15

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ им. И.В.КУРЧАТОВА АН СССР

Препринт. 018

А.А.Галеев, Л.И.Рудаков.

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ДРЕЙФОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ.

Гор. Новосибирск

1963 г.

А н н о т а ц и я

Рассмотрена турбулентная кинетика плазмы, неустойчивой по отношению к раскачке дрейфовых волн /I/. В основу рассмотрения положен квазилинейный метод /2/, учитывающий обратное влияние колебаний на функцию распределения частиц, и кинетическое уравнение для волн, учитывающее нелинейные эффекты взаимодействия между "масштабами" турбулентности /3,4/.

The turbulence of plasma due the so called universal (drift) instability is considered. Theanomal plasma diffusion across magnetik field is derived.

§ I. В последнее время появилось большое число работ, в которых исследуется устойчивость нерезкой границы плазмы, удерживаемой магнитным полем /I/. Приведем краткую сводку результатов линейной теории устойчивости, полученных в пренебрежении столкновениями. Слой плазмы, плотность и температура которой зависят только от x, удерживается однородным магнитным полем H_z. Электрическое поле всюду равно нулю. В такой плазме существуют колебания частоты $\omega \sim k_y v_n(x) \equiv k_y \frac{cT}{eH} \cdot \frac{\nabla n}{n}$ (дрейфовые волны).

Если давление плазмы не слишком велико $1 \gg \beta > \frac{m_e}{m_i}$, где $\beta = \frac{8\pi n T}{H^2}$ наиболее опасными являются возмущения, фазовая скорость которых заключена в интервале: $u_i \ll \frac{\omega}{k_z} \lesssim V_A$ ($u_j = \sqrt{\frac{T_j}{m_j}}$, $V_A = \frac{H}{\sqrt{4\pi n m_i}}$ рассматриваются колебания вида $\varphi(x) \exp\{ik_z z + ik_y y - i\omega t\}$). При этом условии электрическое поле возмущений можно считать потенциальным $\vec{E} = -\nabla\varphi$ Неустойчивость вызывается "резонансными" электронами, движущимися вдоль силовой линии со скоростями, близкими к фазовой скорости волны $\frac{\omega}{k_z}$. Этот эффект легко учесть, если воспользоваться для описания электронов кинетическим уравнением в дрейфовом приближении

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} - c\frac{[\nabla\varphi \times \vec{H}^{(0)}]}{H^2} \cdot \nabla f + \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0 \qquad \text{(I.I)}$$

Скорость изменения энергии волны $\dot{w}_{\vec{k}}$ равна работе, которую производят резонансные электроны в поле волны в единицу времени

$$\dot{w}_{\vec{k}} = \frac{1}{4}\left(j_{z\vec{k}} E^*_{z\vec{k}} + \text{к.с}\right) = -\frac{1}{4} e \left(E_{z\vec{k}} \int v_z \delta f_{\vec{k}} \, dv_z + \text{к.с.}\right)$$

Подставляя в это выражение осциллирующую поправку $\delta f_{\vec{k}}$ к фоновой функции f, найденную из решения линеаризованного уравнения (I.I), получим:

$$\dot{w}_{\vec{k}} = \pi \frac{e^2}{m^2} \omega \varphi^2_{\vec{k}} \int \left(k_z \frac{\partial f}{\partial v_z} - \frac{k_y}{\omega_{He}} \frac{\partial f}{\partial x}\right) \delta(\omega_{\vec{k}} - k_z v_z) \, dv_z \qquad \text{(I.2)}$$

Теперь легко сформулировать условие неустойчивости дрейфовой волны. Энергия волны растет, если функция распределения для резонансных частиц удовлетворяет условию

$$k_z \frac{\partial f}{\partial v_z} - \frac{k_y}{\omega_{He}} \frac{\partial f}{\partial x} > 0$$

Для максвелловской функции распределения по скоростям частота колебаний ω при $k_y r_i \ll 1$ (r_i - ларморовский радиус иона) равна $k_y \cdot \frac{cT}{eH} \cdot \frac{\nabla n_0}{n_0}$. Для $k_y r_i \gg 1$ она достигает значения $\sim u_i \cdot \frac{\nabla n}{n}$ и перестает расти. Энергия дрейфовой волны для всех $\vec{k}$ порядка $\frac{e^2 \varphi^2_{\vec{k}}}{T}$, поэтому, как следует из формулы, инкремент $\gamma_{\vec{k}} \sim \dot{w}_{\vec{k}} / 2w_{\vec{k}}$ меняется от значения $\gamma_{\vec{k}} \sim \omega_{\vec{k}} \sqrt{\frac{m_e}{m_i \beta}}$ при $k r_i \lesssim 1$ до значения $\gamma_{\vec{k}} \sim \omega_{\vec{k}} \sim u_i \frac{\nabla n}{n}$ при $k_y r_i \sim \sqrt{\frac{m_i \beta}{m_e}}$.

В неустойчивой плазме уровень флюктуаций электрического поля может сильно превышать тепловой фон, что должно привести к увеличению потока плазмы поперек удерживающего магнитного поля. Для вычисления потока необходимо учесть в исходных уравнениях нелинейные члены.

Прежде всего рассмотрим обратное влияние возникающих вследствие неустойчивости колебаний на функцию распределения электронов. Для однородной плазмы этот процесс изучался в работе /2/. Применим развитый там метод решения задачи к уравнению (I.I). Разобьем функцию распределения электронов на медленно меняющуюся f и малую быстро осциллирующую во времени δf части. Это можно сделать, когда $\gamma_{\vec{k}} \ll \omega_{\vec{k}}$. δf определим из линеаризованного уравнения (I.I)

$$\delta f = \sum_{\vec{k}} \left(\delta f_{\vec{k}}\, e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i k_y y + i k_z z} + \text{к.с} \right) \tag{I.3}$$

$$\delta f_{\vec{k}}(x) = \frac{e}{m} \varphi_{\vec{k}} \frac{1}{\omega_{\vec{k}} - k_z v_z} \left\{ k_z \frac{\partial f}{\partial v_z} - \frac{k_y}{\omega_{He}} \frac{\partial f}{\partial x} \right\}$$

Выражение для δf подставим в уравнение (I.I) и проведем усреднение по быстрым осцилляциям. В результате получим уравнение, описывающее изменение функции f /5,7/

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{1}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} - \frac{k_y}{\omega_{\vec{k}} \omega_{He}} \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathcal{D}_{\vec{k}} \left(\frac{1}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} - \frac{k_y}{\omega_{\vec{k}} \omega_{He}} \frac{\partial}{\partial x} \right) f \tag{I.4}$$

$$\mathcal{D}_{\vec{k}}(x,t) = \pi \frac{e^2}{m^2} \varphi_{\vec{k}}^2 \omega_{\vec{k}}^2\, \delta(\omega_{\vec{k}} - k_z v_z)$$

Уравнение (I.4) типа уравнения диффузии в (x , v_z) пространстве. Его приближенное решение легко найти, исходя из следующих соображений. "Коэффициент диффузии" $\mathcal{D}_{\vec{k}}$ зависит от волнового вектора $\vec{k}$ и, как можно показать, при некотором значении $\vec{k} = \vec{\bar{k}}$, $\bar{k}_z \sim \frac{\omega_{\vec{k}}}{V_A}$, $\bar{k}_y r_i$ имеет максимум.

Для оценки скорости процесса выравнивания "плато" в (x, v_z) пространстве описываемого уравнения (I.4) (см.работу /2/), можно в нем заменить $\mathcal{D}_{\vec{k}}$ на $\mathcal{D}_{\vec{\bar{k}}}$. Далее, удобно в упрощенном ур. (I.4) перейти от переменных x , v_z к новым переменным $\eta = \frac{v_z^2}{2V_\varphi}$, $\xi = \frac{v_z^2}{2V_\varphi} + \frac{\omega_{\vec{k}} \omega_{He}}{k_y V_\varphi} x$, где V_φ средняя скорость резонансных электронов, $V_\varphi = \frac{\omega_k}{k_z} \sim V_A$; . Тогда ур. (I.4) примет вид:

$$\frac{\partial f(\xi,\eta,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \eta} \mathcal{D}_{\vec{\bar{k}}}(\xi,\eta,t) \frac{\partial f}{\partial \eta} \tag{I.4''}$$

$$\mathcal{D}_{\vec{k}}(\xi,\eta,t) = \pi \frac{e^2}{m^2 u_e^2} \omega_{\vec{k}} \left(\frac{V_e}{U_A} \right)^2 \varphi_{\vec{k}}^2$$

где γ_k инкремент неустойчивости, полученный из линейной теории для максвелловской функции распределения электронов. (Для определения точной зависимости $\gamma'_k(\nu_e)$ надо решать систему ур. (I.6) и (I.2).

После того как показано, что в рассматриваемой задаче вследствие неустойчивости есть стационарный источник колебаний, естественно поставить вопрос, куда деваются эти колебания и до какой амплитуды они нарастают. Из линейной теории следует, что инкремент γ_k максимален для колебаний с фазовыми скоростями $\frac{\omega}{k_z} \sim V_A \gg u_i$. Такие колебания поглощаются ионами слабо, т.к. резонансных ионов, для которых $v_z \sim V_A$, экспоненциально мало. Непосредственно излучаться из плазмы в виде электромагнитных волн они не могут, т.к. фазовая скорость их мала в сравнении со скоростью света. Поэтому можно ожидать, что энергия колебаний дорастет до такого уровня, что включится механизм взаимодействия между волнами и появится поток их по спектру в сторону малых фазовых скоростей $\frac{\omega}{k_z}$. Рождающиеся в результате такого процесса колебания с фазовыми скоростями $\frac{\omega}{k_z} \lesssim u_i$ будут поглощаться резонансными ионами. В предположении, что нет корреляции между фазами колебаний с различными $\vec{k}$, процесс рождения и поглощения волн можно описать с помощью кинетического уравнения для волн, написанного в применении к плазме, в работах /3/ и /4/.

§2. Таким оораэом, для последовательной теории турбулентной диффузии необходимо взаимосвязанное рассмотрение двух процессов:

I. Раскачки "дрейфовых" волн частицами плазмы, находящимися с ней в резонансе, и обратного влияния возникающих волн на распределение частиц.

2. Нелинейного взаимодействия волн между собой, приводящего к установлению некоторого распределения энергии волн по спектру.

Первый процесс уже учтен в квазилинейном методе, приводящем к уравнению для усредненной функции распределения электронов (I.4). Рассмотрим подробно второй процесс - нелинейное взаимодействие волн. Потенциал φ представим в виде суммы потенциалов электрических полей отдельных колебаний с медленно меняющимися во времени и пространстве амплитудами $c_{\vec{k}}(t,x)$:

$$\varphi = \sum_{\vec{k}} c_{\vec{k}}(t,x)\,\varphi_{\vec{k}}\, e^{i(\omega_{\vec{k}} + \vec{k}\vec{r})} + \sum_{\vec{k}_-} c_{\vec{k}_-}(t,x)\,\varphi_{\vec{k}_-}\, e^{-i(\omega_{\vec{k}} + \vec{k}\vec{r})} \tag{П.1}$$

$$c_{\vec{k}_-} = c^*_{\vec{k}} \qquad \varphi_{\vec{k}_-} = \varphi^*_{\vec{k}}$$

Как и в /5/, мы будем пользоваться не строгими квазиклассическими собственными функциями линейной задачи устойчивости:

$$\varphi = \varphi_{\vec{k}} \exp\left\{ i\int_{z_1}^{x} k_x(x,\omega)\,dx + ik_y y + ik_z z + i\omega t \right\}$$

а приближенно заменим их на плоские волны $\exp\{i\vec{k}\vec{r}+i\omega_k t\}$

Нелинейное взаимодействие волн приводит к медленному изменению их амплитуд во времени за счет передачи энергии по спектру. Корректное описание этого процесса удается провести лишь в том случае, когда "связь" между волнами (а также волнами и частицами) слабая и можно воспользоваться теорией возмущений относительно малого параметра – отношения энергии взаимодействия волн к их полной энергии /3/. Тогда вследствие "слабой" связи между волнами фазы амплитуд можно считать случайными и произвести по ним усреднение.

Получим сначала динамическое уравнение для изменения амплитуд $c_{\vec{k}}(t)$ во времени. Для этого представим компоненту Фурье быстроосциллирующей части функции распределения $f_{\vec{k}j}(\vec{r},\vec{v},t)$ в виде интеграла по невозмущенным траекториям частиц /6/ с учетом нелинейных членов:

$$c_{\vec{k}} f_{\vec{k}j} = -\frac{\partial c_{\vec{k}}}{\partial t}\int_{-\infty}^{t} f_{\vec{k}j}\,dt - \left(\frac{\partial c_{\vec{k}}}{\partial x}+\frac{\partial c_{\vec{k}}}{\partial k_x}\frac{dk_x}{dx}\right)\left\{\int_{-\infty}^{t} v_x f_{\vec{k}j}\,dt - \frac{e_j}{m_j}\int_{-\infty}^{t}\varphi_{\vec{k}}\frac{\partial f_{0j}}{\partial v_x}\right\}+$$

$$+\frac{e_j}{m_j} i\vec{k}\int_{-\infty}^{t}\varphi_{\vec{k}}\frac{\partial f_{0j}}{\partial \vec{v}}\,dt + \frac{e_j}{m_j}\sum_{\vec{k}'+\vec{k}''=\vec{k}} i\vec{k}'\int_{-\infty}^{t}\varphi_{\vec{k}'}(\vec{r}(t),\vec{v})\cdot\frac{\partial f_{\vec{k}j}(\vec{r}(t),\vec{v}(t),t)}{\partial \vec{v}}\,dt \qquad (\text{П}.2)$$

и воспользуемся условием квазинейтральности

$$\sum_j e_j \int f_{\vec{k}j}(\vec{r},\vec{v})\,d\vec{v} = 0 \qquad (\text{П}.3)$$

Из (П.2) в линейном приближении получаем формулу для связи функции распределения $f_{\vec{k}j}$ с потенциалом $\varphi_{\vec{k}}$:

$$f_{\vec{k}j} = \xi_{\vec{k}j}(\vec{v})\varphi_{\vec{k}};\quad \xi_{kj}(\vec{v}) \equiv -\frac{e_j}{T_j}\Big[1-\sum_{\ell}\frac{\omega+k_y v_{Hj}(x)}{\omega+k_z v_z-\ell\omega_{Hj}}\cdot$$

$$J_\ell\left(\frac{k v_\perp}{\omega_{Hj}}\right)e^{i\ell(\theta-\omega_{Hj}t+\varphi)-i\ell\frac{\pi}{2}}\,e^{-i\frac{[\vec{k}\times\vec{v}(t)]_z}{\omega_{Hj}}}\Big]f_{0j}(\vec{v}) \qquad (\text{П}.4)$$

где невозмущенная функция распределения, как и в работе /6/, выбрана в виде:

$$f_{0j} = \left[\frac{m_j}{2\pi T}\right]^{3/2}\left[1+\left(x+\frac{v_y}{\omega_{Hj}}\right)\frac{1}{n_0}\frac{dn_0}{dx}\right]n_0\,e^{-\frac{m_j\vec{v}^2}{2T}}$$

Оставляя в (П.4) лишь член с $\ell = 0$ из (П.3), получаем выражение для инкремента

$$\gamma_{\vec{k}} = \frac{Im \sum_j e_j \int \xi_{\vec{k}j}(\vec{v})\, d\vec{v}}{\sum_j e_j \frac{\partial \xi_{\vec{k}j}}{\partial \omega_{\vec{k}}}(\vec{v})\, d\vec{v}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{\omega_{\vec{k}}}{K_z U_e} \cdot (\omega_{\vec{k}} - K_y v_n) \qquad (\text{П.5})$$

и частоты колебаний

$$\omega_{\vec{k}} = \frac{K_y v_n\, F(K_\perp^2)}{2 - F(K_\perp^2)}, \quad F(K_\perp^2) = e^{-K_\perp^2 \tau_i^2} I_0(K_\perp^2 \tau_i^2) \qquad (\text{П.6})$$

где I_0 - функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента.

Далее подставим в правую часть (П.2) первое приближение $f_{\vec{k}j}$. Тогда, оставляя лишь основные слагаемые в нелинейном члене, получаем уравнение для поправки к функции распределения с учетом взаимодействия между волнами:

$$c_{\vec{k}} f_{\vec{k}j} = \Big(\xi_{\vec{k}j} c_{\vec{k}} + \frac{\partial \xi_{\vec{k}j}}{\partial i\omega_{\vec{k}}} \cdot \frac{\partial c_{\vec{k}}}{\partial t} + \frac{\partial \xi_{\vec{k}j}}{\partial i k_x} \Big(\frac{\partial c_{\vec{k}}}{\partial x} + \frac{\partial c_{\vec{k}}}{\partial k_x} \cdot \frac{d k_x}{d x} \Big) -$$

$$- \frac{\partial \tilde{\xi}_{\vec{k}}}{\partial i \omega_{\vec{k}}} \sum_{\vec{k}' + \vec{k}'' = \vec{k}} V^j_{\vec{k}\vec{k}'\vec{k}''}(\vec{v}, t)\, c_{\vec{k}'} c_{\vec{k}''} \Big) \varphi_{\vec{k}} \qquad (\text{П.7})$$

где $\tilde{\xi}_{\vec{k}} = \sum_j \frac{e_j}{|e|} \int \xi_{\vec{k}j}(\vec{v})\, d\vec{v}$; $\quad \frac{\partial \tilde{\xi}_{\vec{k}}}{\partial \omega_{\vec{k}}} V^j_{\vec{k}\vec{k}'\vec{k}''}(\vec{v}, t) = 2 \frac{e_j^2}{m_j T_j} \cdot \frac{[\vec{k}' \times \vec{k}'']_z}{\omega_{Hj}} \cdot$

$$\left(\frac{\omega_{\vec{k}''} + K_y'' v_n(x)}{\omega_{\vec{k}''} + K_z'' v_z} - \frac{\omega_{\vec{k}'} + K_y' v_n(x)}{\omega_{\vec{k}'} + K_z' v_z} \right) \frac{J_0\left(\frac{K_\perp v_\perp}{\omega_{Hj}}\right) J_0\left(\frac{K_\perp' v_\perp}{\omega_{Hj}}\right) J_0\left(\frac{K_\perp'' v_\perp}{\omega_{Hj}}\right)}{\omega_{\vec{k}'} + \omega_{\vec{k}''} - (K_z' + K_z'') v_z} \frac{\varphi_{\vec{k}'} \varphi_{\vec{k}''}}{\varphi_{\vec{k}}} \cdot e^{i(\omega_{\vec{k}'} + \omega_{\vec{k}''} - \omega_{\vec{k}})t}$$

Динамическое уравнение для амплитуд $C_{\vec{k}}$ имеет вид:

$$\frac{\partial C_{\vec{k}}}{\partial t} = \gamma_{\vec{k}} C_{\vec{k}} + \frac{\partial \omega_{\vec{k}}}{\partial k_x} \cdot \Big(\frac{\partial C_{\vec{k}}}{\partial x} + \frac{\partial C_{\vec{k}}}{\partial k_x} \cdot \frac{d k_x}{d x} \Big) + \sum_{\vec{k}' + \vec{k}'' = \vec{k}} V_{\vec{k}\vec{k}'\vec{k}''}(t)\, C_{\vec{k}'} C_{\vec{k}''} \qquad (\text{П.8})$$

Если нормировать вектор состояния $\varphi_{\vec{k}}$ согласно соотношению

$$W_{\vec{k}} = \frac{\partial(\omega_{\vec{k}} \varepsilon(\omega_{\vec{k}}, \vec{k}))}{\partial \omega_{\vec{k}}} \cdot \frac{\vec{k}^2 \varphi_{\vec{k}}^2}{8\pi} = \omega_{\vec{k}} \qquad (\text{П.9})$$

$\varepsilon = \frac{4\pi e\, \tilde{\xi}_{\vec{k}}}{k^2}$ – диэлектрическая проницаемость плазмы, то квадрат модуля амплитуды волны можно трактовать как число волн $n_{\vec{k}} = |C_{\vec{k}}|^2$ с энергией $\omega_{\vec{k}}$. При такой нормировке матричный элемент V, характеризующий величину взаимодействия, обладает необходимыми свойствами симметрии (см./4/), а изменение числа волн во времени описывается кинетическим уравнением:[3, 4]

$$\frac{\partial n_{\vec{k}}}{\partial t} + \frac{\partial n_{\vec{k}}}{\partial x}\left(-\frac{\partial \omega_{\vec{k}}}{\partial k_x}\right) + \frac{\partial n_{\vec{k}}}{\partial k_x}\frac{dk_x}{dx}\cdot\left(-\frac{\partial \omega_{\vec{k}}}{\partial k_x}\right) = St^{(0)}\{n_k, n_k\} + 2\gamma_{\vec{k}} n_{\vec{k}}$$

где
$$St^{(0)}\{n_k, n_k\} = 2\pi \sum_{\vec{k}', \vec{k}''}\Big\{ |V_{\vec{k}\vec{k}'\vec{k}''}|^2 (n_{\vec{k}'} n_{\vec{k}''} - n_{\vec{k}} n_{\vec{k}'} - n_{\vec{k}} n_{\vec{k}''})\,\delta_{\vec{k},\vec{k}'+\vec{k}''}\cdot$$
$$\cdot\delta(\omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}'} - \omega_{\vec{k}''}) + |V_{\vec{k},\vec{k}'_-,\vec{k}''}|^2 (n_{\vec{k}'} n_{\vec{k}''} + n_{\vec{k}''} n_{\vec{k}} - n_{\vec{k}} n_{\vec{k}'})\,\delta(\omega_{\vec{k}''} - \omega_{\vec{k}'} - \omega_{\vec{k}})\,\delta_{\vec{k}'',\vec{k}'+\vec{k}}\Big\} \quad (\text{П.10})$$

где:

$$V_{\vec{k}\vec{k}'\vec{k}''} \equiv \int \sum_j \frac{e_j}{|e|} V^j_{\vec{k}\vec{k}'\vec{k}''}(\vec{v})\, d\vec{v} \equiv \sqrt{\frac{8\,\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'}\omega_{\vec{k}''}}{n_0 T_0 \left(r_i \frac{\nabla n}{n}\right)^2}}\; \frac{[\vec{k}'\vec{k}'']_z r_i \frac{F_{\vec{k}'} - F_{\vec{k}''}}{k_y}(2 - F_{\vec{k}})}{F_{\vec{k}} F_{\vec{k}'} F_{\vec{k}''}}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\sqrt{(2-F_{\vec{k}})(2-F_{\vec{k}'})(2-F_{\vec{k}''})}} \int_0^\infty e^{-\frac{m_i v_\perp^2}{2T}} J_0\!\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_{Hi}}\right) J_0\!\left(\frac{k'_\perp v_\perp}{\omega_{Hi}}\right) J_0\!\left(\frac{k''_\perp v_\perp}{\omega_{Hi}}\right) \frac{m_i v_\perp\, dv_\perp}{T}.$$

$Stoss$ – член в этом уравнении учитывает только нелинейную передачу энергии по спектру "собственных" колебаний, то-есть процесс перехода двух волн в одну и,наоборот, в результате их неупругого столкновения. Однако при интерференции имеющихся волн возникают и вынужденные колебания. Их амплитуда равна

$$c^{(1)}_{\vec{k}''} = e^{\gamma_{\vec{k}''} t} \int_0^t V_{\vec{k}'',\vec{k}'_-,\vec{k}}\, C_{\vec{k}'_-} C_{\vec{k}}\, e^{i(\omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}'} - \omega_{\vec{k}''})t - \gamma_{\vec{k}''} t}\, dt =$$

$$= V_{\vec{k}'',\vec{k}'_-,\vec{k}}\, C_{\vec{k}'_-} C_{\vec{k}}\, \frac{e^{i(\omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}'} - \omega_{\vec{k}''})t} - e^{\gamma_{\vec{k}''} t}}{i(\omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}'} - \omega_{\vec{k}''}) + \gamma_{\vec{k}''}}, \quad \gamma_{\vec{k}''} < 0$$

Поглощение этих вынужденных колебаний дает нам дополнительный канал для оттока энергии из данного масштаба пульсаций. Поэтому в полном $Stoss$ – члене следует учесть вклад таких процессов:

$$St\{n_{\vec{k}}, n_{\vec{k}}\} = St^{(0)}\{n_{\vec{k}}, n_{\vec{k}}\} + 2\Big\{ V_{\vec{k}\vec{k}'\vec{k}''} V_{\vec{k}'',\vec{k}'_-,\vec{k}} \frac{|\gamma_{\vec{k}''}|\, n_{\vec{k}} n_{\vec{k}'}}{(\omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}'} - \omega_{\vec{k}''})^2 + \gamma_{\vec{k}''}^2} + 2 V_{\vec{k},\vec{k}'_-,\vec{k}''} V_{\vec{k}''\vec{k}'\vec{k}} \cdot$$
$$\cdot\frac{|\gamma_{\vec{k}''}|\, n_{\vec{k}} n_{\vec{k}'}}{(\omega_{\vec{k}''} - \omega_{\vec{k}'} - \omega_{\vec{k}''})^2 + \gamma_{\vec{k}''}^2}\Big\}.$$

Это уравнение, вместе с "квазилинейным" уравнением (I.4), составляет полную систему, определяющую кинетику турбулентной плазмы для случая "слабой связи" между волнами, что справедливо при $\left(\gamma_{\vec{k}}, \frac{1}{C_{\vec{k}}}\frac{\partial C_{\vec{k}}}{\partial t} \ll \omega_{\vec{k}}\right)$ /4/. Однако, как мы увидим ниже, коэффициент диффузии становится максимальным как раз для почти апериодической неустойчивости $\gamma_{\vec{k}} \sim \omega_{\vec{k}}$ относительно коротковолновых колебаний $\lambda_x \sim r_i\sqrt{\frac{m_e}{m_i\beta}}$. В этом случае уравнение (I.4) еще применимо, так как условие слабости связи волны с электронами $\frac{\gamma_{\vec{k}}}{K_z u_e}$ выполняется. Уравнение (П.10) при этом справедливо лишь качественно и мы воспользуемся им для качественной оценки энергии волн. (Эта оценка будет правильным предельным случаем оценки для длинноволновых колебаний $\lambda > r_i\sqrt{\frac{m_e}{m_i\beta}}$, когда еще $\gamma_\kappa < \omega_\kappa$).

Из условия квазистационарного равновесия:

$$2\gamma_\kappa n_\kappa \sim \sum_{\vec{k}'} |V_{\vec{k},\vec{k}',\vec{k}''}|^2 n_{\vec{k}} n_{\vec{k}'} (2\pi\cdot 4 + 2\cdot 3)\frac{1}{\omega_{\vec{k}}}.$$

(здесь считается, что приход энергии в турбулентные пульсации из-за неустойчивости компенсируется уходом ее из-за нелинейной передачи по спектру и поглощения) с учетом оценки матричного элемента для длин волн $\lambda_x \lesssim r_i$:

$$V_{\kappa\kappa'\kappa''} \simeq 4\sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}\,\omega_{\vec{k}'}\,\omega_{\vec{k}''}}{n_0 T_0 \left(r_i \frac{\nabla n}{n}\right)^2}}\left(|\vec{k}'|-|\vec{k}''|\right) r_i \qquad \text{(П.12)}$$

получаем оценку энергии волн:

$$W_{\vec{k}} \simeq \sum_{\vec{k}} n_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}} \sim \sum_{\vec{k}} \frac{e^2 n_0}{T} n_{\vec{k}} |\varphi_{\vec{k}}|^2 \sim \frac{n_0 T_0}{200}\frac{\gamma'_{\vec{k}}}{\omega_{\vec{k}}}\left(r_i\frac{\nabla n}{n}\right)^2 \frac{1}{K_\perp^2 r_i^2} \qquad \text{(П.13)}$$

Теперь оценим величину среднего потока частиц $\langle n v_x\rangle$. Величину $\langle n v_x\rangle$ можно найти, усреднив по времени y -компоненту уравнения движения для электронов и ионов

$$\langle n v_x\rangle_j = \frac{c}{H}\langle E_y\,\delta n_j\rangle \qquad \text{(П.14)}$$

В это выражение надо подставить величину δn_j , найденную из решения линеаризованного кинетического уравнения. Для электронов δn_e определяется формулой (I.3)

$$\langle n v_x\rangle_e = 2\pi\frac{ec}{m_e H}\sum_{\vec{k}} k_y n_\kappa \varphi_\kappa^2 \int\left(\kappa_z\frac{\partial f}{\partial v_z} - \frac{k_y}{\omega_{He}}\frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta(\omega_{\vec{k}} - K_z v_z)\,dv_z \simeq \qquad \text{(П.15)}$$

$$\sim -2\frac{c^2}{H^2}\sum_{\vec{k}} k_y^2 n_\kappa |\varphi_{\vec{k}}|^2 \frac{\gamma'_{\vec{k}}}{\omega_{\vec{k}}^2}\cdot\frac{F(K_\perp^2)}{2-F(K_\perp^2)}\nabla n_0(x)$$

При оценке мы воспользовались ур. (I.2) и (I.7).

Уравнения (П.I5) имеют простой смысл. Резонансные электроны, возбуждая колебания, теряют в единицу времени импульс

$$P_{\vec{k}_y} = 2\gamma'_{\vec{k}} \frac{w_{\vec{k}}}{\omega_{\vec{k}}} k_y \equiv 2\gamma'_{\vec{k}} n_{\vec{k}} k_y$$

Этот поток импульса поглощается ионами. Можно сказать, что между электронами и ионами действует сила трения. Под действием этой силы возникает поток плазмы $\langle n v_x \rangle = -\frac{c}{eH} \sum \dot{P}_{ky}$. Из этих рассуждений следует, что $\langle n v_x \rangle$ для обеих сортов частиц равны, так что нейтральность плазмы не нарушается.

Коэффициент диффузии $\mathcal{D}(x,t)$ определим из соотношения

$$\langle n v_x \rangle = - \mathcal{D} \nabla n \qquad (\text{П.I6})$$

$$\mathcal{D} \sim 2 \frac{c^2}{H^2} \sum_{\vec{k}} k_y^2 n_{\vec{k}} \varphi_{\vec{k}}^2 \frac{\gamma'_{\vec{k}}}{\omega_{\vec{k}}^2} \frac{F(\kappa_\perp^2)}{2 - F(\kappa_\perp^2)}$$

Величина γ^k/ω_k зависит от k_y, $\eta = \frac{d\ln T}{d\ln n}$ и при $\eta \gtrsim 0$ достигает максимального значения ~ 1 при $k_y r_i \sim \sqrt{\frac{m_i\beta}{\pi m_e}}$. Поэтому $\mathcal{D}$ для $\eta \gtrsim 0$ имеет максимум, когда $k_y r_i \sim \sqrt{m_i\beta}$

$$\mathcal{D} \sim \frac{1}{100} \sqrt{\frac{m_e}{m_i\beta}} \frac{cT}{eH} \cdot \left(r_i \frac{\nabla n}{n}\right) \cdot \frac{4}{\left[1 + \sqrt{1 + \frac{\omega_{Hi}}{10\nu_e}\left(r_i \frac{\nabla n}{n}\right)^3}\right]^2} \qquad (\text{П.I7})$$

Для получения (П.I7) мы воспользовались тем, что при наличии столкновений инкремент неустойчивости следует определять из решения уравнения

$$\frac{\gamma'_{\vec{k}}}{\gamma_{\vec{k}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{100} \cdot \frac{\gamma_k}{\nu_e} \left(r_i \frac{\nabla n}{n}\right)^2 \frac{m_i\beta}{m_e \kappa_\perp^2 r_i^2} \frac{\gamma'_{\vec{k}}}{\gamma_{\vec{k}}}}, \quad \kappa r_i \sim \sqrt{\frac{m_i\beta}{\pi m_e}}$$

Этот коэффициент диффузии больше классического коэффициента $\mathcal{D}_{кл} \sim \frac{m_e}{m_i} r_i^2 \nu_e$ (только при этом условии применимы сделанные оценки), но сравнительно невелик. Так он мал в сравнении с Бомовским коэффициентом $\mathcal{D}_Б \sim \frac{cT}{eH}$. Из этого выражения видно, что в случае малых частот столкновений $\nu_e \ll \nu_*$ время удержания, определяемое как $\tau_{уд} \sim R^2/\mathcal{D}$ универсальным образом связано с ν_e x)

$$\tau_{уд} \simeq \tau_{i/i} \cdot \beta^{1/2} \qquad \tau_{i/i} \simeq \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \frac{1}{\nu_e}$$

и меньше времени ион-ионных столкновений.

---

x) На это обстоятельство обратил наше внимание Р.З.Сагдеев.

Что касается пределов применимости развитой здесь теории, то как и в работах /I/, мы пренебрегли диамагнитным дрейфом, то-есть считали

$$\omega_{\vec{k}} \gg k_y \frac{cT}{eH} \cdot \frac{H_0'(x)}{H_0(x)} \sim \beta\, k_y v_n(x)$$

Подставляя сюда $(k_y r_i)_{max} \sim \sqrt{\frac{m_i \beta}{m_e}}$, получаем ограничения на величину отношения давления плазмы к давлению магнитного поля

$$\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/3} > \beta > \frac{m_e}{m_i}$$

В заключение авторы приносят искреннюю благодарность Р.З.Сагдееву за плодотворные дискуссии и замечания.

Литература

I. Л.И.Рудаков, Р.З.Сагдеев, ДАН, I38, 58I (I96I)
Б.Б.Кадомцев, А.В.Тимофеев, ДАН, I46, 58I (I962)
А.Б.Михайловский, Л.И.Рудаков, препринт ИАЭ, г.Москва (I96I)
А.А.Галеев, В.Н.Ораевский, Р.З.Сагдеев, препринт ИЯФ, г.Новосибирск, (I96I).

2. А.А.Веденов, Е.П.Велихов, Р.З.Сагдеев, Ядерный синтез, I, 82 (I96I)

3. M. Camac, A. Kantrowitz, M. Litvak, R. Patrik, H. Petshek, Nuclear Fusion, Supplement, Part II, 423, 1962

4. А.А.Галеев, В.И.Карпман, ЖЭТФ, 44, 592 (I963)

5. А.А.Галеев, С.С.Моисеев, Р.З.Сагдеев, препринт ИЯФ,г.Новосибирск (I963)

6. M.N. Rosenbluth, N.A. Krall, Rostoker, Nuclear Fusion, Supplement, Part I, 75, 1962.

7. В.Н.Ораевский, Диссертация, г.Новосибирск (I962).

Ответственный за выпуск В.И.Карпман
подписано к печати 8/IУ-1963 г.
формат бумаги 270 х 190, тираж 200
заказ № 018 Бесплатно.

Отпечатано на ротапринте в Институте ядерной
физики СО АН СССР.