ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

Препринт.

В.И. КАРПМАН.

К ТЕОРИИ СЛАБОТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ.

Гор. Новосибирск
1963 г.

А Н Н О Т А Ц И Я

Квазилинейная теория слаботурбулентной плазмы /I-3/ дополняется учетом взаимодействия между волнами /4,5/. Результаты применяются к затуханию электронных лэнгмюровских колебаний вследствие взаимодействия волн, а также к установившемуся турбулентному состоянию, возникающему при протекании продольного тока в разреженной плазме, находящейся в магнитном поле; вычисляется энергия поля колебаний, коэффициент аномальной диффузии и поперечная проводимость в этом состоянии.

ON THE THEORY OF WEAKLY TURBULENT PLASMA

V.I.KARPMAN

A B S T R A C T .

Non-linear kinetic theory of the plasma oscillations with mode-coupling is considered. The results are applied to the mode-coupling damping of electron oscillations and also to the stationary turbulent state arising from the two-stream ion-cyclotron instability.

§ I. ВВЕДЕНИЕ.

В релаксационных процессах, происходящих в плазме без столкновений, существенную роль играют нелинейные эффекты. Часть этих эффектов учитывается в квазилинейной теории /I-3/, где рассматривается обратное влияние колебаний на функцию распределения частиц. Однако, при этом пренебрегают нелинейным взаимодействием между волнами, которое в ряде случаев может существенно влиять на релаксацию колебаний. Взаимодействие между гармониками исследовалось ранее в /4/ для плазмы в сильном магнитном поле ($H^2/8\pi \gg nT$) и в /5/ для произвольной прозрачной среды. Однако общий метод, изложенный в /5/, применим и для случая слабой "непрозрачности", когда декременты (инкременты) волн достаточно малы ($\gamma \ll \omega$), что позволяет рассматривать взаимодействие колебаний между собой и с плазмой с единой точки зрения и оценить более точно, чем это делалось ранее /3/, роль взаимодействия колебаний в релаксационных процессах.

В настоящей работе получена общая система кинетических уравнений для волн и частиц, отличающаяся от основных уравнений квазилинейной теории дополнительными членами, описывающими влияние взаимодействия волн на релаксационные процессы в бесстолкновительной плазме. При этом мы ограничились лишь членами второго порядка относительно энергии колебаний. Члены третьего порядка оценивались ранее в /3/; величина их при не очень больших амплитудах колебаний оказывается малой по сравнению с членами второго порядка.

Взаимодействие между колебаниями в рассматриваемом порядке приводит к эффектам двух типов. Если выполняются так называемые распадные условия

$$\omega_{\vec{p}} + \omega_{\vec{q}} = \omega_{\vec{p}+\vec{q}} \qquad (I.I)$$

приводящие к возможности превращения двух волн в одну и наоборот, то происходит непрерывная перекачка энергии колебаний в область сильного поглощения, что приводит к быстрой релаксации колебаний.

Однако эффекты второго порядка могут играть существенную роль в процессе бесстолкновительной релаксации колебаний и тогда, когда условие (I.I) не выполняется; а именно, в ряде случаев играют заметную роль эффекты поглощения вынужденных колебаний, которые согласно динамическому уравнению (2.3) возбуждаются при взаимодействии свободных колебаний даже тогда, когда уравнениям (I.I) удовлетворить нельзя.[x)] В §§ 4,5 настоящей работы рассмотрены примеры, когда эффекты поглощения вынужденных колебаний играют основную роль.

---

x) Вынужденные колебания играют роль, аналогичную виртуальным частицам в квантовой теории поля.

§ 2. СИСТЕМА КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ВОЛН И ЧАСТИЦ.

В этом параграфе для простоты изложения мы будем рассматривать плазму без магнитного поля. Однако, кинетические уравнения для волн (2.4) сохраняют свой вид и в общем случае колебаний плазмы в магнитном поле. Что касается уравнения для функции распределения частиц (2.12), то оно в принципе просто обобщается на случай магнитного поля. Однако ввиду громоздкости общих выражений соответствующие уравнения проще получать в каждом конкретном случае. Применение общей теории к одному из типов колебаний плазмы в магнитном поле имеется в § 5.

Следуя /4,5/, запишем выражение для электрического поля плазменных колебаний в виде:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\sum_{\beta=\vec{k},\vec{k}_-}\vec{E}_p(t)e^{i(\vec{p}\vec{r}-\omega_p t)}$$

$$\vec{E}_{k_-}=\vec{E}^*_k, \quad \vec{k}_-=-\vec{k}, \quad \omega_{k_-}=-\omega_k, \quad \omega_k>0 \tag{2.1}$$

где ω_k - действительная часть частоты, $\vec{E}_k(t)$ - амплитуда, зависимость которой от времени определяется, во-первых, инкрементом γ_k (для лэнгмюровских колебаний γ_k имеет вид

$$\gamma_k=\frac{\pi}{2}k\left(\frac{\omega}{k}\right)^3\frac{df}{dv}\Big|_{v=\frac{\omega}{k}}, \tag{2.2}$$

где вместо невозмущенной функции стоит медленно меняющаяся средняя функция распределения /I-3/), а, во-вторых, нелинейным взаимодействием между гармониками. "Динамическое" уравнение для $E_p(t)$ имеет вид /4,5/:

$$\frac{dE_p}{dt}=\gamma_p E_p+\sum_{p',p''}V_{pp'p''}E_{p'}E_{p''}e^{-i(\omega_{p'}+\omega_{p''}-\omega_p)t}+\sum_{p',p'',p'''}V_{pp'p''p'''}E_{p'}E_{p''}E_{p'''}e^{-i(\omega_{p'}+\omega_{p''}+\omega_{p'''}-\omega_p)t} \tag{2.3}$$

$$V_{pp'p''}=0 \text{ при } \vec{p}\neq\vec{p}'+\vec{p}'', \quad V_{pp'p''p'''}=0 \text{ при } \vec{p}\neq\vec{p}'+\vec{p}''+\vec{p}''';$$

$$V_{pp'p''}=V_{pp''p'}, \quad V_{p_-p'_-p''_-}=V^*_{pp'p''} \quad \text{и т.д.} \tag{2.3a}$$

где матричные элементы выражаются через функцию распределения (см.ниже). В турбулентной плазме фазы амплитуд $E_p(t)$ меняются гораздо быстрее их модулей и коррелируют между собой в течение очень малого времени по сравнению с характерным временем изменения $N_p(t) \sim |E_p(t)|^2$. Поэтому при вычислении dN_p/dt можно усреднить по фазам всех E_p в данный момент. Проведя это усреднение так же, как и в /4/, получим кинетическое уравнение для волн

$$\frac{dN_p}{dt} = 2\gamma_p N_p + N_p \Big\{ 8 \sum_{p'p''}' N_{p'} \mathcal{P} \frac{\mathrm{Im}\,(V_{pp'p''} V_{p''p'_-p})}{\omega_{p'} + \omega_{p''} - \omega_p} + 6\,\mathrm{Re} \sum_{p'}' N_{p'} V_{pp_-p'p'_-} \Big\} + \tag{2.4}$$
$$+ 4\pi \sum_{p'p''}' \left\{ N_{p'} N_{p''} |V_{pp'p''}|^2 + 2 N_p N_{p'} \mathrm{Re}\,(V_{pp'p''} V_{p''p'_-p}) \right\} \delta(\omega_{p'} + \omega_{p''} - \omega_p).$$

где $\mathcal{P}$ - символ главного значения. (2.4) отличается от соответствующего уравнения (2.I6) работы /4/ наличием первых двух членов, описывающих испускание и поглощение волн "фоном", при котором меняется средняя функция распределения плазмы. Третий же член описывает нелинейное взаимодействие между гармониками, не связанное с их поглощением или испусканием. В прозрачной среде $\mathrm{Im}\,V_{pp'p''}$, $\mathrm{Re}\,V_{pp_-p'p'_-}$ исчезают и (2.4) переходит в кинетическое уравнение, полученное в /4/.

Рассмотрим теперь функцию распределения плазмы $F(\vec{r}, \vec{v}, t)$. Будем искать ее в виде

$$F(\vec{r}, \vec{v}, t) = f(\vec{v}, t) + \sum_{\vec{p}}' e^{i\vec{p}\vec{r}} \Phi_{\vec{p}}(\vec{v}, t) \tag{2.5}$$

$$\Phi_p(\vec{v}, t) = \frac{e}{im} E_p F_p(\vec{v}, t) + \sum_{\vec{p}'+\vec{p}''=\vec{p}} \left(\frac{e}{im}\right)^2 E_{p'} E_{p''} F_{pp'p''} e^{-i(\omega_{p'}+\omega_{p''})t} +$$
$$+ \sum_{\vec{p}'+\vec{p}''+\vec{p}'''=\vec{p}}' \left(\frac{e}{im}\right)^3 E_{p'} E_{p''} E_{p'''} F_{pp'p''p'''} e^{-i(\omega_{p'}+\omega_{p''}+\omega_{p'''})t} \tag{2.6}$$

где f, F_p, $F_{pp'p''}$, $F_{pp'p''p'''}$ т.д. - медленно меняющиеся функции времени. Подставляя (2.5) в кинетическое уравнение для функции распределения F и усредняя по фазам амплитуд поля E_p, получим:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{e}{m} \sum_{\vec{p}} \overline{\frac{\partial \Phi_p}{\partial \vec{v}} \vec{E}_{\vec{p}}^{\,*} e^{i\omega_p t}} \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial t} + i(\vec{p}\vec{v}) \Phi_p = -\frac{e}{m} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \vec{E}_p e^{-i\omega_p t} - \frac{e}{m} \sum_{\vec{p}'+\vec{p}''=\vec{p}} \vec{E}_{\vec{p}'} \frac{\partial \Phi_{\vec{p}''}}{\partial \vec{v}} e^{-i(\omega_{p'}+\omega_{p''})t} \tag{2.8}$$

Подставляя (2.6) в (2.8), будем иметь

$$F_p = \frac{1}{\omega_p - \vec{p}\vec{v} + i\gamma}\, \frac{\vec{p}}{p}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$$

$$F_{pp'p''} = \frac{1}{\omega_{p'} + \omega_{p''} - \vec{p}\vec{v} + i\varepsilon}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{\vec{p}'}{p'}\frac{\partial}{\partial\vec{v}}\left(\frac{1}{\omega_{p''} - \vec{p}''\vec{v} + i\gamma}\,\frac{\vec{p}''}{p''}\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}\right) + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{\vec{p}''}{p}\frac{\partial}{\partial\vec{v}}\left(\frac{1}{\omega_{p'} - \vec{p}'\vec{v} + i\gamma}\,\frac{\vec{p}'}{p'}\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}\right)\right] + \qquad (2.9)$$

$$\left. + \frac{m}{e} V_{pp'p''}\,\frac{1}{\omega_p - \vec{p}\vec{v} + i\gamma}\,\frac{\vec{p}}{p}\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}\right\} ; \quad F_{pp'p''} = 0 \text{ при } \vec{p} \neq \vec{p}' + \vec{p}''$$

и т.д.

Согласно /5/ матричные элементы $V_{pp'p''}$ и т.д., фигурирующие в кинетическом уравнении для волн, выражаются через соответствующие функции в (2.6). Так, например,

$$V_{pp'p''} = \sum_{j=e,i} \frac{e_j}{m_j}\,\omega_{0j}^2 \int \frac{\vec{p}\vec{v}}{p}\, F^{(j)}_{pp'p''}(\vec{v})\, d\vec{v}$$

$$V_{pp'p''p'''} = -i \sum_{j=e,i} \left(\frac{e_j}{m_j}\right)^2 \omega_{0j}^2 \int \frac{\vec{p}\vec{v}}{p}\, F^{(j)}_{pp'p''p'''}(\vec{v})\, d\vec{v} \qquad (2.10)$$

где ω_{0j} - плазменная частота, суммирование производится по сортам частиц. Правая часть (2.10) пропорциональна коэффициенту электропроводности второго порядка $\sigma_{pp'p''}$, определяющему ток во втором приближении по E ($j^{(2)}_p = \sum \sigma_{pp'p''} E_{p'} E_{p''} e^{-i(\omega_{p'}+\omega_{p''})t}$), где $j^{(2)}_p$ - фурье-компонента тока второго порядка). Используя уравнение непрерывности $\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}\vec{j} = 0$ и учитывая продольность колебаний, выражение (2.10) легко преобразовать к виду, весьма удобному в ряде конкретных случаев

$$V_{pp'p''} = \sum_{j=e,i} \frac{e_j}{m_j}\,\omega_{0j}^2\, \frac{\omega_{p'} + \omega_{p''}}{p} \int F^{(j)}_{pp'p''}(\vec{v})\, d\vec{v} \qquad (2.10a)$$

Подставим теперь (2.6) в (2.7) и удержим члены, квадратичные по N_p. При этом следует иметь в виду, что член с $\overline{E^*_p E_{p'} E_{p''}}$ можно считать равным нулю только с точностью до членов третьего порядка по E_p. В следующем порядке он отличен от нуля и дает вклад $\sim N_p^2$ x). Для получения его значения поступим следующим образом. Продифференцировав $\overline{E_p^* E_{p'} E_{p''}}$ по времени и воспользовавшись динамическим уравнением (2.3), получим

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{E_p^* E_{p'} E_{p''}}\right) = 2\left(V_{\underline{p} p' p''} N_{p'} N_{p''} + V_{p' \underline{p}'' p} N_p N_{p''} + V_{p'' p \underline{p}'} N_p N_{p'}\right) \exp i(\omega_{p'} + \omega_{p''} - \omega_p) t$$

Интегрируя обе части по времени от $-\infty$ до t, будем иметь

$$\overline{E_p^* E_{p'} E_{p''}} = 2\,\frac{\exp i(\omega_{p'} + \omega_{p''} - \omega_p)t}{i(\omega_{p'} + \omega_{p''} - \omega_p + i\varepsilon)}\left(V_{\underline{p} p' p''} N_{p'} N_{p''} + V_{p' \underline{p}'' p} N_p N_{p''} + V_{p'' p \underline{p}'} N_p N_{p'}\right) \tag{2.II}$$

Таким образом, при усреднении правой части (2.7) с интересующей нас степенью точности, мы получим вклады от первого и второго членов в (2.6). Вклад от третьего члена $\sim N_p^2$ обращается в нуль в силу (2.II). В итоге получим следующее уравнение для $f(\vec{v},t)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \sum_p{}' |E_p|^2 \frac{\vec{p}}{p} \frac{\partial}{\partial \vec{v}}\left[\frac{\gamma_p}{(\omega_p - \vec{p}\vec{v})^2 + \gamma_p^2} \frac{\vec{p}}{p} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\right] + 2\left(\frac{e}{m}\right)^3 \mathrm{Im} \sum_{\vec{p}' + \vec{p}'' = \vec{p}}{}' \frac{\vec{p}}{p} \frac{\partial F_{p p' p''}}{\partial \vec{v}} \frac{V^*_{p p' p''} N_{p'} N_{p''} + 2 V_{p'' \underline{p}' p} N_p N_{p'}}{\omega_{p'} + \omega_{p''} - \omega_p + i\varepsilon} - \mathrm{Re}\left(3i\left(\frac{e}{m}\right)^4 \sum_{p'}{}' \frac{\vec{p}}{p} \frac{\partial F_{p \underline{p} p' \underline{p}'}}{\partial \vec{v}} N_p N_{p'}\right) \tag{2.I2}$$

(2.I2) и (2.4) вместе с (2.9) составляют полную систему уравнений квазилинейной теории, дополненной учетом взаимодействия волн второго порядка. Квадратичные по N_p члены в (2.I2) и (2.4) становятся существенными, когда инкремент (2.2) становится достаточно малым из-за квазилинейной релаксации (образование "плато" /I-3/). Если частотный спектр волн таков, что выполняются "распадные" условия (I.I), то члены, стоящие при δ-функции в (2.4) приводят к перекачке энергии в область малых фазовых скоростей, где поглощение волн велико. Если же распадным условиям удовлетворить нельзя (например, для электронных лэнгмюровских колебаний), то существенную роль играет второй член в (2.4) и соответствующий ему в (2.I2). Ниже будет показано, что он также может приводить к сильному поглощению волн частицами с малыми скоростями $v \ll v_T$ и соответствующему нагреванию плазмы, причем этот эффект гораздо существеннее тех эффектов взаимодействия волн, которые оценивались в /3/.

§ 3. БАЛАНС ЭНЕРГИИ.

Система кинетических уравнений для волн и частиц должна удовлетворять закону сохранения энергии, т.е.

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(W_\kappa + W_f\right) = 0 \ , \tag{3.1}$$

где W_κ - кинетическая энергия частиц, а W_f - энергия поля волн:

$$W_\kappa = \sum_{j=e,i}' \frac{n_j m_j}{2} \int v^2 f^{(j)}(\vec{v})\, d\vec{v} \tag{3.2}$$

$$W_f = \frac{1}{8\pi} \sum_{\vec{p}}' |E_{\vec{p}}|^2 \tag{3.3}$$

Для проверки (3.I) разобьем dW_κ/dt на две части, связанные с двумя членами в (2.I2)

$$\frac{dW_\kappa}{dt} = \sum_j' \frac{n_j m_j}{2} \int v^2 \frac{\partial f^{(j)}}{\partial t} d\vec{v} = \frac{dW_\kappa^{(1)}}{dt} + \frac{dW_\kappa^{(2)}}{dt} \tag{3.4}$$

$$\frac{dW_\kappa^{(1)}}{dt} = \sum_{\vec{p}}' \frac{1}{8\pi} |E_p|^2 \sum_j' \omega_{0j}^2 \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\gamma_p}{(\omega_p - pu)^2 + \gamma_p^2} f_u'\right] du \tag{3.5}$$

$$\frac{dW_\kappa^{(2)}}{dt} = \operatorname{Im} \sum_{\vec{p}', \vec{p}''}' \frac{V^*_{pp'p''} N_{p'} N_{p''} + 2 V_{p''p'-p} N_p N_{p'}}{\omega_{p'} + \omega_{p''} - \omega_p + i\varepsilon} \sum_j' \frac{1}{4\pi} \frac{e_j}{m_j} \omega_{0j}^2 \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \frac{\partial F_{pp'p''}}{\partial u} du \tag{3.6}$$

$$u = \frac{\vec{p}\vec{v}}{p}$$

причем, как и в (2.I2) мы, для простоты, ограничились случаем продольных колебаний без магнитного поля. Обобщение на случай магнитного поля тривиально. Тогда действительная и мнимая части частоты ω_p, γ_p определяются из дисперсионного уравнения

$$\varepsilon_{\parallel}(\omega_p, p) = 1 + \sum_j' \frac{\omega_{0j}^2}{\omega'} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{u}{\omega' - pu} \frac{\partial f}{\partial u} = 0 \tag{3.7}$$

где через ω' обозначена комплексная частота

$$\omega' = \omega_p + i\gamma_p \tag{3.8}$$

Умножая(3,7) на ω' и приравнивая действительную и мнимую части, получим уравнение для γ_p :

$$\gamma_p = \sum_j \omega_{oj}^2 \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{\gamma_p}{(\omega_p - pu)^2 + \gamma_p^2} f'_u \, du \tag{3.9}$$

Интегрируя (3.5) по частям и сравнивая с (3.9), получим

$$\frac{d\overset{(1)}{W_k}}{dt} = -\sum_p \frac{1}{8\pi} |E_p|^2 \cdot 2\gamma_p \tag{3.10}$$

Рассмотрим теперь (3.6). Применяя интегрирование по частям и используя (2.10), будем иметь:

$$\frac{d\overset{(2)}{W_k}}{dt} = -\frac{1}{8\pi} \sum_{p', p''} \Big\{ 8\,\mathcal{P} \frac{\operatorname{Im}(V_{pp'p''} V_{p''p'_-p})}{\omega_{p'} + \omega_{p''} - \omega_p} N_p N_{p'} + \tag{3.11}$$

$$+ 4\pi \left[|V_{pp'p''}|^2 N_{p'} N_{p''} + 2\operatorname{Re}(V_{pp'p''} \cdot V_{p''p'_-p}) N_p N_{p'} \right] \delta(\omega_p - \omega_{p'} - \omega_{p''}) +$$

$$+ 6 \operatorname{Re} V_{pp_-p'p'_-} N_p N_{p'} \Big\}$$

Складывая (3.10) и (3.11), получим баланс энергии:

$$\frac{dW_k}{dt} = \frac{d\overset{(1)}{W_k}}{dt} + \frac{d\overset{(2)}{W_k}}{dt} = -\frac{1}{8\pi} \sum_p \frac{dN_p}{dt} = -\frac{dW_f}{dt} \tag{3.12}$$

§ 4. ЗАТУХАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ В БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ БЕЗ МАГНИТНОГО ПОЛЯ.

Рассмотрим теперь в качестве примера релаксацию электронных колебаний в достаточно разреженной плазме, где столкновениями можно полностью пренебречь, причем ширину волнового пакета будем считать достаточно малой ($\Delta k \ll k$), а энергию волн большой по сравнению со средней кинетической энергией частиц. Тогда можно указать два этапа процесса релаксации колебаний. Сначала образуется "плато" в резонансной области скоростей $v \sim \omega/k \gg v_T$ (v_T - тепловая скорость электронов). Эта стадия процесса описывается обычной квазилинейной теорией /I-3/. К моменту образования плато энергия волн все еще будет большой, по сравнению с тепловым шумом. Если ролью кулоновских столкновений в поглощении волн можно пренебречь, то релаксация будет определиться вторым членом в (2.4) (третий обращается в нуль из-за δ-функции)

Мнимая часть матричных элементов, вычисленная с помощью (2.I0)и(2.9), определяется полувычетами двух типов. Это, во-первых, члены, пропорциональные $\partial f/\partial v$ при $v=\omega/k$ и обращающиеся в нуль после образования плато. Во-вторых, некоторые из матричных элементов ($V_{kk'-k''}$, $V_{k''k'-k}$) содержат мнимые члены, пропорциональные f'_v при $v=\frac{\omega_{k'}-\omega_{k''}}{k'-k''}\sim v_T\frac{v_T k}{\omega_0}\ll v_T$, благодаря которым затухание колебаний не исчезает и после прекращения квазилинейной релаксации. Члены такого типа имеют простой физический смысл. В результате нелинейного взаимодействия собственные колебания плазмы (I) порождают вынужденные колебания с комбинационными частотами $\omega_{k'}\pm\omega_{k''}$ и волновыми векторами $k'\pm k''$, эффективно взаимодействующие с частицами со скоростями

$$v^{\pm}_{res}=\frac{|\omega_{k'}|\pm|\omega_{k''}|}{|k'|\pm|k''|} \qquad (4.I)$$

При знаке минус в (4.I) величина v_{res} оказывается малой, а соответствующая производная f'_v достаточно большой. Поэтому взаимодействие вынужденных колебаний с группой частиц, имеющих скорости вблизи v^-_{res} , приводит к поглощению волн.

Вычисляя матричные элементы $V_{pp'p''}$ с помощью (2.I0а) и (2.9) и подставляя их в (2.4), получим уравнение

$$\frac{dN_k}{dt}=N_k\sum_{k'}\alpha_{kk'}N_{k'}, \qquad (4.2)$$

где $\alpha_{kk'}$ и при $\Delta k\ll k$ слабо зависят от k' и приближенно равны:

$$\alpha_{kk'}\sim\frac{\pi e^2}{m^2}\frac{v_T^2k^2}{\omega_0^3}\left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2 f'_{v=u}\,,\quad u\simeq v_T\frac{v_T k}{\omega_0}\,,\quad f'_{v=u}\simeq-\frac{k}{\sqrt{\pi}\,v_T\omega_0} \qquad (4.3)$$

Благодаря этому можно написать

$$\frac{dW_f}{dt}\simeq-\beta W_f^2\,,\quad \beta\sim\frac{v_T k_0^3}{mn\omega_0^2}\left(\frac{\Delta k}{k_0}\right)^2 \qquad (4.4)$$

где W_f – полная плотность энергии турбулентных пульсаций, а k_0 – среднее волновое число. При $W_f/nT\ll 1$ величину β можно считать не зависящей от времени. Тогда решение (4.4) будет иметь вид:

$$W_f(t)\simeq\frac{W_{0f}}{1+\beta W_{0f}t}$$

где W_{0f} - энергия колебаний к моменту образования плато, равная по порядку величины первоначальной энергии колебаний. Таким образом, характерное время релаксации равно

$$\tau \sim (B W_{0f})^{-1} \sim \left(\frac{v_f}{v_T}\right)^3 \left(\frac{k_0}{\Delta k}\right)^2 \frac{nT}{W_{0f}} \omega_0^{-1}, \quad v_f = \frac{\omega_0}{k_0} \tag{4.5}$$

Оценка нелинейных эффектов, обусловленных взаимодействием между волнами, производилась ранее в /3/. В этой работе, однако, не учитывались члены, определяющиеся матричными элементами $V_{pp'p''}$ (т.е. второе слагаемое в (2.3)). Между тем именно эти члены играют основную роль в случае ленгмюровских колебаний. В результате время τ, полученное в /3/, оказывается в $(v_f/v_T)^2$ раз больше, чем в (4.5).

§ 5. ТУРБУЛЕНТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ ОТНОСИТЕЛЬНО ИОНОВ ВДОЛЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ. АНОМАЛЬНАЯ ДИФФУЗИЯ.

В этом параграфе рассматривается установившееся турбулентное состояние, возникающее при движении электронов относительно ионов вдоль магнитного поля в разреженной плазме с не очень отличающимися друг от друга T_e и T_i. Драммонд и Розенблют показали /6/, что в этом случае имеет место неустойчивость, связанная с возбуждением продольных ионных колебаний с частотой $\sim \Omega_i = eH/Mc$ (здесь и в дальнейшем M - масса ионов, m -электронов), распространяющихся под большими углами к магнитному полю, причем эта неустойчивость появляется при сравнительно малых дрейфовых скоростях v_d (т.е. скоростях движения электронов относительно ионов). Возникающие колебания приводят к аномальной диффузии плазмы поперек магнитного поля, не связанной с кулоновскими столкновениями.

Оценивая с помощью квазилинейной теории /I-3/ предельную амплитуду колебаний, Драммонд и Розенблют получили следующее выражение для коэффициента аномальной диффузии:

$$\mathcal{D}_\perp^0 \sim \rho_e^2 \Omega_e \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^2 \left(\frac{v_d}{v_e}\right)^6, \quad \rho_e = \frac{v_e}{\Omega_e} \tag{5.I}$$

где $\rho_e^2 \Omega_e$ - коэффициент диффузии Бома. Оба коэффициента имеют одинаковую зависимость от магнитного поля $(\sim H^{-1})$, однако $\mathcal{D}_\perp^0$ оказывается значительно меньшим коэффициента Бома, поскольку $v_d/v_e \ll 1$.

В связи с этим результатом необходимо заметить, что формула (5.I) относится не к стационарному, а к метастабильному состоянию, характеризующемуся максимальной амплитудой волн (и наступающему после установления "плато" на функции распределения скоростей электронов вдоль магнитного поля). Это состояние существует ограниченное время, так как согласно результатам, полученным выше, взаимодействие между волнами должно привести в конечном итоге к затуханию колебаний даже при полном пренебрежении столкновениями.

С другой стороны известно /I-2/, что достаточно редкие столкновения, несущественные для поглощения колебаний, должны приводить к частичной "максвеллизации" функции распределения электронов в резонансной области, т.е. в области скоростей, равных фазовым скоростям (вдоль магнитного поля) возбуждаемых колебаний. Благодаря этому вместо "плато" установится такое распределение скоростей, при котором инкременты волн не исчезают и должно наступить стационарное турбулентное состояние, при котором излучение волн будет компенсироваться их поглощением вследствие нелинейного взаимодействия.

В этом параграфе вычисляются энергия колебаний, коэффициент аномальной диффузии и проводимость поперек магнитного поля в этом установившемся состоянии. Оказывается, что даже при сравнительно малых частотах кулоновских столкновений (и, разумеется, меньших тех частот, при которых начинает сказываться их влияние на поглощение), амплитуда установившихся колебаний значительно больше, чем в квазистационарном состоянии, исследованном в /6/ при полном пренебрежении столкновениями и взаимодействием волн, а коэффициент диффузии по порядку величины близок к коэффициенту Бома.

<u>I. Влияние столкновений на инкремент</u>. Дисперсионное уравнение для возбуждаемых волн имеет вид /6/:

$$\omega_k - \Omega_i = \Omega_i \frac{T_e}{T_i} \Gamma_1\left(\frac{\alpha_k^2}{2}\right); \quad \gamma_k = \frac{\pi}{2} \Gamma_1\left(\frac{\alpha_k^2}{2}\right) v_e^2 \frac{\partial f}{\partial v_z}\Big|_{v_z = \frac{\omega_k}{k}} \cdot \frac{T_e}{T_i} \Omega_i \tag{5.2}$$

$$\alpha_k = \frac{k_\perp \Omega_i}{v_i} = k_\perp \rho_i, \quad \Gamma_1(x) = e^{-x} I_1(x) \tag{5.3}$$

где ω_k - частота, γ_k - инкремент волны, $k_\perp$, k_z и $v_\perp$, v_z - компоненты волнового вектора и скорости поперек и вдоль магнитного поля, соответственно, v_i, v_e - тепловые скорости ионов и электронов (у нас тепловые скорости определяются как $\sqrt{2T/m}$, т.е. больше в $\sqrt{2}$ раз соответствующих величин в /6/). $I_1(x)$- функция Бесселя мнимого аргумента. $\Gamma_1(x)$ имеет весьма широкий максимум, достигаемый при x = I,5 и равный 0,2, так что максимальный инкремент имеют волны, у которых $\alpha_k \sim 1$, т.е. $\rho_i k_\perp \sim 1$ (поперечная длина волны порядка ионного ларморовского радиуса). Что касается продольных компонент волнового вектора, то для них имеет место соотношение:

$$\frac{v_i}{v_d} \lesssim \frac{k_z}{k_\perp} \ll 0,2\,\frac{T_e}{T_i} \qquad (5.4)$$

из которого,во-первых, следует, что их можно считать малыми по сравнению с $k_\perp$; во-вторых, (5.4) определяет порядок критической величины дрейфовой скорости v_d , при которой возникает неустойчивость. (При $T_e/T_i < 2$, $v_e > v_d \gtrsim 5 v_i$ /6/). $f(v_z)$,определяющая инкременты волн (5.2), является функцией распределения скоростей электронов вдоль магнитного поля,т.е

$$f(v_z) = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^\infty dv_\perp\, v_\perp\, F^{(e)}(v_z, v_\perp, \varphi) \qquad (5.5)$$

($F^{(e)}$ - полная электронная функция распределения). В начальной стадии роста волн, когда их амплитуда еще достаточно мала, эту функцию будем считать максвелловской

$$f(v_z) = f^0(v_z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, v_e}\, \exp\left[-(v-v_d)^2/v_e^2\right] \qquad (5.6)$$

Соответственно, начальный инкремент равен

$$\gamma_k^0 = \sqrt{\pi}\,\Omega_i \frac{T_e}{T_i}\, \Gamma_1\!\left(\frac{\alpha_k^2}{2}\right) \frac{v_d}{v_e} \approx 0{,}3\,\Omega_i \frac{T_e}{T_i}\,\frac{v_d}{v_e} \qquad (5.7)$$

При достаточно больших амплитудах волны начинают искажать функцию распределения в "резонансной" области скоростей

$$0 < v_z \lesssim v_d \qquad (5.8)$$

Это искажение тем больше, чем меньше частота кулоновских столкновений.При полном отсутствии последних функция распределения $f(v_z)$ в резонансной области стремится принять форму "плато". Кинетическое уравнение, описывающее обратное влияние волн на функцию распределения с учетом столкновений имеет вид /I,2/

$$\frac{\partial f(v_z,t)}{\partial t} = \pi\left(\frac{e}{m}\right)^2 \sum_{\vec p} |E_z(p)|^2 \frac{\partial}{\partial v_z}\, \delta(\omega - p_z v_z) \frac{\partial f}{\partial v_z} - \\ - \int St\{F\}\, v_\perp\, dv_\perp\, d\varphi \qquad (5.9)$$

Первый член в правой части описывает влияние волн; $St\{F\}$ - обычный интеграл столкновений Ландау

$$St\{F\} = \frac{2\pi e^4 L}{m^2}\frac{\partial}{\partial v_i}\int\left(F\frac{\partial F'}{\partial v'_k} - F'\frac{\partial F}{\partial v_k}\right)\frac{u^2\delta_{ik} - u_i u_k}{u^3}\,d\vec{v}'$$

$$u_i = v_i - v_i' \tag{5.10}$$

(L - кулоновский логарифм). Поскольку обратное влияние колебаний приводит к изменению функции распределения лишь в узкой резонансной области (5.8), причем существенно меняется ее производная, а не величина, то вместо F' в (5.10) можно, как и в /1,2/, подставить максвелловскую функцию распределения, благодаря чему $St\{F\}$ линеаризуется. Кроме того, можно выполнить интегрирование по поперечным компонентам скорости, полагая зависимость функции распределения от этих компонент максвелловской. В результате уравнение (5.9) принимает вид:

$$\frac{\partial f(v_z,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_z}\left(\mathcal{D}_v\frac{\partial f}{\partial v_z}\right) + \nu\frac{\partial}{\partial v_z}\left[\frac{\partial f}{\partial v_z}v_e^2 + 2(v_z - v_d)f\right] \tag{5.11}$$

где

$$\mathcal{D}_v = \pi\left(\frac{e}{m}\right)^2\sum_{\vec{p}}\frac{p_z^2}{p^2}E_p^2\,\delta(\omega - p_z v_z) \tag{5.12}$$

$$\nu = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\nu_{\mathcal{D}}\,, \quad \nu_{\mathcal{D}} = \frac{8\pi L e^4 n}{m^2 v_e^3} \tag{5.13}$$

($\nu_{\mathcal{D}}$ - эффективная частота электрон-электронных столкновений при средней тепловой скорости v_e , определенная Спитцером (см./7/ (5.22)). При получении второго члена в (5.11) мы использовали малость v_d/v_e .

Величина $\mathcal{D}_v$, определенная в (5.12), имеет смысл коэффициента диффузии электронов в пространстве скоростей благодаря резонансному взаимодействию с волнами. $\mathcal{D}_v$ обращается в нуль вне резонансной области, ширина которой, согласно (5.8), $\sim v_d$.

Удобно положить

$$\mathcal{D}_v = \alpha\,\theta(v)\,, \quad \alpha = \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{D}_v\,dv = \pi\left(\frac{e}{m}\right)^2\sum_{\vec{p}}\frac{p_z}{p^2}E_p^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\theta(v)\,dv = 1 \tag{5.14}$$

Поскольку $\theta(v)$ отлично от нуля лишь в резонансной области, то можно считать, что $\theta(v) \sim v_d^{-1}$. На основании (5.4) можно положить $\rho_z/\rho \sim v_i/v_d$, $\rho \sim \rho_\perp \sim \Omega/v_i$. В итоге получим

$$\mathcal{D}_v \sim 8\pi^2 \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{v_i^2}{v_d^2 \Omega_i} W \qquad (v \le v_d)$$

$$\mathcal{D}_v = 0 \qquad (v > v_d) \tag{5.15}$$

где W - плотность энергии волн

$$W = \frac{1}{8\pi} \sum_p |E_p|^2 \tag{5.16}$$

Полагая в (5.11) $\partial f/\partial t = 0$, получаем значение производной функции распределения в установившемся состоянии

$$\frac{\partial f}{\partial v_z} = -\left(1 + \frac{\mathcal{D}_v}{\nu v_e^2}\right)^{-1} \frac{2(v_z - v_d)}{v_e^2} f^0(v_z) \tag{5.17}$$

В правой части (5.17) вместо $f(v_z)$ стоит максвелловская функция распределения (5.6), поскольку, как уже отмечалось выше, можно считать, что в результате обратного действия волн заметно меняется лишь производная функции распределения в резонансной области, а не ее величина. Подставляя (5.17) в выражение для инкремента (5.2), получим:

$$\gamma_k = \frac{\gamma_k^0}{1 + \frac{\mathcal{D}_v}{\nu v_e^2}} \tag{5.18}$$

где γ_k^0 - инкремент линейной теории, определяемый формулой ~~(2.6)~~ (5.7). Если частота столкновений превышает $\mathcal{D}_v/v_e^2$, то инкремент γ_k близок к γ_k^0 (в этом случае производная функция распределения (5.17) близка к максвелловской). В обратном случае очень малых частот столкновений имеем:

$$\gamma_k \approx \nu \frac{v_e^2}{\mathcal{D}_v} \gamma_k^0 \tag{5.19}$$

2. <u>Вычисление матричных элементов.</u> Для определения $V_{pp'p''}$, $V_{pp'p''p'''}$ нужно сначала найти $F_{pp'p''}$, $F_{pp'p''p'''}$. Подставляя разложения (2.5), (2.6) в общее кинетическое уравнение для функции распределения

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial F}{\partial \vec{r}} + \frac{e}{Mc}\left[\vec{v}\vec{H}_0\right]\frac{\partial F}{\partial \vec{v}} = -\frac{e}{M}\vec{E}\frac{\partial F}{\partial \vec{v}}$$

и учитывая при этом, что амплитуды поля E_p также зависят от времени, согласно (2.3), получим следующие уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{p}\vec{v}-\Omega_i\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\Phi_{pp'p''}=-i\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{p}'}{p'}\frac{\partial F_{p''}}{\partial\vec{v}}+\frac{\vec{p}''}{p''}\frac{\partial F_{p'}}{\partial\vec{v}}\right)+\frac{M}{e}V_{pp'p''}F_p\right]\times$$
$$\times\exp i\left[\vec{p}\vec{r}-(\omega_{p'}+\omega_{p''})t\right] \tag{5.20}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{p}\vec{v}-\Omega_i\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\Phi_{pp'p''p'''}=-i\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\vec{p}'}{p'}\frac{\partial F_{p-p'p''p'''}}{\partial\vec{v}}+\frac{\vec{p}''}{p''}\frac{\partial F_{p-p''p'p'''}}{\partial\vec{v}}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\vec{p}'''}{p'''}\frac{\partial F_{p-p'''p''p'}}{\partial\vec{v}}\right)+\frac{2M}{3e}\sum_q\left(F_{pp'q}V_{qp''p'''}+F_{pp''q}V_{qp'p'''}+F_{pp'''q}V_{qp'p''}\right)$$
$$\left.+i\left(\frac{M}{e}\right)^2V_{pp'p''p'''}F_p\right]\exp i\left[\vec{p}\vec{r}-(\omega_{p'}+\omega_{p''}+\omega_{p'''})t\right] \tag{5.21}$$

$$\Phi_{pp'p''}=F_{pp'p''}\exp i\left[\vec{p}\vec{r}-(\omega_{p'}+\omega_{p''})t\right]$$
$$\Phi_{pp'p''p'''}=F_{pp'p''p'''}\exp i\left[\vec{p}\vec{r}-(\omega_{p'}+\omega_{p''}+\omega_{p'''})t\right]$$

В качестве функций первого порядка F_p используем приближенные выражения:

$$F_p^{(i)}(\vec{v},t)=-\frac{2}{v_i^2}J_1(\lambda_p)\frac{\omega_p F(\vec{v},t)}{p(\omega_p-p_z v_z-\Omega_i+i\delta)}\exp i(\lambda_p\sin\varphi-\varphi) \tag{5.22}$$

$$\lambda_p=\frac{p_\perp v_\perp}{\Omega_i} \tag{5.22а}$$

которые просто получаются из точных формул для этих функций, приведенных в /6/ (Приложение), если учесть, что

$$\omega_p-\Omega_i\gg p_z v_z\ ,\quad \omega_p-\Omega_i\ll\Omega_i \tag{5.22б}$$

Решая (5.20) в лагранжевых координатах и подставляя это в (2.10а), получим:

$$V_{pp'p''}=\omega_{0i}^2\frac{\omega_{p'}+\omega_{p''}}{p}\left[\frac{e}{M}B_{pp'p''}-A_{pp'p''}V_{pp'p''}\right] \tag{5.23}$$

где

$$A_{pp'p''}=4\pi\frac{\omega_p}{p v_i^2}\int_{-\infty}^{\infty}dv_z\int_0^{\infty}dv_\perp v_\perp F(\vec{v})\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{J_1(\lambda)J_n(\lambda)J_{n+1}(2\lambda)}{(\omega_p-p_z v_z-\Omega)(\omega_{p'}+\omega_{p''}-n\Omega-p_z v_z)} \tag{5.24}$$

$$B_{pp'p''} = -\frac{2\pi p'_\perp \omega_{p''}}{v_i^2 p' p''} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dv_z \int\limits_0^{\infty} dv_\perp \frac{F(\vec{v})}{\omega_{p''} - p''_z v_z - \Omega_i} \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega_{p'} + \omega_{p''} - n\Omega_i - p_z v_z} \Big[\frac{(n+1)\alpha''}{\alpha + \alpha''} J'_1(\lambda'') J_n(\lambda) J_{n+1}(\lambda + \lambda'') -$$

$$- \frac{2(n+1)}{\alpha + \alpha''} \frac{v_\perp}{v_i} J_1(\lambda'') J_n(\lambda) J_{n+1}(\lambda + \lambda'') + \qquad (5.25)$$

$$+ J_1(\lambda'') J_n(\lambda) J'_{n+1}(\lambda + \lambda'') \Big] + \text{симм.}$$

$$\alpha = \alpha_p = \frac{p_\perp v_i}{\Omega_i}, \quad \alpha' = \alpha_{p'}, \quad \alpha'' = \alpha_{p''}$$

Здесь $F(\vec{v}) = (\pi v_i^2)^{-3/2} \exp(-v^2/v_i^2)$, $J_n(\lambda)$ – функция Бесселя, $\lambda = \lambda_p, \lambda' = \lambda_{p'}, \lambda'' = \lambda_{p''}$, где λ_p определено в (5.22а). Симметризация в (5.25) означает замену p'' на p'. При обходе полюсов в (5.24),(5.25) необходимо считать, что у всех частот имеется малая мнимая добавка в верхней полуплоскости.

В (5.23) опущены члены, отвечающие вкладу электронов в матричные элементы, они меньше написанных в p_z/p раз. Явное аналитическое выражение для величин $A_{pp'p''}$, $B_{pp'p''}$ получить довольно трудно из-за сложности интегрирования по $v_\perp$ в (5.24),(5.25). Можно, однако, сделать простые оценки, правильно определяющие порядок этих величин. Поскольку под интегралами по $v_\perp$ входят экспоненты, обрезающие их при $v_\perp \sim v_i$, то можно считать, что

$$\lambda_p = \frac{p_\perp v_\perp}{\Omega_i} \lesssim \frac{p_\perp v_i}{\Omega_i} \sim 1 \qquad (5.26)$$

Поэтому интегрэты по $v_\perp$ можно вычислять приближенно, разлагая функции Бесселя в ряг. Для получения правильного порядка величины достаточно ограничиться первым членом разложения, т.е. писать $J_n(\lambda) \sim \lambda^n/2^n n!$ (легко проверить, что учет следующих членов разложения не меняет порядка величины). При оценке сумм в (5.24),(5.25) следует рассмотреть два случая в зависимости от знаков $\omega_{p'}$, $\omega_{p''}$. Если эти знаки одинаковы, то достаточно огра-

$$W \sim 10^{-3}\left(\frac{M}{e}\right)^2 \Omega_i^2 v_i^2 \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^2 \frac{v_d}{v_i}$$

$$D_v \sim 10^{-1}\Omega_i v_e^2 \Big/ \left(\frac{v_e}{v_d}\right) \qquad \nu \gg D_v/v_e^2 \qquad (5.41)$$

В обратном предельном случае будем иметь

$$W \sim 10^{-2}\frac{Mm}{e^2}\Omega_i^2 \left(\frac{\nu}{\Omega_i} v_d^3 v_e\right)^{1/2} \frac{T_e}{T_i}$$

$$D_v \sim \Omega_i v_e^2 \left(\frac{\nu}{\Omega_i}\cdot\frac{v_e}{v_d}\right)^{1/2}\frac{T_e}{T_i} \qquad \nu \ll D_v/v_e^2 \qquad (5.42)$$

Пространственный коэффициент диффузии D_r выражается через D_v следующим образом /6/:

$$D_r = \rho_e^2 \left(\frac{v_d}{v_e}\right)^3 \frac{D_v}{v_i^2}, \quad \rho_e = \frac{v_e}{\Omega_e} \qquad (5.43)$$

В случае (5.4I) получим:

$$D_r \sim 10^{-1}\left(\frac{v_d}{v_e}\right)^2 \rho_e^2 \Omega_e \left(\frac{T_e}{T_i}\right) \qquad (5.44)$$

Эта величина имеет такую же зависимость от магнитного поля, как и коэффициент диффузии Бома; она значительно больше, чем (5.I), т.е. коэффициент диффузии, полученный в /6/. Однако легко убедиться, что эта формула применима при слишком больших частотах столкновений ($\nu \sim \gamma_0 (M/m)^{1/2}$) когда последние уже начинают влиять на поглощение волн.

В случае (5.42) пространственный коэффициент диффузии имеет вид:

$$D_r \sim \rho_e^2 \Omega_e \left(\frac{\nu}{\Omega_i}\right)^{1/2} \left(\frac{v_d}{v_e}\right)^{5/2} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^2 \qquad (5.45)$$

Можно считать, что эта формула правильно передает порядок величины коэффициента диффузии в установившемся состоянии от самых малых частот столкновений до $\nu \sim \gamma^0 (M/m)^{1/2}$, когда столкновения уже начинают влиять на поглощение (в этом случае (5.45) переходит в (5.43)). Заметим, наконец, что коэффициент диффузии (5.45) будет больше, чем (5.I) при

$$\nu > \left(\frac{v_d}{v_e}\right)^7 \Omega_i \sim \left(\frac{v_d}{v_e}\right)^6 \gamma_0 \frac{T_i}{T_e} \tag{5.46}$$

Мы видим, что даже очень редкие столкновения приводят к существенному возрастанию $\mathcal{D}_z$.

Определим теперь проводимость поперек магнитного поля, обусловленную возникновением турбулентности ($\sigma_\perp$). Вводя эффективную частоту столкновений электронов с волнами ν^* , будем иметь:

$$\nu^* \sim \frac{\mathcal{D}_z}{\rho_e^2} \sim \Omega_e \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^2 \left(\frac{v_d}{v_e}\right)^{5/2} \left(\frac{\nu}{\Omega_i}\right)^{1/2} \tag{5.47}$$

$$\sigma_\perp \sim \frac{ne^2}{m\nu^*} \sim \frac{1}{4\pi} \frac{\omega_{oe}^2}{\Omega_e} \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^2 \left(\frac{\Omega_i}{\nu}\right)^{1/2} \left(\frac{v_e}{v_d}\right)^{5/2} \tag{5.48}$$

Соответствующее аномальное поперечное сопротивление $\sigma_\perp^{-1}$ оказывается при этом значительно больше аномального продольного сопротивления.

В заключение выражаю глубокую благодарность Р.З.Сагдееву за многочисленные плодотворные обсуждения.

Литература

1. А.А.Веденов, Е.П.Велихов, Р.З.Сагдеев. "Ядерный синтез",I, 82, 1961

2. А.А.Веденов. Атомная энергия 13, 5, 1962.

3. W. Drummond, D. Pines Материалы конференции по физике плазмы. Зальцбург, 1961, доклад № 134.

4. А.А.Галеев, В.И.Карпман. ЖЭТФ, 44, 592, 1963.

5. В.И.Карпман. ЖЭТФ, 44, 1307, 1963

6. W. Drummond, M. Rosenbluth. Phys. Fluids, 5, 1507, 1962

7. Л.Спитцер. Физика полностью ионизованного газа. И.Л. 1957.

Ответственный за выпуск С.С.Моисеев
подписано к печати II.У.63 г. № МН02721
формат бумаги 270 x 190, тираж 200
заказ № 023 Бесплатно

Отпечатано на ротапринте в Институте ядерной физики СО АН СССР.

ным эффектом в § 4, где, однако, основной вклад вносят члены с $V_{kk'k''}$)

3. Установившееся состояние. Аномальная диффузия и аномальная проводимость поперек магнитного поля. Полагая в (5.36) $dN_k/dt = 0$ и заменяя γ_k и $Re V_{kk-k'k'}$ их средними значениями (в соответствии со степенью точности выражения (5.33)), получим приближенное уравнение для энергии волн в установившемся состоянии:

$$\frac{\overline{\gamma_k^0}}{1 + \frac{\mathcal{D}_\sigma}{\nu v_e^2}} + aW = 0 \tag{5.37}$$

где γ_k^0 - определяется формулой (5.7), W - энергия электрического поля колебаний:

$$\overline{\gamma_k^0} \sim \pi \Omega_i \frac{T_e}{T_i} \overline{\Gamma_1\left(\frac{\rho_1^2 v_i^2}{\Omega_i^2}\right)} \frac{v_d}{v_e} \tag{5.38}$$

$$a \sim 10\pi \overline{V_{pp-p'p'}} \sim \frac{10}{v_i^2}\left(\frac{e}{M}\right)^2 \overline{(\omega_p - \omega_{p'})^{-1}} \tag{5.39}$$

$$W = \frac{1}{8\pi} \sum' |E_p|^2 = \frac{1}{8\pi} \sum_p N_p .$$

При получении (5.39) из (5.33) мы учли, что

$$\overline{(\omega_p - \omega_{p'})} \sim \Omega_i \frac{T_e}{T_i} \overline{\Gamma_1'\left(\frac{\rho_1^2 v_i^2}{\Omega_i^2}\right)\left(\frac{\rho_1 v_i}{\Omega_i}\right)^2} \sim 0{,}1\, \Omega_i \frac{T_e}{T_i} \tag{5.40а}$$

$$\overline{v_i |\rho_z - \rho_z'|} << 0{,}1\, \Omega_i \overline{\left(\frac{\rho_1 v_i}{\Omega_i}\right)} \frac{T_e}{T_i} \tag{5.40б}$$

Оценки (5.40) следуют из (5.2)-(5.4).

Коэффициент диффузии в пространстве скоростей $\mathcal{D}_\sigma$ связан с энергией волн W соотношением (5.15):

$$\mathcal{D}_\sigma \sim 8\pi^2 \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{v_i^2}{v_d^2 \Omega_i} W \tag{5.15}$$

При достаточно большой частоте столкновений знаменатель в (5.37) равен единице. Поэтому в которое нужно подставить решение уравнения (5.21). Решая это уравнение в лагранжевых координатах, получим после простых, но довольно громоздких вычислений:

$$V^{(3)}_{pp\_p'p'\_} \sim -\frac{i}{v_i^2}\left(\frac{e}{M}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_0^{(i)}(v_z)\, dv_z}{\omega_p - \omega_{p'} - (p_z - p'_z)v_z + i\varepsilon}; \quad F_0^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}v_i} e^{-\frac{v_z^2}{v_i^2}} \tag{5.32}$$

$$Re\, V^{(3)}_{pp\_p'p'\_} \sim -\frac{1}{v_i^3}\left(\frac{e}{M}\right)^2 \frac{\exp\left\{-\left[\frac{\omega_p - \omega_{p'}}{(p_z - p'_z)v_i}\right]^2\right\}}{p_z - p'_z} \tag{5.33}$$

При этом мы учли (5.26),(5.22б) и пренебрегли членами $\sim p_z/p \sim v_i/v_d$. Выражение (5.32) написано для случая, когда ω_p и $\omega_{p'}$ имеют одинаковые знаки. При этом из дисперсионного уравнения (5.2) следует, что

$$\omega_p - \omega_{p'} = \Omega_i \frac{T_e}{T_i}\left[\Gamma_1\left(\frac{p_\perp^2 v_i^2}{\Omega_i^2}\right) - \Gamma_1\left(\frac{p_\perp'^2 v_i^2}{\Omega_i^2}\right)\right] \tag{5.34}$$

Поскольку $\Gamma_1(x)$ - медленно меняющаяся функция, то $\omega_p - \omega_{p'}$ - вообще говоря мало.

Если ω_p и $\omega_{p'}$ имеют разные знаки, то выражение для $V_{pp\_p'p'\_}$ отличается от (5.32) тем, что знаменатель подынтегрального выражения имеет вид:

$$|\omega_p| + |\omega_{p'}| - 2\Omega_i - (|p_z| + |p'_z|)v_i \tag{5.35}$$

Поскольку $|\omega_p| - \Omega_i \gg p_z v_z$ (см.(5.22б)), то в этом случае матричный элемент значительно меньше, чем (5.33) и соответствующие члены в кинетическом уравнении можно не учитывать. Итак, кинетическое уравнение (2.4) принимает вид:

$$\frac{dN_k}{dt} = 2\gamma_k N_k + 6 N_k \sum_{k'} Re\, V_{kk\_k'k'\_} N_{k'} \tag{5.36}$$

где $\omega_k > 0$, $\omega_{k'} > 0$ и γ_k - инкремент линейной теории, определяемый формулой (5.18). Второй член в (5.36) имеет простой физический смысл: он описывает поглощение волн, возникающее благодаря взаимодействию вынужденных колебаний с комбинационными частотами $\omega_k - \omega_{k'}$ с ионами, находящимися в резонансе с ними (т.е. имеющими скорость $v_z = \frac{\omega_k - \omega_{k'}}{k_z - k'_z}$; ср. с аналогичничиться членами с $n = 2$ при $\omega > 0$ и $n = -2$ при $\omega < 0$. В случае противоположных знаков нужно оставить член с $n = 0$. Это следует из того, что все $|\omega_p| \sim \Omega_i$. Поступая таким образом получим x)

$$A_{kk'k''} \sim \frac{\alpha_k^6}{16 v_i^2} \frac{\omega_k}{k(\omega_k - \Omega_i)^2}, \quad A_{kk'_-k''} \sim \left(\frac{\omega_{k''} - \omega_{k'}}{k_z v_i} - i \right) \frac{\omega_k \alpha_k^2}{k k_z (\omega_k - \Omega_i) v_i^3} \tag{5.27}$$

$$B_{kk'k''} \sim \frac{\Omega_i^2 \alpha_k^2 \alpha_{k'} \alpha_{k''}}{64 v_i^4 k' k'' (\omega_k - \Omega_i)^2} \left[(\alpha_k + \alpha_{k'})^2 + (\alpha_k + \alpha_{k''})^2 \right]$$

$$B_{kk'_-k''} \sim \left(\frac{\omega_{k''} - \omega_{k'}}{k_z v_i} - i \right) \frac{\Omega_i \omega_{k'} \alpha_{k'} \alpha_{k''} \alpha_k^2}{8 v_i^5 k_z k' k'' (\omega_{k''} - \Omega_i)} \tag{5.28}$$

Из (5.27) получаем, что

$$\frac{\omega_{0i}^2 \Omega_i}{p} A_{pp'p''} \gg 1 \tag{5.29}$$

Поэтому левую часть в (5.23) можно считать равной нулю (легко видеть, что это не что иное, как результат квазинейтральности). В итоге будем иметь

$$V_{pp'p''} \simeq \frac{e}{2M} \frac{B_{pp'p''}}{A_{pp'p''}} \tag{5.30}$$

Подставляя сюда (5.27), (5.28), получаем, что с принятой степенью точности (т.е. в пренебрежении членами $\sim p_z/p$) матричные элементы $V_{pp'p''}$ оказываются вещественными и поэтому не вносят вклада в (2.4).

Оценим теперь матричные элементы $V_{pp_-p'p'_-}$, фигурирующие в (2.4). Для этого мы можем сразу воспользоваться условием квазинейтральности

$$\int F_{pp'p''p'''}(\vec{v})\, d\vec{v} = 0 \tag{5.31}$$

---

x) Напомним, что волновые векторы, отвечающие положительной частоте, обозначаются через k, а отрицательной – через k_-:
$p = k \ (\omega_p > 0)$, $p = k_- \ (\omega_p < 0)$ (см. (2.I)).