3.3)$$

$$\frac{3}{2}n_o\{i\omega T_e + v_oT_e ik_y + v_xT_o'\} - T_o\{i\omega n + ik_y v_o n + v_x n_o'\} = \qquad (4.3)$$

$$= -k_z^2 \varkappa T_e + \frac{5}{2}\frac{cT_o}{eH}ik_y(nT_o' - T_e n_o')$$

Здесь (1.3) есть уравнение движения электронов вдоль z в пренебрежении инерцией электронов, последний член в (1.3) соответствует т.н. "термосиле", возникающей при наличии градиента температуры; (2.3) - уравнение движения электронов поперек силовых линий; (3.3) - уравнение непрерывности, имеющее одинаковый вид и для ионов и электронов; (4.3) - уравнение теплового баланса, v_o -невозмущенная скорость электронов; $\varkappa$ - коэффициент электронной теплопроводности вдоль H ; E_o - невозмущенное электрическое поле (направленное вдоль оси x).

Из системы однородных линейных уравнений (1.3)-(4.3) получается, как условие разрешимости, дисперсионное уравнение

$$3\omega_o^2 + \omega_o\left[3(1+S)k_y v_T - 3k_y v_n - 2ik_z^2\chi\right] - 3(1+S)k_y^2 v_n v_T = 0 \qquad (5.3)$$

где

$$\omega_o = \omega + k_y(2v_n + v_T)\,; \qquad S = 0{,}71$$

$$v_n = -\frac{cT_o}{eH}\frac{n_o'}{n_o}\,; \quad v_T = -\frac{cT_o}{eH}\frac{T_o'}{T_o}\,; \quad \chi = \frac{\varkappa}{n_o}$$

Из решения этого уравнения

$$\omega_0 = -\frac{1}{2}\left\{(1+S)k_y v_T - k_y v_n - \frac{2}{3} i k_z^2 \chi\right\} \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{1}{4}\left\{(1+S)v_T k_y - k_y v_n - i\frac{2}{3}k_z^2\chi\right\}^2 + k_y^2 v_n v_T (1+S)} \qquad (6.3)$$

можно получить условие неустойчивости (при $k_y v_{n,T} \gg k_z^2 \chi$)

$$\frac{d\ln T}{d\ln n} < 0 \qquad (7.3)$$

Максимальный инкремент имеет порядок

$$\operatorname{Im}\omega \sim k_z^2 \chi \qquad (8.3)$$

Заметим, что если в дисперсионном уравнении (5.3) опустить коэффициент теплопроводности χ , то неустойчивость исчезает. Условие (7.3) совпадает с условием неустойчивости (20.2"), полученным для аналогичного предельного случая. При учете конечности ларморовского радиуса граница устойчивости $\frac{d\ln T}{d\ln n} = 0$ сдвигается в сторону положительных $\frac{d\ln T}{d\ln n}$.

Таким образом неоднородная разреженная плазма является "универсально" неустойчивой. Однако, поскольку неустойчивость развивается на коротких волнах, она должна приводить не к быстрому уходу макроскопических сгустков плазмы из магнитных ловушек, а к медленной турбулентной "диффузии".

Этот вопрос требует специального рассмотрения.

Приложение.

Покажем, что члены суммы $l \neq 0$ в (4.2) малы при $\omega \ll \Omega_i$. Действительно эти члены по отношению к основному иметю порядок

$$\frac{\omega}{\Omega_i}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_0^{\infty} J_l^2(\theta_i t^{1/2}) e^{-t} dt = \frac{\omega}{\Omega_i}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l} e^{-\frac{\theta_i^2}{2}} I_l\left(\frac{\theta_i^2}{2}\right)$$

Согласно неравенству Буняковского это меньше или равно, чем

$$\frac{\omega}{\Omega_i} e^{-\frac{\theta_i^2}{2}} \left(\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{l=1}^{\infty} I_l^2\left(\frac{\theta_i^2}{2}\right)\right)^{1/2}$$

С другой стороны из известной теоремы сложения бесселевых функций с целым значком

$$J_0\left(\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}\right) = J_0(a)J_0(b) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_k(a)J_k(b)\cos k\alpha$$

получаем, что

$$\sum I_l^2\left(\frac{\theta_i^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left\{1 - I_0^2\left(\frac{\theta_i^2}{2}\right)\right\}$$

и, следовательно, члены суммы в (4.2) с $l \neq 0$ по порядку величины

$$\sim \frac{\omega}{\Omega_i} e^{-\frac{\theta_i^2}{2}} \left\{1 - I_0^2\left(\frac{\theta_i^2}{2}\right)\right\}^{1/2} \ll 1$$

Литература

/1/ А.А.Веденов, Е.П.Велихов, Р.З.Сагдеев. УФН, 73, 701 (1961).

/2/ А.А.Веденов, Е.П.Велихов, Р.З.Сагдеев. Ядерный синтез 1,82 (1961).

/3/ Л.И.Рудаков, Р.З.Сагдеев, ДАН,138,581 (1961); Доклад на конференции по физике плазмы в Зальцбурге, сентябрь 1961 г.

/4/ M.N. Rosenbluth, N.A. Krall, N. Rostoker
Finite Larmor radius stabilisation of weakly unstable confined plasmas [Conf. Plasma Physics and Controlled Nucl. Fusion Res., Salzburg, 4th-9th Sept, 1961.

/5/ С.И.Брагинский. ЖЭТФ, 33, 645 (1957).