

И.Б.Хриплович

ОГРАНИЧЕНИЯ  
НАЛАГАЕМЫЕ НА АСИМПТОТИКИ СЕЧЕНИЙ  
ГИПОТЕЗОЙ ПОЛЮСОВ РЕДЖЕ



НОВОСИБИРСК 1963г

Handwritten mark resembling a stylized 'N' or 'M' with a horizontal line extending to the right.

I. B. KHRIPILOVICH

LIMITATIONS PUT ON THE ASYMPTOTICS OF  
CROSS-SECTIONS BY THE REGGE POLES HYPOTHESIS

abstract

The asymptotics of the amplitude governed by the Regge pole of the  $n$ th order is given. Assuming the analyticity of the  $\ell(s)$  near  $s=0$  and using the unitarity condition, it is shown that total cross-sections do not increase faster than the logarithm of energy. It is shown that for a boson trajectory  $\ell(s)$  is real for  $-\infty < s < 4\mu^2$ . The condition is given for the contribution of a Regge pole to the amplitude being purely imaginary at  $s=0$ .

I. Кратные полюса Редже и максимально возможный рост сечений.

В квантовой теории поля не видно особых оснований для того, чтобы исключить возможность существования кратных полюсов Редже. Кратность полюса может быть обусловлена как слиянием нескольких траекторий, так и пересечением их при некоторой передаче импульса  $S$ . Асимптотика амплитуды  $A(s, t)$  при  $t \rightarrow \infty$ , определяемая  $n$ -кратным полюсом Редже, имеет, как нетрудно убедиться, следующий вид:

$$A(s, t) = f(s) t^{\ell(s)} (\ln t)^{n-1} \quad /1/$$

В /1/ удерживается лишь слагаемое с высшей степенью  $\ln t$ .

С учётом этой возможности теорема Фруассара<sup>[1]</sup> означает, что  $\ell(0) \leq 1$ , а при  $\ell(0) = 1$  кратность полюса  $n \leq 3$ .

Этот результат может быть усилен, если заранее предположить, что амплитуда упругого рассеяния имеет асимптотику /1/, причём  $\ell(s)$  аналитична при  $s=0$ . Для доказательства будет использован тот очевидный факт, что сечение упругого рассеяния

$$\sigma_e = \frac{4}{t} \int d\Omega |A(s, t)|^2 = \frac{16\pi}{t^2} \int_{-t}^0 ds |A(s, t)|^2 \quad /2/$$

не превышает полного сечения процесса

$$\sigma_t = \frac{16\pi}{t} \operatorname{Im} A(0, t) = 16\pi \operatorname{Im} f(0) t^{\ell(0)-1} (\ln t)^{n-1} \quad /3/$$

Используя разложение  $A(s, t)$  по парциальным волнам, нетрудно убедиться, что это требование обеспечивается условием унитарности для парциальных амплитуд упругого рассеяния

$$\operatorname{Im} f_e(t) \geq |f_e(t)|^2 \quad /4/$$

(Все соотношения записаны для случая  $t \rightarrow \infty$ .)

Упругое сечение можно оценить при  $t \rightarrow \infty$ , используя (1).

Пусть при малых  $s$

$$l(s) \approx l(0) + \gamma s$$

Тогда основной вклад в интеграл на верхнем пределе дает область

$$-\frac{1}{2\gamma \ln t} \leq s \leq 0 \quad /5/$$

С ростом  $t$  этот интервал становится сколь угодно узким и в нем не может произойти смена ведущей особенности. Если же кратность полюса при  $s=0$  вызвана пересечением в этой точке нескольких траекторий, то, как нетрудно убедиться, значение интеграла (2) только уменьшится, если во всем интервале (5) считать все пересекающиеся траектории совпадающими с нижней. Т.о. упругое сечение рассеяния на малые углы, а следовательно, и всё упругое сечение при  $t \rightarrow \infty$  не может быть меньше следующей величины

$$b_{ie} = 8\pi \frac{|f(0)|^2}{\gamma} t^{2\ell(0)-2} (\ln t)^{2n-3} \quad /6/$$

Учёт высших членов в разложении  $l(s)$ , наряду с учётом зависимости предэкспоненциального множителя  $f$  от  $s$ , привел бы к появлению в (6) слагаемых, содержащих меньшие степени  $\ln t$ , которыми можно пренебречь при  $t \rightarrow \infty$ .

Т.к. полное сечение не меньше, чем  $b_{ie}$ , то ясно, что  $\ell(0) \leq 1$  и что если  $\ell(0)=1$ , то  $n \leq 2$ .

Легко видеть, что для выполнения неравенства  $b_t \geq b_e$  необходимо условие  $\gamma \geq 0$  [2]. Если  $\gamma=0$  и разложение  $l(s)$  начинается с более высоких степеней  $s$ , то, как нетрудно проверить, снова  $\ell(0) \leq 1$ , но при  $\ell(0)=1$  допустим лишь простой полюс, т.е.  $n=1$ . Этот же результат получился бы и для стоячего полюса Редже, при  $\ell$ , не зависящем от  $s$ .

Итак, если амплитуда упругого рассеяния имеет асимптотику Редже, то полное сечение процесса растёт не быстрее, чем логарифм энергии.

Аналитичность  $l(s)$  в нуле является существенным условием полученного результата. Если, например, разложение  $l(s)$  имеет вид  $l(s) \approx l(0) + \alpha s^{1/2}$ , то сечение может расти, как  $(\ln t)^3$ .

Полученное ограничение имеет место и для амплитуд с аномальными особенностями, в частности, для процессов с участием ядер [3], если только сохраняется аналитичность  $l(s)$  в нуле. Также, как и доказательство Фруассара, приведенные соображения не годятся для реакций с участием безмассовых частиц, [3] т.к. амплитуда рассеяния вперёд может в этом случае обращаться в бесконечность.

Заметим, что если  $l(s)$  аналитична во всей области  $s < 0$ , то она нигде в этой области не превосходит 1.

Из неравенства  $b_t \geq b_e$  следует также, что если при  $t \rightarrow \infty$   $A(s,t) \sim f(s)/t$ , то  $f_2(t) \leq \text{const} \cdot t$ , так что полное сечение ограничено постоянной.

Случай постоянного полного сечения  $\ell(0)=1$ ,  $n=1$  был изучен Грибовым [4, 5]. Рассмотрим возможность  $\ell(0)=1$ ,  $n=2$  когда и полное, и упругое сечения растут логарифмически

$$b_t = 16\pi \text{Im} f(0) \ln t, \quad b_{ie} = 8\pi \frac{|f(0)|^2}{\gamma} \ln t \quad /7/$$

Парциальные амплитуды при  $\ell \ll \sqrt{\gamma t \ln t}$  постоянны и равны  $\frac{f(0)}{\gamma}$  а при  $\ell \gg \sqrt{\gamma t \ln t}$  экспоненциально убывают с ростом  $\ell$ . Это соответствует рассеянию на шарике, радиус которого растёт с энергией  $\sim \sqrt{\gamma \ln t}$ , а прозрачность, в отличие от случая, рассмотренного Грибовым, остается постоянной.

Из условия унитарности (4) следует, что  $0 \leq \text{Im} f_e(t) \leq 1$ . Для случая логарифмического роста сечений это условие означает, что  $\text{Im} f(0) \leq \gamma$ . Если принять  $\gamma \approx \frac{1}{50\mu^2}$  [6], то получим верхний предел полного сечения  $b_t \leq \mu^{-2} \ln t$ .

Рассмотрение случая логарифмического роста сечений, произведенное в [7], ошибочно.

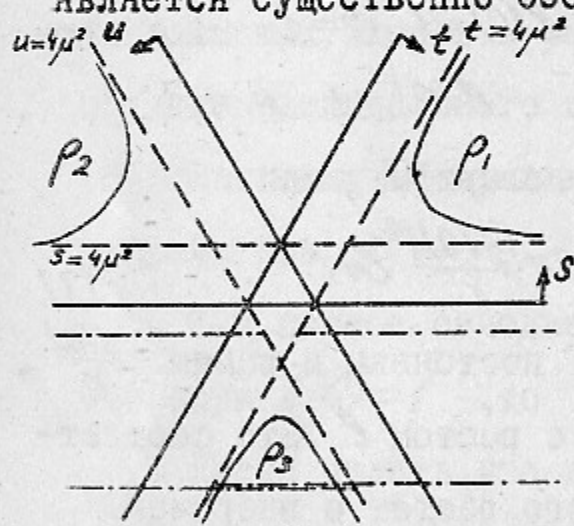
Следует заметить, что эффективный радиус взаимодействия определяется только характером разложения  $\ell(s) - \ell(0)$  по степеням  $s$ , а "прозрачность" зависит и от этого фактора, и от положения полюса  $\ell(0)$ , и от его кратности  $n$ .

## 2. Перекрестная симметрия и полюса Редже.

Используя (I), можно получить выражение для асимптотики амплитуды рассеяния  $\tilde{A}(s, u)$  в  $u$ -канале при той же передаче импульса  $s$ . Дисперсионное соотношение для амплитуды рассеяния при фиксированном  $s$  имеет вид:

$$A(s, t) = \frac{i}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{A_1(s, t') dt'}{t' - t} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-s} \frac{A_2(s, 4\mu^2 - s - t') dt'}{t' - t} \quad /8/$$

Т.о.  $A(s, t)$  имеет в комплексной плоскости  $t$  разрез по вещественной оси от  $4\mu^2$  до  $\infty$  и от  $-\infty$  до  $-s$ , причем бесконечность не является существенно особой точкой.



Легко видеть, что пока  $A_1(s, t')$  и  $A_2(s, 4\mu^2 - s - t')$  вещественны,

$$A(s, t + i\epsilon) = A^*(s, t - i\epsilon) \quad /9/$$

При  $s < 4\mu^2$  мнимые части  $A_1$  и  $A_2$  совпадают со спектральной функцией  $\rho_3$ . Но, как трудно проверить, вклады от  $\rho_3$  в дисперсионные интегралы взаимно сокращаются. Т.о. условие (9) выполняется во всем интервале  $-\infty < s < 4\mu^2$ . Асимптотика (I) задаёт  $A(s, t)$  в физической области  $t$ -канала, т.е. на верхнем берегу правого разреза. Аналитически продолжая эту функцию через верхнюю полуплоскость, получаем для её асимптотики на верхнем берегу левого разреза ту же формулу (I). Делая замену  $t = ue^{-i\pi}$

и переходя с помощью комплексного сопряжения в физическую область  $u$ -канала, т.е. на нижний берег левого разреза, находим асимптотику амплитуды рассеяния в  $u$ -канале

$$\tilde{A}(s, u) \approx A^*(s, ue^{-i\pi}) = f^*(s) u^{\ell(s)} e^{i\pi\ell(s)} (\ln u)^{n-1} \quad /10/$$

При этом снова сохраняется лишь слагаемое, содержащее высшую степень логарифма.

Рассмотрим случай упругого процесса. Вклады данного полюса Редже  $A_i(s, t)$  и  $\tilde{A}_i(s, u)$  в асимптотики рассеяния в  $t$ - и  $u$ -каналах связаны условием перекрестной симметрии:  $A_i(s, t)$  так зависит от  $s$  и  $t$ , как  $(-1)^{T_i+g_i} \tilde{A}_i(s, u)$  от  $s$  и  $u$ . Здесь  $T_i$  - изоспин рассматриваемой траектории Редже,  $(-1)^{g_i} = g_i$  - её  $g$ -чётность. Применяя это условие к (I) и (10), легко видеть, что  $\ell(s)$  вещественна во всем интервале  $-\infty < s < 4\mu^2$ . Этим бозонные траектории Редже радикально отличаются от фермионных, комплексных при  $s < 0$  [8]. Сравнивая (I) и (10), легко найти фазу функции  $f_i(s)$ :

$$\varphi_i(s) = \frac{\pi}{2} [\ell_i(s) + T_i + g_i] + k_i \pi \equiv \frac{\pi}{2} \lambda_i(s) + k_i \pi$$

$k_i$  - некоторое целое число. Отсюда

$$A_i(s, t) = r_i(s) e^{i\frac{\pi}{2}\lambda_i(s) + ik_i\pi} t^{\ell_i(s)} (\ln t)^{n_i-1}; \quad r_i(s) \equiv |f_i(s)| \quad /11/$$

Этот результат легко приводится к форме, принятой в работе [3], причем введенная там "сигнатура" совпадает в данном случае с  $(-1)^{T_i+g_i}$ .

Из (II) ясно, что для того, чтобы амплитуда рассеяния вперед в асимптотике становилась чисто мнимой, необходимо и достаточно, чтобы для ведущего полюса  $\lambda(0) = 2m + 1$ .

Приношу глубокую благодарность В.Н.Баиеру, Р.З.Сагдееву, В.В.Соколову и С.А.Хейфецу за постоянный интерес к работе и ценные беседы, С.Т.Беляеву, В.М.Галицкому, В.Л.Покровскому и Д.В.Ширкову за полезное обсуждение результатов работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. M.Froissar, "Phys. Rev.", 123, 1053, 1961.
2. В.Н.Грибов, И.Я.Померанчук, ЖЭТФ, 43, 308, 1962.
3. S.C.Frautschi, M.Gell-Mann, F.Zachariasen,  
"Phys. Rev.", 126, 2204, 1962
4. В.Н.Грибов, ЖЭТФ, 41, 667, 1961.
5. В.Н.Грибов, ЖЭТФ, 41, 1962, 1961.
6. G.F.Chew, S.C.Frautschi, "Phys. Rev. Lett.", 8, 41, 1962
7. G.Frye, "Phys. Rev. Lett.", 8, 494, 1962.
8. В.Н.Грибов, ЖЭТФ, 43, 1529, 1962.

Технический редактор Л.А. Панина.

---

Подписано к печати 14/1-63 г. МНО2616.  
Формат бум. 60 x 92 <sup>1</sup>/16. Печ. л. 0,50. Уч.-изд. л. 0,28.  
Тираж 310 экз. Заказ № 16.

---

Институт геологии и геофизики СО АН СССР  
Новосибирск. Академгородок. Ротапринт.