

Г 15

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

Препринт 19

А.А.Галеев, С.С.Мусеев, Р.З.Сагдеев

ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ



НОВОСИБИРСК 1963

V +

The magnetic confined plasma ($\beta \ll \frac{H^2}{8\pi}$) stability against "drift" waves disturbances is investigated. The presented review contains two chapters.

In the chapter I the approach of "cold" plasma is considered on the basis of two-fluids hydrodynamics. It is found that the significant role plays various dissipative phenomena (in particular, finite electric conductivity) in the drift waves instability. The semi-quantitative consideration of nonlinear effects and anomalous diffusion in unstable plasma is made on the basis of developed theory of stability. It is found the reasonable explanation of Bohm diffusion and the critical magnetic field phenomena.

The high temperatures limit of drift waves instability is considered in the chapter II using the collisionless kinetic theory. The so called quasilinear approximation is applied to compute the nonlinear effects and the turbulent diffusion.

В статье излагается обзор теории устойчивости плазмы малого давления ($\beta \ll \frac{H^2}{8\pi}$), удерживаемой магнитным полем относительно раскачки "дрейфовых" волн, связанных с неоднородностью плазмы. В первой части рассмотрены "дрейфовые" волны в низкотемпературной плазме, когда справедливо гидродинамическое описание плазмы. Показано, что важную роль в устойчивости плазмы играют диссипативные эффекты (в частности, эффект конечного электрического сопротивления). На базе строгой линейной теории устойчивости проведено полуквантовое рассмотрение нелинейных эффектов в неустойчивой плазме и аномальной диффузии. На этом пути удалось получить естественное объяснение явления "бомовской" диффузии и "критического" магнитного поля. Результаты сопоставлены с имеющимися экспериментальными данными.

Во второй части статьи рассмотрен высокотемпературный предел "дрейфовых" волн. Анализ линейной теории устойчивости проведен с помощью кинетического уравнения без столкновений. Для учета влияния дрейфовых волн на диффузию частиц в неустойчивой плазме использован квазилинейный метод.

В в е д е н и е	стр. 4
Гл. I. Гидродинамическая теория устойчивости неоднородной "низкотемпературной" плазмы	стр. 14
§ 1. Линеаризованные уравнения. Исследование задачи на собственные значения.	стр. 14
§ 2. Обсуждение нелинейных эффектов. Влияние неустойчивостей на аномальную диффузию.	стр. 26
Гл. II. Кинетическая теория устойчивости "неоднородной высокотемпературной" плазмы.	стр. 33
§ 3. Линеаризованные уравнения. Задача на отыскание собственных значений.	стр. 33
§ 4. Неустойчивость неоднородной разреженной плазмы в магнитном поле с параллельными силовыми линиями.	стр. 43
§ 5. Устойчивость неоднородной разреженной плазмы в магнитном поле с непараллельными силовыми линиями.	стр. 53
§ 6. Обсуждение нелинейных эффектов.	стр. 62

Различные стороны теории устойчивости магнитного удержания плазмы к настоящему времени уже вошли в обзоры /1/ и монографии /2/. Сюда относятся такие хорошо изученные проблемы, как, например, устойчивость плазмы в модели идеальной магнитогидродинамической среды. Можно сказать, что основной причиной, приводящей к неустойчивости магнитогидродинамического равновесия плазмы является эффективное ускорение силы тяжести, причем в отсутствие реальной силы тяжести она имитируется кривизной силовых линий магнитного поля.

Экспериментальный материал, накопленный в физике устойчивости плазмы, однако, не всегда можно объяснить в рамках идеализированных теоретических моделей. Поэтому в последние годы интенсивно изучались вопросы, связанные с влиянием диссипативных эффектов на устойчивость плазмы. На этом пути была создана, например, теория устойчивости так называемого "положительного столба" газового разряда,, сумевшая объяснить целый круг аномальных явлений в области низкотемпературной слабоионизованной плазмы /3/, когда причиной неустойчивости служил электрический ток, текущий вдоль силовых линий магнитного поля, в которое помещалась плазма.

Однако, до последнего времени оставался неразгаданным своего рода "experimentum crucis" магнитного удержания - явление так называемой аномальной "бомовской" диффузии плазмы поперек магнитного поля. В 1949 г. Д.Бом экспериментально обнаружил /4/, что коэффициент диффузии плазмы поперек магнитного поля значительно превышает получающийся из классической кинетической теории. Он заключил, что причиной такой аномалии является неус-

тойчивость неизвестной природы, приводящая к переходу плазмы в турбулентное состояние, и постулировал, что коэффициент такой аномальной диффузии равен:

$$D_{\perp} = \frac{cT}{16eH} \quad (0.1)$$

где H — напряженность магнитного поля, T — температура плазмы, c — скорость света в вакууме, e — заряд электрона. С тех пор многочисленные попытки установления природы неустойчивости и характера вызываемой ею турбулентности не привели к расшифровке этой аномалии (в лучшем случае за счет привлечения дополнительных гипотез удавалось получить численно (!) близкие значения коэффициента диффузии в определенных условиях /5/x). С другой стороны, непрекращающиеся эксперименты по диффузии плазмы (см. обзор /6/) часто приводили к противоречивым результатам, иногда обнаруживая удовлетворительное согласие с классической теорией. Мы покажем, в частности, что в полностью ионизованной плазме малого давления, помещенной в сильное магнитное поле ($H^2 \gg 8\pi p$, где p — давление плазмы) действительно существует неустойчивость в условиях, когда магнитное поле имеет прямые силовые линии и однородно по длине. Единственной причиной такой неустойчивости является наличие градиента плотности плазмы. Рассмотрение же турбулентности, возникающей вследствие такой неустойчивости, приведет нас к коэффициенту диффузии, близкому к (1). Мы покажем также, что закон (1) не является универсальным и что существуют режимы, в которых коэффициент диффузии может меняться, в частности, как $\frac{1}{H^2}$.

x) По этому поводу см. § 6.

Известно, что термодинамически неравновесная плазма неустойчива по отношению к возбуждению различного рода колебаний. Такие колебания часто оказывают существенное влияние на перераспределение частиц в скоростном и обычном пространстве. В однородной плазме, помещенной в магнитное поле, существует 7 ветвей колебаний (альфвеновские, ленгмювские и др.). В неоднородной плазме диэлектрические свойства могут существенно измениться даже при появлении небольших пространственных градиентов. Это особенно относится к низкочастотным колебаниям (с частотами малыми по сравнению с циклотронной частотой ионов). Здесь появляются ветви колебаний, фазовая скорость которых совпадает с дрейфовой скоростью плазмы в магнитном поле за счет градиентов давления — "дрейфовые" волны (см., например, /7/). "Медленность" "дрейфовых" волн позволяет ожидать, что они оказывают существенное влияние на устойчивость плазмы. Например, для их раскачки может оказаться достаточной уже относительно небольшая скорость пучка частиц, проходящего через плазму. Систематическому изложению теории устойчивости плазмы относительно раскачки дрейфовых волн, которому посвящено основное содержание статьи, естественно предпослать во введении нестрогое качественное рассмотрение. Выберем одномерную геометрию исходного равновесия плазмы в магнитном поле. $\vec{H}_0 = \{0, 0, H_0\}$ — магнитное поле направим по оси z . Градиенты невозмущенных величин пусть направлены по оси x : $n_0 = n_0(x)$ — плотность, $T_0 = T_0(x)$ — температура, $\vec{E} = \{E_{0x}, 0, 0\}$ — напряженность электрического поля, определяющаяся из условия:

$$-\frac{d}{dx} n_0 T_0 = -en_0 E_{0x}$$

выражающего отсутствие макроскопической скорости ионов в равновесии.

Качественно свойства дрейфовых волн можно получить следующим образом. Дисперсионные уравнения для частот дрейфовых волн проще всего получить в системе координат, где невозмущенное электрическое поле равно нулю ($E_{0x} = 0$). Пусть фазовая скорость волны больше ионной тепловой скорости V_{Ti} и меньше электронной V_{Te} . Тогда для потенциальных возмущений ($\text{rot } \vec{E} = 0$) электроны, двигаясь вдоль силовых линий, успевают перераспределиться по Больцману: $n = n_0(x) e^{\varphi/T}$ (n - возмущение плотности плазмы, φ - электрический потенциал возмущений). Выбирая возмущения в виде $\sim \exp(i\omega t + ik_y y + ik_z z)$ и пользуясь условием потенциальности, квазинейтральности, а также уравнением непрерывности для ионов

$$i\omega n + c \frac{E_y}{H_0} n'_0(x) = 0, \quad (V_x = c \frac{E_y}{H_0}) \quad (0.2)$$

получаем:

$$\omega \equiv \omega_e = k_y \frac{cT}{eH_0} \frac{n'_0}{n_0} \quad (0.3)$$

С увеличением k_z эти волны переходят в так называемые ионные звуковые волны (см. рис. I, на котором изображена зависимость фазовой скорости этих волн от k_z).

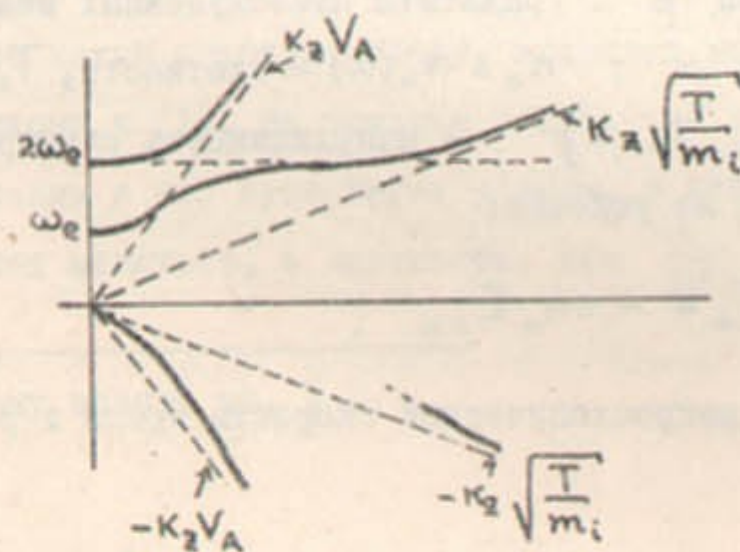


Рис. I.

Для поперечных колебаний типа альфвеновских волн в неоднородной плазме можно положить $E_z = 0, H_z = 0$ (внешнее магнитное поле здесь и далее, если не оговорено особо, направлено по оси z). Тогда, воспользовавшись уравнениями Максвелла (в системе координат, где невозмущенное электрическое поле $E_{0x} = 0$)

$$-ik_y H_x = \frac{4\pi}{c} j_z, \quad (0.4)$$

$$\frac{\omega}{c} H_x = k_z E_y,$$

Условием квазинейтральности $\text{div } \vec{j} = 0$:

$$ik_y \left\{ i \frac{\omega}{\omega_H} \frac{cE_y}{H_0} e n_0 + \frac{\omega}{\omega_H} \frac{k_y c T_0 n}{e H_0} \right\} + ik_z j_z = 0 \quad (0.5)$$

где учтены так называемые инерционные дрейфы ионов, и уравнением (0.2) имеем

$$\omega_{1,2} = -\frac{\omega_e}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega_e^2}{4} + k_z^2 V_A^2} \quad (0.6)$$

В предельном случае, когда неоднородность мала, эти волны переходят в альфвеновские. Зависимость $\omega(k_z)$ для рассмотренных типов волн приведена на рис. I.

На самом деле ω_e и V_A в неоднородной плазме зависят от координаты x и поэтому лишь при некотором $x = x_0$ имеет место (0.3) и (0.6). При $x \neq x_0$ собственное значение частоты, разумеется, уже не связано с местными значениями ω_e и V_A . Выражения (0.3) и (0.6) решают только одну часть поставленной задачи. Остается еще отыскать пространственный ход амплитуды

каждой волни. В неоднородной плазме это уже не просто плоская волна $E \sim \exp(i\omega t + i\vec{k}\vec{r})$, а

$$E = \tilde{E}(x) \exp(i\omega t + ik_y y + ik_z z)$$

От $\tilde{E}(x)$ требуется обращение в нуль в области вне плазмы. Мы отложим задачу нахождения вида $\tilde{E}(x)$ до рассмотрения конкретных задач в гл. I, II. Здесь же проведем качественный анализ причин, могущих привести к нарастанию амплитуды дрейфовых волн. С этого момента появляется существенное различие между "высокотемпературным" пределом (когда столкновениями можно пренебречь) и относительно "холодной" плазмой, когда частые столкновения обеспечивают применимость гидродинамического описания.

а) "Плазма без столкновений". В однородной плазме основным источником мнимой части в дисперсионном уравнении является член типа $\frac{e}{m} E_z \frac{\partial f}{\partial v_z} \Big|_{v_z = \frac{\omega}{k_z}}$ ($f_{i,e}(v, x)$ - функции распределения ионов и электронов в невозмущенной плазме). В максвелловской плазме он ответственен за затухание волны (т.н. "затухание Ландау"). Естественно, что члены с такой структурой сохраняются и в слабо неоднородной плазме. Однако появляются еще и дополнительные слагаемые, получающиеся из члена $\vec{v} \nabla f$ в кинетическом уравнении. Например, при малых частотах ($\omega \ll \omega_{hi} = \frac{eH_0}{m_i c}$ когда движение ионов и электронов поперек H_0 имеет вид дрейфа, член $\vec{v} \nabla f$ дает для "электрического" дрейфа вклад $c \frac{E_y}{H_0} \frac{\partial f}{\partial x}$. Этот член, естественно, должен дать добавку к мнимой части за счет соответствующего полувывчета $c \frac{E_y}{H_0} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{v = \frac{\omega}{k_z}}$. Если $E_y \gg E_z$ (а это имеет место, например, для безвихревых возмущений $\text{rot } E = 0$ с пространственной зависимостью $\exp i(k_y y + k_z z)$, $k_y \gg k_z$) эта добавка даже при

малых градиентах может превзойти "затухание Ландау" и плазма окажется неустойчивой.

Для того, чтобы убедиться в этом, оценим работу, совершаемую электрическим полем волны над частицами плазмы:

$$\int i \tilde{E}_z E_z d\vec{r} = \int d\vec{r} e v_z f_i E_z \Big|_{v_z = -\frac{\omega}{k_z}} \sim \int d\vec{r} \times$$

$$\times e \frac{\omega}{k_z} E_z \left(-\frac{e}{m} E_z \frac{\partial f_0}{\partial v_z} + c \frac{E_y}{H_0} \frac{\partial f_0}{\partial x} \right) \Big|_{v_z = -\frac{\omega}{k_z}} = \int d\vec{r} \frac{e^2 E_z^2 f_0 \omega^2}{T k_z^2} \times$$

$$\times \left[1 - c \frac{k_y T}{e H_0 \omega} \left(\frac{n_0'}{n_0} - \frac{T'}{2T} \right) \right] \Big|_{v_z = -\frac{\omega}{k_z}}, \quad (0.7)$$

где

$$f_0 = \frac{n_0(x)}{\sqrt{2\pi T_0(x)}} e^{-\frac{m v^2}{2T_0(x)}}$$

Как следует из (0.7) для того, чтобы ответить на вопрос устойчива ли плазма, необходимо знать пространственный ход $\tilde{E}(x)$, однако, ясно, что при достаточно малых частотах второе слагаемое в подынтегральном выражении (0.7) будет переигрывать затухание Ландау. Кроме того, как видно из (0.7), в ответ входит соотношение между пространственными градиентами $n_0(x)$ и $T_0(x)$.

Мы покажем (см. гл. II), что разреженная плазма оказывается неустойчивой относительно раскачки дрейфовых волн при любом соотношении между $n_0'(x)$ и $T_0'(x)$, если силовые линии невозмущенного магнитного поля всюду параллельны. Однако, даже малая непараллельность ("Shear") может давать заметный стабилизирующий эффект, который оказывается довольно чувствительным к величине

$$\eta = \frac{d \ln T(x)}{d \ln n(x)}$$

б) В "низкотемпературной" плазме, для которой применима гидродинамика, мнимая часть частоты обязана своим происхождением различным диссипативным эффектам, таким как вязкость, теплопроводность и т.п. В однородной плазме эти факторы приводят к затуханию волн. Однако, в неоднородной плазме ситуация может измениться. Рассмотрим, например, влияние конечного электрического сопротивления, связанного с силой трения между электронами и ионами. Оказывается сила трения между электронным и ионным газами (иначе говоря, конечное электрическое сопротивление плазмы) может служить причиной раскачки "дрейфовых" волн (0.3). В самом деле, воспользовавшись предположениями, при которых существуют колебания (0.3), считая для простоты ионы холодными и учитывая трение электронов об ионы, имеем для движения электронов вдоль, а ионов поперек магнитного поля:

$$-i\kappa_z n T_0 - en_0 E_z - m_e n_0 \nu_{ei} v_e = 0, \quad (0.8)$$

$$m_i n_0 \frac{d\vec{v}_i}{dt} = en_0 \vec{E}_\perp + \frac{e}{c} n_0 [\vec{v}_i \vec{H}_0] \quad (0.9)$$

Здесь ν_e - эффективная частота соударений электронов с ионами.

Пользуясь также условием потенциальности и уравнениями (0.2) и (0.5), получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 - i\omega_s \omega + i\omega_s \omega_e = 0, \quad (0.10)$$

где
$$\omega_s = \left(\frac{\kappa_z}{\kappa_y}\right)^2 \omega_{ne} \omega_{ni} / \nu_e$$

Отсюда мы видим, что существует неустойчивость в плазме переменной плотности с конечной проводимостью. Если $\omega_s \gg \omega_e$ (трение мало) то $Re \omega \sim \omega_e$, $Im \omega \sim \frac{\omega_e^2}{\omega_s}$. В противоположном случае ($\omega_e \gg \omega_s$) $Re \omega \sim Im \omega \sim \sqrt{\omega_e \omega_s}$.

Нетрудно понять физическую роль сил трения в рассмотренном примере. В отсутствие трения электроны в случае "промежуточных" частот ($v_{Ti} \ll \frac{\omega}{\kappa_z} \ll v_{Te}$), двигаясь вдоль силовых линий успевают перераспределяться по Больцману, а силы давления и электрическое поле работы не совершают. При наличии трения подвижность электронов падает. В результате возникшая флуктуация плотности продолжает нарастать, что и приводит к развитию неустойчивости. Теперь уже работа сил давления расширяющейся плазмы за период колебаний положительна и (как легко проверить) превышает работу сил трения.

Уже из приведенного здесь рассмотрения следует, что в обоих предельных случаях - "высокотемпературной" и "низкотемпературной" плазмы существуют физические причины, приводящие к нарастанию во времени "дрейфовых" колебаний (появляются инкременты у частот "дрейфовых" волн).

Детальное исследование аномалий в явлениях переноса, возникающих из-за дрейфовых неустойчивостей, встречает большие трудности, но в то же время именно его результаты должны быть конечной целью. Мы сделали попытку получить аномальный коэффициент диффузии, комбинируя результаты линейной теории устойчивости и некоторые разумные (на наш взгляд) нелинейные оценки. Это приведет нас, как уже отмечалось, к естественному объяснению коэффициента диффузии Бома (в низкотемпературной плазме). В "высокотемпературном" пределе, когда столкновения незначительны, для нахождения коэффициента диффузии мы использовали так называемый "квазилинейный"

метод /11,25/, учитывающий обратное влияние волн, возникших из-за неустойчивости, на перераспределение частиц. Результатом является

$$D_1 \sim c \frac{T}{eH} \frac{r_i}{r} \left(\frac{m_e}{m_i \beta} \right), \quad (r_i = \frac{v_{Ti}}{\omega_{Hi}}, \beta = \frac{8\pi nT}{H^2})$$

где β предполагается $> \frac{m_e}{m_i}$.

I. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ "НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ" ПЛАЗМЫ.

I. Линеаризованные уравнения. Исследование задачи на собственные значения.

При исследовании устойчивости неоднородной плазмы с конечной проводимостью используем систему уравнений двухжидкостной гидродинамики для электронов и ионов в сильном магнитном поле ($\beta \ll \frac{H^2}{8\pi}$). Как и в рассмотренном выше примере будем исходить из предположения, что возмущенное движение не нарушает квазинейтральность плазмы ($n_{oi} = n_{oe}, n_i = n_e$). Кроме того, в уравнениях Максвелла для электрических и магнитных полей возмущений пренебрежем возмущением H_z , что справедливо при $8\pi n_o T_o \ll H_o^2$.

Для характерных частот задачи ($v_{Te} \gg \frac{\omega}{k_z} > v_{Ti}$) пренебрежем движением ионов вдоль \vec{H}_o и инерцией электронов; последнее также означает, что мы ограничиваемся колебаниями с частотами много меньшими частоты соударений электронов с нейтрами и ионами. Тогда линеаризованная система уравнений двухжидкостной гидродинамики /8/ для этого случая в системе отсчёта, где невозмущенное электрическое поле $\vec{E}_o = 0$ имеет вид:

$$ik_y E_z - ik_z E_y = -\frac{i\omega}{c} H_x, \quad ik_y E_x - \frac{dE_y}{dx} = 0, \quad (I.1)$$

$$\frac{dH_y}{dx} - ik_y H_x = \frac{4\pi}{c} j_z, \quad \frac{dH_x}{dx} + ik_y H_y = 0, \quad (I.2)$$

$$-ik_x(n_o T_e + n T_o) - en_o E_z - 0,77 ik_z n_o T_e + R_{ii} + \frac{e}{c} v_{oy} H_x = 0, \quad (I.3)$$

$$-\nabla_x p_e - e E_x n_o - \frac{e}{c} n_o [\vec{v}_e \vec{H}_o] - \frac{e}{c} n [\vec{v}_o \vec{H}_o] = 0, \quad (I.4)$$

$$\begin{aligned} & 3/2 n_0 \{ i\omega T_e + v_{oe} T_e i\kappa_y + v_{xe} T_{oe}' \} - T_{oe} \{ i\omega n + i\kappa_y v_{oe} n + v_{xe} n_o' \} = \\ & = -\kappa_2^2 \chi T_e + 5/2 \frac{c T_o}{e H_o} i\kappa_y (n T_{oe}' - T_e n_o'), \end{aligned} \quad (I.5)$$

$$i\omega n + \text{div}(\vec{v}_o n) + \text{div}(\vec{v} n_o) = 0, \quad (I.6)$$

$$\begin{aligned} m_i n_o \{ i\omega \vec{v}_{i\perp} + (\vec{v}_{oi} \vec{v}) \vec{v}_{i\perp} \} = e n_o \vec{E}_{\perp} + \frac{e}{c} n [\vec{v}_{oi} \vec{H}_o] + \\ + \frac{e}{c} n_o [\vec{v}_i H_o] - v_{\perp} p_i - \text{div} \vec{\pi}_{\perp} + \vec{R}_{ii}, \end{aligned} \quad (I.7)$$

$$\begin{aligned} 3/2 n_o \{ i\omega T_i + v_{oi} T_i i\kappa_y + v_{xi} T_{oi}' \} - T_{oi} \{ i\omega n + i\kappa_y v_{oi} n + \\ + v_{xi} n_o' \} = 5/2 \frac{c T_{oi}}{e H_o} (T_i n_o' - n T_{oi}'), \end{aligned} \quad (I.8)$$

$$\pi_{yy} = -\pi_{xx} = \frac{n T_{oi}}{2\omega_{ni}} \left(\frac{\partial v_{xi}}{\partial y} + \frac{\partial v_{yi}}{\partial x} \right); \quad (I.9)$$

$$\pi_{xy} = \pi_{yx} = \frac{n T_i}{2\omega_{ni}} \left(\frac{\partial v_{xi}}{\partial x} - \frac{\partial v_{yi}}{\partial y} \right)$$

Здесь j - возмущение плотности тока. В уравнение движения электронов (I.3) вдоль магнитного поля включены термосила $0,71 i\kappa_2 n_o$ возникающая при наличии градиента температуры и R_{ii} - сила трения электронов с ионами (или нейтралами для случая слабоионизованной плазмы). В уравнении движения электронов поперек магнитного поля сила трения не учитывается, что соответствует случаю $\omega_{ne} \nu_e^{-1} \gg 1$. Поскольку при наличии начального градиента температуры T_{oe}' возникает также возмущение температуры T_e , то в систему уравнений включено уравнение теплового баланса (I.5) для электронов, где χ - коэффициент электронной теплопроводности. (I.6) - уравнение непрерывности для ионов. Движение ионов поперек магнитного поля описывается уравнением (I.7), в котором удержан тензор вязкости

с компонентами, приведенными в (I.9). Отметим, что вид тензора вязкости (I.9) соответствует гидродинамическому приближению поперек магнитного поля даже в случае пренебрежения соударениями между ионами, если ларморовский радиус ионов мал по сравнению с характерными поперечными размерами (см., например, /9/) R_{ii} - сила трения между ионами и нейтралами (трение между ионами и электронами мало влияет на движение ионов). (I.8) - уравнение теплового баланса для ионов; v_{oi} , v_{oe} - невозмущенные скорости ионов, электронов.

Рассмотрим прежде всего случай полностью ионизованной плазмы, когда $R_{ii} = 0$. При этом

$$R_{ii} = \frac{e n_o j_z}{\delta_{ii}} - \frac{1}{\delta_{ii}^2} \frac{d\delta_{ii}}{dT_e} T_e e n j_o, \quad (I.10)$$

j_o - начальный продольный ток. Второй член в (I.10) соответствует добавочной силе трения за счет изменения проводимости вдоль магнитных силовых линий.

Выбирая возмущения в виде $f(x) \exp(i\kappa_y y + i\kappa_z z + i\omega t)$ получим из (I.1) - (I.8) следующее уравнение для потенциальных длинноволновых возмущений ($\kappa_z \tau_c \ll 1$) в системе координат, где ионы покоятся:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \left\{ 1 - i \frac{\omega_s}{\omega} \left[\left(1 - \frac{\omega_e}{\omega - \omega_i} \right) - \frac{(1+d)\omega_r - i\omega_o}{\omega - 2/3 i \chi \kappa_z^2} \right] \right\} \kappa_y^2 \varphi = 0 \quad (I.11)$$

Здесь

$$\omega_r = \kappa_y \frac{c T_o}{e H_o} \cdot \frac{T_{oe}'}{T_{oe}}, \quad \omega_i = \kappa_y \frac{c T_{oi}}{e H_o} \frac{n_o'}{n_o},$$

$$\chi = \frac{\chi}{n_o}, \quad \omega_s = \frac{\kappa_y}{\kappa_z} \frac{j_o c}{\delta_{ii}^2 H_o} \frac{d\delta_{ii}}{dx}; \quad d = 0,71 \quad (I.12)$$

Анализ (I.11) при отсутствии продольного тока проведен в [10]. В случае, когда $\omega_r, \omega_o, \omega_i \ll \omega_e$ действительная и мнимая части комплексного потенциала имеют вид:

$$U(x) = 1 + \frac{\omega_s(x) \cdot |y| \cdot \left[1 - 2 \frac{\omega_e(x) \Omega}{\Omega^2 + y^2} \right]}{\Omega^2 + y^2}, \quad (I.13)$$

$$V(x) = -\omega_s(x) \frac{\Omega - \frac{\Omega^2 - y^2}{\Omega^2 + y^2} \omega_e(x)}{\Omega^2 + y^2}, \quad (I.14)$$

$$(\omega = \Omega + iy)$$

Нетрудно видеть из (I.13) и (I.14), что если $\Omega > |y|, |\Omega^2 - y^2| \ll \Omega^2$, то точки поворота мнимой части V лежат между точками поворота действительной части потенциала в согласии с интегральным условием (II.5a) графики для U и V имеют вид, изображенный на рис. 2. Как видно уже из (I.6) требуемые условия для y и Ω выполняются, если $\omega_s \ll \omega_e$

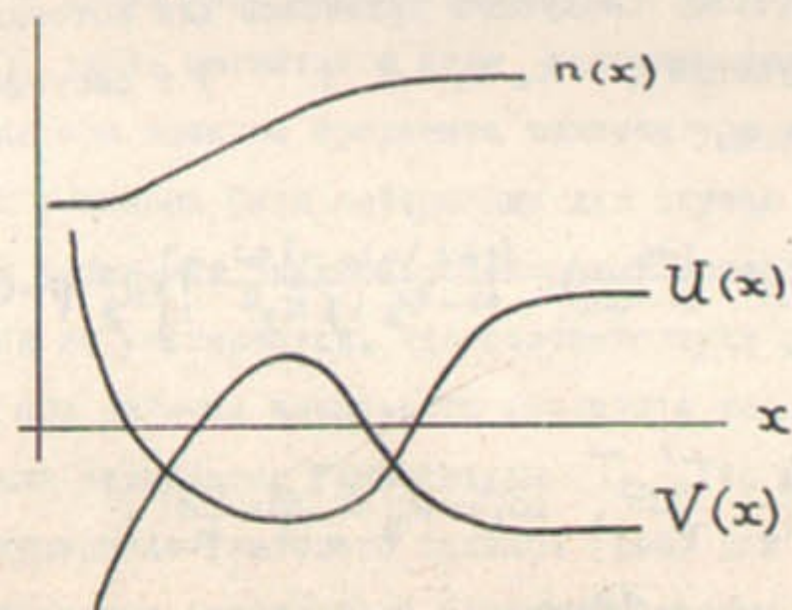


Рис. 2.

Пользуясь тем, что в точке поворота $V \sim U \sim \kappa_y^2$ можем найти собственные частоты ω . Поскольку нас интересует здесь качественный критерий устойчивости, то исследуем случай, когда одновременно и $U \approx 0$ (по существу это означает, что мы заменяем κ_y^2 на κ_1^2 ; кроме того легко показать из анализа поведения комплексного потенциала, что точки поворота для U и V можно достаточно сблизить между собой). Тогда дисперсионное уравнение сводится к уже рассмотренному нами уравнению (0.10).

В общем случае строгое решение дифференциального уравнения типа (I.11) требует, как уже отмечалось, точного знания профиля плотности. Мы здесь ограничимся случаем, когда $\omega_i, \omega_o, \omega_r \ll \omega_e$, а плотность меняется настолько медленно, что ω_s можно считать постоянной. Вблизи точки, где $\frac{n'_0}{n_0}$ максимально ω_e можно представить в виде:

$$\omega_e = \omega_{e0} - \beta_e x^2 \quad (I.15)$$

Используя (I.15) имеем для (I.11)

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \left\langle \left\{ 1 - i \frac{\omega_s}{\omega} \left[1 - \frac{\omega_e}{\omega} \right] \right\} - i \frac{\omega_s}{\omega^2} \beta_e x^2 \right\rangle \kappa_y^2 \varphi = 0, \quad (I.16)$$

$$E = - \left\{ 1 - i \frac{\omega_s}{\omega} \left[1 - \frac{\omega_e}{\omega} \right] \right\} \kappa_y^2, \quad (I.17)$$

$$K = -i \frac{\omega_s \beta_e}{\omega^2} \kappa_y^2 \quad (I.18)$$

Решение уравнения (I.16) вполне аналогично решению уравнения Шредингера для линейного гармонического осциллятора. В результате имеем для собственных значений и собственных функций

$$\frac{E}{\gamma^2} = 2n + 1, \quad (I.19)$$

$$\varphi(x) \sim e^{-\gamma^2 x^2} H_n(\gamma x). \quad (I.20)$$

Здесь $H_n(\gamma x)$ - полиномы Эрмита, а

$$\gamma^2 = \kappa_y \frac{\sqrt{\omega_s \beta_e}}{\Omega^2 + \gamma^2} \frac{1}{\sqrt{2}} [(\Omega + |\gamma|) - i(\Omega - |\gamma|)] \quad (I.21)$$

Из (I.20) и (I.21) следует существование финитных решений. В квазиклассическом приближении, когда γ мало, из (I.19) получаем (0.10). В случае, если температура переменна, то необходимо учитывать влияние теплопроводности на инкремент. Однако, как нетрудно видеть, в случае $\omega \gg \omega_s$ если

$$\omega_s \gg \kappa_z^2 \ell \quad (I.22)$$

Этим влиянием можно пренебречь. Используя выражения для ω_s , γ и ℓ получим из (I.22)

$$\kappa_y \tau_i \ll 1 \quad (I.23)$$

Т.е. в данном случае для длинноволновых возмущений теплопроводность мало меняет инкременты.

Рассмотрим теперь случай, когда вдоль силовых линий магнитного поля течет ток /12/. Если $\omega_e, \omega_i, \omega_r \ll \omega_o$ уравнение (I.11) принимает вид:

$$\varphi'' - \left\{ 1 - i \frac{\omega_s}{\omega} \left(1 + \frac{i\omega_o}{\omega - \frac{2}{3} i \kappa_z^2} \right) \right\} \kappa_y^2 \varphi = 0 \quad (I.24)$$

Пусть $\omega_o \gg \omega_s$, κ_z^2 . Это эквивалентно выполнению следующих неравенств:

$$V_{\text{те}} \gg V_{\text{те}} (\omega_{\text{не}} \tau_e) \left(\frac{\kappa_z^2}{\kappa_y \kappa_R} \right) \frac{\ell}{\lambda_z}, \quad (\omega_o \gg \kappa_z^2) \quad (I.25)$$

$$V_{\text{те}} \gg \frac{\omega_{\text{не}}}{\kappa_R} (\omega_{\text{не}} \tau_e)^2 \left(\frac{\kappa_z}{\kappa_y} \right)^3, \quad (\omega_o \gg \omega_s) \quad (I.26)$$

Здесь $V_{\text{те}} = \frac{j_0}{e n_0}$, ℓ - длина свободного пробега электронов, $\lambda_z = \frac{2\pi}{\kappa_z}$, $\kappa_R \sim \frac{2\pi}{r}$ (r - поперечный размер системы). (Обратим внимание, что для однородности начального магнитного поля необходимо рассматривать $\kappa_z > \kappa_o \frac{\kappa_y}{\kappa_x}$, где $\kappa_o \sim \frac{2\pi j_0}{c n_0}$; однако это не противоречит малости κ_z , т.к. κ_o мало, если мы, согласно критерию Крускала-Шафранова, исключаем из рассмотрения гидродинамические неустойчивости идеальной плазмы.

В случае справедливости условий (I.25 и (I.26) уравнение (I.24) имеет чисто действительный потенциал

$$U = 1 - \frac{\omega_s \omega_o}{\gamma^2}, \quad (\Omega = 0) \quad (I.27)$$

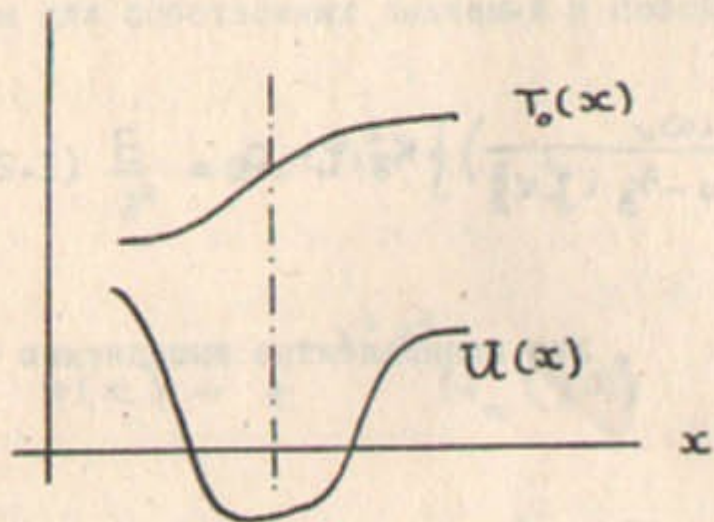


Рис. 3

На рис. 3 изображен график $U(x)$ для указанного изменения температуры $T_0(x)$. Сравнивая инкременты для данного случая ($\text{Im } \omega \sim \sqrt{\omega_0 \omega_s}$) с инкрементами в случае неустойчивости развивающейся на дрейфовых волнах ($\text{Im } \omega \sim \sqrt{\omega_e \omega_s}$) видим, что если

$$v_{z0} > v_{Te} \frac{l}{\lambda_z}, \quad (1.28)$$

то токовая неустойчивость развивается быстрее. Случай $\omega_e \ll \omega_0 \ll \omega_s$ соответствует токово-конвективной неустойчивости, рассмотренной в [13]. Если $\omega_s \gg \omega_e, \omega_0$, теплопроводность мала, но $\omega_0 \gtrsim \omega_e$, то тогда $\omega = \omega_e - i\omega_0$. При этом неустойчивость также развивается на дрейфовых волнах, но с инкрементом $\sim \omega_0$, т.е. в этом случае начальный продольный ток играет основную роль в развитии неустойчивости.

В слабоионизованной плазме необходимо учитывать влияние нейтрального газа. Приведем выражения для частоты и инкремента развивающейся неустойчивости при учете соударений с нейтралами в предположении, что $\omega_0, \omega_T, \omega_i \ll \omega_e$ [12]:

$$\Omega = \frac{\omega_e}{1 + \nu_{oi}/\omega_s}, \quad (1.29)$$

$$\nu = \frac{\omega_e^2}{\omega_s (1 + \nu_{oi}/\omega_s)^3}, \quad (\omega_s + \nu_{oi} \gg \sqrt{\omega_e \omega_s})$$

Здесь ν_{oi} — частота соударений ионов с нейтралами.

Рассмотрим коротковолновые возмущения ($\kappa_\perp \tau_i < 1$) в идеально проводящей плазме. Тогда с учетом инерционных дрейфов и магнитной вязкости из (1.7) — (1.8) получаем уравнение (в системе координат, где ионы покоятся): ($T_i = T_e$)

$$\begin{aligned} \tau_i^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \left(\kappa_y^2 \tau_i^2 + \frac{3}{5+2d} \frac{\{\omega - (2+2\eta+d)\omega_e(x)\} \{\omega - (1+\eta)\omega_e(x) - \frac{2}{3} i \kappa_\parallel^2 \}}{\omega [\omega - (1+\eta)\omega_e(x) - \frac{2i}{5+2d} \kappa_\parallel^2]} \right) \\ - \frac{2}{3} (1+d) \eta i \kappa_\parallel^2 \omega_e(x) \varphi = 0 \end{aligned} \quad (1.30)$$

Если теплопроводность $\chi \ll \frac{\omega}{\kappa_\perp^2}$, то действительная часть потенциальной энергии $U(x)$ имеет форму ямы, а мнимая $V(x)$ — мала. Поэтому финитные решения существуют. В аппроксимации (1.15) решения даются выражением (1.20) и соответствуют собственным значениям частот:

$$\begin{aligned} \omega^{(p)} = (2+2,71\eta)\omega_{e0} - 2,14 \cdot \kappa_y^2 \tau_i^2 \left(1 + 0,35 \frac{i \kappa_\parallel^2 \chi}{(1+1,71\eta)\omega_{e0}} \right) + \\ + 1,14 \frac{i \kappa_\parallel^2 \chi \eta}{(1+1,71\eta)} - \frac{4\tau_i}{R} \left(p + \frac{1}{2} \right) \left\{ 1 + \frac{i \kappa_\parallel^2 \chi}{(1+1,71\eta)\omega_{e0}} \left[0,18 + \frac{0,57\eta}{2+2,71\eta} \right] \right\} \times \\ \times \omega_0 (1+1,35\eta) \sqrt{\frac{5+2d}{3}} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Отсюда легко получить области неустойчивости плазмы по $\frac{d \ln T}{d \ln n}$

$$-\frac{1}{1+d} < \eta < 1,32 \kappa_y^2 \tau_i^2 + 0,9 \frac{\tau_i}{R} \left(p + \frac{1}{2} \right)$$

которая в случае $\kappa^2 \tau_i^2 \ll 1$ переходит в результат работы [7].

Для противоположного случая $\kappa_{||}^2 \chi \gg \omega$ уравнение имеет ту же структуру

$$\tau_i^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \left\{ \kappa_y^2 \tau_i^2 + \frac{(\omega - [2+\eta] \omega_e) (1 - i 1,71 \frac{\omega - (1+\eta) \omega_e}{\kappa_{||}^2 \chi}) - \frac{3(1+d)}{2}}{\omega} \right. \\ \left. - \frac{\omega_e \eta}{\kappa_{||}^2 \chi} \frac{\omega - (1+\eta) \omega_e}{\kappa_{||}^2 \chi} \right\} \varphi = 0$$

Из выражения для собственных значений

$$\omega^{(p)} = (2+\eta) \omega_{e0} - \kappa_y^2 \tau_i^2 (1 + i 1,71 \frac{\omega - (1+\eta) \omega_{e0}}{\kappa_{||}^2 \chi}) (2+\eta) \omega_{e0} + \\ + i \frac{3(1+d)}{2} \omega_{e0} \eta \cdot \frac{\omega - (1+\eta) \omega_{e0}}{\kappa_{||}^2 \chi} - \frac{2\tau_i}{R} \left(p + \frac{1}{2} \right) (2+\eta) \cdot$$

$$\cdot \left\{ 1 - i \frac{\omega - (1+\eta) \omega_{e0}}{\kappa_{||}^2 \chi} (1+d) \left[1 - \frac{3\eta^2}{4+2\eta} \right] \right\}^{1/2} \left(1 + i 1,71 \frac{\omega - (1+\eta) \omega_{e0}}{\kappa_{||}^2 \chi} \right)$$

получаем, что неустойчивость в данном случае также носит "универсальный" характер и границы неустойчивости даются выражением

$$\eta < \frac{4}{3} \kappa_y^2 \tau_i^2 + \frac{4}{3} \frac{\tau_i}{R} \left(p + \frac{1}{2} \right) \quad (I, 32)$$

Обсудим кратко к каким результатам приводит эффект непараллельности силовых линий магнитного поля ("shear") при исследовании устойчивости неоднородной плазмы (более подробно влияние "shear'a" обсуждается в части II для другого предельного случая - "высокотемпературной" плазмы).

Рассмотрим прежде всего "токовую" неустойчивость.

Пусть силовые линии магнитного поля лежат в плоскости (y, z) и представляют собой прямые линии, угол наклона которых $\Theta(x)$ (относительно оси z) зависит от x . Этот поворот силовых линий обеспечивается током вдоль них, так что угол наклона Θ согласно уравнению Максвелла $\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$ связан с V_{e0} соотношением $\frac{d\Theta}{dx} = - \frac{4\pi n_0}{c H_0} V_{e0}(x)$, $V_{i0} \equiv 0$

Из (I.24) в условиях существования неустойчивости имеем:

$$U(x) = 1 + \frac{\omega_s}{|\nu|} \left[1 - \frac{\omega_0}{|\nu| + \frac{2}{3} \chi \kappa_z^2} \right] \quad (I.33)$$

$$V = 0$$

Если ход изменения плотности и температуры одинаков, а теплопроводность можно пренебречь, то график для U подобен изображенному на рис.3. При непараллельных магнитных силовых линиях $\kappa_{||} = \kappa_z + \kappa_y \int \frac{d\Theta}{dx} dx$ ($\kappa_{||}$ - составляющая волнового вектора вдоль магнитного поля). С ростом $\kappa_{||}$ необходимо учитывать теплопроводность; при этом также ω_s растет, а ω_0 падает. Как видно из (I.33) "яма" уменьшается. В случае $\omega_s \gg \omega_0$ неустойчивость вообще пропадает, если $\chi \kappa_{||}^2 \geq \omega_0$. Используя выражения для ω_0 и χ получим условие стабилизации токовой неустойчивости

$$\frac{d\Theta}{dx} > \frac{m_e}{m_i} \frac{V_A}{\chi (\kappa_y^2 \tau_e^2)} \sqrt{\frac{\kappa_z}{\kappa_y}} \quad (I.34)$$

Полученный здесь критерий стабилизации относится к случаю наиболее трудно стабилизируемых "узких" ям $\Delta x \sim \lambda_x$ (как следует из (I.24) $\lambda_x \sim \frac{\omega_0}{\omega_s} \lambda_y$ при $\omega_s \gg \omega_0$).

Рассмотрим теперь случай, когда $\omega_e \gg \omega_r, \omega_0, \omega_i$.

С ростом κ_{\parallel} ω_s растет, при этом может возникнуть ситуация, когда $\omega_s \gg \omega_e$.

Из (I.II) для данного случая имеем $\kappa_x \sim \frac{\omega_s}{\omega} \kappa_y$ ($\omega \sim \omega_e$), откуда видно, что Shear приводит к сужению "ям" (последнее обстоятельство следует также из анализа (I.I3)). С ростом κ_{\parallel} может нарушиться условие $\frac{\omega}{\kappa_{\parallel}} \gg V_{Ti}$. Тогда уже необходимо учитывать продольное движение ионов, что может привести к затуханию рассматриваемых волн, т.к. для более коротких волн влияние неоднородностей, вызывающее "раскачку" колебаний, уменьшается (это обстоятельство имеет некоторую аналогию с затуханием "дрейфовых" волн в высокотемпературной плазме с ростом κ_{\parallel} см. ч. II § 3). Величина "shear' a", при котором существенно продольное движение ионов, оценивается из условия

$$\int \frac{d\theta}{dx} dx > \delta \frac{\omega}{\kappa_y V_{Ti}} \quad (I.35)$$

где α - численный коэффициент порядка единицы.

Рассмотрим в заключение к чему приводит нарушение условия потенциальности возмущений. Пренебрегая теплопроводностью из-за столкновений в отсутствие внешнего продольного тока и градиента температуры из системы (I.I)-(I.8) получаем уравнение (в лабораторной системе координат)

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \kappa_y^2 \left\{ 1 - i\omega_s \frac{\omega - \omega_i - \omega_e}{\omega(\omega - \omega_i)} \left(1 - \frac{\omega(\omega - \omega_i)}{\kappa_z^2 V_A^2} \right) \right\} \varphi = 0 \quad (I.36)$$

Если возмущения непотенциальные ($\omega \gg \kappa_z V_A$), то из качественного критерия устойчивости находим

$$\text{Im } \omega = \text{Re } \frac{\kappa_z^2}{\kappa_y^2} \cdot \frac{\kappa_z^2 V_A^2}{\omega_s} > 0$$

то-есть возмущения затухают во времени.

§ 2. Обсуждение нелинейных эффектов. Влияние неустойчивостей на аномальную диффузию.

Развитие неустойчивости должно приводить к возникновению "турбулентного" режима в плазме и появлению турбулентной диффузии. Проведем размерностные оценки возникающей диффузии, так как это делается обычно в теории турбулентности.

Коэффициент диффузии можно записать в виде:

$$D \sim V_n^2 \tau \quad (I.37)$$

Здесь V_n - пульсационная скорость плазмы, τ - характерное время исчезновения корреляций. В данном случае $\tau \sim \frac{1}{|N|}$, поскольку здесь нет другого времени, характеризующего необратимость "турбулентного" режима. Амплитуду пульсаций определим из следующих соображений. С одной стороны неустойчивость приводит к нарастанию амплитуды пульсаций $\frac{\partial V_n}{\partial t} \sim \nu V_n$, с другой стороны нелинейные члены типа $\text{div}(n\vec{V})$ приводят к перекачке энергии в коротковолновую часть спектра, где флуктуации затухают. Из условия баланса между этими двумя процессами и определяется стационарное значение амплитуды пульсаций

$$|N|n \sim \frac{V_n}{\lambda_1} n \quad (I.38)$$

где λ_1 - характерный размер турбулентных пульсаций в направлении оси x .

Определяя из (I.38) $V_n \sim |N| \lambda_1$, получим для D :

$$D \sim |N| \lambda_1^2 \quad (I.39)$$

Естественно в качестве λ_1 взять длину волны неустойчивости λ_x . Рассмотрим прежде всего случай, когда ионы холодные, продольный ток отсутствует, а $T_e = \text{const}$. Тогда для случая $\omega_e \gg \omega_s$ из (I.II) вытекает, что $k_x \sim k_y$. Пользуясь выражением для $\text{Im} \omega$ имеем:

$$D \sim \frac{\sqrt{\omega_s \omega_e}}{k_y^2} (2\pi)^2 \quad (I.40)$$

Нас интересует максимальный коэффициент диффузии и потому мы возьмем минимально допустимые $k_y \sim \frac{2\pi}{z}$, где z — характерный поперечный размер системы. В $\sqrt{\omega_s}$ еще входит отношение k_z/k_y , которое также должно быть взято максимальным; из условия $\omega_e \gg \omega_s$ имеем предельно допустимое значение для k_z/k_y :

$$\left(\frac{k_z}{k_y}\right)_{\text{max}} \lesssim \frac{c}{V_A} \sqrt{\omega_e} \frac{1}{\sqrt{4\pi b_0}} \quad (I.41)$$

Окончательно получаем:

$$D_{\perp \text{max}} \sim \frac{c T_{0e}}{2\pi e H_0} \quad (I.42)$$

Заметим, что коэффициент диффузии, принятый в гипотезе Бома, имеет такой же порядок величины /4/. Необходимо при этом иметь в виду следующее, с ростом магнитного поля $\left(\frac{k_z}{k_y}\right)_{\text{max}}$ согласно (I.41) будет уменьшаться. При этом может оказаться, что при $k_y \sim \frac{2\pi}{z}$ k_z станет порядка $\frac{2\pi}{L_{\parallel}}$ (L_{\parallel} — продольный размер системы).

Нетрудно видеть, что теперь с дальнейшим ростом H_0 для $k_y \sim \frac{2\pi}{z}$ получился бы меньший коэффициент диффузии. В самом деле, при неизменном k_y и ограниченном снизу $k_z \geq \frac{2\pi}{L_{\parallel}}$ с ростом $H \omega_e$ станет больше ω_e . Если $\omega_s \gg \omega_e$, то имеем из (I.II): $k_x^2 \sim k_y^2 \omega_s/\omega_e$. Тогда D растет с ростом k_y . Но как мы видели при $\omega_e \gg \omega_s$, D падает с ростом k_y , т.е. при $\omega_e \sim \omega_s$ D достигает максимума. Итак, для магнитных полей, больших

$$H^* \sim \frac{L_{\parallel}^{2/3} c (m_i m_e \nu_e T_e)^{1/3}}{z^{4/3} e} \quad (I.43)$$

(при $H \sim H^*$, $k_z \sim \frac{2\pi}{L_{\parallel}}$, а $k_y \sim \frac{2\pi}{z}$)

Минимальное k_y по-прежнему получим из (I.41), где теперь $k_z \sim \frac{2\pi}{L_{\parallel}}$. Тогда выражение для коэффициента диффузии принимает вид:

$$D_{\perp} \sim \frac{c T}{2\pi e H_0} \frac{H^*}{H_0} \quad (I.44)$$

Отметим, что в проводимых здесь рассуждениях радиус плазмы считается заданным, не зависящим от магнитного поля.

Перейдем теперь к оценке диффузии за счет токовой неустойчивости. В случае $\omega_s \ll \omega_0$ и малой теплопроводности из (I.24) имеем, что $k_x \sim k_y$, а $\text{Im} \omega \sim \sqrt{\omega_0 \omega_s}$. Тогда

$$D \sim \frac{\sqrt{\omega_0 \omega_s}}{k_y^2} \quad (I.45)$$

Зависимость от k_z и k_y в данном случае подобна (I.40), поэтому

аналогичные рассуждения приводят нас к следующему выражению:

$$D \sim \frac{\tau^{4/3} V_{z0}^{2/3}}{\tau_e^{1/3}} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/3} \quad (1.46)$$

С ростом магнитного поля при заданном радиусе плазмы опять может возникнуть ситуация, когда $K_{z \max}$ станет порядка $2\pi/L_z$. При этом уже K_y определяется из условия $\omega_0 \approx \omega_s$ (где $K_z \sim 2\pi/L_z$). Тогда диффузия описывается формулой:

$$D \sim \frac{\tau^{4/3} V_{z0}^{2/3}}{\tau_e^{1/3}} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/3} \frac{H^{\alpha 2}}{H_0^2} \quad (1.47)$$

где

$$H^{\alpha} \sim \frac{L_z}{\tau} \frac{(K_z V_{z0})^{1/3} c m_i^{1/3} m_e^{2/3}}{e \tau_e^{2/3}} \quad (1.48)$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\omega_s \gg \omega_0$, но теплопроводностью пренебречь нельзя. Тогда в согласии с /13/ имеем:

$$\omega \approx -i\omega_0 + i \frac{2}{3} \chi K_z^2 \ll \omega_s \quad (1.49)$$

В /13/ при отыскании коэффициента диффузии предполагалось, что $K_x \sim K_y$. Но как следует из (1.24) при $\omega_s \gg \omega_0$

$$K_x^2 \sim K_y^2 \frac{\omega_s}{\omega_0 - \frac{2}{3} \chi K_z^2} \quad (1.50)$$

Используя (1.50) представим коэффициент диффузии в виде:

$$D \sim \frac{1}{\omega_{ne} \omega_{ni} \tau_e K_z^2} (\omega_0 - \frac{2}{3} \chi K_z^2)^2 \quad (1.51)$$

Как следует из (1.51) D растёт с ростом K_y и уменьшением ω_0 . С другой стороны, как видно уже из (1.45) при $\omega_0 \gg \omega_s$ зависимость от K_z и K_y обратна указанной. Таким образом, максимальный коэффициент диффузии достигается при

$$\omega_s \sim |\omega| \quad (1.52)$$

При этом действительно $K_x \sim K_y$, но K_y и K_z связаны зависимостью (1.52), которая не была использована в /13/. Используя выражение для ω в случае малой теплопроводности и $\omega_0 \gg \omega_s$ как раз и получим (1.46).

Обилие экспериментальных данных, в которых зачастую наслаивается влияние самых разнообразных факторов, затрудняет проведение детального анализа всех экспериментов по диффузии плазмы. По крайней мере этот вопрос требует отдельного подробного рассмотрения. Мы здесь ограничимся анализом некоторых из тех экспериментов, где, по видимому, влияние продольного тока несущественно.

В экспериментах Бомы /4/ ($Z \sim 0,3$ см, $B \sim 3-4 \cdot 10^3$ гс, $p \sim 5 \cdot 10^{-4} - 5 \cdot 10^{-3}$ мм Hg, $T_e \sim T_i \sim 2$ эв) $\nu_{oi} \ll \omega_s, \omega_e \ll \omega_s$. Поэтому, как следует из формулы (1.29) выражение для коэффициента диффузии близко к (1.42), что и подтверждено в данных экспериментах Бом обнаружил также присутствие низкочастотных колебаний, которые по порядку величины имеют частоты "дрейфовых" волн. Колебания с частотами дрейфовых волн наблюдались также, например, в опытах Боеш оттона и Швирцке /14/.

В ряде экспериментов аномальная диффузия начинается выше некоторого критического поля $H_{кр}$. Так, в эксперименте Жаринова /15/ с разрядом в аргоне при концентрации нейтрального газа $7 \cdot 10^{13}$ см⁻³, концентрации плазмы 10^{11} см⁻³, $T_e \sim T_i \sim 1$ эВ, $L_z \sim 10$ см аномальные явления начинались при $H_0 \sim 2300$ эрст.

Наличие нижней границы магнитного поля легко понять, если учесть, что аномальная диффузия не будет "замаскирована" классической, когда

$$\frac{cT}{2\pi eH_0} > D_{iL} \quad (1.53)$$

(D_{iL} - классическая диффузия ионов).

Из (1.53) имеем:

$$\omega_{Hi} > 2\pi \nu_{oi} \quad (1.54)$$

что дает правильное качественное и удовлетворительное количественное согласие для рассматриваемого эксперимента.

Любопытно отметить, что измеренный коэффициент диффузии на "стеллараторе" совпадает с (1.42) /16/. Анализ кривых времени удержания плазмы, приведенных в /16/ показывает, что при $H_0 \approx 2 \cdot 10^4$ Гс Бомовская диффузия, очевидно, сменяется диффузией $\sim \frac{1}{H^2}$. Из формулы (1.43) получаем, что при параметрах "стелларатора" ($n \sim 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $L_{ii} \sim 1 \text{ м}$, $\nu \sim 1 \text{ см}$, $T_e \approx 5 \text{ эВ}$) магнитные поля при которых меняется характер диффузии, оказываются именно такого порядка. Продольный ток на режим неустойчивости "стелларатора" (электрические поля 0,3 - 0,06 в/см) не оказывает определяющего действия. В самом деле в этом случае критические поля, при которых токовая неустойчивость дает диффузию $\sim \frac{1}{H^2}$, имеют значение $H^* \approx 10^4$ Гс, т.е. смена режима происходит раньше, чем в случае Бомовской диффузии. Отметим при этом, что с уменьшением температуры плазмы, как видно из формул (1.43) и (1.48) Бомовская диффузия может смениться диффузией $\sim \frac{1}{H^2}$ раньше, чем такая же смена произойдет для токовой неустойчивости. Возможно с этим связан тот факт, что в

случае "холодной" плазмы ($T \sim 0,1 \text{ эВ}$) при пропускании достаточно большого продольного тока (порядка нескольких ампер) в экспериментах Мотли скорость диффузии резко возрастала /17/.

П. КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ
ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ.

В предыдущем разделе мы рассмотрели устойчивость плазмы при учете конечной проводимости в рамках двухжидкостной гидродинамики плазмы и показали, что неустойчивость относительно потенциальных возмущений вызывает аномальную диффузию плазмы с коэффициентом диффузии, в частности, порядка "бомовского". Если же возмущения непотенциальны ($\omega > k_z V_A$), то неустойчивость стабилизируется. Учитывая, что для максимального коэффициента диффузии $\omega \sim \omega_e(x)$, а k_z определяется из (1.41), где $k_y \sim \frac{2\pi}{z}$ переписываем условие потенциальности в виде:

$$\sigma_{ii} \frac{V_{Ti}^2}{c^2} \ll \omega_{ni}$$

С ростом температуры плазмы, проводимость увеличивается и это условие должно в конце концов нарушиться. При этом плазма должна стать более устойчивой (точнее, менее неустойчивой). Однако, может оказаться, что мы уже выйдем за область применимости гидродинамики и задачу устойчивости следует рассматривать в рамках бесстокнливательной кинетики, т.к. длина свободного пробега возрастает еще быстрее, чем электропроводность.

3. Линеаризованные уравнения. Задача на отыскание собственных значений.

В кинетической теории в отличие от гидродинамики исследование устойчивости относительно малых возмущений уже не сводится к задаче на собственные значения для дифференциальных уравнений. Это ясно из того, что связь плотности тока частиц с электрическими

и магнитными полями возмущений носит нелокальный характер. Уравнения становятся, в общем случае, интегро-дифференциальными. Рассмотрим сначала как видоизменится при этом математическая сторона дела. Задача устойчивости сводится к обобщенной задаче на собственные значения частот ω . интегро-дифференциального оператора вида

$$\hat{L}(x, \omega) \psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_a^b d\tau \mathcal{K}(\xi, \omega, \tau) \delta(\xi - x - z_i f(\tau)) \psi(\xi) \quad (\text{П.1})$$

где $\hat{L}(x, \omega)$ - некоторый линейный дифференциальный оператор второго порядка

$$\hat{L}(x, \omega) \equiv z_i^2 \frac{d^2}{dx^2} + \alpha(x, \omega)$$

$z_i = \frac{V_{Ti}}{\omega_{ni}}$ - ионный ларморовский радиус, а коэффициент $\alpha(x, \omega)$ и ядро $\mathcal{K}(x, \omega, \tau)$ параметрически зависят от ω и являются медленно-меняющимися функциями в смысле $z_i \frac{d \ln \mathcal{K}(x)}{dx}$, $z_i \frac{d \ln \alpha(x)}{dx} \sim \frac{z_i}{R} \ll 1$ (R - характерный размер, на котором меняются $\alpha(x)$, $\mathcal{K}(x)$). Собственные функции должны быть финитными $\psi(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm \infty$. Предполагается, что уравнение (П.1) можно рассматривать на комплексной плоскости \bar{z} .

Наличие малого параметра z_i/R в уравнении (П.1) позволяет использовать асимптотические методы, аналогичные WKB-методу в квантовой механике. $\psi(x)$ представим в виде: x)

$$\psi(x) = \exp \left\{ i \int^x k_x(x, \omega) dx \right\} \quad (\text{П.2})$$

x) При таком определении полная функция ψ , описывающая возмущенные величины, дается выражением:

$$\psi(\bar{z}, t) = \exp \left\{ i \int^x k_x(x, \omega) dx + i k_y y + i k_z z + i \omega t \right\}$$

В первом приближении для медленно меняющейся функции $K_x(x, \omega)$ ($-\frac{dK_x^{-1}}{dx} \ll 1$) получаем некоторое, вообще говоря, трансцендентное уравнение:

$$-z_i^2 [K_x^{(0)}(x, \omega)]^2 + a(x, \omega) - \int_a^b \mathcal{K}(x, \omega, \tau) \exp\{iK_x^{(0)} z_i \tau\} d\tau = 0 \quad (\text{II.3})$$

В задачах устойчивости плазмы это уравнение содержит лишь чётные степени $K_x^{(0)}$:

$$-z_i^2 [K_x^{(0)}(x, \omega)]^2 + a(x, \omega) - F(x, \omega, K_x^2(x, \omega)) = 0 \quad (\text{II.3})$$

и имеет корни вида $\pm K_{x_j}^{(0)}(x, \omega)$ ($j = 1, 2, \dots$)

Пусть существует такой корень, что $\text{Im} K_j^{(0)}(x, \omega) \neq 0$ при $x \rightarrow \pm \infty$. Тогда соответствующее решение $\psi(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm \infty$, если в так-называемых точках поворота $z_{1,2}$ (где $K_x^{(0)}(z_{1,2}) = 0$ и WKB-приближение несправедливо) происходит смена решений (2), соответствующих различным знакам корня $\pm K_{x_j}$.

Из условия сшивки приближенного и точного решений уравнения (II.1) в точках поворота $z_{1,2}$ получаем уравнение для определения собственных частот [19], аналогичное условию квантования Бора в квантовой механике:

$$\int_{z_1}^{z_2} K_x^{(0)}(z, \omega) dz = (p + \frac{1}{2})\pi \quad (p = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{II.4})$$

здесь интегрирование идет в комплексной плоскости z по линии L_0 , соединяющей точки поворота $z_{1,2}$ на рис.4. Общее определение линии L есть

$$\text{Im} \int_{z_1}^z K_x(z, \omega) dz = 0, \quad z \in L$$

то-есть фаза функции $\psi(x)$ в WKB-приближении на ней действительна

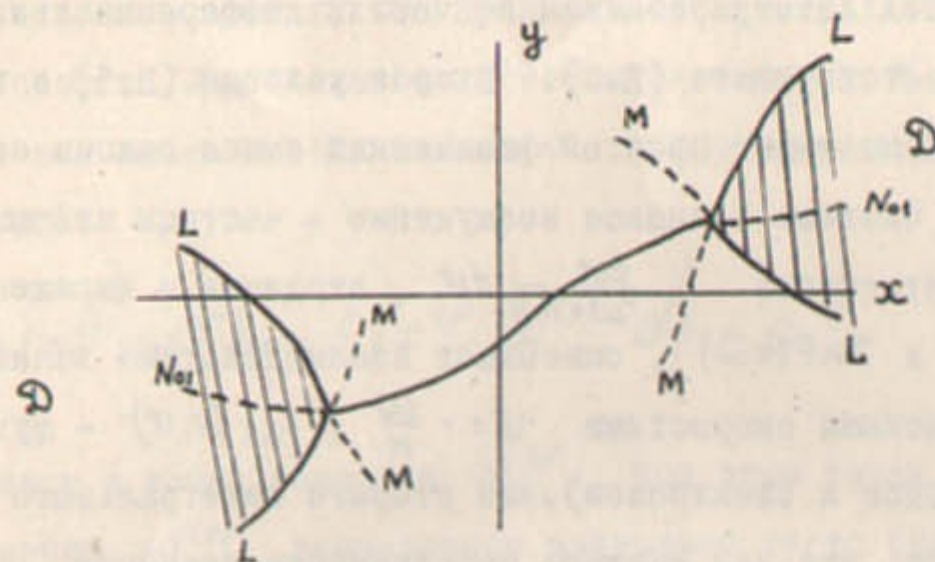


Рис. 4.

На рис.4 линии L ограничивают области finiteness \mathcal{D} решений $\psi(x)$, т.е. $\psi(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty, z \in \mathcal{D}$. Нужные нам финитные при $x \rightarrow \pm \infty$ решения существуют, если эти области \mathcal{D} охватывают обе действительные полуоси x .

Поскольку нам, вообще говоря, точно не известны аналитические функции $a(z)$ и $\mathcal{K}(z)$, встречающиеся в задаче устойчивости плазмы, да и решение $K_x^{(0)}(x)$ трансцендентного уравнения (II.3) не удастся получить в общем виде, обычно ограничиваются качественным исследованием устойчивости на основании интегральных соотно-

$$z_i^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d\psi}{dx} \right|^2 dx - \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 \left\{ a(x, \omega) - F(x, \omega, z_i^2 / \kappa_x(x, \omega)^2) \right\} dx = 0 \quad (\text{П.5})$$

$$\operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ a(x, \omega) - F(x, \omega, z_i^2 / \kappa_x(x, \omega)^2) \right\} |\psi|^2 dx = 0$$

которые получаются интегрированием по частям дифференциального уравнения, соответствующего (П.3). Второе условие (П.5) в теории устойчивости плазмы имеет простой физический смысл закона сохранения энергии в системе волновое возмущение + частицы плазмы (мнимая часть интегралов $\int \frac{f_{i,e}}{\omega + \kappa v} dv$, входящая в выражения для $\operatorname{Im} a(x, \omega)$ и $\operatorname{Im} F(x, \omega)$, описывает взаимодействие волны и частиц с резонансными скоростями $v = -\frac{\omega}{\kappa}$; $f_{i,e}(x, v)$ - функция распределения ионов и электронов). Из второго интегрального условия (П.5) следует, что для каждого собственного значения $\omega^{(p)}$ на оси x имеется такая точка $x^{(p)}$, что x

$$\operatorname{Im} \left\{ a(x^{(p)}, \omega^{(p)}) - F(x^{(p)}, \omega^{(p)}, z_i^2 / \kappa_x^2) \right\} = 0 \quad (\text{П.6})$$

$$\operatorname{Re} \kappa_x^2(x^{(p)}, \omega^{(p)}) z_i^2 - \operatorname{Re} \left\{ a(x^{(p)}, \omega^{(p)}) - F(x^{(p)}, \omega^{(p)}, z_i^2 \kappa_x^2) \right\} = 0$$

где второе уравнение получено из (3). (Важно, что в первое условие не входит неизвестное нам $\operatorname{Im} \kappa_x$). Эти уравнения могут служить

х) Условия типа (П.6), выведенные в работах /7,22/ без рассмотрения пространственного хода функции $\psi(x)$ остаются формально верными для малой мнимой части $\operatorname{Im} \omega \ll \kappa v$ при замене $\kappa_x^2 \rightarrow \operatorname{Re}(\kappa_x^2 + \kappa_y^2)$

для определения знака и порядка величины инкремента $\nu = -\operatorname{Im} \omega$, так что задача устойчивости неоднородной плазмы сводится к решению в общем случае трансцендентных уравнений. Такое упрощение возможно лишь для финитных решений (именно для них выведены условия (П.5)), так что все-таки требуется рассмотреть пространственный ход функции $\psi(x)$ с целью выяснения поведения на "бесконечности" ($x \rightarrow \pm \infty$).

Уравнение типа (П.1) включает в себя также хорошо изученные неустойчивости магнитогиродинамического типа /18/. Для этих случаев часто оказывается, что правая часть (П.3) действительна и точки поворота $x_{1,2}$ лежат на действительной оси x . Тогда для определения знака и величины $\operatorname{Im} \omega$ можно использовать уравнение (П.3) /25/:

$$a(x^{(p)}, \omega^{(p)}) - F(x^{(p)}, \omega^{(p)}, 0) = 0 \quad (\text{П.7})$$

Записанное в точке поворота $x_{1,2}^{(p)}$. При этом точки поворота различных уровней $\omega^{(p)}$ расположены настолько густо (на расстоянии $\Delta x = \frac{1}{\kappa_x} \ll R$), что собственные значения $\omega^{(p)}$ можно нумеровать с помощью непрерывного параметра x (заметим, что в случае комплексного оператора (П.1) на действительной оси x нет единичных точек поворота для действительной и мнимой частей функции (П.7) и условием, аналогичным (П.7) уже являются условия (П.6), написанные в точке $x^{(p)}$ обращения в нуль мнимой части (П.6)).

В заключение рассмотрим условия существования финитных решений в случае, когда функция $U(x) \equiv -\operatorname{Re} \kappa_x^2(x, \omega)$ имеет форму "горба" ($U(\pm \infty) < 0, U(x) > 0$ при $x_2 > x > x_1$), а $\operatorname{Im} \kappa_x^2 \equiv -V(x) \ll U$. Если оператор (П.1) действителен и имеет действительные корни κ_x^2 , то финитных решений $\psi(z)$ построить не удастся (этот результат есть

следствие справедливости квантово-механических условий сшивки в точках поворота). При $V(x) \neq 0$ о наличии таких решений $\psi(x)$ можно судить по изменению расположения линий L , ограничивающих области финитности. Здесь же мы рассмотрим лишь важный для дальнейших приложений пример уравнения Шрёдингера для "перевернутого осциллятора"

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + 2 \left\{ E + \frac{\Omega^2 x^2 e^{i\delta}}{2} \right\} \psi = 0 \quad (\text{П.8})$$

Пусть сначала $\delta = 0$. Тогда на линиях $\frac{z^4}{|z|^4} = -1$ относительный знак второй производной $\frac{d^2 \psi}{dx^2}$ и потенциальной энергии $\frac{\Omega^2 z^2}{2} \psi$ меняется на противоположный и мы получаем на этих линиях "потенциальную яму". Комплексные точки поворота лежат на этих линиях ($\arg z = \pm \frac{\pi}{4}$), а собственные значения энергии, соответствующие финитным на тех же линиях решениям, есть $E = \mp i \Omega (p + \frac{1}{2})$. Расположение линий Стокса M и линий L действительной фазы для $E = +i \Omega (p + \frac{1}{2})$ изображено на рис. 5. Так как асимптотами линий L

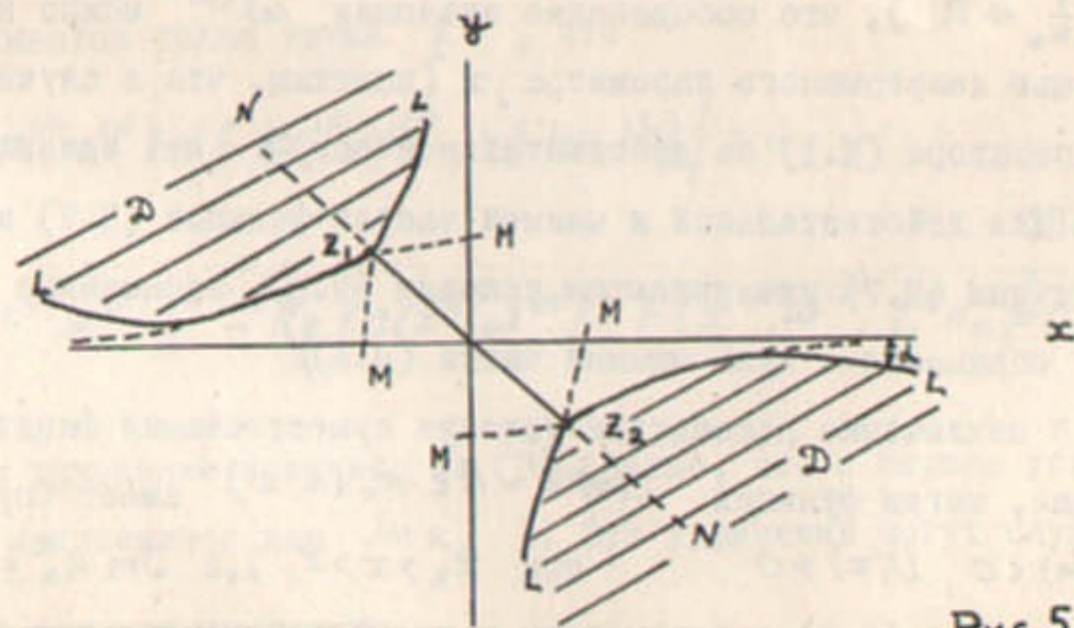


Рис. 5.

служат в этом случае полуоси x , то достаточно как угодно малой отрицательной мнимой части $V(x) = -|\delta| \frac{\Omega^2 x^2}{2}$, чтобы линии L повер-

нулись и действительные полуоси x попали в область D , где имеется только спадающее при $|z| \rightarrow \infty$ решение.

В задаче устойчивости аппроксимация потенциальной энергии $U_1 + iV_1$ осциллятором $U_1(x) + iV_1(x) \approx -\frac{\Omega^2 x^2}{2} e^{i\delta}$ возможна лишь в конечной области $|x| < R$, а при $|x| \rightarrow \infty$ выходит на постоянную $U_1(\infty) + iV_1(\infty)$. При этом для самых низких уровней точки поворота $z_{1,2}$ не выходят за область справедливости аппроксимации (П.8) и собственные значения энергии попрежнему есть $E = \mp i \Omega (p + \frac{1}{2})$ (для $V_1(x) \approx 0$). Но асимптоты линий действительной фазы L идут теперь под некоторым углом α . Поэтому при $V_1(x) \approx 0$ финитных решений нет и необходима конечная мнимая часть V_1 определенного знака, чтобы при развороте линии L действительные полуоси $x \rightarrow \pm \infty$ попали в область существования финитных решений.

Для конкретного определения того, какое из решений финитное при данном знаке $V_1(x)$, воспользуемся квазиклассическими решениями, аналитически продолженными из области D на ось x :

$$\psi = \frac{\text{const}}{|E - U_1 - iV_1|^{1/4}} \exp\left\{ \pm i \int^x \sqrt{2[E - U_1 - iV_1]} dx \rightarrow \exp\left\{ \pm ix \sqrt{2[E - U_1(\infty) - iV_1(\infty)]} \right\} \right\}$$

соответствующими собственным значениям $E = \mp i \Omega (p + \frac{1}{2})$ (в отсутствие мнимой части $V_1(x)$ эти решения должны расти вместе с x на действительной оси и как следует из этого выражения, угол α асимптоты линии L по порядку величины есть $\arctg \frac{|E|}{U_1(\infty)}$).

Видим, что при $|V_1(\infty)| > |E|$ и отрицательном (положительном), решение соответствующее $E = -i \Omega (p + \frac{1}{2})$, ($E = i \Omega (p + \frac{1}{2})$) финитно. Отсюда следует, что при малой мнимой части $|V_1| \ll |U_1|$ финитные решения могут существовать лишь почти на самом "горбе", то-есть для не очень больших квантовых чисел p .

Так, качественное исследование устойчивости неоднородной плазмы заключается в доказательстве существования финитных решений $\psi(x)$ и применении к последним условий устойчивости (П.6) или (П.7). При этом в окончательные выражения для инкрементов неустойчивостей и частот раскачивающихся колебаний входит волновое число $K_x(x)$ в определенной точке оси x , а нумерация спектра частот осуществляется с помощью непрерывного параметра x . Такое исследование уже проведено для случая параллельных силовых линий магнитного поля $\vec{H}^{(0)}$ (/7/, /20/-/22/), так что здесь мы остановимся на некоторых точных решениях $\psi(x)$ и учтем эффект непараллельности силовых линий $\vec{H}^{(0)}$.

В явной форме решения удается получить для случая близко расположенных точек поворота ($|z_1 - z_2| \ll R$), когда применимо "дрейфовое" приближение ($\lambda_x = \frac{2\pi}{K_x} \gg z_i$). Уравнение (П.1) для возмущений при этом сводится к уравнению Шредингера с комплексной потенциальной энергией

$$z_i^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2} - (U(x, \omega) + iV(x, \omega)) \psi = 0 \quad (\text{П.9})$$

Условие квантования (П.4) и уравнения (П.6) и (П.7) для него принимает соответственно вид:

$$\int_{z_1}^{z_2} \sqrt{[U(z, \omega^{(p)}) + iV(z, \omega^{(p)})]} dz = (p + \frac{1}{2})\pi z_i \quad (\text{П.4a})$$

$$V(x^{(p)}, \omega^{(p)}) = 0, \quad \text{Re } K_x^2 z_i^2 + U(x^{(p)}, \omega^{(p)}) = 0 \quad (\text{П.6a})$$

$$U(x^{(p)}, \omega^{(p)}) = 0 \quad (\text{П.7a})$$

Во всем рассмотрении, как и в предыдущих разделах, будем вести на примере "плоского слоя" плазмы низкого давления ($1 \gg \beta = \frac{8\pi nT}{H^2}$)

Для общности изложения учтем также поле тяжести g , приложенное вдоль оси x . Вывод исходного уравнения линеаризованной теории устойчивости является чересчур громоздким и мы вынесли его в приложение (см. в конце статьи).

Как уже отмечалось, исходное интегро-дифференциальное уравнение в приближении малых ларморовских радиусов сводится к дифференциальному. Для иллюстрации физики неустойчивости, нам достаточно будет иметь дело с этим последним.^{x)} Оно имеет вид (см. приложение)

$$\left(1 - \frac{\omega^2 - \omega_n(x)(1+\eta)\omega}{K_x^2 V_A^2}\right) \left[\frac{d^2}{dx^2} - K_x^2 \left(1 + \frac{g \frac{n'(x)}{n(x)}}{K_x^2 V_A^2 - \omega^2 + \omega_n(x)(1+\eta)\omega}\right)\right] \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega - (2+\eta)\omega_n(x)}{\omega} - \frac{\omega - (1+\eta)\omega_n(x)}{\omega} \left[\frac{\omega + K_x V_e^{(0)} - \omega_n(1+\eta)}{T} - \frac{K_x \frac{d}{dx}}{m_i \omega_n}\right] \left\{ \frac{f_e^{(0)} dV_n}{\omega - \omega_n(1+\eta) + K_x V_e^{(0)}} \right\} \psi =$$

$$= \left[\frac{d^2}{dx^2} - K_x^2 \left(1 - \frac{g \frac{n'(x)}{n(x)}}{\omega^2 - \omega_n(x)(1+\eta)\omega}\right)\right] (z_i^2 \frac{d^2}{dx^2} - K_x^2 z_i^2)$$

где $\omega_n(x) = \frac{K_x c T}{e H} \frac{n'(x)}{n(x)}$, $\eta \equiv \frac{d \ln T}{d \ln n}$, $n' \equiv \frac{dn}{dx}$

$$K_x = K_z + K_y \int \frac{d\theta}{dx} dx, \quad K_z \approx K_y, \quad z_i = \frac{V_{Ti}}{\omega_{ni}}$$

$$f_e^{(0)}(x, v_n) = n(x) \left(\frac{m_e}{2\pi T(x)}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{m_e (v_n - v_e^{(0)})^2}{2T(x)}\right\}$$

$$\omega_n = \omega - \omega_n(x)(1+\eta)$$

x) Анализ общего случая проведен в /24/.

Здесь при вычислении интегралов с ионной функцией распределения $\int \frac{f_i}{\omega_i + \kappa_z v_{Ti}} dv_{Ti}$ мы считали $\omega_n \gg \kappa_z V_{Ti}$. Это уравнение несправедливо в области малых градиентов $\frac{n'}{n} \sim 0$, но это не сказывается на правильности результатов, т.к. в эту область решение уже практически затухло.

Для нахождения точных решений мы будем пользоваться разложением $\frac{n'}{n}(x)$ вблизи точки x_0 ($[\frac{n'}{n}(x_0)]' = 0$), то-есть

$$\frac{n'}{n}(x) = \frac{n'}{n}(x_0) \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right), \quad x_1 = x - x_0 \quad (\text{П.12})$$

Кроме того, мы будем считать для простоты, что изменение плотности $n(x)$ и температуры $T(x)$ с координатой x происходит подобно, то-есть $\eta = \text{const}$.

4. Неустойчивости неоднородной разреженной плазмы в магнитном поле с параллельными силовыми линиями.

Сначала рассмотрим простой случай гидродинамической неустойчивости желобкового типа [18]. Уравнение для возмущенных величин в этом случае получим из нашего уравнения (П.11), положив в нём:

$$\kappa_y = 0, \quad z_i/\lambda = 0, \quad \eta = 0, \quad g \gg \kappa_z^2 z_i^2 V_{Ti}^2/R$$

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} - \kappa_y^2 \left(1 - \frac{g n'}{\omega^2}\right) \psi = 0$$

Ограничиваясь случаем действительных ω^2 и считая $g \frac{n'}{n} < 0, \omega^2 < 0$, получаем, что потенциальная энергия в (П.1) действительна и имеет форму ямы. Следовательно нужные нам финитные решения существуют. Условие (П.5) в нашем случае может выполняться лишь для чисто мнимых частот $\omega = \pm i \sqrt{-g \frac{n'}{n}}$, т.е. такая конфигурация плазмы

неустойчива. Если $g \frac{n'}{n}(x) > 0$, то распределение плазмы устойчиво.

В отсутствие поля тяжести ($g = 0$) неустойчивость носит колебательный характер и заключается в раскачке "дрейфовых" волн в неоднородной плазме.

Для возмущений в области "промежуточных" частот ($\kappa_z V_{Ti} < \omega_0 < \kappa_z V_{Te}$) из (П.11) получаем:

$$z_i^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2} - \left\{ \kappa_y^2 z_i^2 + \left(1 - \frac{\omega^2 - \omega_n(1+\eta)\omega}{\kappa_z^2 V_A^2}\right) \left(1 - \frac{(2+\eta)\omega_n(x)}{\omega}\right) - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega - \omega_n(1+\eta)}{\kappa_z V_{Te}} \cdot \frac{\omega - (2+\eta/2)\omega_n(x)}{\omega} \right\} \psi = 0 \quad (\text{П.13})$$

а) Обратимся сначала к случаю потенциальных возмущений ($\text{rot } \vec{E} \approx 0$, что справедливо при $\omega_0 < \kappa_z V_A$). Тогда воспользовавшись (П.12) сводим (П.13) к уравнению:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + 2 \left(E - \frac{\Omega^2 x^2}{2}\right) \psi = 0 \quad (\text{П.14})$$

где

$$E = \frac{1}{2z_i^2} \left[\frac{\omega_0(2+\eta) - \omega}{\omega} (1-i\gamma) + i\gamma \frac{\omega_0 \eta}{2\omega} \right] - \frac{\kappa_y^2}{2}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_0}{\kappa_z V_{Te}} \ll 1$$

$$\Omega^2 = \frac{1}{z_i^2 R^2} \frac{(2+\eta)\omega_0}{\omega} \left\{ 1 - i\gamma \left[1 + \frac{\eta^2}{4+2\eta} \right] \right\}, \quad \omega_0 \equiv \omega_n(x_0)$$

Финитные решения этого уравнения выражаются через полиномы Эрмита $H_p(x)$:

$$\psi_p(x) = \left(\frac{\Omega}{\pi}\right)^{1/4} \frac{H_p(x\sqrt{\Omega})}{\sqrt{2^p p!}} \exp\left\{-\frac{\Omega x^2}{2}\right\} \quad (\text{П.15})$$

(вдали от точек поворота, где несправедливо разложение в ряд (П.12) решение (П.15) следует заменить на

$$\psi_p(x) = \frac{\text{const}}{|U+iV|^{\frac{1}{4}}} \exp \left\{ - \int_{z_2}^x \sqrt{U(x, \omega^{(p)}) + iV(x, \omega^{(p)})} dz \right\} \quad)$$

Соответствующие собственные значения частот есть

$$\omega^{(p)} = (2+\eta)\omega_0 + i\gamma\eta \frac{\omega_0}{2} - \kappa_y^2 z_i^2 (2+\eta)\omega_0 (1+i\gamma) - 2 \frac{z_i}{R} (p+\frac{1}{2})(2+\eta)\omega_0 \left\{ 1 - i\gamma \left(1 + \frac{\eta^2}{4+2\eta} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} (1+i\gamma) \quad (\text{П.16})$$

Отсюда получаем, что неустойчивость имеет место при:

$$\frac{d \ln T}{d \ln n} < 4 \kappa_y^2 z_i^2 + \frac{4 z_i}{R} (p+\frac{1}{2}) \quad (\text{П.17})$$

Если не ограничиваться дрейфовым приближением, то следует писать полное уравнение в WKB-приближении для $\kappa_x^2(x)$ (24, приложение I)

$$\left\{ 2(\omega - (1+\eta)\omega_n) - \left[\omega - \eta\omega_n \left(1 - \frac{\partial \ln F}{\partial \ln T} \right) \right] F (\kappa_x^2 + \kappa_y^2) - \frac{\kappa_x^2 U_i^2}{\omega_n^2} (\omega + \eta\omega_n \frac{\partial \ln F}{\partial \ln T}) F - i\sqrt{\frac{\eta}{2}} \frac{\omega - (1+\eta)\omega_n}{|\kappa_x| V_{re}} \left[\omega + \kappa_x U_e^{(a)} - (2+\frac{\eta}{2})\omega_n + \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} (\omega - \frac{\eta\omega_n}{2} (3 - \frac{\omega_n^2}{\kappa_x^2 U_{Ti}^2} - 2 \frac{\partial \ln F}{\partial \ln T})) \right] F \cdot \exp \left(- \frac{\omega_n^2}{2 \kappa_x^2 V_{Ti}^2} \right) \right\} = 0 \quad (\text{П.13a})$$

$F = \exp\{-(\kappa_x^2 + \kappa_y^2) z_i^2\} I_0[(\kappa_x^2 + \kappa_y^2) z_i^2]$, I_0 - функция Бесселя от мнимого аргумента. функция $U(x) \equiv -\text{Re } \kappa_x^2$ имеет форму ямы x , а

х) Здесь и везде в дальнейшем при рассмотрении "дрейфовых" волн мы считаем $\omega_n(x) > 0$. Как легко видеть из уравнений (П.13) и (П.19) совпадает с предыдущим при формальной замене $\text{Re } \omega \rightarrow -\text{Re } \omega$, $\text{Im } \omega \rightarrow \text{Im } \omega$, $\omega_n(x) \rightarrow -\omega_n(x)$

для двух случаев:

I. $\omega > \omega_n(x_0)(1+\eta)$, $\eta < 2$ (рис. 6)

II. $\omega < \omega_n(x_0)(1+\eta)$, $\eta > \frac{\partial \ln T}{\partial \ln F(\kappa_y^2)}$ (рис. 7)

Поэтому для них применимы условия (П.6). Эти условия были применены в работах /7,22/ и там было показано, что возмущения первого типа неустойчивы при $\eta < 2$, а второго при $\eta > 2$. Инкременты неустойчивости по порядку величины равны $\nu \sim \omega_n \frac{\omega_n}{|\kappa_x| V_{re}}$

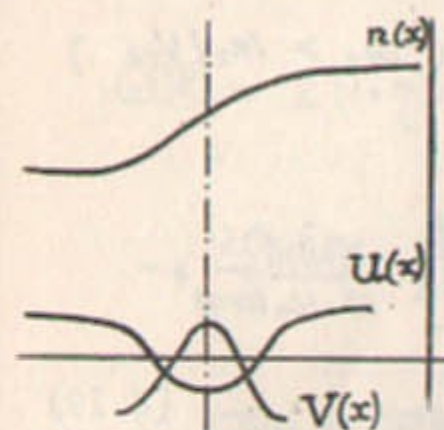


Рис. 6.

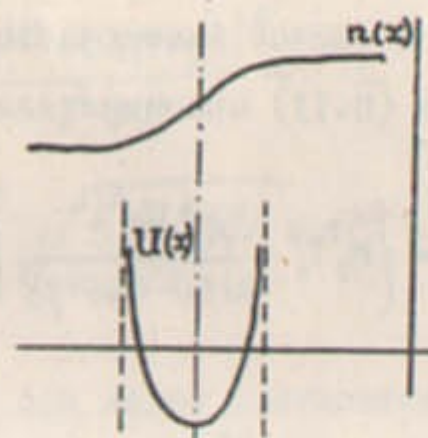


Рис. 7.

б) Для возмущений сильно искривляющих силовые линии магнитного поля ($\omega_* > |\kappa_x| V_A$), действительная часть потенциальной энергии имеет форму "горба" при $\eta > -2$. Пользуясь результатами § 3 и аппроксимацией (П.12), получаем из (П.13), что решения с собственной частотой

$$\omega^{(p)} = \omega_0(2+\eta) + i\gamma \frac{\omega_0 \eta}{2} + \kappa_y^2 z_i^2 \frac{\kappa_x^2 V_A^2}{\omega_0^2} \omega_0 (1+i\gamma) + i \frac{2z_i}{R} \sqrt{2+\eta} (p+\frac{1}{2}) \left\{ 1 - i\gamma \left[1 + \frac{2\eta^2+\eta}{4+2\eta} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} (1+i\gamma) |\kappa_x| V_A \quad (\text{П.18})$$

нарастают во времени и финитны при

$$\eta < -2 \kappa_y^2 z_i^2 \frac{\kappa_z^2 V_A^2}{\omega_0^2} - \frac{8z_i}{R} \left(\beta \frac{m_i}{\pi m_e} \right)^{\frac{1}{2}} \left(p + \frac{1}{2} \right) \frac{\kappa_z^2 V_A^2}{\omega_0^2} < 0$$

Коротковолновые колебания $\kappa_z z_i \gg 1$ и $\omega_* > \kappa_z V_A$ также устойчивы в отсутствие градиента температуры. (см §5).

Если же $\frac{d \ln T}{d \ln n} < -2$, то действительная часть потенциальной энергии имеет опять форму "ямы", финитные решения существуют и неустойчивы, а соответствующие собственные значения частоты получаем из П.18) заменой $\sqrt{2+\eta} \rightarrow i\sqrt{-\eta-2}$.

в) В случае высокочастотных возмущений ($\omega_* > \kappa_z V_{Te}$) уравнение (П.11) принимает вид:

$$z_i^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2} - \left\{ \kappa_y^2 z_i^2 - \frac{\kappa_z^2 V_{Te}^2}{\omega(\omega - \omega_n(1+\eta))} \left(1 - \frac{\omega(\omega - \omega_n(1+\eta))}{\kappa_z^2 V_A^2} \right) \left[1 - \frac{\omega_n(1+\eta)}{\omega - \omega_n(1+\eta)} + i \sqrt{\frac{\eta}{2}} \frac{(\omega - \omega_n(1+\eta))^2}{\kappa_z^3 V_{Te}^3} \left(\omega - (2+\eta)\omega_n + \frac{\eta\omega_n}{2} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\kappa_z^2 V_{Te}^2} \right) \right) \exp\left(-\frac{\omega_0^2}{2\kappa_z^2 V_{Te}^2}\right) \right] \right\} \psi = 0 \quad (\text{П.19})$$

Если давление плазмы не слишком мало ($1 \gg \beta > \frac{m_e}{m_i}$), то уравнение (П.19) имеет финитные решения (ситуация здесь полностью аналогична пункту а)), неустойчивые в интервале

$$-1 < \eta < -2 \frac{m_e}{m_i \beta} \left(\frac{\kappa_z V_{Te}}{\omega_0} \right)^2 - \frac{2z_i}{R} \left(p + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{2m_e}{\beta m_i}} \cdot \left(\frac{\kappa_z V_{Te}}{\omega_0} \right)^2 \quad (\text{П.20})$$

Причем неустойчивость обязана своим происхождением резонансному механизму типа механизма Ландау.

Если же $\beta < \frac{m_e}{m_i}$, то "дрейфовые" потенциальные ($\omega_* \ll \kappa_z V_A$) возмущения с частотой $\omega \approx 2(1+\eta)\omega_n(x)$ "слаболокализованы", т.к.

действительная часть $\psi(x)$ имеет форму "горба". Спадание решений при $x \rightarrow \pm \infty$ обеспечивается наличием мнимой части частоты $\text{Im} \omega$.

Воспользовавшись (П.12) и опуская полувичет в уравнении (П.19), приводим его к виду

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \left(-\kappa_y^2 + \frac{\kappa_z^2 V_{Te}^2}{z_i^2 [\omega - (1+\eta)\omega_0]^2} \cdot \frac{\omega - (2+\eta)\omega_0}{\omega} + \frac{2\kappa_z^2 V_{Te}^2 \omega_0(1+\eta)}{\omega [\omega - \omega_0(1+\eta)]^2} \frac{x^2}{z_i^2 R^2} \right) \psi = 0$$

Собственные значения частоты, соответствующие финитному решению типа (П.15) (то-есть $\text{Re} \Omega$), даются выражением

$$\omega^{(p)} = 2(1+\eta)\omega_0 + \kappa_y^2 z_i^2 \frac{[\omega^{(p)} - \omega_0(1+\eta)]^2}{\kappa_z^2 V_{Te}^2} \omega^{(p)} - \quad (\text{П.21})$$

$$-i \frac{2z_i}{R} \left(p + \frac{1}{2} \right) \frac{\omega^{(p)} - \omega_0(1+\eta)}{\kappa_z V_{Te}} \sqrt{\frac{2\omega_0(1+\eta)}{\omega^{(p)}}} \omega^{(p)}$$

Итак, неустойчивость имеется при любом соотношении между градиентами температуры $T'(x)$ и плотности $n'(x)$ (неустойчивость при достаточно больших положительных η может исчезнуть, если взаимодействие волны с электронами не очень мало, т.е. если полувичет в (П.19) велик).

Дрейфовые непотенциальные волны ($\omega_* > \kappa_z V_A$) могут быть неустойчивы лишь при учете экспоненциально малого полувичета в интервале $-1 < \eta < 0$ (см. П.20)

г) До сих пор мы рассматривали лишь раскачку дрейфовых волн с фазовой скоростью $\frac{\omega}{\kappa_z}$, сильно отличающейся от альфвеновской V_A , так что границы потенциальной ямы определялись точками обращения в нуль функции $\omega - (2+\eta)\omega_n(x)$ при примерно постоянном значении множителя $(\kappa_z^2 V_A^2 - \omega^2 + \omega_n(x)(1+\eta)\omega)$. В общем случае ($\frac{\omega}{\kappa_z} \sim V_A$) можно для качественного исследования устойчивости

воспользоваться уравнениями (П.13), которые дают (см. § 6):

$$(\omega - \omega_1(x))(\omega - \omega_2(x))(\omega - \omega_{gp}(x)) = \text{Re} \kappa^2(x) z_i^2 \kappa_z^2 V_A^2 \omega$$

$$- \text{Im} \omega \approx \gamma = - \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \frac{(\omega - \omega_n(1+\eta))(\omega - \omega_{gp}(x) + \frac{1}{2} \eta \omega_n(x))}{|\kappa_z| V_{Te} \left(1 + \frac{(\omega - \omega_{gp}(x))(\omega^2 + \kappa_z^2 V_A^2)}{\omega(\omega - \omega_1(x))(\omega - \omega_2(x))} \right)} \quad (\text{П.22})$$

где

$$\omega_{1,2}(x) = \frac{1+\eta}{2} \omega_n(x) \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\kappa_z^2 V_A^2}{\omega_n^2(x)(1+\eta)}} \right\}, \quad \omega_{gp}(x) = \omega_n(x)(2+\eta)$$

Как мы уже отметили, качественное отличие от предыдущих пунктов возникает лишь если частота может стать равной частотам $\omega_1(x), \omega_2(x)$ в какой-то точке x и, следовательно, множитель $(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)$ меняет в этой точке знак.

1. Пусть $\omega = \omega_1(x)$ в некоторой точке. Тогда "потенциальная яма" возникает, как легко видеть из уравнения (П.22) в области, где $\omega < \omega_{gp}(x)$, $\omega < \omega_1(x)$, $\omega(\omega - \omega_2(x)) > 0$ (рис. 8)

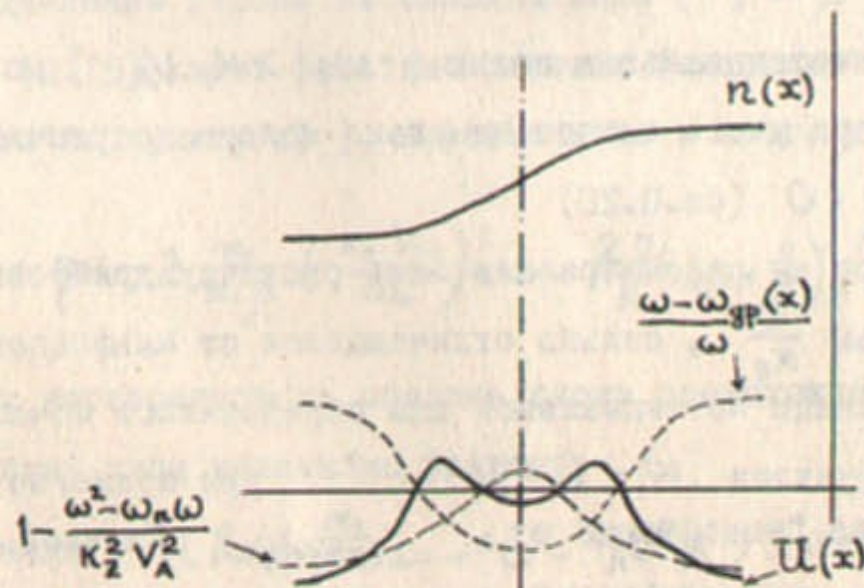


Рис. 8

Предельный случай, когда частота близка к $\omega_{gp}(x)$ соответствует обычной "дрейфовой волне" и инкременты с точностью до коэффициентов порядка единицы совпадают с инкрементами пункта а). Поэтому здесь мы рассмотрим лишь раскачку волны с частотой $\omega \approx \omega_1(x_0)$.

Если $\eta > -1$, то финитные решения удается построить лишь при $|\kappa_z| V_A < \sqrt{2+\eta} \omega_0$ (тогда действительная часть потенциальной энергии в уравнении (П.13) имеет форму ямы). Воспользовавшись разложением (П.12), получаем для этого случая собственные частоты, отвечающие финитному решению x)

$$\omega = \omega_1(x_0) - \kappa_y^2 z_i^2 \frac{1+\sqrt{1+d^2}}{2\sqrt{1+d^2}} \frac{\kappa_z^2 V_A^2}{\omega_{gp}(x_0) - \omega_1(x_0)} (1+i\gamma_i) -$$

$$- \frac{z_i}{2R} \sqrt{2(1+\eta)} \cdot \frac{\sqrt{2+d^2+2\sqrt{1+d^2}}}{\sqrt{1+d^2}} \frac{|\kappa_z| V_A \sqrt{1+\sqrt{1+d^2}}}{\sqrt{\omega_{gp}(x_0) - \omega_1(x_0)}} (1+i\frac{\gamma_i}{2}) \quad (\text{П.23})$$

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \frac{\omega_1(x_0) - \omega_0(1+\eta)}{|\kappa_z| V_{Te}} \left\{ 1 - \frac{\eta \omega_0}{2(\omega_{gp}(x_0) - \omega_1(x_0))} \right\}, \quad d = \frac{2\kappa_z V_A}{\omega_n(1+\eta)}$$

получаем границы неустойчивости $-1 < \eta < 2 \frac{\omega_{gp}(x_0) - \omega_1(x_0)}{\omega_0}$. Заметим, что теперь малость $\kappa^2 z_i^2$ не входит в выражение для границы неустойчивости. Это происходит из-за того, что новые точки поворота (нули функции $\omega - \omega_1(x)$) ограничивают область локализации волны лишь областью сильной раскачки ее электронами. Максимальное значение температурного градиента, при котором есть неустойчивость, достигается при $\kappa_z V_A \ll \omega_0$ и равно $\eta = 2$ (инкременты неустойчивости при этом падают как $\sim (\kappa_z V_A / \omega_0)^3$).

х) Несколько иной чем в (П.16), (П.23) инкремент $\gamma = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \omega_n \frac{V_A}{V_{Te}} \text{Re} \kappa z_i$ получается из (П.22) при совпадении частот $\omega_1(x), \omega_{gp}(x)$ и $T(x) = \text{const} / 22/$.

В случаях, когда $\kappa_z V_A > \sqrt{2+\eta} \omega_0$ или $\eta < -1$, потенциальная энергия $U(x)$ имеет форму "горба" и финитные решения затухают во времени (для обеспечения финитности нарастающих решений нужен противоположный знак мнимой части V_0 см. §3).

2. Рассмотрим далее случай $\omega \approx \omega_2(x)$. При $\eta > -1$ потенциальная яма теперь имеется в области, где $\omega < \omega_2(x)$, $\omega < 0$ и как следует из (П.22), такая волна затухает со временем. Если $-2 < \eta < -1$, то $\omega > 0$ и "яма" возникает в области между корнями уравнений (см. рис. 9)

$$\omega - \omega_2(x_1) = 0 \quad \omega - \omega_{gp}(x_2) = 0$$

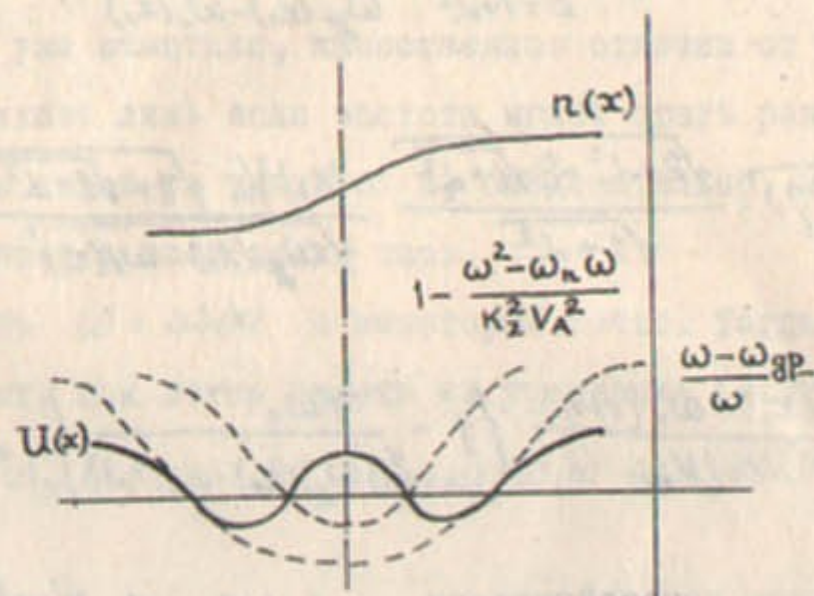


Рис. 9

Аппроксимировать эту "яму" осциллятором сложно и мы рассмотрим наиболее простой случай совпадающих частот $\omega_2(x)$, $\omega_{gp}(x)$. ($\kappa_z V_A \approx \sqrt{2+\eta} \omega_0(x)$) Из уравнения (П.22) получаем собственные частоты

$$\omega = \omega_{gp}(x) \pm \kappa_z \sqrt{\frac{2+\eta}{3+\eta}} \kappa_z V_A + i \sqrt{\frac{\eta}{8}} \frac{\omega_n^2}{\kappa_z V_{Te}} \left(\frac{\eta}{2} \pm \kappa_z \frac{\kappa_z V_A}{\omega_n(x)} \right) \quad (\text{П.24})$$

из которых видно, что в этой области η плазма неустойчива.

Если $\eta < -2$, то область локализации волны ограничена корнями уравнения $\omega - \omega_2(x)$ и как видно из (П.22), неустойчивость имеет место при $-1 - \sqrt{9 - \frac{4\kappa_z^2 V_A^2}{\omega_n^2}} < \eta < -2$ с инкрементами $\gamma \sim \kappa_z / V_A \cdot V_A / V_{Te}$. Дальше всего в область $\eta < 0$ граница неустойчивости отодвигается при $\kappa_z V_A \ll \omega_n$ ($\eta = -4$).

Итак, общая область неустойчивости относительно раскачки "альфвеновских" волн в неоднородной плазме есть:

$$-4 < \frac{d \ln T}{d \ln n} < 2 \quad (\text{П.25})$$

Суммируя результаты этого параграфа следует отметить, что "универсальная" неустойчивость имеет место лишь для потенциальных возмущений ($\omega_* \lesssim \kappa_z V_A$), тогда как для непотенциальных она отсутствует в плазме с постоянной температурой ($T(x) = \text{const}$). Причем в не слишком разреженной плазме $\beta > \frac{m_e}{m_i}$ механизм ее заключается в резонансном взаимодействии "дрейфовых" волн и электронов. Если же $\beta < \frac{m_e}{m_i}$, то неустойчивость относительно "высокочастотных" возмущений ($\kappa_z V_{Te} < \omega < \kappa_z V_A$) не связана с таким резонансным взаимодействием. Поскольку ранее нами изучалась устойчивость относительно сильно вытянутых вдоль силовых линий возмущений ($\kappa_z \ll \kappa_y$), то разумно в дальнейшем рассмотреть влияние малой не-параллельности силовых линий магнитного поля, которая вызывает нарушение этого, необходимого для существования неустойчивости, условия.^{xx)}

x) В работе /22/ границы этой области приведены неверно:

xx) Это условие также нарушается в коротких системах длиной $L < (10-15) R$, где неустойчивость отсутствует.

5. Устойчивость неоднородной разреженной плазмы в магнитном поле с непараллельными силовыми линиями.

а) Обратимся сначала к рассмотрению простейшего случая желобковой неустойчивости. В магнитном поле, угол наклона силовых линий которого меняется вдоль направления неоднородности, при смещении в поле тяжести силовые трубки "перепутываются" и возникает стабилизирующая желобковую неустойчивость сила натяжения силовых линий, так как K_y отлично от нуля. Такие возмущения будут стабилизированы, если результирующая этой силы и "силы Архимеда" является возвращающей, т.е.

$$F_H + F_A = i \frac{H_0 K_y}{4\pi} H_x - m_i g \frac{n'(x)}{n} \xi_x < 0$$

Используя уравнение

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \text{rot}_x \left[\frac{\partial \xi_x}{\partial t} \cdot \vec{H}^{(0)} \right]$$

и выражение для K_y ($K_y = K_y \frac{d\theta}{dx} x$) переписываем условие устойчивости в виде

$$K_y^2 \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 x^2 + \frac{m_i g}{T} \frac{4\pi n' T}{H_0^2} > 0$$

Подставляя вместо x наименьший возможный размер, на котором локализованы возмущения, $x = \frac{\lambda_x}{2} = \frac{1}{2K_y}$ окончательно получаем условие

$$\frac{T}{4m_i g} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 + \frac{4\pi n' T}{H_0^2} > 0 \quad \text{х)} \quad (\text{П.26})$$

х) Это условие является точным аналогом известного условия Сайдема для плоской геометрии [26].

Это условие можно получить из точного уравнения желобковой неустойчивости при наличии "shear'a" (см. (П.10)):

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \left(-K_y^2 - \frac{g \frac{n'(x)}{n}}{K_y^2 V_A^2 - \omega^2 + \omega_n \omega} \right) \psi = 0$$

Последнее вблизи границы устойчивости ($\omega^2 < K_y^2 V_A^2$) можно переписать в виде:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \left(-K_y^2 + \frac{x^2}{x^2} \right) \psi = 0 \quad (\text{П.27})$$

где $x^2 = -\frac{g \frac{n'}{n}}{V_A^2 \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2}$ - можно считать постоянной для рассматриваемого нами большого "shear'a". Тогда оно имеет формальное решение

$$\psi = \psi^{(0)} \sqrt{x} K_{i\nu}(K_y x), \quad \nu = \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}}$$

где $K_{i\nu}(K_y x)$ - функция Макдональда с мнимым индексом. При $\nu^2 > 0$ число нулей этого решения вблизи $x=0$ бесконечно и решение, затухающее на бесконечности, можно считать с любым решением вблизи $x=0$. При $\nu^2 < 0$ этого сделать не удастся. Это условие отсутствия финитных решений ($x^2 < \frac{1}{4}$) дает нам величину стабилизирующего shear'a (П.26). По существу условие отсутствия финитных решений при существенном изменении формы "потенциальной ямы" - есть условие того, что в "яме" не укладывается ни одна длина волны возмущения. Этим обстоятельством мы будем пользоваться при написании условия отсутствия финитных решений в остальных случаях.

б) При рассмотрении влияния shear'a на раскачку "дрейфовых" волн, следует иметь в виду, что область непотенциальности

возмущений ($\omega_0 > \kappa_z V_A$) занимает узкий интервал всей области локализации ($x_n \sim \frac{\omega_0}{\kappa_z V_A} \frac{d\theta}{dx}$) уже при условии $R \frac{d\theta}{dx} > \frac{z_i}{R} \beta^{\frac{1}{2}}$. Вне этого интервала возмущения можно считать потенциальными, так что "яма" $U(x)$, в основном, определяется уравнением (П.18).

Рассмотрим сначала случай не очень разреженной плазмы ($\beta > \frac{m_e}{m_i}$). Тогда в отсутствии градиента температуры раскачка "дрейфовых" волн с частотами $\kappa_z V_{Ti} < \omega < \kappa_z V_{Te}$ возможна лишь, если в области локализации имеет место неравенство $\omega_n(x) < \omega < 2\omega_n(x)$ (см. (П.22)). Если как раз в этой области расположен интервал непотенциальности возмущений, то ямы $U(x)$ соответствуют таким κ_z , что $\kappa_z V_{Ti} < \omega_n < \kappa_z V_A$ (область I на рис. 10) и $\omega_0 > \kappa_z V_{Te}$ (область II на рис. 10).

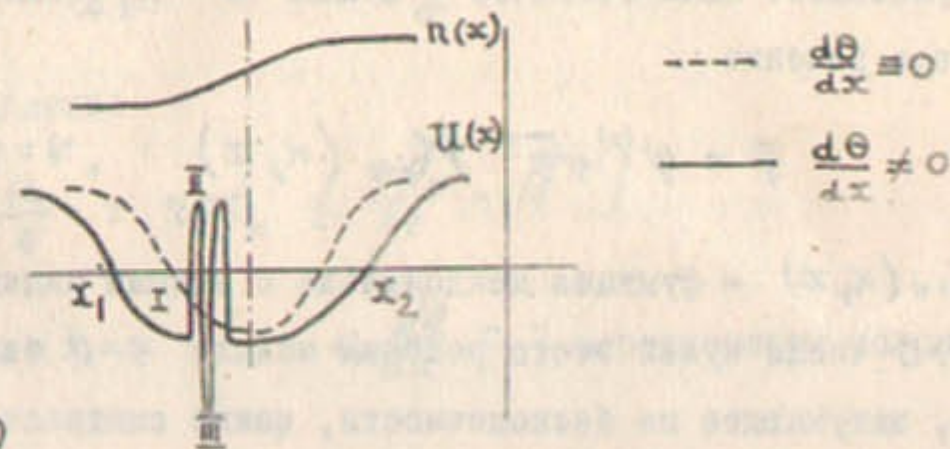


Рис. 10

То-есть при $T(x) = const$ могут раскачиваться лишь потенциальные "дрейфовые волны" (обл. I). Что касается возмущений в яме II, то из выражения для инкремента

$$\text{Im} \omega = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(\omega - \omega_n(1+\eta))^4}{|\kappa_z|^2 V_{Te}^3} \frac{\omega + \kappa_z V_{Te}^{(0)} - (2+\eta)\omega_n + \frac{\eta\omega_n}{2} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\kappa_z^2 V_{Te}^2}\right) \exp\left(-\frac{\omega_0^2}{2\kappa_z^2 V_{Te}^2}\right)}{\omega_n(1+\eta)}$$

следует, что они в отсутствие температуры ($T(x) = const$) затухают во времени. Затухают также и возмущения, локализованные в "яме" II на рис. 11, которая возникает, если область непотен-

циальности расположена там, где $\omega > 2\omega_n(x)$.

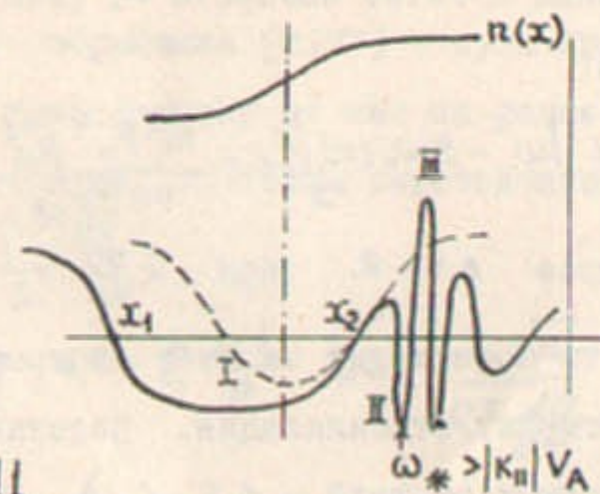


Рис 11

Разберем физические причины, приводящие к стабилизации этих неустойчивостей "s hear'om". Так как возмущения в "ямах" I на рис. 10, II потенциальны ($\omega_n < \kappa_z V_A$), то для них справедливо интегральное условие (см. уравнение (П.18))

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\omega)|^2 \left\{ \text{Im} \omega \left[2 - F(\kappa_z^2 + |\kappa_x|^2) \right] - i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{Re} \frac{\omega - (1+\eta)\omega_n}{\kappa_z V_{Te}} \left[\omega + \kappa_z V_{Te}^{(0)} - (2+\eta)\omega_n \right] \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \left(\omega - \frac{\eta\omega_n}{2} \left(3 - \frac{\omega_0^2}{\kappa_z^2 V_{Te}^2} - 2 \frac{\partial \ln F}{\partial \ln T} \right) F \exp\left(-\frac{\omega_0^2}{2\kappa_z^2 V_{Te}^2}\right) \right) \right\} dx = 0 \quad (\text{П.28})$$

Если в области локализации I фазовая скорость $\frac{\omega_0}{\kappa_z}$ по порядку величины сравнивается с тепловой скоростью ионов V_{Ti} , то увеличившееся затухание Ландау на ионах приводит к стабилизации неустойчивости. Критерий стабилизации при этом есть:

$$\int \frac{d\theta}{dx} dx > \frac{\omega_0}{\kappa_z V_{Ti}} = \delta \frac{z_i}{R} \quad (\delta \text{ - численный множитель } \sim 1) \quad (\text{П.29})$$

* Стабилизация дрейфовой неустойчивости была предложена И. Розенблатом, получившим этот критерий (см. /27/, где рассмотрены и др. методы стабилизации, как "гофрировка").

Наиболее трудно стабилизируются возмущения, когда "потенциальная стенка" II подходит близко к точке поворота x_1 (или x_2).

"Яма" $U(x)$ имеет вид:

$$U(x) = \kappa_1^2 z_i^2 + \left[\left(1 - \frac{\kappa_1^2 V_{Te}^2}{\omega^2}\right) \omega - 2\omega_n(x) \right] \left(1 + \frac{\kappa_1^2 V_{Te}^2}{\omega^2}\right)^{-1} \omega^{-1}$$

и расширяется до размеров $\Delta x \sim R$ при $R \frac{d\theta}{dx} > \frac{1}{2} \frac{z_i}{R} \sqrt{\frac{R}{\Delta x}}$,

$\Delta x_1 = \frac{2\omega_n(x_1) - \omega(1 + \kappa_1^2 z_i^2)}{\omega}$ (это происходит за счет быстрого роста $\kappa_1^2(x)$)

и согласно (П.29) происходит стабилизация. Подставляя сюда из условия отсутствия финитных решений $\Delta x < \lambda_x = \frac{z_i}{\sqrt{U}}$ минимальное Δx , равное $\Delta x \sim z_i^{2/3} R^{1/3}$, получаем критический "shear"

$$R \frac{d\theta}{dx} > \frac{1}{2} \left(\frac{z_i}{R}\right)^{2/3} \quad (\text{П.30})$$

Отметим также, что при очень малых β величина барьеров II уменьшается и они уже не могут ограничить область локализации узкой лямой Γ_a вблизи точки поворота x_1 , а возмущения проникают также в область \bar{I} сильного ионного затухания. Из условия прозрачности барьера получим, что при $\beta < \left(\frac{z_i}{R}\right)^{2/3}$ критический "shear" есть:

$$R \frac{d\theta}{dx} > \left(\frac{z_i}{R}\right)^{1/2} \beta^{1/4} \quad (\text{П.30a})$$

Возмущения в яме II описываются уравнением (П.4) приложения, либо дифференциальными уравнениями второго порядка (П.1) при $\kappa z \ll 1$ и уравнением

$$z_i^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} - \kappa_1^2\right) \psi + \frac{[\omega - (1+\eta)\omega_n]^2 - \omega_n^2}{2\kappa_1^2 \left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 V_A^2 x^2} \left[1 - i\sqrt{\frac{\omega - \eta\omega_n}{\omega - (1+\eta)\omega_n}} \frac{\omega - (2+\eta/2)\omega_n}{|\kappa_1| V_{Te}} \right] \psi = 0 \quad (\text{П.31})$$

при $\kappa z_i \gg 1$. Из всех этих уравнений с помощью интегрального условия (П.5) можно получить, что граница неустойчивости ближе всего подходит к точке $\eta = 0$ со стороны $\eta < 0$ при $\omega > 0$ и дается выражением:

$$\eta < -2 \frac{\omega - \omega_n(2+\eta) + \kappa_1 V_{Te}^2}{\omega_n} \quad (\text{П.32})$$

т.е. в области локализации

$$\omega > (2+\eta)\omega_n$$

причем $\omega_n > 0$, как уже подчеркивалось (см. примечание на стр. 45)

Минимальное значение отношения (П.32) достигается тогда, когда сама точка x_2 обращения (П.33) в нуль либо попадает в область II на рис. 11, либо отстоит от нее на расстоянии порядка ширины ямы $X \sim \frac{\omega_n}{\kappa_1 V_A \frac{d\theta}{dx}}$. Тогда неустойчивость становится возможной при

$$\eta < -2 \frac{|x|}{R} \sim -2 \frac{z_i \sqrt{\beta}}{R^2 \frac{d\theta}{dx}} \equiv \eta_{cr} \quad (\text{П.33})$$

Сюда следует подставить наибольшую величину shear'a $\left(R \frac{d\theta}{dx}\right)_{\text{ср.}}$. Поскольку уравнения (П.13) и (П.31) относятся к типу (П.27), то при условии

$$\frac{\omega - (2+\eta)\omega_n}{\omega_n} \frac{\omega_n \omega}{\kappa_1^2 z_i^2 V_A^2 \left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2} < \frac{1}{4} \quad (\text{П.34})$$

финитных решений не существует. При заданном малом градиенте температуры η максимальное значение $\frac{\omega - \omega_n(2+\eta)}{\omega_n}$, при котором еще есть неустойчивость, дается (П.32) и, следовательно, (П.34) принимает вид:

$$R \frac{d\theta}{dx} > \sqrt{\beta |\eta|} \quad (\text{П.35})$$

Учитывая (П.33) получаем по порядку величины границу неустойчивости

$$\eta < - \left(2 \frac{z_i}{R}\right)^{2/3} \quad (\text{П.36})$$

Итак, стабилизация потенциальных возмущений ($\omega_n > \kappa_1 V_A$) уже связана не с включением ионного затухания (оно при $\omega_n > \kappa_1 V_A$)

экспоненциально мало). Физический смысл ее стабилизации схож со случаем стабилизации желобковой неустойчивости.

Наконец, вкратце остановимся на высокочастотных возмущениях в яме III. Из уравнения (П.19) справедливо также и для $kz_i \gg 1$ при

$\beta > \frac{m_e}{m_i}$, используя условие (П.5), имеем:

$$\text{Im } \omega = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{[\omega - (1+\eta)\omega_n]^4}{|k_{\parallel}|^3 V_{Te}^3} \frac{\omega - (2+\eta)\omega_n + k_{\parallel} v_e^{(\omega)} + \frac{\omega_n \eta}{2} (1 - \frac{\omega^2}{k_{\perp}^2 V_A^2})}{\omega (1+\eta)} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k_{\perp}^2 V_{Te}^2}\right)$$

то-есть неустойчивость имеется при

$$-1 < \eta < 2 \frac{\omega - (2+\eta)\omega_n + k_{\parallel} v_e^{(\omega)}}{\omega_n \left(\frac{\omega^2}{k_{\perp}^2 V_{Te}^2} - 1\right)} < 0$$

Сравнивая по порядку величины длину волны возмущения

$$\lambda \sim z_i \sqrt{\frac{m_e}{m_i \beta} \frac{\omega_n}{\omega - (2+\eta)\omega_n}} \sim z_i \sqrt{\frac{m_e}{m_i \beta} \frac{2}{|\eta|}}$$

с шириной ямы

$$x \sim \frac{\omega_n}{k_{\perp} V_{Te} \frac{d\theta}{dx}} \sim \frac{z_i}{R \frac{d\theta}{dx}} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}$$

записываем условие стабилизации в виде

$$R \frac{d\theta}{dx} > \sqrt{\beta |\eta|} \quad (\text{П.37})$$

Причем граница неустойчивости по порядку величины теперь дается выражением:

$$\eta < -2 \frac{|x|_{\min}}{R} = -\left(\frac{m_e}{\beta m_i}\right)^{1/3} \left(\frac{z_i}{R}\right)^{2/3} \quad (\text{П.38})$$

Следует заметить, что условия (П.35), (П.37) при $|\eta| \gg 1$ пишутся как $R \frac{d\theta}{dx} > \sqrt{\beta}$.

Предыдущее рассмотрение касалось лишь случая частот ($\omega > \omega_n(k)(1+\eta)$). Если $\omega < \omega_n(k)(1+\eta)$, то уравнение (П.13) несправедливо, т.к. $kz_i \sim 1$, а точное уравнение (П.13) не может удовлетворяться при $\eta < 2$ (для $\eta > 2$ оно имеет решение k_{\perp}^2 , изображенное на рис. 7. и неустойчивость стабилизируется при 'shear'e' (П.30).

Вырожденные случаи, когда точка обращения в нуль $\omega - (2+\eta)\omega_n(k)$ попадает в области II, III непотенциальности, по существу, уже рассмотрены выше и дают минимальную величину стабилизации shear'ом порядка

$$R \frac{d\theta}{dx} > \beta^{1/2} \left(\frac{z_i}{R}\right)^{1/2} \text{ для } \omega_n > k_{\perp} V_A, \quad R \frac{d\theta}{dx} > \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \left(\beta \frac{z_i}{R}\right)^{1/2}$$

для $\omega_n > k_{\perp} V_{Te}$ (без shear'a эти возмущения соответствуют пунктам 4б - 4г).

3. В случае 4в плазмы низкого давления величину 'shear'a' находим из сравнения длины волны $\lambda \sim z_i \frac{\omega_n}{k_{\perp} V_{Te}}$ и ширины "ямы" $x \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \frac{z_i}{R \frac{d\theta}{dx}}$, возникающей в области $\omega > 2\omega_n(k)(1+\eta)$. В результате получаем условие стабилизации

$$\left(R \frac{d\theta}{dx}\right)_{\max} > \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \quad (\text{П.39})$$

то-есть при наличии уже очень малого shear'a неустойчивости в плазме низкого давления ($\beta < \frac{m_e}{m_i}$) полностью стабилизируются.

В заключение рассмотрим влияние наличия слабой силы тяжести на стабилизацию неустойчивостей разреженной плазмы shear'ом. Роль такой силы тяжести в магнитных ловушках, как известно, играет центробежная сила инерции, возникающая при движении частиц вдоль

искривленной силовой линии магнитного поля, то-есть $g_{sp} = \frac{v_{\theta}^2}{r}$ (r - радиус кривизны силовых линий). При этом мы ограничимся наиболее интересным случаем, когда дрейф частиц за счет неоднородности плотности и температуры значительно больше дрейфа в поле тяжести ($g_{sp} \ll \frac{v_{\theta}^2}{R}$).

На непотенциальные возмущения ($\omega_* > k_z V_A$) поле тяжести не влияет, так как для них уравнение (II.8) расщепляется на уравнения для желобковой и "дрейфовой" неустойчивостей. Для потенциальных же возмущений с частотой ω порядка $\omega_n(x)$ можно пренебречь членом $k_z^2 z_i^2 \frac{g}{k_z^2 V_A^2} \psi$ по сравнению с $(z_i^2 (\frac{d^2}{dx^2} - k_z^2) \psi)$ и уравнение для возмущений в области частот $k_z V_{Ti} < \omega < k_z V_A$ примет вид:

$$z_i^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2} - \left\{ k_z^2 z_i^2 \left(1 - \frac{g}{\omega^2 - \omega_n^2(x)(1+\eta)} \right) + \frac{\omega - (2+\eta)\omega_n - i\sqrt{\frac{\eta}{2}} \frac{\omega_n}{k_z V_{Te}} (\omega - (2+\frac{\eta}{2})\omega_n)}{\omega} \right\} \psi = 0$$

В этом уравнении появился только один малый член $\sim \frac{z_i^2 k_z^2 g}{\omega^2} \ll 1$ по сравнению с (II.13). Для качественного учета его влияния достаточно воспользоваться разложением $\frac{n'}{n}(x)$ в ряд. Тогда задача становится полностью аналогичной, рассмотренной в разделе §4 а) и в частности, при $\frac{d\theta}{dx} = 0$ спектр частот возбуждаемых колебаний имеет вид:

$$\omega^{(p)} = (p+2)\omega_0 + i \frac{\eta \omega_0}{2} - 2 k_y^2 z_i^2 \omega_0 (1 + \frac{\eta}{2})(1 + i\gamma) + \frac{k_y^2 z_i^2 g \frac{n'}{n}}{\omega - \omega_0(1+\eta)} (1 + i\gamma) + k_y^2 z_i^2 \frac{g \frac{n'}{n}}{\omega - \omega_0(1+\eta)} (1 + i\gamma) \frac{1 + i\gamma}{R} (p + \frac{1}{2}) \omega_0 (1 + \frac{\eta}{2}) \left\{ 1 + \frac{k_z^2 z_i^2 g \frac{n'}{n}}{\omega^2 - \omega_n^2(x)} - i\gamma \left[\frac{\eta}{4 + 2\eta} \right] \right\}$$

Отсюда легко видеть, что слабое поле тяжести может расширить границы неустойчивости

$$\eta < 4 k_y^2 z_i^2 + 4 \frac{z_i}{R} (p + \frac{1}{2}) - \frac{k_z^2 z_i^2 g \frac{n'}{n}(x_0)}{\omega_0^2} \quad (II.40)$$

если $g \frac{n'}{n} < 0$ (сравним с §4). Однако это влияние на устойчивость поле тяжести осуществляет через изменение собственных частот колебаний плазмы, тогда как характер нарастания поперечному определяется взаимодействием волны с электронами и ионами. Поэтому ясно, что увеличение ионного затухания по мере уменьшения фазовой скорости волны вдоль силовых линий магнитного поля, опять приведет к стабилизации этой неустойчивости при условии (II.30). Таким образом, учет слабой силы тяжести не влияет на стабилизацию неустойчивости "shear'om".

Итак, уже малый "shear" порядка $R \frac{d\theta}{dx} > \left(\frac{z_i}{R}\right)^{2/3}$ стабилизирует "универсальную" неустойчивость относительно потенциальных возмущений ($|k_z| V_{Ti} < |\omega_*| < |k_z| V_{Te}$). Непотенциальные ветви колебаний неоднородной плазмы ($|\omega_*| > |k_z| V_A$) остаются неустойчивыми при наличии градиента температуры ($\eta \neq 0$) и требуют для своей стабилизации большего "shear'a" $R \frac{d\theta}{dx} > \sqrt{\eta} \beta$.

6. Обсуждение нелинейных эффектов.

Результаты линейной теории устойчивости равновесия неоднородной разреженной плазмы в сильном магнитном поле показывают, что, по крайней мере, в магнитных ловушках с большим ларморовским радиусом ($\frac{z_i}{R}$ - не слишком мало) дрейфовые неустойчивости с длинами волн порядка z_i трудно стабилизировать с помощью "shear'a" и они по-существу остаются "универсальными". Важно знать насколько возникающие вследствие этой неустойчивости пульсации ухудшают магнитное удержание плазмы.

В разреженной плазме влияние флуктуаций электрического и магнитного поля на перераспределение частиц учитывается с помощью так называемого "квазилинейного" метода /25/, сущность которого заключается в том, что функцию распределения разбивают на медленно меняющуюся и быстро-осциллирующую части и в уравнении для "медленной" части учитывается усредненный квадратичный эффект "быстрых" осцилляций. Выделение двух "времен" (или частот) предполагает, что в плазме с самого начала идут два процесса с разными масштабами времени: быстрые осцилляции с медленно меняющейся амплитудой. Это сводится к условию $\nu \ll \omega$ ($\nu \approx -\text{Im} \omega$)

Распространим квазилинейный метод на неоднородную плазму. Рассмотрим для простоты случай $T(x) \equiv \text{const}$. Удобно кроме того ограничиться дрейфовым приближением:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{[\vec{E} \cdot \vec{H}]}{H^2} \cdot \nabla f + v_z \frac{\vec{H}}{H} \cdot \nabla f + \frac{e}{m} E_z \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0$$

Поля представим в виде:

$$E_y = \sum_{\vec{k}} E_{\vec{k}y} e^{i\omega_{\vec{k}}t + i\vec{k}\vec{r}} + \text{c. c.}$$

причем связь между \vec{E}, \vec{H} вытекает из уравнений приложения I и дается формулами:

$$E_{\vec{k}x} = \frac{k_x}{k_y} E_{\vec{k}y}, \quad E_{\vec{k}z} = \left(1 - \frac{\omega_{\vec{k}}(\omega_{\vec{k}} + \omega_n(x))}{k_z^2 V_A^2}\right) E_{\vec{k}y}$$

$$H_{\vec{k}y} = -\frac{k_x}{k_y} H_{\vec{k}x}, \quad H_{\vec{k}x} = \frac{c(\omega_{\vec{k}} + \omega_n)}{k_z^2 V_A^2} E_{\vec{k}y}$$

После обычной процедуры получаем усредненное уравнение для медленно меняющейся части

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \sum_{\vec{k}} \left\{ \frac{c}{H} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{m} \frac{k_z}{k_y} \frac{\partial}{\partial v_z} \right\} \frac{v_{\vec{k}} |E_{\vec{k}y}|^2}{(\omega_{\vec{k}} + k_z v_z)^2 + \nu_{\vec{k}}^2} \left(1 - \frac{\omega_{\vec{k}}^2 + \omega_{\vec{k}} \omega_n}{k_z^2 V_A^2}\right) \left\{ \frac{c}{H} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{m} \frac{k_z}{k_y} \frac{\partial}{\partial v_z} \right\} f_0$$

Здесь член $\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sum_{\vec{k}} c^2 \frac{|E_{\vec{k}y}|^2}{H^2} \frac{v_{\vec{k}}}{(\omega_{\vec{k}} + k_z v_z)^2 + \nu_{\vec{k}}^2} \left(1 - \frac{\omega_{\vec{k}}^2 + \omega_{\vec{k}} \omega_n}{k_z^2 V_A^2}\right) \frac{\partial}{\partial x} f_0 \right\}$

и описывает "аномальную" диффузию. "Перекрестный" член, содержащий $\frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial v_z}$, тоже дает поток частиц по x . Можно показать, что он, в оптимальном случае дает такой же вклад по порядку величины, что и член с $\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2}$. Слагаемое с $\frac{\partial^2 f_0}{\partial v_z^2}$ ответственно за "диффузию" в пространстве скоростей.

Точное выражение для квазилинейного Stop - члена для общего случая произвольного соотношения длины волны пульсаций и ларморовского радиуса получено в работе /28/ методом интегрирования по траекториям частиц. При этом оказывается, что наиболее сильную диффузию частиц вызывает турбулентные пульсации с длиной $\lambda \gtrsim z_i$.

Квазистационарный уровень турбулентных пульсаций $|E_{\vec{k}y}|^2$ устанавливается в результате конкуренции двух факторов: а) роста амплитуды из-за неустойчивости; б) переноса энергии по спектру из-за нелинейного взаимодействия пульсаций различных масштабов.

В оценке нелинейного ограничения амплитуды пульсаций существует два подхода:

1) если возможно выбрать такую систему координат, где неустойчивость чисто аperiодическая или $\nu_{\vec{k}} \sim \text{Re} \omega_{\vec{k}}$, то возмущения с разными длинами волн длительные промежутки времени будут сохранять свои фазовые сдвиги и поэтому они будут сильно взаимодействовать между собой. Такая ситуация имеет место в гидродинамической турбулентности, где нелинейное взаимодействие описывается членами вида $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$, $\text{div}(n \vec{v})$. Воспользовавшись одним из них для записи условия квазистационарности, получим:

$$\nu_{\vec{k}} c \frac{E_{\vec{k}}}{H} \sim \sum_{\vec{k}} c^2 \frac{|E_{\vec{k}}|^2}{H^2} k_x$$

то-есть

$$c \frac{E}{H} \sim \frac{v}{k_x}$$

2) если же в любой системе координат турбулентные пульсации представляют собой набор волновых возмущений с различными фазовыми скоростями, то происходит хаотизация фаз. Наличие малого параметра v_k/ω_k позволяет, используя усреднение по фазам, получить кинетическое уравнение для "числа волн" $N_k = \epsilon_k/\omega_k$ в виде /23/

$$\begin{aligned} & \frac{\partial N_k}{\partial t} + \frac{\partial N_k}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega_k}{\partial k_x} + u(x) \right) + \frac{\partial N_k}{\partial k_x} \frac{dk_x}{dx} = \\ & = \sum_{k', k''} 4\pi |V_{k, k', k''}| \left\{ (N_{k'} N_{k''} - N_k N_{k'} - N_k N_{k''}) \delta_{k, k'+k''} \cdot \right. \\ & \cdot \delta(\omega_{k'} + \omega_{k''} - \omega_k) + 2(N_{k'} N_{k''} + N_k N_{k'} - N_k N_{k''}) \cdot \\ & \left. \cdot \delta_{k, k'+k''} \cdot \delta(\omega_{k'} - \omega_{k''} - \omega_k) \right\} + 2v_k N_k \end{aligned} \quad (\text{П.45})$$

где ϵ_k - спектральная плотность энергии, $\omega_k = \omega(k)$

Нелинейное взаимодействие здесь описывается *Stoß*-членом, а накачка волн из-за неустойчивости учитывается как $\left(\frac{dN_k}{dt}\right)_{\text{неуст}} = v_k N_k$, где v_k - инкремент неустойчивости. При выводе (П.45) считалось, что законы сохранения квазипульса \vec{k} и квазиэнергии ω_k можно выполнить уже для взаимодействия трех волн. В одномерном случае это справедливо, например, если дисперсионные кривые имеют вид 1, 2 на рис. 12 и невозможно для 3. Поскольку раскачка "дрейфовых" волн относится как раз к рассматриваемому случаю "слабого" взаимодействия, то следует обсудить

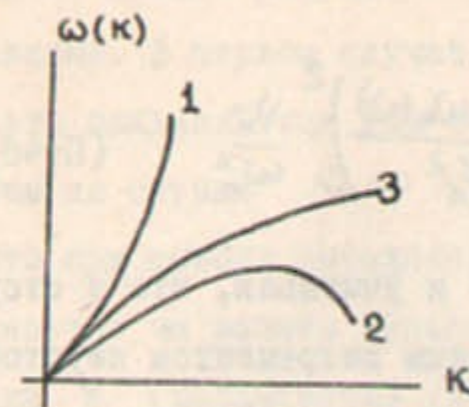


Рис. 12

возможность применения к ним уравнения (П.45). Волновое число в направлении неоднородности меняется с координатой, то-есть $k_x = k_x(x)$. Поэтому законы сохранения квазипульса будут выполняться лишь в некоторой области по порядку величины совпадающей с размерами локализации возмущений. Дисперсионную кривую $\omega(k)$ в данной точке x можно получить из I ($T(\omega) = \text{const}, E_{ex} = 0$) x

$$\omega_k = \frac{\omega_n(x) F(k_x^2 + k_y^2)}{2 - F(k_x^2 + k_y^2)} \quad (\text{П.46})$$

Отсюда видно, что для оценки амплитуды $|E_k|^2$ можно учесть доминирующий процесс нелинейного взаимодействия трех волн. Используя (П.45) и оценку матричного элемента $V_{k, k', k''} \sim \sqrt{\frac{8\omega_{k'}\omega_{k''}\omega_k}{n_0 T_0 \gamma_i^2 (\frac{n_0'}{n_0})^2}} k^3 \gamma_i^3$ (см. приложение II) получим:

$$c^2 \frac{E_i^2}{H^2} \sim \frac{v_k \omega_k}{k^6 \gamma_i^4} \quad (\text{П.47})$$

Как видно из (П.43), наиболее сильно диффундируют резонансные частицы ($\frac{\omega}{k_z} \approx -v_k$). Однако число таких ионов очень мало, так как возникающие в результате неустойчивости турбулентные пульсации имеют фазовые скорости $\frac{\omega}{k_z}$ значительно большие тепловой скорости ионов.^{x)} Учитывая это для нерезонансных ионов

x) Электроны же, напротив, диффундируют в основном "резонансным" образом, так как $\omega \ll k_z v_{Te}$ но с тем же средним коэффициентом диффузии.

получаем коэффициент диффузии:

$$D = \sum_{\vec{k}} c^2 \frac{|E_{\vec{k}}|^2}{H_0^2} \left(1 - \frac{\omega_{\vec{k}}(\omega_{\vec{k}} + \omega_n(x))}{K_{\vec{k}}^2 V_A^2}\right)^2 \frac{v_{\vec{k}}}{\omega_{\vec{k}}} \quad (\text{П.48})$$

Подставляя сюда оценку амплитуды (П.47) и учитывая, что в отсутствие градиента температуры с максимальным инкрементом неустойчивости $v_{\text{max}} \sim \left(\frac{m_e}{m_i \beta}\right)^{1/2} \cdot \omega_n(x)$ нарастают возмущения с длинами воли $\lambda_x \sim z_i$ имеем:

$$D \sim \frac{1}{10} \left(\frac{m_e}{m_i \beta}\right) \cdot \frac{z_i}{R} \cdot \frac{cT}{eH} \quad (\text{П.49})$$

Выражения (П.47), (П.48) можно использовать также для оценки коэффициента диффузии в разреженной плазме с током в магнитном поле.

В этом случае максимальный инкремент согласно /5/ есть

$v_{\text{max}} \sim \frac{U_e^{(0)}}{V_{Te}} \cdot \omega_n(x)$ ($U_e^{(0)}$ — направленная скорость электронов вдоль силовых линий в невозмущенной плазме). Принимая во внимание, что $K \sim \frac{1}{z_i}$; получаем:

$$D \sim \left(\frac{U_e^{(0)}}{V_{Te}}\right)^2 \cdot \frac{z_i}{R} \cdot \frac{cT}{eH} \quad (\text{П.50})$$

Заметим, что в /5/ приведено другое выражение для коэффициента диффузии

$$D_1 \sim \frac{U_e^{(0)}}{V_{Te}} \cdot \frac{cT}{eH} \quad (\text{П.51})$$

Автор /5/ исходил из неверной аналогии между неустойчивостью

плазмы в гравитационном разряде и раскачкой "дрейфовых" волн в неоднородной плазме. В первом случае связь между "модами" пульсаций действительно сильная, так как неустойчивость почти аperiодическая /3/ В нашем же случае $Re \omega \gg Im \omega$ и связь поэтому слабая. Любопытно, что при выводе выражения (П.51) в /5/ было сделано еще две неточности: за размер пульсаций λ_x вместо правильной величины порядка z_i (характерная длина волны неустойчивости) принимался

R — радиус плазменного шнура и, наконец, для коэффициента диффузии вместо выражения типа (П.48), получавшегося в квазилинейном методе, использовалась размерностная оценка $D_1 \sim \frac{v}{K_{\vec{k}}^2}$.

Таким образом, численное совпадение D_1 из (П.51) и значения Бомовского коэффициента диффузии для типичных условий в "Стеллараторе", рассматривавшееся в /5/ как об"яснение эксперимента, является следствием ошибки.

Правильные оценки, проведенные в этом параграфе (см. (П.49), (П.50)) показывают, что диффузия, вызываемая турбулентным фоном "дрейфовых" волн в высокотемпературном пределе оказывается существенно заниженной, а именно отличается от Бомовской малым множителем

$$\frac{m_e}{m_i \beta} \cdot \frac{z_i}{R} \quad (\text{для } \beta > \frac{m_e}{m_i})$$

При $\beta < \frac{m_e}{m_i}$ отличие остается в множителе $\frac{z_i}{R}$.

В заключение мы хотим принести искреннюю благодарность М.А.Леонтовичу за постоянное внимание к работе и полезную критику. Мы хотим особо отметить важную роль идей и советов, высказанных Маршаллом Розенблютом в дискуссиях с одним из нас (Р.З.С.) во время Харуэльской конференции по устойчивости плазмы. Они были использованы в ряде разделов статьи.

Общее интегро-дифференциальное уравнение для возмущенных величин можно легко получить, воспользовавшись методом интегрирования по траекториям. Выберем невозмущенную функцию распределения частиц в системе координат, где $E_x^{(0)} \equiv 0$ в виде

$$f_{i,e} = \left[1 + \frac{v_y}{\omega_{ni,e}} \left(\frac{d}{dx} - \frac{m_{i,e} g}{T(x)} \right) \right] \left(\frac{m_{i,e}}{2\pi T(x)} \right)^{\frac{3}{2}} n_{i,e}(x) \cdot \exp \left\{ -\frac{m_{i,e} v_{\perp}^2}{2T(x)} - \frac{m_{i,e} (v_{\parallel} - v_{i,e}^{(0)})^2}{2T(x)} + \frac{m_{i,e} g x}{2T(x)} \right\} \quad (\text{П.1})$$

Тогда поправку δf к ней можно представить в виде интеграла по траекториям частиц /18/:

$$\delta f_{i,e}(x, \vec{v}, t=0) = -\frac{e_{i,e}}{m_{i,e}} \int_{-\infty}^0 dt \left[\delta \vec{E} + \frac{[\vec{v}, \delta \vec{H}]}{c} \right] \cdot \nabla_{\vec{v}} f_{i,e}(x, \vec{v}) \quad (\text{П.2})$$

где электрические и магнитные поля подчиняются уравнениям Максвелла

$$\frac{d\delta H_{\perp}}{dx} - i\kappa_{\perp} \delta H_x = \frac{4\pi}{c} \sum_{i,e} e_{i,e} \delta f_{i,e} v_{\parallel} d\vec{v}, \quad \frac{d\delta H_x}{dx} + i\kappa_{\perp} \delta H_{\perp} = 0 \quad (\text{П.3})$$

$$i\kappa_{\perp} \delta E_{\parallel} - i\kappa_{\parallel} \delta E_{\perp} = -\frac{i\omega_0}{c} \delta H_x, \quad \frac{d\delta E_{\perp}}{dx} - i\kappa_{\perp} \delta E_x = 0$$

Здесь мы пренебрегли возмущением δH_{\parallel} , что справедливо при $\frac{H^2}{8\pi} \gg nT$. Уравнения Максвелла записаны в локальной тройке координат, \vec{S}_{\parallel} — вдоль невозмущенного магнитного поля $\vec{H}^{(0)}$, $S_{\perp} = \frac{[\vec{S}_{\parallel}, \vec{x}]}{|\vec{S}_{\parallel}| |\vec{x}|}$.

Дополняя систему (П.1)-(П.3) условием квазинейтральности

$\sum_{i,e} \delta f_{i,e} e_{i,e} d\vec{v} = 0$, приводим ее с помощью выражения для траектории частиц, приведенного в /18/ к одному интегро-дифференциальному уравнению

$$\left[2 - \sum_{i,e} A^{i,e}(x, \omega) \hat{K}^{i,e} \right] \left[\gamma_i^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} - \kappa_{\perp}^2 \right) - \frac{\omega_0^2}{\kappa_{\perp}^2 V_A^2} \left(\sum_{i,e} \frac{\omega_0 + \frac{\kappa_{\perp} T}{m_{i,e} \omega_{ni,e} n_0} \frac{d}{dx} n_0}{\omega_n} \hat{K}^{i,e} \right) \right]$$

$$- 2 + \sum_{i,e} \frac{\kappa_{\perp} g}{\omega_{ni,e} \omega_n^2} \left(\frac{\kappa_{\perp} T}{m_{i,e} \omega_{ni,e} n_0} \frac{d}{dx} n_0 + \frac{\kappa_{\perp} g}{\omega_{ni,e}} (\bar{A}^{i,e} - 1) \right) \hat{K}^{i,e} +$$

$$+ \sum_{i,e} \frac{\kappa_{\parallel}}{\omega_n^2} \frac{\kappa_{\perp} T}{m_{i,e} \omega_{ni,e} n_0} \left(\frac{d}{dx} - \frac{m_{i,e} g}{T} \right) n_0 v_{i,e}^{(0)} \hat{K}^{i,e} \Big] \psi(x) =$$

$$= \frac{\omega_n^2}{\kappa_{\perp}^2 V_A^2} \left[\sum_{i,e} \frac{\omega_0 + \frac{\kappa_{\perp} T}{m_{i,e} \omega_{ni,e} n_0} \frac{d}{dx} n_0}{\omega_n} \hat{K}^{i,e} - 2 + \sum_{i,e} \frac{\kappa_{\perp} g}{\omega_{ni,e} \omega_n} (\bar{A}^{i,e} - 1) \hat{K}^{i,e} \right]$$

$$\left[\sum_{i,e} \frac{\omega_0 + \frac{\kappa_{\perp} T}{m_{i,e} \omega_{ni,e} n_0} \frac{d}{dx} n_0}{\omega_n} \hat{K}^{i,e} - 2 + \sum_{i,e} \frac{\kappa_{\perp} g}{\omega_{ni,e}} \omega_n^2 (\bar{A}^{i,e} - 1) + \sum_{i,e} v_{i,e}^{(0)} (\hat{K}^{i,e} - 1) \right]$$

(П.4)

где:

$$A^{i,e} \hat{K}^{i,e} = \frac{1}{n_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_0 + \frac{\kappa_{\perp} T}{m_{i,e} \omega_{ni,e} n_0} \frac{d}{dx} n_0 - \frac{\kappa_{\perp} g}{\omega_{ni,e}} + \frac{\kappa_{\perp} T}{m_{i,e} \omega_{ni,e}} \frac{d}{dx}}{\omega_n - \frac{\kappa_{\perp} g}{\omega_{ni,e}} + \kappa_{\parallel} v_{\parallel}} f_{i,e}^{(0)} \hat{K}^{i,e} d\vec{v}$$

$$\bar{A}^{i,e} = A^{i,e} \Big|_{\kappa_{\parallel} v_{i,e}^{(0)} = 0}$$

$$\hat{K}^{i,e} \psi(x) = \frac{m_{i,e} \omega_{ni,e}}{4\pi^2 T} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_0^{\infty} e^{-\frac{m_{i,e} v_{\perp}^2}{2T(\xi)}} v_{\perp} dv_{\perp} \int_0^{2\pi} \frac{z_{\parallel}}{\omega_{ni,e}} d\varphi \int_0^{\infty} dt$$

$$\cdot e^{\frac{i\kappa_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{ni,e}} [\cos(\varphi - \omega_{ni,e} t) - \cos \varphi]} \delta \left(\xi - x + \frac{v_{\perp}}{\omega_{ni,e}} [\sin(\varphi - \omega_{ni,e} t) - \sin \varphi] \right) \psi(\xi)$$

Здесь оператор $\frac{d^0}{dx}$ действует на плотность $n_0(x) = n_{i,c}(x) e^{\frac{m_{i,c} g x}{T(x)}}$ и температуру $T(x)$, входящую в выражение для интегрального оператора. Уравнение (П.4) для K_x^2 легко получить, замечая, что для $\psi(x)$ в WKB-приближении

$$\hat{K}^{i,c} \psi(x) = e^{-(k_y^2 + k_x^2) z_{i,c}^2} I_0((k_y^2 + k_x^2) z_{i,c}^2) \equiv F(k_x^2 + k_y^2),$$

$I_0(x)$ - функция Бесселя от мнимого аргумента.

Если ограничиться случаем справедливости дрейфового приближения, то в общем уравнении следует заменить интегро-дифференциальный оператор \hat{K}^i на дифференциальный второго порядка, а $K^c = 1$

$$K^i - 1 \approx z_i^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} - K_x^2 \right)$$

и воспользоваться условием $\frac{\kappa_x g}{\omega_n} \ll \omega_n(x)$. Кроме того следует учесть, что в уравнение (П.4) входит частота ω_* в системе координат, где невозмущенное электрическое поле равно нулю $E_{0,x} \approx 0$ ($\omega_* = \omega - \frac{\kappa_x T}{m_i \omega_{ni} n_0} \frac{dn_0}{dx}$).

Вывод кинетического уравнения для взаимодействующих "дрейфовых" волн ($|k_z| V_{Ti} < \omega_* < |k_z| V_A$) сделаем для простоты в рамках двухжидкостной магнитной гидродинамики:

$$\frac{\partial \vec{V}_i}{\partial t} + (\vec{V}_i \nabla) \vec{V}_i = -\frac{1}{n_i m_i} \nabla(n_i T_i) + \frac{e}{m_i} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{V}_i H] \right) - \frac{div \vec{\pi}}{m_i n_i} \quad (\text{П.1})$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + div v n_i \vec{V}_i = 0 \quad (\text{П.2})$$

Здесь (П.1) - уравнение движения ионов поперек магнитного поля с учетом так называемой "магнитной вязкости" /22,29/

$$-\pi_{xx} = \pi_{yy} = \frac{n T_0}{2 \omega_n} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right); \quad \pi_{xy} = \pi_{yx} = \frac{n T_0}{2 \omega_n} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y} \right)$$

а (П.2) - уравнение непрерывности для ионов.

Систему (П.1)-(П.2) следует дополнить условиями потенциальности и квазинейтральности

$$\text{rot } \vec{E} = 0, \quad n_i = n_e \equiv n \quad (\text{П.3})$$

и уравнением движения ионов вдоль силовых линий магнитного поля

$$0 = -\nabla_z (n_e T_0) - e n_0 E_z \quad (\text{П.4})$$

Зависимость величин \vec{V}_i, \vec{E}, n_i в волне согласно /23/ представим в виде: x)

$$\psi = \sum_{\vec{k}} c_{\vec{k}}(t) (\psi_{\vec{k}} + \psi_{\vec{k}}') e^{i(\omega_{\vec{k}} t + \vec{k} \cdot \vec{z})} + \sum_{\vec{k}} c_{\vec{k}}(t) (\psi_{\vec{k}} + \psi_{\vec{k}}') e^{-i(\omega_{\vec{k}} + \vec{k} \cdot \vec{z})} \quad (\text{П.5})$$

x) На самом деле при строгом выводе кинетического уравнения для волн следовало бы пользоваться разложением не по плоским волнам, а по собственным волновым функциям $\psi(x) \exp\{ik_y y + ik_z z\}$ соответствующей линейной задаче устойчивости.

где $C_{\vec{k}} = C_{\vec{k}}^*$, $\psi_{\vec{k}} = \psi_{\vec{k}}^*$

Здесь к "вектору состояния" $\psi_{\vec{k}}$ добавлена ортогональная составляющая $\psi_{\vec{k}}'$, возникающая из-за нелинейного взаимодействия.

Подставляя (П.5) в (П.1)-(П.4) из условия разрешимости системы относительно $\psi_{\vec{k}}'$ получаем уравнение для амплитуды волны

$$\frac{\partial C_{\vec{k}}}{\partial t} = \sum_{\vec{k}' + \vec{k}'' = \vec{k}} V_{\vec{k}\vec{k}'\vec{k}''} e^{i(\omega_{\vec{k}'} + \omega_{\vec{k}''} - \omega_{\vec{k}})t} \quad (\text{П.6})$$

Полученное явное выражение матричного элемента очень громоздко и мы приводим лишь результат:

$$V_{\vec{k}\vec{k}'\vec{k}''} = \sqrt{\frac{8\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'}\omega_{\vec{k}''}}{n_0 T_0 \gamma_i^2 \left(\frac{n_0'}{n_0}\right)^2}} \frac{(k''^2 - k'^2)}{k_y} [\vec{k}'\vec{k}'']_z \gamma_i^3 \quad (\text{П.7})$$

При его выводе мы воспользовались условием нормировки:

$$\epsilon_{\vec{k}} = |C_{\vec{k}}|^2 \left\{ \frac{|E_{\vec{k}}|^2}{8\pi} + \frac{1}{2} m_i n_0 |\vec{v}_{\vec{k}}|^2 + \frac{T_0}{2n_0} |n_{\vec{k}}|^2 \right\} = |C_{\vec{k}}|^2 \omega_{\vec{k}}^2 \quad (\text{П.8})$$

и считали, что $k^2 \gamma_i^2 < 1$ (на самом деле энергия электрического поля в условиях квазинейтральности мала как $k^2 \gamma_D^2 = k^2 \frac{T}{4\pi n_0 e^2}$ по отношению к внутренней энергии "пульсаций плотности" и здесь мы ее пренебрегаем).

Матричный элемент $V_{\vec{k}\vec{k}'\vec{k}''}$ обладает необходимыми для существования кинетического уравнения свойствами симметрии (см./23/) в силу соотношений $\omega_{\vec{k}} = \omega_{\vec{k}'} + \omega_{\vec{k}''}$, $\vec{k} = \vec{k}' + \vec{k}''$. Поэтому, используя усреднение по фазам амплитуд волн $\arg C_{\vec{k}}^{(0)}$ и теорию возмущений (малый параметр $\omega_{\vec{k}}^{-1} \frac{\partial \ln |C_{\vec{k}}|^2}{\partial t}$) приходим к уравнению (П.45) для числа волн $N_{\vec{k}} = |C_{\vec{k}}(t)|^2$.

Литература

- /1/ Л.А.Арцимович, Управляемые термоядерные реакции, ФМ, 1960.
- /2/ А.А.Веденов, Е.П.Велихов, Р.З.Сагдеев, "Устойчивость плазмы", УФН, LXXII 701, 1961.
- /3/ В.В. Kadomtsev, A.V. Nedospasov, *J. of Nucl. Energy Part C*, 1, 230, 1960.
- /4/ Yuthrie A., Wakerling R.K. *The characteristics of Electrical Discharge in Magnetic Field*, N.J., 1949
- /5/ Б.Б.Кадомцев, ЖТФ, 43, 1688, 1962.
- /6/ Hoh F.J. *Rev. Mod. Phys.*, 34, 267, 1962
- /7/ А.А.Галеев, В.Н.Ораевский, Р.З.Сагдеев, препринт, Новосибирск, 1962 г.
- /8/ С.И.Брагинский, ЖТФ, 33, 645 (1957)
- /9/ Л.И.Рудаков, Ядерный синтез, 2, выпуск I (1962)
- /10/ С.С.Моисеев, Р.З.Сагдеев, ДАН, 146, 329, 1962
- /11/ W. Drummond, D. Pines Доклад на конференции по физике плазмы в Зальцбурге, 1961.
- /12/ Г.М.Заславский, С.С.Моисеев, препринт ИЯФ, г.Новосибирск, 1963.
- /13/ Б.Б.Кадомцев, ЖТФ, XXXI, 1209, 1961., A. Kuckes, *Phys. of Fluids*, 5, 363, 1962.
- /14/ Boeshoten and F. Schwizke, Доклад на конференции по физике плазмы в Зальцбурге, 1961
- /15/ А.В.Жаринов, Атомная энергия, 7, 215, 229 (1959)
- /16/ W. Stodiek, R.A. Ellis, J.У. Yorman, *Nuclear Fusion Supplement*, part 1, 193, 1962.
- /17/ R.W. Motley, *Nuclear Fusion, Supplement*, part 1, 199, 1962.
- /18/ M.N. Rosenbluth, N.A. Krall, N. Rostoker, *Nuclear Fusion, Supplement*, Part 1, S.75, 1962
- /19/ N.A. Krall, M.N. Rosenbluth, "Low-Frequency Stability of Non-Uniform Plasmas", препринт, 1962

- /20/ Л.И.Рудаков, Р.З.Сагдеев, ДАН, 138, 581 (1961). Доклад на конференции по физике плазмы, Зальцбург, сентябрь 1961.
- /21/ Б.Б.Кадоццев, А.К.Тимофеев, ДАН, 135, 581 (1962)
- /22/ А.Б.Михайловский, Л.И.Рудаков, препринт ИАЗ г.Москва, 1962.
- /23/ А.А.Галеев, В.И.Карпман, препринт ИЯФ, г.Новосибирск, 1962.
- /24/ А.А.Галеев, препринт НГУ, г.Новосибирск, 1962.
- /25/ А.А.Веденов, Е.П.Велихов, Р.З.Сагдеев, "Ядерный синтез" I, 82 (1962)
- /26/ А.А.Веденов, Е.П.Велихов, Р.З.Сагдеев, УФН, 73, 701 (1961)
- /27/ M.N. Rosenbluth, R. Sagdeev, Discussion of Plasma Stability Conf., Maxwell, 17-22 Sept. 1962.
- /28/ В.Н.Ораевский, автореферат ЭИЯ, г.Новосибирск, 1962.
- /29/ W. B. Thompson, Rept. Prog. in Phys., 24, 363 (1961)

Технический редактор Л.А.Панина

Подписано к печати 24/1-63 г.	МН 02623
Формат бумаги 60 x 92 ¹ /16. Печ. л.4,75. Уч-изд. л. 3,25	
Тираж 310	Заказ 19

Институт геологии и геофизики СО АН СССР
Новосибирск. Академгородок. Ротопринт.