Г. 15

Для служебного пользования

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

Галицкий В.М., Хейфец С.А.

РАДИАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ЭЛЕКТРОН-ЭЛЕКТРОННОМ СТОЛКНОВЕНИИ.

Гор. Новосибирск
1963 г.

Г. 15

Для служебного пользования

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

Галицкий В.М., Хейфец С.А.

РАДИАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ЭЛЕКТРОН-ЭЛЕКТРОННОМ СТОЛКНОВЕНИИ.

Гор. Новосибирск
1963 г.

А н н о т а ц и я

Рассмотрен опыт по рассеянию электронов на электронах в с.ц.п. Получены распределения по углу между рассеянными электронами и по разности энергий налетающих и конечных частиц.

I. Наличие в квантовой электродинамике инфракрасной расходимости приводит, как известно, к отсутствию в этой теории чисто упругих процессов. Рассмотрим, например, рассеяние в с.ц.п. двух электронов с начальными энергиями и импульсами $p_{1\mu}$ $(\varepsilon; \vec{p})$, $p_{2\mu}$ $(\varepsilon; -\vec{p})$ и конечными $q_{1\mu}$ $(q_{10}; \vec{q}_1)$; $q_{2\mu}$ $(q_{20}; \vec{q}_2)$; введем еще для удобства вектор Q_μ с компонентами $Q_0 = 2\varepsilon - q_{10} - q_{20}$; $\vec{Q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2$. Вероятность этого процесса представляется обычно в виде вероятности упругого рассеяния

$$dW = (2\pi)^4 W_0 \, d\Omega_0 \, dQ_0 \, d\vec{Q} \, \frac{\varepsilon^2}{2} \delta(\vec{Q}) \delta(Q_0) \tag{I}$$

плюс вероятность неупругих процессов с излучением одного и более квантов. Учет радиационных поправок приводит к обращению в нуль первого члена этой суммы (I). Это значит, что в квантовой электродинамике распределение по углу ($\pi - \theta$) между конечными электронами принципиально не может иметь вид δ-функций, а должно быть заменено на некоторое достаточно узкое распределение, которое только при $\alpha \to 0$ обращается в δ-функцию. То же можно сказать о энергетическом распределении по величине Q_0. При этом можно ожидать, что отклонение от δ-образных распределений при малых углах θ и малых разностях энергий Q_0, обусловлено излучением большого числа мягких квантов, в то время как далекие области распределений могут определяться излучением одиночных жестких квантов. Хотя указанные эффекты должны иметь место во всех электродинамических процессах, мы будем, для определенности, иметь в виду указанный выше опыт по рассеянию электронов при углах рассеяния $\vartheta_{расс} \gg m/\varepsilon$ (опыты со встречными пучками). Целью работы является определение начальных участков распределений, т.к. именно они определяют выбор апертуры регистрирующей аппаратуры в проектируемых опытах. Однако будет показано также, что полученные формулы с неплохой точностью описывают поведение функций распределения и в далеких областях.

2. Итак, мы хотим определить вероятность электрон-электронного столкновения, при котором происходит излучение произвольного числа мягких квантов. Полная вероятность, т.е. вероятность упругого рассеяния плюс вероятность рассеяния с излучением произвольного числа квантов, имеет вид:

$$dW = W_0 \delta(\vec{Q}) \delta(Q_0) d\vec{q}_1 d\vec{q}_2 + d\vec{q}_1 d\vec{q}_2 \int W_1 \delta(\vec{Q} + \vec{k}_1) \delta(Q_0 - \omega_1) d\vec{k}_1 + \\ + \ldots + d\vec{q}_1 d\vec{q}_2 \int W_n \delta(\vec{Q} + \vec{k}_1 + \ldots + \vec{k}_n) \delta(Q_0 - \omega_1 - \ldots - \omega_n) d\vec{k}_1 \ldots d\vec{k}_n + \ldots \tag{2}$$

где W_n - вероятность рассеяния с излучением n квантов. Введем параметр Δ, имеющий смысл границы энергии квантов, излучаемых классически. Тогда для квантов с энергией $\omega < \Delta$

$$W_n = W_0 \frac{1}{n!} (W_\kappa)^n \qquad (3)$$

где вероятность излучения классического кванта W_κ

$$W_\kappa = \frac{\alpha}{4\pi^2} \frac{1}{\omega} \left(\frac{p_{1\mu}}{p_1 \kappa} + \frac{p_{2\mu}}{p_2 \kappa} - \frac{q_{1\mu}}{q_1 \kappa} - \frac{q_{2\mu}}{q_2 \kappa} \right)^2 \qquad (4)$$

Вероятность излучения многих квантов с энергией $\omega > \Delta$ мала. Используя представление δ-функций через фурье-интеграл по параметрам ξ, η, можно переписать (2) в виде:

$$dW = W_0 \, d\vec{q}_1 d\vec{q}_2 \int d\vec{\xi} d\eta \, e^{i\vec{Q}\vec{\xi} + iQ_0\eta} \exp\left\{ \int_0 W_\kappa e^{i\vec{\kappa}\vec{\xi} - i\omega\eta} d\vec{\kappa} \right\} +$$
$$+ d\vec{q}_1 d\vec{q}_2 \int_\Delta^E W_1(q_1 q_2 \kappa_1) e^{i(\vec{Q}+\vec{\kappa}_1)\vec{\xi} + i(Q_0 - \omega_1)\eta} \exp\left\{ \int_0^\Delta W_\kappa e^{i\vec{\kappa}\vec{\xi} - i\omega\eta} d\vec{\kappa} \right\} d\vec{\kappa}_1 d\vec{\xi} d\eta \qquad (5)$$
$$+ \ldots$$

где не выписаны члены, соответствующие излучению двух и более неклассических квантов. С этой же точностью, представляя $\exp\{\int_0^\Delta W_\kappa\}$ в виде $\exp\{\int_0^E W_\kappa - \int_\Delta^E W_\kappa\}$ и разлагая по степеням $\{\int_\Delta^E W_\kappa\}$, можно записать (5) в виде:

$$dW = W_0 \, d\vec{q}_1 d\vec{q}_2 \int d\vec{\xi} d\eta \, e^{i\vec{Q}\vec{\xi} + iQ_0\eta} \exp\left\{ \int_0^E W_\kappa e^{i\vec{\kappa}\vec{\xi} - i\omega\eta} d\vec{\kappa} \right\} +$$
$$+ d\vec{q}_1 d\vec{q}_2 \int_0^E d\vec{\kappa}_1 [W_1 - W_0 W_\kappa] e^{i(\vec{Q}+\vec{\kappa}_1)\vec{\xi} + i(Q_0 - \omega)\eta} \exp\left\{ \int_0^E W_\kappa e^{i\vec{\kappa}\vec{\xi} - i\omega\eta} d\vec{\kappa} \right\} d\vec{\xi} d\eta \qquad (6)$$
$$+ \ldots$$

В интеграле по $\vec{\kappa}_1$ нижний предел можно положить равным нулю, т.к. при $\omega_1 < \Delta$ выражение в квадратных скобках обращается в нуль (см.(3)). Второй (и остальные невыписанные) члены соответствуют излучению неклассических квантов. Распределение при малых углах между рассеянными электронами должно определяться излучением мягких квантов, т.е. первым членом в (6). Учет радиационных поправок от виртуальных квантов приводит к тому, что показатель экспоненты заменяется на выражение вида

$$\int w_k \left(e^{i\vec{k}\vec{\xi} - i\omega\eta} - 1\right) d\vec{k} \tag{7}$$

Перейдем еще от $d\vec{q}_1 d\vec{q}_2$ к $d\vec{n}\, dQ_0\, d\vec{Q}$, направив единичный вектор $\vec{n}$ по импульсу одного из рассеянных электронов $\vec{q}_1$

$$d\vec{q}_1 d\vec{q}_2 = d\vec{n}\, dQ_0\, d\vec{Q}\, \frac{(\tilde{Q}_0^2 - Q^2)^2 \left(Q_\perp^2 + (\tilde{Q}_0 - Q_n)^2\right)}{8\,(\tilde{Q}_0 - Q_n)^4}$$

$$Q_n = \vec{Q}\vec{n}; \quad [\vec{Q}_\perp \vec{n}] = 0; \quad 0 < \tilde{Q}_0 < \infty; \quad \vec{Q}^2 \leq \tilde{Q}_0^2; \quad \tilde{Q}_0 \equiv 2E - Q_0 \tag{8}$$

Распределение по Q_0 дает энергетический разброс, т.е. отличие $2E - q_{10} - q_{20}$ от 0, распределение по $\vec{Q}$ есть угловое распределение. Поскольку ожидаемые распределения должны быть близки к распределениям в виде δ-функций, т.е. должны быть достаточно узкими, то в якобиане перехода можно приближенно положить $\tilde{Q}_0 \approx 2E$; $\vec{Q} \approx 0$, так что

$$d\vec{q}_1 d\vec{q}_2 = d\vec{n}\, dQ_0\, d\vec{Q}\, \frac{E^2}{2} \tag{9}$$

Сравнение (6),(9) с учетом (7) с вероятностью упругого рассеяния (I) показывает, что функция распределения имеет вид:

$$df = dQ_0\, d\vec{Q}\, \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{\xi}_\perp d\eta\, e^{i\vec{Q}_\perp \vec{\xi}_\perp + iQ_0\eta} \exp\left\{\int_0^E w_k \left(e^{i\vec{k}\vec{\xi}_\perp - i\omega\eta} - 1\right) d\vec{k}\right\} \tag{IO}$$

Это распределение при $\alpha \to 0$ ($w_k \to 0$) действительно имеет вид произведения δ-функций. Вклад от неклассических квантов (второй член в (6)) будет оценен позже.

3. Энергетическое распределение может быть найдено из (IO) интегрированием по $d\vec{Q}_\perp$, $Q^2 \leq (2E - Q_0)^2$. Тогда в качестве подинтегральной функции, зависящей от $\vec{\xi}$, получим функцию, отличную от нуля лишь в области $\xi \sim 1/(2E - Q_0)$. Это позволяет опустить $e^{i\vec{k}\vec{\xi}}$ в показателе экспоненты в (IO), т.к. существенные η порядка $Q_0^{-1} \gg (2E - Q_0)^{-1}$. Таким образом, энергетическое распределение определяется интегралом

$$d f_\epsilon = \frac{dQ_0}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\eta\, e^{iQ_0\eta} \exp\left\{ \int\limits_0^\epsilon d\vec{k}\left(e^{-i\omega\eta}-1\right) W_k \right\}$$

При вычислении интеграла, стоящего в экспоненте, можно считать $q_1 + q_2 = 0$. Для простоты будем рассматривать рассеяние на $\pi/2$, тогда $\vec{p}\vec{q} = 0$. Если оставлять лишь члены, дающие произведения логарифмов, то слагаемые в (4) пропорциональные m^2 можно опустить, а перекрестные члены (pq) записать как

$$\frac{}{\left[\omega^2\epsilon^2-(\vec{p}\vec{k})^2\right]\left[\omega^2\epsilon^2-(\vec{q}\vec{k})^2\right]} \approx \frac{1}{\omega^2\epsilon^2}\left(\frac{1}{\epsilon^2\omega^2-(\vec{p}\vec{k})^2}+\frac{1}{\epsilon^2\omega^2-(\vec{q}\vec{k})^2}\right) \qquad (11)$$

Тогда:

$$\int d\vec{k}\, W_k\left(e^{-i\omega\eta}-1\right) = -\frac{4\alpha L}{\pi}\left(\ln 2\epsilon|\eta| - i\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sign}\,\eta\right) \qquad (12)$$

$$L = \ln 4\epsilon^2/m^2$$

Возникающие при интегрировании интегральный синус и косинус $Ci(\epsilon\eta)$, $Si(\epsilon\eta)$ можно опустить, т.к. для характерных $\eta \sim (\quad Q_0 \quad)^{-1}$ аргумент $\epsilon\eta \gg 1$. Окончательно получим нормированную функцию распределения по энергии в виде:

$$d f_\epsilon = \frac{2\alpha L}{\pi}\left|\frac{Q_0}{2\epsilon}\right|^{-1+\frac{4\alpha L}{\pi}} \frac{dQ_0}{\epsilon}$$

$$0 < Q_0 < 2\epsilon \qquad (13)$$

4. Угловое распределение получается из (10) интегрированием по α. Будем искать сначала распределение в плоскости рассеяния, для чего полученное выражение следует еще проинтегрировать по dQ_2 ($\vec{Q}_2 \perp \vec{Q}_p$; $\vec{Q}_2 \perp \vec{n}$; Q_p – проекция $\vec{Q}_\perp$ на плоскость рассеяния). Тогда, упрощая полученное выражение так же, как в случае энергетического распределения, можно положить $\eta = \xi_2 = 0$ и для W_k использовать соотношение (11). После этого в показателе экспоненты будет стоять интеграл

$$J = \frac{\alpha}{\pi^2}\int\frac{d\vec{k}}{\omega}\left(e^{i\vec{k}\vec{\xi}_p}-1\right)\left(\frac{1}{\omega^2-(\vec{V}_p\vec{k})^2}+\frac{1}{\omega^2-(\vec{V}_q\vec{k})^2}\right) \qquad (14)$$

$$\vec{\xi}_p\vec{p} = \xi; \quad \vec{\xi}_p\vec{V}_q = 0$$

Он легко сводится к интегралу вида

$$J = -\frac{4\alpha}{\pi}\int_0^1 dx\,[\ln E\xi x - \mathrm{Ci}\,E\xi x]\left(\frac{1}{1-v^2x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+(m/E)^2}}\right)$$

Оценка последнего при $E\xi \gg 1$ приводит к выражению

$$J = -\frac{2\alpha}{\pi}\left(L\ln E\xi + \ln^2 E\xi\right) \qquad (15)$$

Используя (I5) найдем вид нормированной функции распределения

$$df_p = \frac{dQ_p}{|Q_p|}\,\frac{\alpha}{\pi}\left(L + \ln\left|\frac{E}{Q_p}\right|\right)\exp\left\{-\frac{2\alpha L}{\pi}\ln\left|\frac{E}{Q_p}\right| - \frac{\alpha}{\pi}\ln^2\left|\frac{E}{Q_p}\right|\right\} \qquad (16)$$

$$-E < Q_p < E; \quad |Q_p| > m$$

Распределение (I7) можно переписать как функцию угла θ между рассеянными электронами, поскольку при малых θ $|Q_p| = E\theta$. При $\theta \gg m/E$

$$df_p = \frac{2\alpha L}{\pi}\,\frac{d\theta}{\theta^{1-\frac{2\alpha L}{\pi}}} \qquad (17)$$

Распределение (I7) нормировано на интеграле $0 < \theta < 1$. Интересно отметить, что члены, пропорциональные большому логарифму L, появились в (I6) от члена $(\omega^2 - (\vec{v}_p\vec{k})^2)^{-1}$ в (I4), т.е. они обусловлены излучением начальных электронов. Это можно было ожидать, т.к. излучение направлено, в основном, по движению электронов и, следовательно, большой поперечный (относительно движения рассеянных электронов) импульс может быть унесен только фотонами, излученными начальными электронами. По этой же причине угловое распределение в плоскости, перпендикулярной плоскости рассеяния, должно быть очень узким, т.к. импульс, уносимый в этом направлении квантами, излученными начальными и конечными электронами, очень мал и равен, по порядку величины, $k_\perp \sim \omega\theta_k \sim \omega m/E$. Для того, чтобы найти явный вид этого распределения, проинтегрируем (I0) по $dQ_0\,dQ_p$ и упростим выражение так же, как и раньше. Возникающий в показателе экспоненты интеграл имеет вид (I4), но вместо ξ_p стоит ξ_2, $\vec{\xi}_2\vec{v}_p = 0$; $\vec{\xi}_2\vec{v}_q = 0$

Оценка его приводит к выражениям:

$$J = -\frac{4\alpha}{\pi} \ln^2 E\xi \qquad \text{при } \frac{E}{m} \gg E\xi \gg 1$$

$$J = -\frac{4\alpha}{\pi}\left(2\ln\frac{E}{m}\ln E\xi - \ln^2\frac{E}{m}\right) \qquad \text{при } E\xi \gg \frac{E}{m} \gg 1$$

Это дает для функции распределения по углу в плоскости, перпендикулярной плоскости рассеяния:

$$df_z = \frac{dQ_z}{|Q_z|}\,\frac{4\alpha}{\pi}\ln\left(\frac{E}{m}\right)\exp\left\{-\frac{4\alpha}{\pi}\left[2\ln\frac{E}{m}\ln\left|\frac{E}{Q_z}\right| - \ln^2\left|\frac{E}{m}\right|\right]\right\} \qquad |Q_z| < m$$

$$df_z = \frac{dQ_z}{|Q_z|}\,\frac{4\alpha}{\pi}\ln\left|\frac{E}{Q_z}\right|\exp\left\{-\frac{4\alpha}{\pi}\ln^2\left|\frac{E}{Q_z}\right|\right\} \qquad |Q_z| > m \tag{18}$$

$$-E < Q_z < E$$

При малых углах $|Q_z| = E\theta$. Распределение (18) получается нормированным на единицу. Легко определить из него, что 77% электронов рассеиваются на угол, соответствующий Q_z меньшим m, и уже 90% электронов рассеиваются на угол, меньший $5\,m/E$ или $1{,}5^0$ (цифры приведены для энергии начальных электронов равной 100 Мэв). В плоскости рассеяния распределение гораздо более вытянуто. Введем величину q, обозначающую долю электронов, рассеянных на угол, меньший θ_q. Из (17) легко найти, что

$$\theta_q = (q)^{\pi/2\alpha L} \tag{19}$$

Используя эту формулу, легко найти, что при 100 Мэв 50% распределения ($q = 0{,}5$) лежит в пределах 1", а 90% распределения в пределах 10^0. При 500 Мэв аналогичные цифры равны 10" и $13{,}5^0$. Ниже приведена таблица зависимости $df_p/d\theta$ от угла между рассеянными электронами, составленная по формуле (17). Энергия начальных электронов принята равной 100 Мэв.

Т.1. Угловое распределение электронов в плоскости рассеяния.

θ	$20'$	$40'$	1^0	5^0	10^0	15^0	20^0
$df_p/d\theta$	4,5	2,4	1,56	0,30	0,15	0,10	0,07

Формулы (I3),(I7),(I8) для энергетического и угловых распределений получены при рассеянии электронов на $\pi/2$. Если угол рассеяния $\theta_{расс} < \pi/2$ то они сохраняют свою структуру, но $L = \ln 4E^2/m^2$ заменяется на

$$L = \ln \frac{2\left(s_0 + \sqrt{s_0^2 + \gamma^2 c_0^2}\right)}{s_0 - v + \sqrt{\gamma^2 c_0^2 + (s_0 - v)^2}} ;$$

$$\gamma = m/E ; \quad s_0 = \sin\theta_{расс} ; \quad c_0 = \cos\theta_{расс}$$

Это утверждение остается справедливым до углов рассеяния $\theta_{расс} \gg m/E$

5. Выясним теперь, какой вклад могут дать неклассические("жесткие") кванты. Поскольку члены, имеющие вид $d\omega/\omega$ в(6) сокращаются, то вклад жестких квантов может привести к добавкам к функции распределения по энергии типа $\lambda \frac{\alpha}{\pi} \, dQ_0$, где λ - некоторая постоянная. Сравнение с функцией распределения (I3), обусловленной излучением мягких квантов, показывает, что последнее всегда будет определяющим при малых $2E - q_{10} - q_{20}$. Величина поправки к (I3) от жестких квантов зависит от значения постоянной λ . Для ее определения можно воспользоваться точной формулой Гарибяна Г.М./I/ для сечения рассеяния электрона на электроне с излучением одного кванта. Проведенные таким образом оценки показывают, что полученное выше распределение (I3) должно быть справедливо с точностью порядка 30% до $Q_0 \sim 0{,}5E$. То же можно сказать и об угловом распределении (I7) Ниже в качестве иллюстрации сравниваются данные для энергетического распределения по величине $K = Q_0 = 2E - q_{10} - q_{20}$, найденные по формуле (I3) и с помощью численного интегрирования формулы Гарибяна (рассеяние на $\pi/2$; энергия начальных электронов I00 Мэв). Вычислены $\ln\left[137 \frac{df}{d(Q_0/E)}\right]$

Т.2. Сравнение энергетических распределений.

Q_0/E		5.I0^{-3}	I0^{-2}	0,I	0,I5	0,2	0,3	0,4	0,5
$\ln \frac{1}{\alpha} \frac{df}{d\frac{Q_0}{E}}$	ф.(I3)	7,35	6 73	4,68	4,33	4,07	3,73	3,46	3,26
	Числен счет	7,38	6,68	4,39	4,00	3,73	3,3	3,I4	3,I2

Значения функций в Т.2 отличаются в среднем в I,35 раза, что,примерно, соответствует ожидаемой точности. Как видно из таблицы,формула(I3) достаточно хорошо определяет вид функции распределения и при больших значениях аргумента.

В заключение авторы благодарят Байера В.Н. и Сидорова В.А. за ценные обсуждения, Сынаха В.С. и Тумачек О. за помощь при проведении численного счета.

Литература

/I/ Гарибян Г.М. Изв.АН Арм.ССР У, № 3, 1952 г.